This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Phys 209.07 3

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

LEHRBUCH

DER

EXPERIMENTALPHYSIK

VON

ADOLPH WÜLLNER.

SECHSTE AUFLAGE.

ERSTER BAND.

ALLGEMEINE PHYSIK UND AKUSTIK.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

ALLGEMEINE PHYSIK

UND

AKUSTIK.

SECHSTE AUFLAGE

BEARBEITET VON

A. WÜLLNER UND A. HAGENBACH.

MIT 333 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN UND FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

wp 209.07.3

HARVARD COLLEGE
JUN 2 1914
LIBRARY.
Treadwell fund
(I)

Verfasser und Verleger behalten sich das Recht der Übersetzung
in alle modernen Sprachen vor.

Vorwort.

Bei dem sechsten Erscheinen der Experimentalphysik bedarf es eines Vorwortes wohl kaum mehr; die Haltung ist genau die frühere, sie sucht den neuern Arbeiten gerecht zu werden, welche bis zum Jahre 1906 berücksichtigt sind. Nur auf eine, wie wir glauben, nicht unwesentliche Verbesserung nach der historischen Seite möge hingewiesen werden: bei den Zitaten der einzelnen Arbeiten haben wir die Jahreszahl ihres Erscheinens hinzugefügt, so daß hierdurch eine Übersicht der historischen Entwicklung der Physik gegeben ist.

Die Form der Zitate ist die in den Annalen der Physik angewandte, z. B. Ann. de chim. et de phys. Bd. VII. 4. Série. S. 24. 406 ist jetzt: Ann. de chim. et de phys. 7. (4.) p. 24. 406. 1866.

Aachen, den 6. Juli 1907.

A. Wüllner.

Inhaltsverzeichnis

zum ersten Bande der Experimentalphysik.

Allgemeine Physik und Akustik.

Einleitung.

	Seite
Aufgabe der Physik	1
Methode der Physik	2
Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen	9
Die in der Physik gebräuchlichen Maße	11
Einige Meßinstrumente	13
Der Komparator	13
Die Teilmaschine	15
Der Nonius	21
Das Sphärometer	22
Das Kathetometer	24
Der Theodolith	29
Einige Sätze aus der Differential- und Integralrechnung	31
Differentiation	31
Differentiale der wichtigsten Funktionen	33
Differentiation zusammengesetzter Funktionen	36
Differentiation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen	37
Zweiter Differentialquotient	39
Integration	41

Erster Teil.

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

Erster Abschnitt.

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

Erstes Kapitel.

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§ 1. Bewegung: Definition der gleichförmigen und ungleichförmigen Bewegung; Geschwindigkeit, Beschleunigung	47
§ 2. Kräfte; Hilfsmaß derselben	50
§ 3. Dasein und Richtung der Schwere	52

Seite
§ 4 Atwoods Fallmaschine 52
§ 5. Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft; gleichmäßig beschleunigte Bewegung 55
§ 6 Fundamentalgesetz der Kraftwirkung 59
§ 7 Das Kräfteparallelogramm 61
Bewegung auf der schiefen Ebene 63
§ 8 Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte wirken 64
§ 9 Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung; Wurfbewegung 66
§ 10 Maß der Kraft und Masse 71
Absolutes Maßsystem 73
Dimensionen der abgeleiteten Maße 76
§ 11 Bewegungsgröße: Antrieb der Kraft; lebendige Kraft und Arbeit; Prinzip von der Erhaltung der Arbeit 79
§ 12. Bewegung infolge inkonstanter Kräfte und Maß derselben 82

Zweites Kapitel.

Von der drehenden Bewegung.

§ 13 Entstehung der drehenden Bewegung 84
§ 14 Die statischen Momente 85
Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten 89
§ 15 Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen 90
§ 16 Mittelpunkt paralleler Kräfte; Mittelkraft 94
§ 17 Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen 98
§ 18 Schwerpunkt 101
§ 19 Von den Trägheitsmomenten 104
Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf die Achse desselben . 106
Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf einen Durchmesser . . . 108
§ 20 Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente 109
§ 21 Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft 110
§ 22 Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Körpers. Gleichungen von Lagrange, erste Form 114
Beispiel zur Anwendung der Gleichungen von Lagrange 117
Zweite Form der Gleichungen von Lagrange 120
§ 23 Die Wage, Theorie und Beschreibung derselben 123
§ 24 Prüfung der Wage; Methode der Wägungen 129
§ 25 Spezifisches Gewicht und Dichtigkeit 132
§ 26 Das Pendel 133
§ 27 Ableitung der Schwingungsdauer des Pendels 135
§ 28 Mathematisches und physisches Pendel 139
§ 29 Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze 140
§ 30 Korrektion wegen der Amplitude 143
§ 31 Bestimmung von g; Methode von Borda 148
§ 32 Bestimmung von g mittels des Reversionspendels 152
§ 33 Anwendung des Pendels bei Uhren 155
§ 34 Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze 156
Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente 158
§ 35 Erhaltung der Rotationsebene 159
§ 36 Foucaults Pendelversuche 162

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation

Seite

§ 37. Allgemeine Anziehung; Kepplers Gesetze 165
§ 38. Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet 166
§ 39. Entwicklung des Anziehungsgesetzes 167
Allgemeine Anziehung; die Bezeichnung Anziehung bedeutet nur, daß zwei im Raume befindliche Massen einen Antrieb gegeneinander zeigen 169
§ 40. Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung 171
Anziehung zweier Körper 172
Anziehung einer Kugel auf äußere Massen 173
Abnahme der Schwere mit der Höhe, speziell über einer Hochebene 177
Jollys Nachweis der Abnahme der Schwere mit der Höhe über einer Hochebene 178
§ 41. Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten 180
§ 42. Bestimmung der Dichtigkeit der Erde mit der Drehwage; Versuche von Cavendish 182
Versuche von Reich, Baily, Cornu und Baille, Boys und C. Braun 186
Bestimmung der Dichtigkeit der Erde mit der gewöhnlichen Wage von Jolly, Poynting, Richarz und Krigar Menzel 186
Versuch von Wilsing mit dem Pendel 188
§ 43. Methode der Lotablenkung durch Berge von Maskelyne 188
§ 44. Methode von Airy 190
Anziehung einer homogenen Kugelschale auf in ihr befindliche Massen 191
Attraktionskonstante und deren Dimension 193
§ 45. Ebbe und Flut 193
Literatur des ersten Abschnittes 196

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

§ 46. Beschaffenheit der Materie 199
Glasfadenwage von Salvioni 200
Helmholtz Wirbelringe 211
Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper 212
§ 47. Die Aggregatzustände 213
§ 48. Elastizität 215
§ 49. Elastizität beim Zuge 218
Definition des Elastizitätskoeffizienten 221
Versuche von Thompson, G. Meyer und Bach 224
§ 50. Volumänderung bei dem Zuge 229
Querkontraktionskoeffizient 230
Koeffizient der Volumelastizität und der Starrheit 233
§ 51. Kubischer Kompressionskoeffizient 241
Direkte Messung desselben von Amagat 242
Volumänderung von Hohlräumen; Gleichungen von Lamé 245
Messungen von Cantone und Amagat 249

Seite
§ 52 Torsionselastizität; Methode von Wertheim 251
Methode von Coulomb 255
§ 53. Beziehung zwischen dem Torsions- und Elastizitätskoeffizienten. . . 259
Torsionskoeffizient und Starrheit 260
§ 54. Biegungselastizität 262
Methoden zur Messung des Biegungspfeiles; Spiegelablesung von Gauß 267
§ 55 Abhängigkeit des Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur . . . 271
§ 56 Elastische Nachwirkung 277
§ 57 Elastizitätsgrenze 289
Plastizität; Dehnbarkeit 291
§ 58 Festigkeit; Zugfestigkeit 293
Biegungsfestigkeit 295
Torsionsfestigkeit 296
Rückwirkende Festigkeit 298
Härte 300
Härte; Theorie von Hertz; Versuche von Auerbach 301
§ 59 Stoß der Körper 303
§ 60 Adhäsion 309
§ 61 Von der Reibung 311
§ 62. Innere Reibung bei festen Körpern 312
Theorie von Boltzmann 318

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§ 63 Konstitution der Flüssigkeiten 325
§ 64 Kompressibilität der Flüssigkeiten 329
Ältere Versuche 331
Versuche von Regnault und Grassi 335
Versuche von Pagliani, Vincentini, Tait, Amagat, Röntgen, Cailletet 339
Abhängigkeit der Kompression vom Drucke 342
§ 65 Hydrostatischer Druck 347
§ 66 Kommunizierende Röhren 353
Hydraulische Presse; Manometer von Gally-Cazalat 355
§ 67 Gleichgewicht einer Flüssigkeit, auf welche beliebige Kräfte wirken 357
§ 68 Archimedisches Prinzip 360
§ 69 Schwimmende Körper 363
§ 70 Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper 364
§ 71 Bestimmung des spezifischen Gewichtes flüssiger Körper 368
Volumeter, Aräometer, Alkoholometer. . . . . 371 bis 374
§ 72 Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern. 376
§ 73 Normaldruck und Oberflächenspannung in der Oberfläche der Flüssigkeiten 377
Oberflächendruck 381
§ 74 Experimenteller Nachweis der Oberflächenspannung; Versuche von Plateau, Dupré, van der Mensbrugghe und Sondhaus . . 383
§ 75 Einfluß der Wände 388
Randwinkel 391
§ 76 Niveauänderungen in kapillaren Röhren 393

Seite
§ 77. Steighöhen in verschiedenen Räumen, Röhren, zwischen Platten . . 397
Steighöhen an vertikaler ebener Wand 402
§ 78. Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene 405
Bildung und Form von Luftblasen in Flüssigkeiten unter Ebenen . . 408
Methode von A. König 409
Methode von Cantor 411
§ 79. Kapillaritätskonstanten 414
§ 80. Zahlenwerte; Einfluß der Temperatur 431
§ 81. Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten. Plateaus Versuche 440
Berechnung der Oberflächenspannung nach F. E. Neumann 444
§ 82. Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern und Flüssigkeiten 449
§ 83. Bewegungen infolge von Kapillarwirkung 454
§ 84. Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte 457
Messung von Plateau, Reinold und Rücker, Drude 457
Methode von Quincke 459
Methode von Sohnke, Lord Rayleigh, Röntgen 461
§ 85. Lösung und Diffusion, Theorie von Fick 466
Versuche von Beilstein 471
Versuche von F. Weber, Schuhmeister, von Wroblewski . . . 474
Versuche von Scheffer, Wiedeburg, Voigtländer 475
§ 86. Endosmose 478
Osmotischer Druck, Versuche von Traube und Pfeffer 482
§ 87. Ausfluß der Flüssigkeiten; Toricellis Theorem 489
Hydraulischer Druck 494
§ 88. Ausflußmenge 495
Contractio venae 496
§ 89. Reibung der Flüssigkeiten 499
Ausfluß aus kapillaren Röhren; Poiseuillesches Gesetz 506
Methode von Coulomb 508
Methode von Helmholtz 511
Methode von Brodmann 512
§ 90. Konstitution des ausfließenden Strahles 515

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

§ 91. Allgemeine Beschaffenheit der Gase 522
§ 92. Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam haben 523
Vorhandensein des Luftdruckes 524
Archimedisches Prinzip bei Gasen 525
§ 93. Das Barometer 528
§ 94. Verschiedene Formen des Barometer 529
§ 95. Korrektion wegen der Kapillarität 532
§ 96. Heberbarometer 533
§ 97. Aneroidbarometer 538
§ 98. Schwankung und Größe des Luftdruckes 539
§ 99. Boyle-Mariottesches Gesetz; ältere Versuche 542
Versuche von Despretz, Dulong und Arago, Pouillet 546
Versuche von Regnault 549

Seite

§ 100. Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetze bei sehr kleinem und bei hohem Drucke 556
Versuche bei kleinem Druck von Mendelejeff und van der Ven 558
„ „ „ „ „ Fuchs und Bohr 559
„ „ „ „ „ Thiesen 560
„ „ „ „ „ Lord Rayleigh 561
„ „ hohem „ „ Natterer 563
„ „ „ „ „ Cailletet und Amagat 564
§ 101. Kinetische Theorie der Gase 568
§ 102. Mittlere Wegelänge der Moleküle 570
§ 103. Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes 581
Zustandsgleichung von van der Waals 583
§ 104. Bestimmung der Geschwindigkeit u der Moleküle 588
§ 105. Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe; Barometrische Höhenmessung 589
§ 106. Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer 594
§ 107. Volumenometer 599
§ 108. Die Luftpumpe 604
Ventilpumpe 606
Manometer. Grad der Verdünnung 608
Hahnluftpumpe 611
Ölluftpumpe 613
§ 109. Fall der Körper im luftleeren Raum 614
§ 110. Quecksilberluftpumpen; von Geißler 615
„ „ Töpler 617
Luftpumpe von Sprengel 620
Quecksilberluftpumpe von Gaede 622
Erreichbare Verdünnung 623
§ 111. Die Kompressionspumpe 624
Apparat von Natterer 625
§ 112. Flüssigmachen der Gase 627
§ 113. Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern . . . 628
§ 114. Mosersche Bilder 632
§ 115. Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten 634
Absorptionskoeffizient 635
§ 116. Ausströmen der Gase 641
Hydraulischer Druck 648
§ 117. Reibung der Gase; Ableitung der Reibung aus der kinetischen Gastheorie 649
§ 118. Bestimmung der Reibungskoeffizienten der Gase; Ausflußmethode . 655
Methode von Maxwell 658
Bifilares Drehungsmoment 659
Änderung der Reibungskoeffizienten bei hohem Druck 663
Abhängigkeit von der Temperatur 664
Korrektion von Sutherland 667
§ 119. Diffusion der Gase 669
§ 120. Ableitung der Diffusion aus der kinetischen Gastheorie nach Stefan 678
Diffusionskoeffizient 685
Abhängigkeit von der Temperatur 687
§ 121. Absolute Werte der mittleren Wegelängen 688
Größe und Zahl der Moleküle 690
§ 122. Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen und Flüssigkeiten . . 694
§ 123. Stoß und Widerstand der Luft 700

Seite

§ 124. Kinetische Theorie der Flüssigkeiten; endosmotischer Druck; Diffusion 702
Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten nach Arrhenius, Nernst, Riecke 708

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Prinzipien der Wellenbewegung.

§ 125. Schwingende Bewegung eines Punktes 715
§ 126. Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes 716
Schwingung ohne Dämpfung 717
Schwingung mit Dämpfung; aperiodische Dämpfung 720
§ 127. Schwingung der Punktreihen; Entstehung der Wellen 722
§ 128. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe . 726
§ 129. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung 734
§ 130. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen; Interferenz 734
§ 131. Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; Bildung stehender Wellen 739
§ 132. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen 742
§ 133. Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge . . 750
Parallele Schwingungen 751
Gegeneinander geneigte Schwingungen 757
§ 134. Schwingungen eines Systems von Punkten 758
§ 135. Huyghenssches Prinzip 761
§ 136. Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Punktsystemen; Reflexion der Wellen 766
§ 137. Brechung der Wellen 772

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung fester Körper.

§ 138. Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper infolge der Elastizität 776
§ 139. Longitudinale Schwingungen der Stäbe 778
§ 140. Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe 780
§ 141. Transversale Schwingungen der Saiten 786
§ 142. Stehende Schwingungen von fadenförmigen, durch Spannung elastischen Körpern 791
§ 143. Einfluß der Steifigkeit der Saiten 797
§ 144. Transversalschwingungen von Stäben 799
§ 145. Transversale Schwingungen von Platten, Chladnis Klangfiguren . . 805
Staubfiguren 812
§ 146. Drehende Schwingung von Stäben 814
§ 147. Zusammengesetzte Schwingungen 818
Kombinierte, transversale und longitudinale 820
Kombinierte transversale 823
Lissajoussche Figuren 825

Seite
§ 148. Zusammengesetzte Schwingungen gespannter Saiten 826
Vibrationsmikroskop 833
Schwingung gestrichener Saiten 834

Drittes Kapitel.

Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

§ 149 Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen 837
Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten 839
" " Gasen 841
§ 150 Stehende Wellen in Flüssigkeitszylindern 843
§ 151 Transversale Wellen in Flüssigkeiten 845
Versuche der Gebrüder Weber 846
§ 152. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen 848
§ 153 Die Ursachen der Flüssigkeitswellen 851
§ 154. Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 854
§ 155 Durchkreuzung und Reflexion der Wellen 858

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Über die Erregung des Schalles.

§ 156 Von der Ursache des Schalles 862
§ 157 Qualität des Schalles 864
§ 158 Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen 866
§ 159 Von dem Verhältnis der Töne und den Intervallen 871
§ 160 Von den mehrfachen Akkorden 873
§ 161 Die Tonleiter 875
§ 162. Die musikalische Temperatur 883
§ 163 Absolute Schwingungszahl der Töne 887
§ 164 Analyse des Klanges 893
Klangfarbe und Phase 902
§ 165 Klänge durch Schwingungen fester Körper 905
Longitudinaltöne und Klänge schwingender Saiten 906
Klänge der Saiteninstrumente 909
Klänge von Stäben; Stimmgabeln 910
Schwingungen von Platten; drehende Schwingungen 911
§ 166 Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper 913
Töne gedeckter Pfeifen; Beobachtungen von Kundt und Raps . . . 914
Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie 920
Berichtigung an gedeckten Orgelpfeifen 922
Töne offener Pfeifen 925
Teilweise gedeckter Pfeifen 927
Kubische Pfeifen 928
§ 167 Töne durch Schwingungen von Flüssigkeitssäulen 931
Wertheims Versuche 932
§ 168 Von den Zungenpfeifen; harte Zungen 934
Versuche von Weber 936
Theorie von Weber 938

Seite
§ 169. Weiche Zungen; chemische Harmonika; empfindliche Flammen . . 941
§ 170. Die Blasinstrumente 946
§ 171. Die menschliche Stimme 949
§ 172. Die menschliche Sprache; Vokaltheorie von Helmholtz 953
Vokaltheorie von Grassmann 960
Die Bildung der Konsonanten 962

Zweites Kapitel.

Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§ 173. Ausbreitung des Schalles in der Luft 963
Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft 964
§ 174. Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit. 976
Schallgeschwindigkeit in Röhren 976
Methode von Kundt. 978
Theorie von Helmholtz und Kirchhoff 980
Prüfung der Theorie durch Schneebeli, Seebeck, Kayser u. a. 980
§ 175. Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern 987
Versuche von Stefan und Warburg. 989
Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Stäben und ausgedehnten festen Körpern 990
§ 176. Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern 991
§ 177. Reflexion des Schalles, Echo, Sprachrohr. 995
§ 178. Übergang des Schalles in andere Mittel, Brechung desselben . . . 998
Resonanz 1001
Phonograph 1004
Untersuchung der Vokale durch den Phonograph 1006
§ 179. Das menschliche Ohr 1008
Mechanismus des Hörens 1010
Empfindlichkeit des Ohres 1012
§ 180. Einfluß der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones; Dopplersches Prinzip . . . 1014
§ 181. Interferenz des Schalles 1017
§ 182. Interferenz von Wellen ungleicher Länge; Stöße 1022
Bestimmung der Schwingungszahlen von Scheibler 1025
§ 183. Kombinationstöne 1028
§ 184. Ursachen der Konsonanz und Dissonanz 1033

Einleitung.

Aufgabe der Physik.

Die uns umgebende Körperwelt, welche wir in dem Begriffe der Natur zusammenfassen, kann nach einer doppelten Richtung der Gegenstand unseres Studiums werden. Wir können einerseits die Körper, welche wir vorfinden, im einzelnen kennen zu lernen, zu beschreiben und zu klassifizieren suchen. Diese Aufgabe haben sich die beschreibenden Naturwissenschaften gestellt. An diesen Naturkörpern nehmen wir dann aber eine ganze Reihe von Veränderungen wahr, die an denselben teils ohne, teils mit unserer Einwirkung erfolgen, welche wir mit dem Namen Naturerscheinungen bezeichnen. Das Studium dieser Naturerscheinungen, der Bedingungen, unter denen sie auftreten, der Gesetze, nach denen sie verlaufen, und der Folgen, welche sie für die Naturkörper haben, an denen sie stattfinden, ist die Aufgabe des zweiten Zweiges der Naturwissenschaften, der Physik und der Chemie.

Die als Naturerscheinungen bezeichneten Veränderungen der Körper können sich entweder auf deren Form, diesen Begriff in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen, oder auf deren Inhalt beziehen. Was der letztere eigentlich ist, wissen wir nicht, da wir den Inhalt der Körper nicht direkt wahrzunehmen imstande sind. Wir nehmen die Köiper nur wahr durch den Eindruck, den sie auf unsere Sinne machen, indem wir sie sehen oder auch bei der Berührung fühlen, das heißt, indem wir durch unsern Gesichtssinn oder Gefühlssinn erkennen, daß ein gewisser Teil des uns umgebenden Raumes andere Eigenschaften hat, als der übrige Raum. Dasjenige, was sich im Innern dieses von der Umgebung sich unterscheidenden Raumes befindet und bewirkt, daß er sich von der Umgebung unterscheidet, bezeichnet man ganz allgemein als Materie. Die Materie ist also die Trägerin der Eigenschaften, welche die Körper besitzen, sie ist die Ursache der Eindrücke, welche dieselben auf unsere Sinne machen.

Die Naturerscheinungen können wir also genauer als Vorgänge definieren, welche an und in der Materie stattfinden, welche die Eigenschaften der Materie ändern. Das Studium dieser Vorgänge, welches wir als die Aufgabe der Physik und Chemie bezeichnet haben, setzt demnach voraus, daß wir zunächst die Eigenschaften der Materie selbst kennen lernen, denn nur wenn uns diese bekannt sind, können wir die Änderungen derselben erkennen.

Physik und Chemie haben also das Gemeinsame, daß sie die Eigenschaften der Materie und die Vorgänge untersuchen, welche dieselbe verändern; die beiden Schwesterwissenschaften unterscheiden sich durch die Eigenschaften der Materie, welche jede derselben vorwiegend ins Auge faßt.

Gewisse Eigenschaften sind allen Körpern gemeinsam, sie kommen denselben nur in größerem oder geringerem Maße zu, wie z. B. die oben schon erwähnte Sichtbarkeit oder Fühlbarkeit. Andere Eigenschaften kommen dagegen gewissen Körpern zu, anderen nicht, es sind diejenigen, welche einen Körper charakterisieren, d. h. ihn von andern unterscheiden. Da wir die Materie nur an ihren Eigenschaften erkennen, müsssen wir aus dem letztern Umstande schließen, daß es verschiedene Materien gibt. Unter den Naturerscheinungen können wir nun zunächst solche unterscheiden, welche diese einer bestimmten Materie eigentümlichen Eigenschaften dauernd ändern, die Materie also in eine andere verwandeln, indem sie ihr andere Eigenschaften erteilen. Es sind das vorzugsweise solche Erscheinungen, bei denen sich zwei oder mehrere Materien zu einer neuen vereinigen, oder aus einer Materie andere abgeschieden werden. Das Studium dieser Erscheinungen und ihrer Folgen für die einzelnen Materien ist die Aufgabe der Chemie; dieselbe hat demnach zunächst auch jene Eigenschaften aufzusuchen, durch welche sich die einzelnen Materien voneinander unterscheiden.

Es hat sich dabei herausgestellt, daß es eine gewisse Anzahl von Materien gibt, deren Eigenschaften sich durch Abscheiden von Materie nicht ändern lassen; man nennt diese deshalb einfache Materien oder Elemente. Man hat weiter erkannt, daß aus diesen einfachen Materien sich sämtliche in der Natur vorhandenen Materien herstellen, indem zwei oder mehrere Materien zu einer neuen zusammentreten, daß somit die eine bestimmte Materie als solche charakterisierenden Eigenschaften durch die innere Zusammensetzung derselben bedingt werden. Wir können demnach als die Aufgabe der Chemie auch bezeichnen das Studium jener Eigenschaften der Materie, welche von deren innerer Zusammensetzung abhängen und jener Erscheinungen, welche die innere Zusammensetzung derselben ändern.

Die Physik läßt alle diese Erscheinungen außer Acht; sie hat daher auch nicht die Eigenschaften kennen zu lehren, welche die einzelnen Materien voneinander unterscheiden, sondern jene, welche allen den verschiedenen Materien gemeinsam sind, ihnen in größerem oder geringerem Maße zukommen, je nach dem Zustande, in welchem wir die Materien vorfinden, dem festen, flüssigen oder luftförmigen und unabhängig davon, welche von der Chemie erkannten Materien den Körper gerade bilden. Die Erscheinungen, welche die Physik dann zu untersuchen hat, sind solche, welche die innere Zusammensetzung der Körper ungeändert lassen, welche also an den Körpern im allgemeinen nicht dauernde, sondern vorübergehende Veränderungen bewirken. Die Erscheinungen dieser Art können wir, wie sich später zeigen wird, in fünf große Gruppen ordnen, die Bewegungserscheinungen, die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität; wir kennen in der Natur bis jetzt keine Erscheinung welche sich nicht in eine dieser Gruppen einordnen ließe. Die Betrachtung dieser fünf Erscheinungsgruppen ist daher die Aufgabe der Physik.

Methode der Physik.

Aus der im vorigen dargelegten Aufgabe der Naturwissenschaften Untersuchung der Naturerscheinungen nach ihrem Verlaufe, ihren Folgen ihren Ursachen, ergibt sich, daß die Grundlage und der Ausgangspunk

dieser Wissenschaft die Erfahrung sein muß von dem, was in der Natur vorgeht. Zu dieser Erfahrung gelangen wir aber lediglich durch die Beobachtung und zwar durch eine systematische, vorsichtige, genaue und ins einzelne gehende Beobachtung der Naturerscheinungen selbst.

Dieser Grundsatz der naturwissenschaftlichen Methode erscheint uns jetzt so selbstverständlich, so unmittelbar aus der Aufgabe dieser Wissenschaft, etwas außer uns Existierendes zu erforschen, sich zu ergeben, daß seine Richtigkeit keines besondern Beweises mehr bedarf. Es war indes nicht immer so: Jahrhunderte lang glaubte man auf rein spekulativem Wege die Naturgesetze, den Mechanismus der ganzen Natur auffinden zu können. Die Folge dieses Irrtums war der absolute Stillstand in der Erkenntnis der Natur; selbst die einfachsten Erscheinungen, deren Gesetze jetzt jeder kennt, wurden mißverstanden, weil man es verschmähte die Natur selbst zu befragen. Bis an das Ende des Mittelalters, bis zu den Zeiten Galileis, glaubte man, daß Körper von verschiedenem Gewichte mit verschiedener Geschwindigkeit zu Boden fallen, daß der schwerere in demselben Verhältnis schneller falle als der leichtere, in welchem er schwerer ist als dieser. Man glaubte es aufgrund eines von Aristoteles in seiner Schrift über den Himmel aufgestellten Satzes, daß derjenige Körper der schwerere sei, welcher bei gleichem Rauminhalt rascher abwärts gehe. Dieser letztere Satz ist nicht unrichtig; denn in der Tat wird die Fallgeschwindigkeit etwas durch den Luftwiderstand modifiziert, und die Geschwindigkeit des leichtern Korpers wird bei gleichem Rauminhalt etwas stärker vermindert als die des schwerern. Völlig unrichtig war aber die obige aus diesem Satze gefolgerte Ansicht über den Fall der Körper, und die einfachste Beobachtung zweier verschiedener fallender Körper hätte ihre Unrichtigkeit gezeigt; man hätte gesehen, daß sich bei Körpern selbst des verschiedensten Gewichtes nur äußerst geringe Unterschiede in der Fallgeschwindigkeit zeigen, man hätte gefunden, daß im luftleeren Raume auch diese Unterschiede schwinden.

Damit die Beobachtung die Grundlage der Naturwissenschaften sein kann, muß sie, wie schon erwähnt, eine genaue und vollständige, die Erscheinungen in ihre Einzelheiten verfolgende sein. Genau, das heißt, wir müssen die Erscheinung so wahrzunehmen suchen, wie sie in der Tat verläuft, und uns vor jeder Täuschung hüten. Die erste dazu erforderliche Bedingung ist, daß wir an die Erscheinung ohne irgend eine vorgefaßte Meinung herantreten, da sonst die Phantasie des Beobachters leicht eine gefährliche Rolle spielt; schon mancher Beobachter hat das zu sehen geglaubt, was er aufgrund einer Auffassung, welche er aus vorherigen Spekulationen sich gebildet hatte, zu sehen gewünscht hat. Jede Anstellung einer Beobachtung ist eine Frage, welche wir an die Natur richten, das Resultat der Beobachtung ist die Antwort; welche Antwort wir erhalten, muß uns gleichgültig sein, möge sie unsern Ideen entsprechen oder nicht, dann können wir mit der nötigen Unbefangenheit beobachten.

Die Vollständigkeit der Beobachtung verlangt, daß sie uns Aufschluß gebe über den ganzen Verlauf der Erscheinung und über alle Umstände, welche dieselben bedingen; jede Beobachtung einer Erscheinung setzt sich daher zusammen aus einer Summe von Einzelbeobachtungen, deren jede einen Moment des im zeitlichen Verlauf nacheinander oder eine Seite

des nebeneinander Vorgehenden liefert. Diese Einzelbeobachtungen müssen wir systematisch so durchführen, daß wir aus ihnen den ganzen Verlauf der Erscheinungen erhalten. Bei einer einmaligen Beobachtung des gestirnten Himmels scheinen uns alle Gestirne in einer und derselben gegenseitigen Lage zu bleiben; eine zu verschiedenen Zeiten wiederholte Beobachtung zeigt uns, daß die Planeten ihre Lage gegenüber andern Sternen im Laufe der Zeit in einer scheinbar sehr unregelmäßigen Weise ändern, daß sie bald nach der einen bald nach der andern Seite sich verschieben. Wenn wir bei regelmäßig und systematisch wiederholten Beobachtungen die Lage der einzelnen Planeten scharf bestimmen, so gelangen wir zu der Erkenntnis, daß sie und mit ihnen unsere Erde sich in nahezu kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen.

Die Beobachtung der Naturerscheinungen allein genügt indes nur in seltenen Fällen zu einer so genauen Kenntnis, daß wir den Verlauf derselben vollständig übersehen können, denn der Verlauf derselben ist meist nicht so einfach, daß wir durch Beobachtung allein alle Einzelheiten erkennen können. Fällt ein Stein aus einiger Höhe zu Boden, so erkennen wir bei genauer Beobachtung wohl, daß der Stein immer rascher fällt, wir sind aber nicht imstande die durchfallenen Strecken mit den Zeiten zu vergleichen, in denen sie durchfallen sind und so zu bestimmen, wie die Geschwindigkeit des fallenden Steines wächst.

Neben der Beobachtung müssen wir deshalb den Versuch zu Hilfe nehmen, das Experiment, durch welches wir die Naturerscheinungen unte solchen Umständen hervorrufen, daß wir sie in ihren Einzelheiten ver folgen, daß wir sie also beobachten können. Um die Gesetze des Falle erkennen zu können, müssen wir demnach Körper unter solchen Verhält nissen fallen lassen, daß die Bewegung eine langsamere wird, und da wir imstande sind die durchfallenen Räume mit der Zeitdauer des Falle zu vergleichen. Die Kunst des Experimentierens liefert uns die Method und Apparate, welche erforderlich sind, um den Naturerscheinungen diese Verlauf zu geben und um die Größen, um welche es sich bei denselbe handelt, mit aller Schärfe messen zu können.

Der Versuch lehrt uns aber nicht nur den genauern Verlauf der E scheinungen kennen, die wir in der Natur auch ohne unser Zutun b obachten, er führt uns selbst zur Kenntnis ganz neuer Naturerscheinunge die ohne unsere Mitwirkung gar nicht eintreten würden; er lehrt uns d Körper in solchen Verhältnissen zusammenzubringen, daß die in ihn schlummernden Kräfte geweckt werden. Der weitaus größte Teil unse Kenntnis der Naturerscheinungen ist nur durch Versuche erhalten word welche in systematischer Weise diese Erscheinungen, meist von unsche baren sehr oft nur zufällig beobachteten Wirkungen der Naturkräfte a gehend, hervorriefen. Man hat zufällig schon im Altertum die Beobachtu gemacht, daß geriebener Bernstein die Eigenschaft erhält, leichte ihm n gebrachte Körper, wie Strohhalme anzuziehen; indem man auch and Körper diesem Versuche unterwarf, fand man, daß diese als Elektrizi bezeichnete Kraft viel mächtigere Wirkungen hervorbringen könne, n erkannte, daß eine der gewaltigsten Naturerscheinungen, der Blitz, e starke elektrische Entladung sei. Zufällig fand man, daß zwei Meta wenn sie in passender Weise miteinander zur Berührung gebracht

[illegible] getrennt werden, dieselbe Fähigkeit besitzen wie der geriebene Bern-[illegible] die systematische Verfolgung dieses Versuches lieferte uns das große [illegible] der galvanischen Ströme, welche nicht nur unsere Kenntnis der Naturkräfte gewaltig erweitert, sondern auch durch ihre Verwendung zur Telegraphie das ganze Kulturleben umgewandelt haben.

Die Beobachtungen und Versuche lehren uns das Tatsächliche der Naturerscheinungen kennen, sie liefern uns so das Material, aus welchem der kombinierende Scharfsinn des menschlichen Verstandes die Gesetze ab-[illegible], welche das Bedingende und das Bedingte in den Naturerscheinungen [illegible]einander verknüpfen, welche uns also angeben, in welcher Weise der [illegible] einer Erscheinung von den Umständen abhängt, unter denen sie [illegible]. Ein Beispiel wird uns am besten zeigen, wie wir zu einem [illegible] Gesetze gelangen.

Wenn ein Lichtstrahl in seiner Bahn auf eine glatte Fläche trifft, so [illegible] er von derselben immer zurückgeworfen, und man erkennt leicht, daß [illegible] Richtung, nach welcher der Strahl zurückgeworfen wird, verschieden [illegible] je nach der Richtung, in welcher der Strahl auf die Fläche auftrifft. [illegible] Richtung des einfallenden Strahles ist hier somit das Bedingende, die [illegible] des zurückgeworfenen das Bedingte. Das Gesetz der Zurück-[illegible] des Lichtes muß uns also allgemein sagen, in welcher Weise die [illegible] des zurückgeworfenen Strahles von der Richtung des einfallenden [illegible] ist. Man findet dasselbe, indem man in einer Reihe von Ver-[illegible] die Richtung des einfallenden Strahles willkürlich ändert, jedesmal [illegible] des zurückgeworfenen messend bestimmt, und dann die zuein-[illegible] Richtungen miteinander vergleicht. Rechnet man die [illegible] der beiden Strahlen von der in dem Punkte, in welchem der [illegible] Strahl die Fläche trifft, zu derselben senkrecht genommenen [illegible] dem sogenannten Einfallslot, so findet man, daß der reflektierte [illegible] stets in der Ebene liegt, welche durch das Einfallslot und den [illegible] Strahl bestimmt ist, und daß in dieser die Winkel, welche [illegible] und der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslote bilden, [illegible] immer gleich sind. Wir schließen aus dieser stets im Versuche [illegible] Beziehung zwischen den Winkeln des einfallenden Strahles, [illegible] Einfallswinkel, und dem des zurückgeworfenen Strahles, dem Zurück-[illegible]winkel, als das die beiden verknüpfende Gesetz: „Der Zurück-[illegible]winkel ist dem Einfallswinkel gleich."

Man sieht, dieses Gesetz, und so ist es mit allen physikalischen Ge-[illegible], ist eine mathematische Beziehung zwischen den bedingenden und [illegible] physikalischen Größen einer Naturerscheinung; man kann des-[illegible] physikalische Gesetz durch eine Gleichung ausdrücken.

[illegible] physikalischen Gesetze sind hiernach zunächst der gemeinsame [illegible] einer Reihe einzelner Tatsachen, deren Gemeinsames sie in einem [illegible] Satze zusammenfassen. Ihre Bedeutung ist aber eine noch [illegible] weitergehende; sie drücken nicht nur die Tatsachen aus, aus [illegible] abgeleitet wurden, sondern sie enthalten auch alle Erscheinungen, [illegible] aus jenen Tatsachen folgen. Man habe z. B. einen Spiegel von [illegible], aber irgendwie geometrisch bestimmbarer Gestalt, und es fallen [illegible] Lichtstrahlen etwa von einer in bestimmter Entfernung aufgestellten [illegible]flamme. Das eben ausgesprochene Gesetz gestattet uns dann, die

Erscheinungen der Zurückwerfung in jedem Falle zu bestimmen, ohne daß wir den Versuch zu Hilfe nehmen, denn wir können aufgrund jenes Gesetzes für jeden einfallenden Strahl die Richtung des zurückgeworfenen mit Hilfe einfacher geometrischer Konstruktion oder auch nach den Rechnungsmethoden der analytischen Geometrie angeben. Wie hier, so können wir in allen Fällen aus jedem Gesetze mit Hilfe der Mathematik eine Reihe von Folgesätzen ableiten; man hat die Gesetze nur mathematisch zu formulieren, und dann, indem man dieselben als Ausgangspunkt nimmt, durch mathematische Entwicklungen aus denselben die Folgerungen zu ziehen.

Aus dieser Bemerkung erhellt die äußerst wichtige Rolle, welche die Mathematik in der Physik spielt; sie ist für dieselbe von der gleichen Bedeutung wie Beobachtung und Versuche, denn sie dient dazu, diese zu berechnen und zusammenzufassen, die erhaltenen Gesetze scharf auszudrücken und die in ihnen enthaltenen Folgerungen abzuleiten.

Wenn hiernach aus einem physikalischen Gesetze sich eine Reihe von weitern Erscheinungen auf mathematischem Wege ableiten läßt, so bedarf es selbstverständlich, um diese und ihre Gesetze kennen zu lernen, nicht mehr der Beobachtung und der Versuche; wir erhalten vielmehr diese Gesetze lediglich durch mathematische Deduktion. Die Versuche dienen dann zur Bestätigung unserer Folgerungen, sie bilden die Kontrolle, daß wir uns in unsern Deduktionen nicht geirrt haben. Dieser Weg der Deduktion ist neben dem der Erfahrung der wichtigste, auf dem die Physik fortschreitet, er lehrt uns ebenso gut neue Erscheinungen kennen, wie der Versuch; ja wir werden Erscheinungen finden, die man voraussichtlich niemals aufgefunden hätte, wenn uns der Weg der Deduktion nicht vorher die Umstände angegeben hätte, unter welchen dieselben beobachtet werden können.

Hat uns die Erfahrung die fundamentalen Gesetze einer Erscheinungsgruppe kennen gelehrt, so können wir aus diesen alle zu dieser Gruppe gehörigen Erscheinungen ableiten. Da wir bei dieser Ableitung den innern Zusammenhang aller zu einer Gruppe gehörigen Erscheinungen unmittelbar erkennen, so können wir es als ein Ziel der Physik bezeichnen, die fundamentalen Gesetze aufzusuchen und aus diesen das ganze Gebiet der zusammengehörigen Erscheinungen zu deduzieren. Wir werden sehen, da auf einigen Gebieten dieses Ziel schon erreicht ist, so vor allem in dem jenigen der Bewegungserscheinungen.

Fassen wir die Resultate der bisherigen Betrachtungen zusammen, s können wir in der Entwicklung der physikalischen Wissenschaften dr Epochen unterscheiden; die erste ist die der Empirie, durch Beobachtun und Versuche werden Tatsachen gesammelt und aus diesen durch die kom binierende Tätigkeit des Verstandes die Gesetze der einzelnen Erscheinung aufgestellt; an diese schließt sich, sobald hinreichendes Material vorhand ist, die philosophische Tätigkeit der Abstraktion, des Aufsuchens der Haup gesetze für eine Reihe aus gleicher Ursache hervortretender Erscheinunge und auf diese folgt eine Zeit, in welcher man durch Deduktion aus jen Gesetzen neue Folgerungen und Tatsachen ableitet, eine Zeit, in welch Beobachtung und Versuch nur dazu dienen, die theoretisch abgeleitet Folgerungen zu kontrollieren und nachträglich zu bestätigen. Im allgemein

ist das auch der geschichtliche Gang in der Entwicklung der Physik, man findet fast stets diese drei Epochen auch zeitlich verschieden.

Die der Naturwissenschaft gestellte Aufgabe ist indes hiermit noch nicht vollständig gelöst, denn eine vollständige Kenntnis der Natur muß uns auch angeben, warum die Naturerscheinungen gerade den beobachteten Verlauf haben und nicht einen andern. Da nun aber der Verlauf einer Erscheinung wesentlich von der Ursache bedingt wird, welche diese Erscheinung bewirkt, so fällt die Frage nach dem Grunde, aus welchem die Erscheinungen gerade den ihnen eigentümlichen Verlauf haben, zusammen mit der Frage nach der Ursache der Erscheinungen. Die Ursache einer Veränderung in der Natur bezeichnet man allgemein als eine Kraft, wir können daher das Aufsuchen der Ursachen auch bezeichnen als das der Naturkräfte.

Gerade diese letzte Aufgabe der Naturwissenschaften ist aber die schwierigste; denn die Naturkräfte selbst können wir niemals direkt beobachten, wir nehmen sie nur wahr in ihren Wirkungen. Um also irgend etwas über die Naturkräfte auszusagen, müssen wir aus den Wirkungen auf die Ursachen zurückschließen. Diese Art des Schlusses ist aber immer mit einer so großen Unsicherheit behaftet, daß wir über die wirksamen Naturkräfte niemals eine ähnliche Gewißheit erhalten können wie über die Gesetze, denen die Naturerscheinungen folgen. Denn eine und dieselbe Erscheinung kann aus sehr verschiedenen Ursachen hervorgehen, und von diesen möglichen Ursachen müssen wir bei jener Art des Schließens eine auswählen; nichts bürgt uns aber dafür, daß wir bei dieser Wahl aus den möglichen Ursachen die richtige treffen. Wenn wir wissen, daß das Wasser unter dem Drucke der Atmosphäre steht, so ist eine notwendige Folgerung, daß es in einer Pumpe aufsteigen muß, in welcher wir über dem Wasser einen luftleeren Raum hergestellt haben; weiß man aber nicht, daß das Wasser dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt ist, und sieht man dasselbe in einer luftleer gemachten Pumpe aufsteigen, so kann man eine Reihe von Ursachen ersinnen, welche das Aufsteigen bewirken. Will man zwischen diesen wählen, so hat man alle Möglichkeiten dafür, daß man eine unrichtige wählt, gegen eine einzige, daß man die richtige wählt. Die Geschichte lehrt uns, wie sich die ältern Physiker in der Tat täuschten, als sie annahmen, die Natur hätte eine Abscheu vor dem leeren Raume. Die Mechanik des Himmels beweist uns, daß zwischen den Gestirnen eine Kraft tätig ist, welche in dem Maße größer ist, als die Masse der Gestirne größer ist, und welche in dem Maße abnimmt, als das Quadrat der Entfernung der Gestirne zunimmt. Man nimmt an, daß diese Kraft in einer Anziehung der Materien ihren Grund habe. Auch diese Annahme wählt aus einer ganzen Reihe von möglichen Gründen einen aus, und wir haben strenge genommen ebenso wenig ein Recht diesen Grund für den wahren zu halten, wie aus dem Aufsteigen des Wassers in der Pumpe den horror vacui zu folgern.

Über die Naturkräfte selbst können wir demnach nur Annahmen, sogenannte Hypothesen bilden, welche für uns einen geringern oder größern Grad von Wahrscheinlichkeit haben, je nach der Vorsicht, mit welcher man bei dem Aufstellen der Hypothesen verfuhr, und je nach der Menge von Naturerscheinungen, welche wir bei ihrer Wahl berücksichtigten, und welche sich dann als notwendige Folgen aus dieser Hypothese ergeben. Solange man nur wenige Erscheinungen aus einem Gebiete in betracht zieht, findet

man stets, daß mehrere Hypothesen dieselben gleich gut erklären, das heißt als notwendige Folgen aus der angenommenen Ursache hervorgehen lassen; je weiter aber unsere Kenntnis der Erscheinungen in einem Gebiete sich ausdehnt, um so geringer wird die Anzahl der möglichen Hypothesen, bis schließlich nur eine Hypothese übrig bleibt, aus welcher man sämtliche experimentell gefundenen Tatsachen mathematisch entwickeln kann, und welche selbst zur Auffindung neuer Tatsachen führt. Diese Hypothese hat dann für uns den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche Hypothese ist die jetzt der Behandlung der Optik zugrunde gelegte Undulationstheorie. Seitdem man angenommen hat, das Licht sei eine zitternde Bewegung des Äthers, wurden alle experimentell aufgefundenen Gesetze der Lichterscheinungen Folgerungen dieses einen Grundsatzes, und mit ihr hat die Optik fast jene Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf welcher die Beobachtung nur mehr ein Mittel ist, die Folgerungen der Theorie zu bestätigen, anstatt das einzige Mittel zu sein, um die Gesetze der Erscheinungen aufzufinden. Das ist eben das charakteristische einer guten Hypothese.

Zunächst erhält man eine solche Hypothese für die verschiedenen Gruppen der unter sich gleichartigen Erscheinungen, wie diejenige des Lichtes oder der Wärme, und man muß dieselbe für gut erklären, wenn sie das Gesamtgebiet der Erscheinungen, für welche sie ersonnen wurde, als notwendige Folgen erkennen läßt. Mit dem Fortschritte der Naturerkenntnis hat sich nun aber ergeben, daß die einzelnen Gruppen von unter sich gleichartigen Erscheinungen, welche scheinbar sich ganz fremd sind, wie die Bewegungserscheinungen, Licht- oder Wärmeerscheinungen, untereinander in dem innigsten Zusammenhange stehen. Bei der Abwägung der Hypothesen über die einer bestimmten Erscheinungsgruppe zugrunde liegenden Naturkräfte darf man deshalb nicht nur diese Erscheinungsgruppe allein ins Auge fassen, sondern muß auch die übrigen mit in Erwägung ziehen, und sich die Frage stellen, ob es zur Erklärung der bestimmten Gruppe der Annahme einer besondern Naturkraft bedarf. Gerade durch diese Erwägung hat die neuere Physik die Zahl der von den ältern Forschern angenommenen Naturkräfte wesentlich beschränkt; wir werden sehen, wie sie immer mehr dahin strebt, die verschiedenartigsten Erscheinungen auf ein und dieselbe Grundursache, auf Bewegung, zurückzuführen und an die Stelle der früher angenommenen so mannigfachen Kräfte nur eine zu setzen, die Kraft welche der Materie Bewegung erteilen kann, welche in einer Anziehung und Abstoßung der einzelnen Teile der Materie besteht.

Aber selbst, wenn es gelungen ist alle Erscheinungen auf diese eine der Materie eigentümliche und deshalb unveränderliche Kraft zurückzuführen, darf man immer nicht vergessen, daß es eine Hypothese ist, auf welche wir die Erklärung der Naturerscheinungen stützen, die allerdings den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, der wir aber eine Gewißheit erst dann beilegen dürfen, wenn wir beweisen können, daß die so angenommene Ursache der Naturerscheinungen die einzig mögliche ist. Dann erst wäre dieselbe, nach dem Ausspruche von Helmholtz[1]), als die notwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen, es würde derselbe

1) *Helmholtz*, Über die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. p. 7.

alsdann objektive Wahrheit zuzuschreiben sein. Dahin zu gelangen, das können wir als das letzte Ziel der Naturwissenschaften bezeichnen; ob es erreicht werden kann, das läßt sich jetzt noch nicht übersehen.

Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen.

Wir haben im vorigen bereits mehrfach gezeigt, daß die Grundlage alles physikalischen Wissens genaue Beobachtungen und Messungen sind; ehe wir zur Besprechung der physikalischen Naturerscheinungen selbst übergehen, müssen wir uns daher noch die Frage vorlegen, wie wir aus den Messungen die Gesetze der Erscheinungen ableiten, und wie wir bei den Messungen zu verfahren haben. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Zurückwerfung des Lichtes zeigen, welches wir vorhin bereits angeführt haben. Wir wissen also, daß jedesmal, wenn ein Lichtstrahl auf eine polierte Fläche fällt, derselbe zurückgeworfen wird, ferner, daß die Richtung, nach welcher der zurückgeworfene Strahl fortgepflanzt wird, sich ändert, wenn die Richtung des einfallenden sich ändert. Um das Gesetz zu erhalten, welches die Abhängigkeit der Richtung des zurückgeworfenen von der des einfallenden Strahles darstellt, setzen wir einen Spiegel in den Mittelpunkt eines geteilten Kreises, sodaß die Ebene des Spiegels senkrecht ist zur Ebene des Kreises. An dem Kreise sind zwei bewegliche Radien, deren Enden mit einer Spitze auf die Teilung des Kreises zeigen. Die Radien tragen durchsichtige Röhren, deren Achsen den Radien parallel sind; vor der einen Röhre steht eine möglichst kleine Flamme, welche nur durch die Röhre Licht auf den Spiegel senden kann. Ist der Spiegel so aufgestellt, daß die Spiegelnormale, das Einfallslot, den Nullpunkt der Teilung trifft, so gibt uns der Abstand des die Flamme tragenden Radius vom Nullpunkte der Teilung den Einfallswinkel des Lichtstrahles. Wir verschieben dann den zweiten beweglichen Radius so lange, bis wir durch die Röhre blickend den zurückgeworfenen Strahl sehen. Da die Richtung dieses zweiten Radius jene des zurückgeworfenen Lichtstrahles ist, so gibt uns der Abstand seiner Spitze von dem Nullpunkte der Teilung den Zurückwerfungswinkel. Man setzt die beiden beobachteten Winkel nebeneinander. Man wiederholt den Versuch, indem man nach und nach verschiedene Einfallswinkel wählt, dabei von dem kleinsten, der senkrechten Inzidenz, bis zum größten, der streifenden Inzidenz, fortschreitet, und entwirft sich eine Tabelle, auf welcher neben jedem gewählten Einfallswinkel der beobachtete Zurückwerfungswinkel verzeichnet ist. Eine Vergleichung der zusammengehörigen Winkel zeigt uns dann, unter Voraussetzung absoluter Genauigkeit, daß die zueinander gehörigen Winkel immer gleich sind. Indem man so eine ganz konstante Beziehung zwischen den beiden Winkeln in den beobachteten Fällen erkennt, schließt man, daß es in allen so sein wird, und erhält auf diese Weise ein experimentell bewiesenes Gesetz.

Der Beweis eines physikalischen Gesetzes ist somit der Nachweis einer konstanten Beziehung zwischen Zahlen, welche durch direkte Messung erhalten oder aus direkt gemessenen Größen berechnet werden; wir erkennen die Beziehung in einer größern oder geringern Anzahl von Fällen und schließen daraus, daß sie in allen bestehe.

Damit aber die zwischen den verglichenen Größen bestehend ziehung in aller Schärfe hervortrete, ist es nötig, daß die Mess vollkommen genau sind. Das ist niemals zu erreichen, einmal wege Ungenauigkeit der Instrumente, dann aber auch wegen der Unvollkomm unserer Sinne. In dem eben besprochenen Beispiele ist der Maßsta welchem gemessen wird, ein geteilter Kreis; eine solche Teilung sich nie ganz genau herstellen, der eine Grad ist niemals dem a vollkommen gleich, und die Teilstriche haben niemals vollkommen g Breite. An dem Kreise lassen sich ferner niemals die beweglichen B mit voller Genauigkeit einstellen, und schließlich läßt sich die St der Radien nicht mit vollkommener Sicherheit ablesen. Deshalb sind die besten Messungen mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern bel welche je nach der Güte der Instrumente und der Geschicklichkeit de obachters größer oder kleiner sein können. Sind die Instrumente sch besitzt der Beobachter nicht die notwendige Geschicklichkeit, oder w er nicht die gehörige Sorgfalt an, so können die Beobachtungsfehle solche Größe erreichen, daß die Messungen das Gesetz gar nicht erk lassen; man würde dann gar keine oder auch sehr viele algebraisch ziehungen finden, welche die beobachteten Werte mit der gleichen Ge keit wiedergeben, und keine dieser Beziehungen würde nach den Mess den Vorzug verdienen.

Haben aber die Instrumente die nötige Feinheit, und hat der Beob die erforderliche Sorgfalt angewandt, so findet man immer eine Bezie welche die beobachteten Werte am genauesten wiedergibt, und inde erwägt, daß vollkommene Genauigkeit nicht erreicht werden kann, da diese Beziehung als den Ausdruck des physikalischen Gesetzes betra

Hierbei sind aber noch folgende Punkte zu beachten. Da m einer hinreichend großen Zahl von Messungen ebenso oft Wahrschei keit hat, daß die beobachteten Werte zu klein als daß sie zu groß so müssen im allgemeinen ebenso viele Werte kleiner als größer sei diejenigen, welche das aus den Messungen abzuleitende Gesetz ve Findet man dagegen, daß die gefundenen Werte, wenn auch innerh Grenzen der Beobachtungsfehler, stets größer oder stets kleiner sind, man dennoch schließen, daß das Gesetz nicht genau besteht. Wir sehen, daß die Erkenntnis der nicht ganz strengen Gültigkeit des Ma schen Gesetzes lange Zeit dadurch verzögert wurde, daß Arago und D diese Vorsicht bei den aus ihren Versuchen gezogenen Schlüssen verab

Die Abweichungen der beobachteten Werte von den vom verlangten müssen ferner ganz unregelmäßig sein, dieselben dürfe eine bestimmte Gesetzmäßigkeit zeigen. Würde man finden, daß kleine Werte der gegebenen Größe der beobachtete Wert der v selben abhängigen Größe immer größer, für große dagegen immer ist als der vom Gesetze verlangte, so würde man auch dann nicht dürfen, daß das aus den Messungen abgeleitete Gesetz der Wir vollständig entspricht; wir dürfen es auch dann, wie in dem vorig nur für ein annähernd richtiges halten.

Wie groß in den einzelnen Fällen die Beobachtungsfehler se wie nahe die beobachteten Werte den wirklich stattfindenden e können, das läßt sich nicht allgemein feststellen; es hängt das

gleichen Umständen von der Schwierigkeit der Messungen ab. Man hat in jedem Falle die Grenze der erreichbaren Genauigkeit zu bestimmen, in welcher Weise, das werden wir später bei den einzelnen Untersuchungen kennen lernen. Das aber ist immer festzuhalten, daß, wenn Beobachtungen ein Gesetz bestätigen sollen, die Differenzen des beobachteten und gesetzmäßigen Wertes nur ein kleiner Bruchteil des erstern sein dürfen.

Die in der Physik gebräuchlichen Maße.

Die Maße, welche in der Physik angewandt werden, sind dem neufranzösischen Maßsystem entnommen, welches den großen Vorzug hat, daß es alle Maßbestimmungen auf ein und dieselbe Einheit, die des Längenmaßes zurückführt. Die Einheit des französischen Längenmaßes ist das Meter. Dasselbe ist von der Länge eines Erdmeridians abgeleitet, und zwar wurde der zehnmillionte Teil des durch genaue Messungen bestimmten Quadranten eines Erdmeridian dazu gewählt. Später hat sich zwar ergeben, daß in die dem Meter zugrunde liegenden Messungen sich ein kleiner Fehler eingeschlichen hat, da aber die Maßeinheit einmal festgestellt und verbreitet war, so hat man es unterlassen, dieselbe darnach zu ändern. Das Meter ist sonach um ein sehr Geringes von dem zehnmillionten Teile eines Erdmeridianquadranten verschieden. Das Originalmeter, nach welchem alle übrigen Maßstäbe abgeglichen werden, ist in den Archiven des internationalen Bureau für Maße und Gewichte zu Paris (Sèvres) niedergelegt.

Man teilt das Meter nach dem Dezimalsystem

1 Meter = 10^{dc} Dezimeter = 100^{cm} Zentimeter = 1000^{mm} Millimeter.

Im deutschen Reiche ist seit dem 1. Januar 1872 dasselbe Maßsystem eingeführt worden. Als deutsche Bezeichnung ist für das Meter der Name Stab, für das Zentimeter Neuzoll und für das Millimeter der Name Strich gewählt, welche Bezeichnungen indessen gegenüber den ältern oben angeführten wenig in Gebrauch sind.

Früher legte man in Frankreich und Deutschland und noch jetzt in vielen Ländern die willkürlich gewählte Einheit des Fußes (ungefähr von der Länge des menschlichen Fußes) zugrunde.

Eine Vergleichung der wichtigsten Fußmaße, wie sie bisher gebraucht wurden, mit dem Metermaße gibt folgende Zusammenstellung:

Meter	Pariser Fuß	Preußen Rhnl Fuß	England Fuß	Östreich Wiener F.	Baiern Fuß	Baden Fuß	Sachsen Fuß	Schweden Fuß
1 =	3,078444	3,186199	3,280899	3,163446	3,426310	3,333333	3,531197	3,368126

Dem hier angegebenen preußischen ist das dänische, dem englischen das russische und dem badischen das schweizerische Fußmaß an Größe gleich.

Der Fuß wird entweder duodezimal, in 12″ Zoll, der Zoll in 12‴ Linien oder dezimal, in 10″, der Zoll in 10‴ Linien eingeteilt.

Das Flächenmaß wird in dem metrischen System durch Quadrierung des Meters erhalten und ebenso das Körpermaß durch Kubation des Meters

1^{qm} Quadratmeter = 100^{qdm} = 10000^{qcm} = 1000000^{qmm}

1^{km} Kubikmeter = 1000^{kdm} = 1000000^{kcm} = $1000000000^{\mathrm{kmm}}$.

Es ist leicht darnach das Verhältnis der Quadrat- und Kubikfuße, Zolle usw. zum metrischen Flächen- und Körpermaße zu erhalten, z. B.

$1^{\text{qm}} = 9{,}476817\ \square'$ Paris $= 10{,}15187\ \square'$ preuß. etc.

$1^{\text{km}} = 29'{,}17385$ kub. Paris $= 32'{,}32587$ kub. preuß. etc.

Als Einheit des Hohlmaßes nimmt das metrische System den Rauminhalt eines Kubikdezimeters und nennt dieses Maß ein **Liter** (französisch Litre).

Dasselbe Hohlmaß ist jetzt auch als Einheit im deutschen Reiche akzeptiert.

Früher wurde bei uns, und noch jetzt in den Ländern, welche das metrische System nicht akzeptiert haben, das Hohlmaß aus dem Fußmaß verschieden gebildet. In Preußen war das Quart $= 64''$ kub., in Baiern das Maß $= 84''{,}304$ kub., in England ist die Gallone $= 277''{,}2738$ kub., das östreichische Maß ist $= 0'{,}0448$ kub. usf.

1 Liter = 0,8733386 preuß. Quart = 0,9254301 baier. Maß.
= 0,2200967 engl. Gallone = 0,7066483 östr. Maß.

Auch die Einheit des Gewichtes ist im metrischen Systeme aus jenem des Längenmaßes abgeleitet. Man geht vom Zentimeter aus und nennt **das Gewicht von einem Kubikzentimeter Wasser** bei der Temperatur 4^{0} C. Gramm.

Im gewöhnlichen Leben wird das Gewicht von einem Liter Wasser als Einheit genommen; dasselbe enthält 1000^{cm} kub. und wiegt daher 1000 Gramm. Dieses Gewicht wird Kilogramm genannt. Ein bei der Aufstellung des metrischen Systemes mit der größten Sorgfalt hergestelltes Kilogramm wird in den Pariser Archiven aufbewahrt. Da man mit viel größerer Genauigkeit zwei Gewichte miteinander vergleichen kann, als das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser bestimmen, so werden alle Normalgewichte nach dem Pariser Kilogramm abgeglichen.

Die Unterabteilungen des Grammes sind nach dem Dezimalsystem gebildet.

1 Gramm = 10 Dezigramme = 100 Zentigramme = 1000 Milligramme.

Besondere Zeichen werden für diese Unterabteilungen nicht benutzt, man schreibt sie als Dezimalstellen des Grammes.

Im deutschen Reiche ist seit Einführung des metrischen Systems auc dieses Gewichtssystem eingeführt, nur wurde anfänglich als Einheit di Hälfte des Kilogramms, das Pfund, genommen, jetzt wird fast ausschließ lich nach Kilogramm und Gramm gerechnet. Die in andern Länder gewählten Gewichtseinheiten, die meist den Namen Pfund führen, sind vo dem halben Kilogramme nicht sehr verschieden. Eine Vergleichung de wichtigsten Pfunde mit dem Kilogramm bietet folgende Zusammenstellung

1 Kilogramm =	2,204 597	Pfd.	englisch Avoirdupois
	1,785 675	„	östreichisch
	2,441 883	„	russisch
	2,002 768	„	dänisch und norwegisch
	2,351 063	„	schwedisch Schalgewicht

Das Pfund wird meist in 16 Unzen, wie in England, oder in 32 L eingeteilt.

In den Niederlanden, Spanien und Italien ist das metrische Syst eingeführt, zum Teil nur mit andern Benennungen.

Um eine Richtung im Raume mit einer andern zu vergleichen, hat man ein Maß für Winkel oder Richtungsverschiedenheiten eingeführt; man teilt zu dem Ende überall den Kreisumfang in 360 gleiche Teile, deren einer ein Grad genannt wird. Der Grad wird in 60′ Minuten, die Minute in 60″ Sekunden geteilt.

Die Erscheinungen, welche wir in der Physik zu untersuchen haben, treten nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich verschieden auf. Wir haben daher in vielen Fällen auch die Zeit zu messen. Das Zeitmaß ist auf die Länge des Tages gegründet, es ist

1 Tag mittlerer Zeit = 24 Stunden

1^h Stunde = 60′ Minuten

1′ Minute = 60″ Sekunden.

Bei den physikalischen Zeitangaben wird meist die Sekunde als Zeiteinheit gewählt.

Einige Meßinstrumente.

Der Komparator.

Der Angabe der in der Physik gebräuchlichen Maße lassen wir eine kurze Beschreibung der ohne besondere Theorie in ihrem Prinzip verständlichen Meßinstrumente, der Längenmeßinstrumente und der Winkelmeßinstrumente folgen.

Die Grundlage für alle Längenmessungen ist das Meter, und zwar wird, wie vorhin erwähnt wurde, als das Normalmeter das in den Pariser Archiven befindliche aus Platin-Iridium gefertigte Meter angenommen. Die sämtlichen in Gebrauch befindlichen Meter sind entweder direkt mit dem Pariser Normalmeter verglichen, oder nach solchen dargestellt, welche mit den Pariser Metern verglichen waren.

Zur Vergleichung der Längenmaße wendet man Komparatoren an, welche verschieden eingerichtet sind, je nachdem man Endmaße, das heißt Maße vergleichen will, welche zwischen den Endpunkten des Maßstabes eine bestimmte Länge haben sollen, oder Strichmaße, das heißt solche, welche zwischen zweien auf dem Maßstabe gezogenen Strichen eine bekannte Länge haben. Wir begnügen uns damit, einen für die Vergleichung von Endmaßen konstruierten Fühlhebelkomparator zu beschreiben[1].

Eine breite Platte von gehobeltem Gußeisen dient dem Apparat (Fig. 1) als Basis.

Diese Platte besitzt an dem einen Ende ein mit Schrauben befestigtes stählernes Aufsatzstück C; an diesem befindet sich eine vorspringende stumpfe Schneide, gegen welche das Meter fest angelegt wird. Gegen das andere Ende des Apparats hin ist ein stählerner Stift DE angebracht, der seiner Länge nach gleiten kann; man kann ihn von D nach E hin verschieben, aber eine Spiralfeder drückt ihn immer nach D hin zurück. Der Meßapparat des Instrumentes wird von einem um eine Axe G beweglichen Winkelhebel ZGE, dem Fühlhebel, gebildet. Der Winkelhebel hat einen

[1] Andere Komparatoren sehe man im ersten Bande von *Karstens* Encyklopädie der Physik 1869 p. 502 ff und *Wild*, Bericht über die Reform der schweizerischen Urmaße. Zürich 1868.

sehr kurzen Arm *G E*, der durch eine Feder *F* immer an das Ende *E* des Stiftes *D E* angedrückt ist, und einen 100mal längeren Arm *Z G*, dessen Ende auf einem geteilten Kreisbogen sich bewegt. Bei *L* befindet sich eine Lupe, durch welche man scharf beobachten kann, an welchem Teilstriche das Ende *Z* ansteht.

Fig. 1.

Um ein Meter zu prüfen, verfährt man folgendermaßen. Zunächst legt man den Etalon, mit welchem man den Maßstab vergleichen will, gegen die Scheide bei *C* und richtet ihn gerade durch Anschieben an die beiden festen Aufsatzstücke *M* und *N*. Der bewegliche Stift *D E* wird dann durch die ihn umgebende Spiralfeder gegen das Ende *A* des Etalons gedrückt; der Hebelarm *G E* wird durch die Feder *F* an das vordere Ende *E* des Stiftes *D E* angedrückt, und der Zeiger *G Z* stellt sich auf irgend einen Teilstrich der Teilung ein. Man beobachtet und bemerkt sich denselben.

Darauf ersetzt man den Etalon durch den Maßstab, der geprüft werden soll. Wenn der Zeiger genau auf demselben Teilstrich einsteht, so ist der Maßstab richtig, zeigt er auf eine andere Stelle der Teilung, so ist der Maßstab unrichtig und muß, je nachdem der Zeiger sich mehr oder weniger entfernt von Z einstellt, verkürzt oder verlängert werden.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu beurteilen, genügt es zu beachten, daß der Unterschied der beiden verglichenen Maßstäbe in der Bewegung des Hebelendes *Z* hundertmal größer erscheint, weil der Arm *Z G* des Winkelhebels hundertmal größer ist als der Arm *G E*. Da man eine Verschiebung von $0^{mm},1$ auf der Teilung mit Hilfe der Lupe noch recht gut wahrnehmen kann, so kann man einen Unterschied der Maßstäbe von $0^{mm},001$ noch gut bestimmen.

Die Vergleichung eines Maßstabes mit dem Etalon ist aber dennoch meist nicht so einfach, da nur selten der verglichene Maßstab von Platin verfertigt ist. Die Wärme dehnt nämlich alle Körper aus, und der als Etalon benutzte Platinmaßstab hat nur bei der Temperatur des schmelzenden Eises genau die Länge des als Einheit angenommenen Meters. Man muß daher alle Vergleichungen bei dieser Temperatur ausführen oder, wenn man sie bei einer andern Temperatur ausgeführt hat, Rücksicht nehmen auf die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, welche für die verschiedenen Maßstäbe eine andere ist, wenn sie nicht aus dem gleichen Material gefertigt sind. Dadurch wird das Verfahren etwas komplizierter; wir werden später sehen, wie man diese notwendigen Korrektionen anbringen kann.

Mit Hilfe des Komparators kann man sich also jeder Zeit ein genaues Meter verschaffen. Ist das geschehen, so müssen wir dasselbe in seine Unterabteilung, Dezimeter, Zentimeter und Millimeter teilen. Diese Operation geschieht mittels der Teilmaschine.

Die Teilmaschine.

Der wichtigste Teil dieses Apparates ist eine Mikrometerschraube. Dieselbe ist auf einem möglichst homogenen Zylinder von hartem Stahl eingeschnitten und hat eine Länge von 50—80 Zentimeter. Bei der Herstellung derselben sucht man es dahin zu bringen, daß ein Schraubengang genau einem Millimeter entspricht, das heißt also einmal zu erreichen, daß die Höhe aller Schraubengänge unter sich gleich und jeder gleich einem Millimeter ist. Es muß also die Anzahl der Schraubengänge genau der Anzahl Millimeter entsprechen, welche der Zylinder lang ist. Absolute Genauigkeit kann natürlich nicht erreicht werden, die Ungenauigkeiten dürfen aber nur sehr klein sein und müssen durch Messung bestimmt werden. Bei der Beschreibung des Instrumentes und seiner Anwendung nehmen wir an, daß die Schraube möglichst genau gearbeitet sei.

Fig. 2.

An seinen beiden Enden ist der mit der Schraube versehene Zylinder in zwei Zapfenlager P und B (Fig. 2) eingeschlossen, in denen er sich mit mäßiger Reibung drehen kann, ohne die geringste fortschreitende Bewegung anzunehmen: eine Kurbel A, welche man mit der Hand dreht, bringt diese Bewegung hervor.

Die Schraube geht in einer Mutter Q, welche sie umfaßt, und welche sich nicht mit derselben drehen kann. Die Mutter bewegt sich daher vorwärts oder rückwärts, wenn man die Schraube in dem einen oder andern Sinne dreht. Die Mutter teilt ihre Bewegung einer stählernen Platte F mit, welche an ihr befestigt ist. An der Platte F ist ein Grabstichel H angebracht, der also genau die Bewegung der Platte und somit der Schraubenmutter Q annimmt.

Durch eine ganze Umdrehung der Kurbel schreitet der Grabstichel um die Höhe eines Schraubenganges, also um 1^{mm} fort, durch eine zehntel, hundertstel, tausendstel Umdrehung bewegt sich auch der Stichel um $0^{mm},1$, $0^{mm},01$, $0^{mm},001$ weiter. Es genügt daher den Bruchteil der Umdrehung der Schraube zu kennen, um zu wissen, wie weit der Stichel vorgeschoben ist.

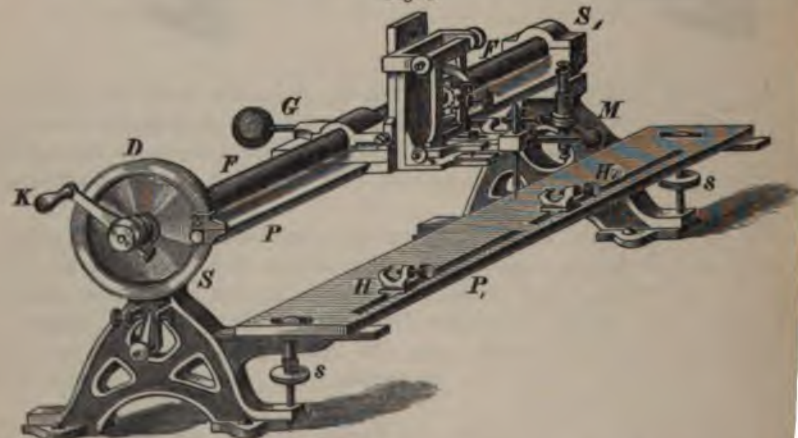
Zu dem Zwecke ist an dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube auf den Zylinder eine kreisförmige Scheibe D aufgesetzt, welche sich mit der Schraube dreht, und deren Rand in 100 Teile geteilt ist; ein unbeweglicher an dem Tisch des Apparates angebrachter Zeiger C gibt dann an, welchen Bruchteil einer Drehung die Schraube gedreht, um welchen Bruchteil eines Millimeter somit der Stichel vorgeschoben ist.

Will man z. B. eine Glasröhre teilen, so legt man dieselbe, wie die Figur zeigt, auf zwei Lager, in denen sie durch zwei Fäden L und K festgehalten wird, sodaß sie sich drehen, aber nicht ihrer Länge nach ver-

schieben kann. Man nimmt als Stichel einen Schreibdiamanten, oder besser noch, man überzieht vorher die Röhre mit einer dünnen gleichmäßigen Schicht von Wachs oder Paraffin, und nimmt einen Stahlstichel und führt denselben durch passendes Drehen der Schraube an das Ende der Röhre. Dort macht man den ersten Strich, indem man den Stichel, mit der einen Hand sanft niederdrückt, und mit der andern Hand die Röhre in ihren Lagern herumdreht, sodaß die Spitze des Stichels die Wachsschicht von dem Glase entfernt. Man dreht dann die Kurbel um n Teile des Kreises, bewirkt dadurch ein Fortschreiten des Stichels um $n \cdot 0{,}01^{\mathrm{mm}}$ und zieht den zweiten Strich; so fährt man fort, bis die Teilung auf die gewünschte Länge vollendet ist. Schließlich ätzt man die Teilung auf dem Glase durch Flußsäure.

Die Teilmaschine in dieser einfachen Form ist zur Anwendung nicht gerade bequem, indem sie zu jeder Operation die größte Aufmerksamkeit fordert. Man hat deshalb die Teilmaschine in ihrem mechanischen Teile vielfach verbessert, besonders um den richtigen Abstand der Teilstriche sicher zu erhalten, und die Teilstriche besser ziehen zu können. Fig. 3 zeigt die Teilmaschine in der Form, wie sie von Bianchi in Paris (Rue de Rennes) geliefert wird.

Fig. 3.



Die Mikrometerschraube F, bei meinem Apparat 56 Zentimeter l[...] hat ihr Lager in dem eisernen Gestell SS_1. An demselben Gestelle [...] zwei abgehobelte Eisenplatten P und P_1 befestigt, deren obere sorgf[...] eben gearbeitete Flächen der Achse der Schraube parallel sind. Die o[...] dieser Platten trägt einen Schlitten, an welchem der Stichel, resp. [...] denselben tragende später zu beschreibende Reißerwerk befestigt ist. [...] an dem Schlitten befindliche Mutter greift in die Mikrometerschraube [...] so daß die Drehung der Schraube den Schlitten fortbewegt. Die Schr[...] kann nur in einem Sinne, von K aus gesehen im Sinne der Beweg[...] eines Uhrzeigers gedreht und deshalb der Schlitten nur von S_1 aus g[...] K hin bewegt werden. Um den Schlitten im entgegengesetzten Sinn[...] wegen zu können, ist die Mutter des Schlittens aus zwei Teilen zusam[...]

gesetzt, und die obere Hälfte, in einem Gelenke drehbar, kann an dem Griffe G emporgehoben werden. Nur in diese obere Hälfte der Mutter sind Windungen eingeschnitten, so daß, wenn sie emporgehoben ist, der Schlitten frei auf der Platte verschoben werden kann. Die an dem Ende des Griffes angebrachte schwere Messingkugel bewirkt durch ihr Gewicht ein sicheres Eingreifen der Windungen der Mutter in jene der Schraube, wenn die obere Hälfte der Mutter niedergelassen ist.

Neben dem Reißerwerk ist an dem Schlitten ein Mikroskop M angebracht, durch welches man die gezogenen Teilstriche scharf sehen kann, und welches außerdem in nachher zu beschreibender Weise die Teilmaschine befähigt als Längenmeßapparat zu dienen.

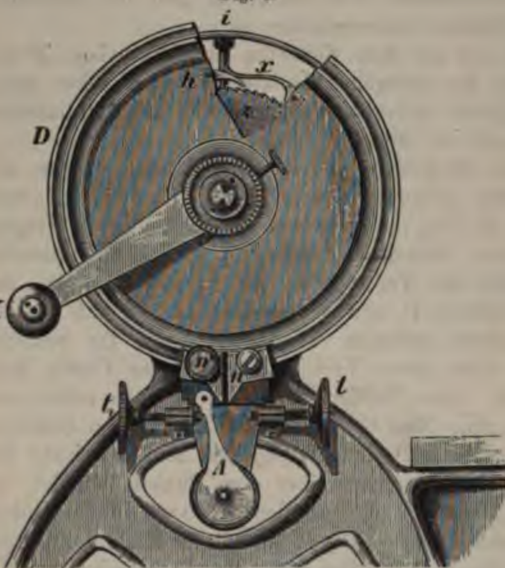
Die Platte P_1 dient zur Befestigung der Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen; zu dem Zwecke trägt sie in einem Schlitz verschiebbare Lager H, H_1, in welchen die betreffenden Gegenstände, Röhren, Maßstäbe etc. befestigt werden. Um bei zu teilenden Objekten verschiedener Breite die Teilung an der richtigen Stelle anbringen zu können, ist die Platte P_1 etwas verschiebbar, so daß sie der Mikrometerschraube etwas näher gebracht oder etwas von ihr entfernt werden kann. Gleichzeitig dient diese Verschiebbarkeit der Platte dazu die Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen, der Schraube genau parallel zu legen. Man bringt zu dem Zwecke den Schlitten zunächst an das eine Ende des zu teilenden Objektes und verschiebt die Platte P_1 so, daß der Stichel sich gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung beginnen soll. Dann bringt man den Schlitten an das andere Ende und bewirkt durch einen gelinden Druck auf dieses Ende der Platte, daß auch dort sich der Stichel gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung enden soll. Durch Anziehen der Schrauben s wird dann die Platte festgesetzt.

An dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube befindet sich auch an dieser Maschine die auf ihrem Umfange in 100 gleiche Teile geteilte Scheibe D; ein an dem Gestelle der Maschine befestigter Index läßt erkennen, um welchen Bruchteil des Umfanges die Schraube gedreht ist.

Bei der einfachen Teilmachine erfordert es große Aufmerksamkeit, daß man die Schraube von einem zu dem andern zu ziehenden Teilstrich nicht zu wenig oder zu viel dreht, es ist deshalb sehr schwierig, die Teilung genau gleichmäßig zu machen. Diese Schwierigkeit ist bei der vervollkommneten Maschine durch einen besonderen Mechanismus gehoben. Zunächst kann man mit der Kurbel K die Schraube nur in dem einen Sinne drehen; zu dem Zwecke ist die Scheibe D, welche mit der Kurbel gedreht wird, nicht fest mit der Schraube verbunden, sondern für sich drehbar auf das Ende der Schraube aufgesetzt. Dreht man die Scheibe nach links herum, so bewegt sie sich ohne die Schraube mitzunehmen, nur bei der Drehung nach rechts herum wird auch die Schraube gedreht. Um das zu erreichen, ist unmittelbar neben der Scheibe und derselben parallel, wie Fig. 4 zeigt, in der ein Stück der Scheibe fortgenommen ist, auf die Schraube ein gezahntes Rad z gesetzt, und an der Scheibe D ist ein Haken h befestigt, welcher bei der Drehung nach links auf den Zähnen des Rades schleift, bei derjenigen nach rechts aber durch die Feder f auf das Zahnrad aufgedrückt wird, in die Zähne eingreift, und so die Schraube mitnimmt.

An der Scheibe D sind, wie Fig. 4 zeigt, zwei Nasen angebracht, n und n', von denen die eine n unveränderlich befestigt ist, während die andere n' an jeder Stelle des Umfangs eingeklemmt werden kann. Diese Nasen stoßen gegen einen Anschlag A, der an dem Gestelle der Maschine drehbar befestigt ist, und dessen Bewegung durch die Spitzen der Schrauben t und t_1 gehemmt wird. Die Schraube t wird so gestellt, daß wenn bei einer Drehung nach links herum der Anschlag A durch die Nase n gegen die Spitze von t gedrückt wird, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe D sich gerade am Index i befindet. Man kann dann mit der Kurbel K die Schraube nur so weit drehen, bis die Nase n' den Anschlag A gegen das Ende der Schraube t_1 drückt. In der Figur 4 angedeuteten Stellung der Nase n' würde das nach einer ganzen Umdrehung der Schraube sein, wenn man t_1 so stellt, daß

Fig. 4.

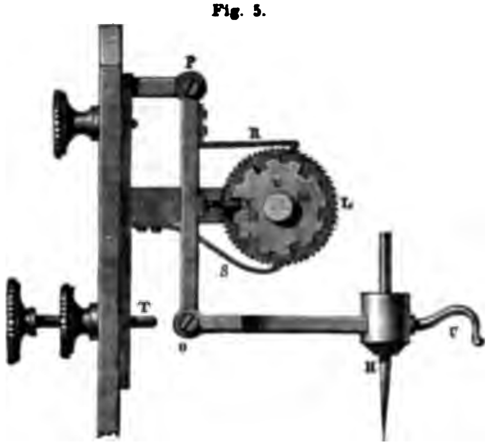


der Anschlag A gegen das Ende von t_1 drückt, wenn sich wieder der Nullpunkt der Teilung an dem Index i befindet. Um die Schraube weiter zu drehen, muß man erst die Scheibe wieder nach links drehen, bis die Nase n den Anschlag A wieder gegen das Ende von t drückt. Die in Fig. 4 dar gestellte Anordnung würde somit die geeignete sein, um, ohne besonder Aufmerksamkeit auf die Drehung verwenden zu müssen, einen Gegenstand etwa einen Maßstab mit einer Millimeterteilung zu versehen. Man stellt durc Drehung nach links die Scheibe D so, daß der Nullpunkt der Teilung de Scheibe am Index i sich befindet, wenn die Nase n den Anschlag A an drückt. Man bringt dann den Maßstab in die richtige Lage, so daß de Stichel den ersten Strich dort zieht, wo auf demselben die Teilung beginne soll. Man zieht den betreffenden Strich; dann dreht man die Scheibe rech herum, bis die Nase n' den Anschlag gegen das Ende von t_1 drückt; bei dies Drehung wird der Schlitten um 1^{mm} fortgeschoben, da bei derselben d Schraube einmal vollständig gedreht wurde. Man zieht den zweiten Strich u dreht dann die Scheibe zunächst links herum, bis die Nase n den Anschlag gegen t drückt, und wieder rechts herum, bis die Nase n' wieder den Anschl trifft. Die erste Drehung ließ den Schlitten stehen, brachte aber die Schei in die Lage, welche eine Drehung nach rechts und damit eine Drehung d Schraube möglich machte. Man zieht den dritten Strich und so fort, sod man zwischen je zwei Strichen die Scheibe einmal nach links, einmal na rechts drehen muß, bis der Anschlag die Bewegung der Scheibe hem

Bei dieser Einrichtung besteht ein Mangel darin, daß die Verschiebung immer nur um ein vielfaches der Zahnbreite des Rades *z* geschehen kann, somit durch dieselbe auch die Genauigkeit der einzelnen Abstände der Striche bedingt ist. Neuerdings ist es nun gelungen, durch einen komplizierten Mechanismus, der hier nicht beschrieben werden kann, die Arretierung für den Stift mit beliebiger Genauigkeit und in jedem gewünschtem Maßstabe ohne einen endlichen Fehler einzustellen. Max Wolz zu Bonn, der solche Maschinen baut, hat dieselben auch noch in anderer Richtung vervollkommt. Der Antrieb durch die Hand ist ersetzt durch einen maschinellen, wozu irgend ein elektrischer Motor benutzt werden kann. Sämtliche Bewegungen der Teilmaschinen werden automatisch ausgeführt und selbst nach Beendigung der Teilung der Motor selbsttätig ausgeschaltet.

Will man den Maßstab mit einer Bianchischen Maschine statt in Millimeter in kleinere Teile teilen, so hat man nur die Nase *n'*, welche die Drehung nach rechts hemmt, zu versetzen. Entfernt man z. B. die Nase um ein Viertel Umkreis nach links hin, so würde die Bewegung nach rechts jedesmal gehemmt, wenn die Schraube um dreiviertel Umdrehung gedreht, somit der Stichel um 0,75^{mm} verschoben wäre. Wir erhielten somit eine Teilung, bei der je zwei Teilstriche um 0,75^{mm} voneinander entfernt wären.

Fig. 5.



Man sieht auf einem Maßstabe, den man teilen will, nicht alle Striche gleich lang, sondern den ersten lang, dann vier kurz und den zehnten mit dem ersten von gleicher Länge. Bei der alten Maschine mußte die Hand des Teilenden diese Gruppierung der Linien besorgen; das erforderte Geschicklichkeit und stete Aufmerksamkeit, ohne daß man jedoch imstande war, die gewünschte Regelmäßigkeit zu erreichen. Die neue Einrichtung des Grabstichels jedoch, wie sie Fig. 3 perspektivisch und Fig. 5 vom Profil zeigt, enthält einen besonderen Mechanismus zur Lösung dieser Aufgabe. Man hat in der Hand den kleinen Haken *U* (Fig. 5).

Man zieht denselben anfangs gegen sich hin, indem man ihn ein wenig aufhebt, dann schiebt man ihn leicht niederdrückend zurück. Dabei dringt der Stift ein wenig in das zu teilende Objekt ein und hinterläßt den Strich. Um dem Striche die gewünschte Länge zu geben, genügt es, den Gang des Stichels passend zu hemmen.

Dazu ist über dem Stichel ein Rad *LVX* (Fig. 5) angebracht, welches sich um eine feste Achse drehen kann; das Rad besteht aus zwei kreisförmigen Platten, deren eine *L* auf ihrem Umfange mit Zähnen versehen ist, die andere *VX* aber mit Ausschnitten, welche abwechselnd tiefer und weniger tief sind, getrennt durch Zwischenräume von gleicher Länge, die

durch den Umfang der Scheibe gebildet werden. In dem Augenblick, wenn man den Haken U anzieht, bewegt sich ein vorspringendes Stück bei X gegen das Rad, dringt in einen tieferen Ausschnitt ein und hemmt, auf den Boden desselben aufstoßend, die Bewegung des Schreibstiftes. Wenn man dann den Stift zurückschiebt, so bewegt er sich so weit, bis er an den Vorsprung T stößt, welcher ihm nicht weiterzugehen erlaubt.

Während dieser Bewegung greift ein Haken R in die Zähne des Rades L, dreht es um einen Zahn voran und verschiebt den Ausschnitt des nebenliegenden Rades V. Wenn man dann den Stift von neuem anzieht, so trifft er nicht mehr auf einen Ausschnitt, sondern auf den äußeren Umfang des Rades, welcher an Stelle des Ausschnittes getreten ist. Die Bewegung des Stichels geht daher nicht so weit, und der von ihm gemachte Strich wird kürzer. Bei jeder Bewegung geht dieselbe Drehung der Räder vor, und kommt der fünfte Strich, so dringt der Stift X wieder in einen, aber weniger tiefen Ausschnitt. Dadurch wird der Strich länger als die vier vorhergehenden, aber kürzer als der erste. Kurz der Arbeiter braucht sich nicht um die Länge der Teile zu bekümmern, sie werden genau gezogen, und jedesmal der fünfte und zehnte sind durch ihre größere Länge hervorgehoben.

Wir haben bei der Beschreibung der Teilmaschine vorausgesetzt, daß die Schraube vollkommen genau geschnitten, daß also die Höhe aller Schraubengänge genau 1^{mm} sei. Wenn auch die Maschinen, besonders die von Bianchi vortrefflich gearbeitet sind, so muß man dieselben doch prüfen. Um zunächst zu untersuchen, ob die mittlere Höhe eines Schraubenganges in der Tat 1^{mm} ist, ob also die auf der Schraube durch 500 Umdrehungen bewirkte Verschiebung genau $0{,}5^{m}$ ist, nimmt man einen mi[t] einem Komparator sorgfältig verglichenen Maßstab dieser Länge, und leg[t] denselben wie ein zu teilendes Objekt auf die Platte P_1. Man stellt dan[n] das an dem Schlitten befindliche Mikroskop genau auf den Nullpunkt de[r] Teilung ein und vollführt 500 Umdrehungen der Schraube; es muß dan[n] das Mikroskop sich am andern Ende des Maßstabes befinden. Ist da[s] nicht der Fall, so entspricht die mittlere Höhe eines Schraubenganges nich[t] genau 1^{mm}. Bei Vergleichung der hier beschriebenen Teilmaschine vo[n] Bianchi mit einem Normalmaßstab fand ich, daß auf 540^{mm} im Mitt[el] 540,08 Umdrehungen der Schraube kamen. Die Höhe eines Schraube[n]ganges ist daher im Mittel

$$\frac{540}{540{,}08} = 0{,}99985$$

oder der Schraubengang ist um 15 Hunderttausendstel eines Millimeters [z]u klein. Es ist das ein Fehler, der in den meisten Fällen zu vernachlässig[en] ist, ja der, wie wir im zweiten Bande erkennen werden, schon durch klei[ne] Differenzen der Temperatur bedingt resp. überwogen wird.

Einer weiteren Prüfung bedarf es, um zu erkennen, ob die einzeln[en] Schraubengänge von gleicher Höhe sind. Man prüft das, indem m[an] eine gegebene Teilung, etwa von 20 bis 30^{mm}, die man sich mit d[er] Maschine selbst anfertigen kann, an der Maschine verschiebt. Man brin[gt] sie zunächst an das eine Ende der Maschine, stellt das Mikroskop auf d[as] eine Ende der Teilung ein und verschiebt durch Drehung der Schraube d[en] Schlitten, bis das Mikroskop auf dem anderen Ende der Teilung einste[llt]

Man bringt dann wieder das erste Ende der Teilung unter das Mikroskop, verfährt wie vorher und so fort. Hat man eine Teilung von 30^{mm} genommen, so müssen, wenn die Schraubengänge alle gleich sind, stets 30 Umdrehungen der Schraube das Mikroskop von dem einen Ende der Teilung zum andern bringen. In dieser Weise fand ich z. B. bei meiner Teilmaschine, daß die Schraubengänge in der Nähe der Enden nur etwa $0{,}9996^{mm}$ betrugen, daß sie gegen die Mitte hin von beiden Seiten her größer wurden, etwa 150^{mm} von beiden Enden entfernt den Wert 1^{mm} erhielten und auf den mittleren 250^{mm} zwischen 1 und $1{,}0003^{mm}$ schwankten. Es sind das Fehler, die in den allermeisten Fällen ganz zu vernachlässigen sind.

Die Beschreibung der Methoden, nach denen die Höhe der Schraubengänge zu prüfen ist, läßt gleichzeitig erkennen, daß die Teilmaschine auch ein wertvoller Meßapparat ist; man kann die Länge von Platten, Röhren, kurz aller Gegenstände, die man wie die mit einer Teilung zu versehenden Objekte auf der Platte P_1 der Teilmaschine befestigen kann, mit derselben auf das schärfste messen. Wir werden sehen, wie die Teilmaschine vielfach zu diesem Zwecke verwertet wird.

Die mit der Teilmaschine herzustellenden Maßstäbe teilt man selten in kleinere Abteilungen als Millimeter oder höchstens $0{,}5^{mm}$, weil bei zu enge gezogenen Teilungen die Ablesung zu große Schwierigkeit bietet. Um Unterabteilungen des Millimeters mit den Maßstäben noch genau bestimmen zu können, bringt man an denselben einen Nonius an.

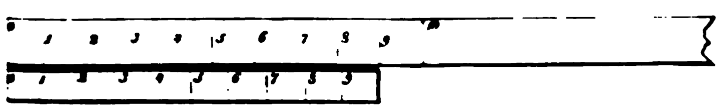
Der Nonius.

Nehmen wir einen Maßstab von genau 9^{mm} Länge und teilen ihn mit der Teilmaschine in 10 genau gleiche Teile, legen ihn dann der Länge nach an unser geteiltes Meter, sodaß er längs des geteilten Randes verschoben werden kann, so ist dieser einfache Apparat ein Nonius. Da die Länge des Maßstabes 9^{mm} in 10 Teile geteilt ist, so ist der Wert jedes Teilstriches $0{,}9^{mm}$. Der Wert der Teilung unseres Metermaßes ist dagegen 1^{mm}. Der Unterschied beider daher

$$1^{mm} - 0^{mm}{,}9 = 0^{mm}{,}1.$$

Es folgt daraus, daß, wenn die beiden Teilstriche 0 (Fig. 6) zusammenfallen, die beiden Teilstriche 1 um $0{,}1^{mm}$ von einander abstehen,

Fig. 6.

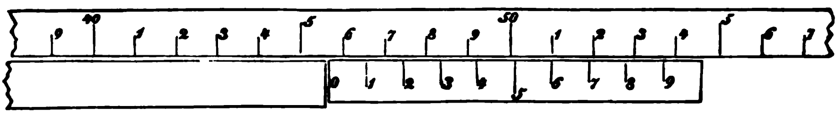


die beiden Teilstriche 2 um $0^{mm}{,}2$ u. s. f., bis der Teilstrich 10 des Nonius mit dem Teilstrich 9 des Maßstabes zusammentrifft. Ähnlich wird es sein, wenn statt der Teilstriche 0 zwei andere Teilstriche aufeinander treffen, von diesen aus werden dann die beiden nächsten zu jeder Seite um 1, die folgenden um 2 Zehntel eines Millimeters differieren.

Nehmen wir nun an, man wolle die Länge eines Objektes mit unserm Metermaß bestimmen, und es zeigte sich, daß es $4^{cm}\,5^{mm}$ und einen Bruch-

teil eines Millimeters (Fig. 7) lang wäre. Dieser Bruchteil wird mittels des Nonius bestimmt.

Fig. 7.



Zu dem Ende führt man den Nonius, bis er das Ende des zu messenden Objektes berührt, und sucht, welcher Teilstrich des Nonius mit einem des Maßstabes zusammenfällt. In unserer Abbildung ist es der sechste.

Von diesem ausgehend findet man dann, daß die Teilstriche 5, 4, ... 0 des Nonius um $0^{mm},1$, $0^{mm},2$, ... $0^{mm},6$ hinter denen des Maßstabes zurückbleiben. Der auszuwertende Bruchteil ist demnach $0^{mm},6$, sein Wert ist in Zehnteilen eines Millimeters angegeben durch die Zahl, welche neben dem mit einem des Maßstabes zusammenfallenden Teilstrich steht.

Wir haben bei der Beschreibung des Nonius vorausgesetzt, daß derselbe eine Länge von 9^{mm} habe und in 10 Teile geteilt sei. Dadurch erhielten wir die Teile des Millimeters in Zehnteln angegeben. Wir können nun ebensogut die Länge desselben zu 19^{mm}, 29^{mm}, 39^{mm} nehmen und diese Länge in 20, 30, 40 Teile teilen; wir erhalten dann Zwanzigstel Dreißigstel, Vierzigstel eines Millimeters. Wenn man jedoch die Teile zu sehr vervielfältigt, so tritt der Übelstand ein, daß zur Rechten und Linken der koinzidierenden Teilstriche eine Anzahl so wenig voneinander abstehender Teilstriche sich findet, daß sie noch zusammenzufallen scheinen und man daher nicht imstande ist anzugeben, welche nun eigentlich di koinzidierenden Teile sind. Indem man die Teilstriche möglichst fein zieh und dieselben durch ein Mikroskop betrachtet, kann man zwar die Genauig keit ziemlich weit, vielleicht bis auf 0,01 eines Millimeters bringen; e gibt jedoch immer eine Grenze, welche nicht überschritten werden kan

Der Nonius kann an allen Teilungen, auch an geteilten Kreisen a gebracht werden; dort befindet er sich auf den Alhidaden. Wir werd ihn an allen feineren Meßapparaten wiederfinden.

Das Sphärometer.

Die Mikrometerschraube dient nicht allein dazu Längen zu teil sondern sie findet auch ganz besonders Anwendung, wenn es sich dar handelt, sehr kleine Abstände zu messen. Es folge hier die Beschreibu eines Apparates, in welchem sie benutzt wird, um sehr kleine Höhenunt schiede, z. B. die Dicke von Platten oder Drähten, mit größter Genau keit zu messen, des Sphärometers.

Der Hauptteil dieses Apparates (Fig. 8) besteht in einer möglic genau gearbeiteten Mikrometerschraube, deren Gänge die Höhe von 0^{m} haben. Dieselbe bewegt sich in einer Mutter, welche unten in der Hülse sich befindet. Die Hülse A ist in dem Arm B unveränderlich befestigt u wird mittels desselben von dem Stativ SSG getragen, welches seiners auf dem Dreifuß DD aufgesetzt ist. Um durch dieses Stativ den App nicht einseitig zu belasten, ist bei G an der anderen Seite des Punktes,

welchem der Rahmen $S'S$ auf den Dreifuß gesetzt ist, ein Gegengewicht angebracht. Der Dreifuß ist mit Stellschrauben versehen, um den Apparat vertikal zu stellen. In der Büchse A befindet sich ein oben hervorragender Stahlstift J, welcher mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Wird die Mikrometerschraube in dem einen Sinne gedreht, so hebt sie den Stift J empor, wird sie in dem andern Sinne gedreht, so sinkt der Stift J durch sein eigenes Gewicht herab. Auf den Stift J kann ein kleiner Stahlteller aufgeschraubt werden oder eine ziemlich scharfe Schneide, wie sie die Figur an dem Stifte J' zeigt. Gerade über dem Stifte J ist durch den horizontalen Arm SH ein unten mit einer Schneide versehener Stift J' geführt, welcher in der Durchbohrung des Armes mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Auf der oberen Spitze dieses Stiftes ruht die um eine bei a befestigte Achse drehbare Libelle L. Damit die Libelle auf die Spitze des Stiftes J' nur einen sehr leisen Druck ausübt und so der Stift J' auf den leisesten Druck von untenher emporsteigt, ist auf der andern Seite der Achse a das Gegengewicht c angebracht.

Fig. 8.

Durch Heben oder Senken des Stiftes J', der mit seiner Schneide auf dem Teller oder der Schneide des untern Stiftes J ruht, kann man somit die eine Seite der Libelle heben oder senken, also immer dafür sorgen, daß die Libelle genau horizontal steht. Diese horizontale Stellung der Libelle ist das Hilfsmittel, um mit dem Apparate messen zu können.

Diese Messung selbst geschieht an der unten am Rahmen S angebrachten Millimeterteilung T und an der Scheibe Z, welche auf ihrem Rande eine Teilung trägt, welche den Umfang der Scheibe in 500 gleiche Teile teilt. Diese Scheibe ist unten an die Mikrometerschraube angeschraubt, so daß die Achse der Schraubenspindel gleichzeitig die Achse der Kreisscheibe ist. Wie erwähnt, ist die Höhe eines Schraubenganges der Mikrometerschraube ein halbes Millimeter, es bedarf daher zwei Umdrehungen der Schraube, um die Scheibe an der Teilung 1^{mm} zu heben. Die Teilung T ist an dem Apparate so befestigt, daß jedesmal, wenn die Scheibe einen Teilstrich passiert, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe an dem Rande der Platte T vorübergeht. Die auf die Teilung T gerichtete Lupe l hat den

Zweck, genau zu erkennen, welche Stellung zwischen den Teilstrichen die Scheibe hat.

Aus der Beschreibung des Apparates ergibt sich leicht, wie bei den Messungen verfahren werden muß. Setzen wir voraus, es solle die Dicke einer planparallelen Glasplatte gemessen werden. Man schraubt auf die Spitze des Stiftes J den kleinen Stahlteller und schraubt die Mikrometerschraube so hoch empor, daß die Libelle genau horizontal steht. Man liest dann die Stellung der Scheibe Z an der Teilung T ab. Befinde sich der Rand der Scheibe zwischen den Teilstrichen 2 und 3, aber näher an 2, und sei der Teilstrich 325 der auf der Scheibe angebrachten Teilung an dem Rande der Platte T. Da die Höhe der Schraubengänge $0{,}5^{mm}$ ist, so entspricht der Drehung der Schraube um einen Teilstrich ein Heben oder Senken der Mikrometerschraube um $0{,}001^{mm}$. Die soeben abgelesene Stellung der Scheibe gibt somit an, daß, wenn die Libelle genau horizontal steht, und zwischen der Schneide J' und dem Teller J nichts zwischen geschoben ist, daß dann die Scheibe sich $2{,}325^{mm}$ unter dem Nullpunkte der Teilung T befindet.

Nun wird die Mikrometerschraube und damit der Teller J gesenkt, soweit, daß man die Glasplatte auf denselben legen kann. Ist das geschehen, so wird die Mikrometerschraube wieder gehoben, bis die Schneide J' von der Glasplatte berührt wird, und dann die Mikrometerschraube vorsichtig weiter gedreht, bis die Libelle wieder genau horizontal steht. Diese Beobachtung beweist, daß die Schneide J' wieder dieselbe Höhe hat wie vorhin, die nach oben gewandte Fläche der Glasplatte ist also in der Lage, in der vorhin der Teller J war, der Teller J und damit die Scheibe Z ist also um die Dicke der Glasplatte niedriger wir vorhin. Wir erhalten also die Dicke der Glasplatte, wenn wir von der jetzt beobachteten Stellung der Scheibe die vorher bestimmte Stellung abziehen. Befinde sich die Scheibe jetzt zwischen dem Teilstriche 3 und 4, aber näher bei 4, und sei der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte T. Da die Scheibe näher bei 4 als bei 3 ist, so folgt, daß sie mehr als $3{,}5^{mm}$ tiefer ist als der Nullpunkt der Teilung, und zwar, da der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte T ist, um $0{,}438^{mm}$. Die jetzige Stellung der Scheibe ist also 3,938. Hiervon den vorhin bestimmten Wert 2,325 abgezogen gibt $1{,}613^{mm}$ als Dicke der Glasplatte. Zur Erreichung größerer Genauigkeit wird man die Messung einige Male wiederholen. Da man die Libelle nicht ganz genau einzustellen imstande ist, so wird man bei den verschiedenen Messungen einige Teilstriche Differenz finden; man nimmt dann das Mittel aus den gefundenen Zahlen.

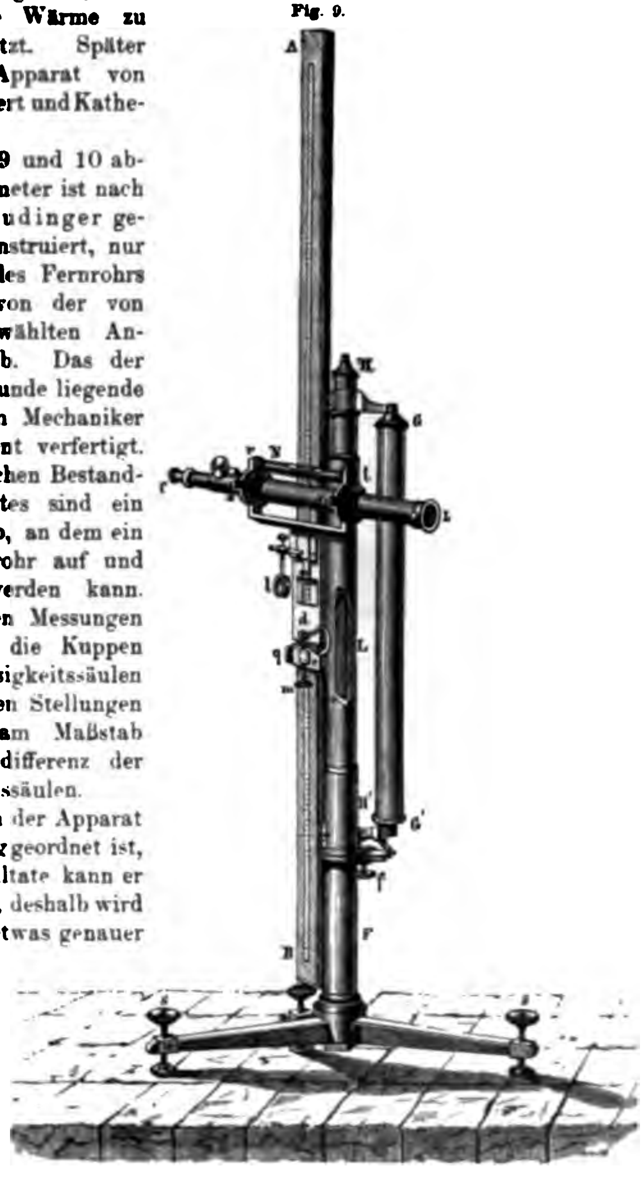
Zur Messung von Drähten wendet man an Stelle des Tellers auf dem unteren Stift die Schneide an; man schiebt dann ein kleines Stückchen des zu untersuchenden Drahtes zwischen die Schneiden, indem man im übrigen bei der Messung ganz in der angegebenen Weise verfährt.

Das Kathetometer.

Bei physikalischen Untersuchungen findet man sich oft in die Notwendigkeit versetzt, kleinere oder größere Höhenunterschiede zu messen, besonders von Flüssigkeitssäulen, ohne daß man an dieselben direkt einen Maßstab anlegen kann.

Zu diesem Zwecke haben zuerst die französischen Physiker Dulong und Petit einen besondern Apparat konstruiert und bei ihren Versuchen über die Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme zu Messungen benutzt. Später wurde dieser Apparat von Pouillet vergrößert und Kathetometer genannt.

Fig. 9.



Das in Fig. 9 und 10 abgebildete Kathetometer ist nach der ihm von Staudinger gegebenen Form konstruiert, nur die Anbringung des Fernrohrs Fig. 10 weicht von der von Staudinger gewählten Anordnung etwas ab. Das der Beschreibung zugrunde liegende Exemplar ist vom Mechaniker Schubart in Gent verfertigt.

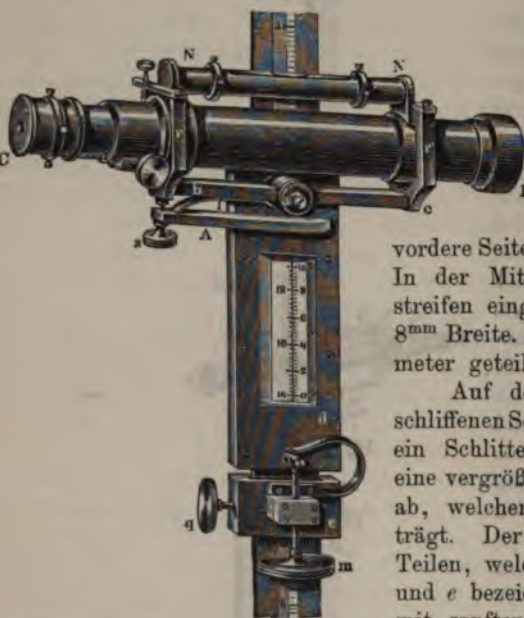
Die wesentlichen Bestandteile des Apparates sind ein vertikaler Maßstab, an dem ein horizontales Fernrohr auf und ab geschoben werden kann. Man stellt zu den Messungen das Fernrohr auf die Kuppen der beiden Flüssigkeitssäulen ein, und die beiden Stellungen des Fernrohres am Maßstab geben die Höhendifferenz der beiden Flüssigkeitssäulen.

So vorzüglich der Apparat ist, wenn er richtig geordnet ist, so unrichtige Resultate kann er andernfalls liefern, deshalb wird es gut sein, ihn etwas genauer zu beschreiben.

Auf einem gußeisernen, mit drei Stellschrauben *SS* versehenen Fuß *F* (Fig. 9) steht eine vertikale stählerne Achse; sie ist bei *L* sichtbar, wo die Messinghülle in der Zeichnung fortgenommen ist. Um diese kann sich ein hohler Messingzylinder *HH'* frei drehen. Um die Drehung leicht zu machen, ist derselbe oben bei *H* von einer stählernen Schraube durchsetzt, welche oben auf der stählernen Achse aufsteht; durch

gelindes Anziehen der Schraube kann man bewirken, daß die Reibung an dem unteren Ende der Hülse, wo sie auf einen den Fuß umgebenden Reif sich stützt, sehr gering ist, indem die Hülse dann fast ganz von der Schraube getragen wird. An der Hülse ist einerseits der Maßstab *AB* der Achse genau parallel, an der andern Seite ein dem Maßstab das Gleichgewicht haltender massiver Messingzylinder *GG'* befestigt. Der Maßstab besteht aus einem Prisma von Gußstahl, dessen Seiten in einer Breite von 8^{mm} möglichst glatt gehobelt, dann aber stark ausgehöhlt sind. Der Maßstab ist wie das Gegengewicht oben und unten an der Hülse befestigt. Die Basis des Prismas, die vordere Seite ist ebenfalls glatt abgehobelt. In der Mitte derselben ist ein Silberstreifen eingesetzt, von $1^{m},1$ Länge und 8^{mm} Breite. Derselbe ist 1^{m} lang in Millimeter geteilt.

Fig. 10.



Auf den glattgehobelten und geschliffenen Seitenflächen des Prismas gleitet ein Schlitten *de*, von welchem Fig. 10 eine vergrößerte Abbildung gibt, auf und ab, welcher das Fernrohr mit Zubehör trägt. Der Schlitten besteht aus zwei Teilen, welche in der Zeichnung mit *d* und *e* bezeichnet sind. Derselbe gleitet mit sanfter Reibung, die durch etwas Öl noch vermindert wird, an dem Prisma ganz regelmäßig und ohne Schwankung auf und ab.

Der obere Teil des Schlittens *d* ruht mit einem kleinen Stahlfortsa[tz] auf dem obern Ende der im untern Teile des Schlittens in einer Mutt[er] gehenden Mikrometerschraube *m* und wird durch eine elastische Feder v[on] Stahl stets fest an dasselbe angedrückt.

Durch eine Klemmschraube *q*, welche ein der Seite angepaßtes Messin[g]stück gegen das Prisma drückt, kann man den Schlitten festhalten. Mitt[els] der Mikrometerschraube *m* kann dann der obere Teil des Schlittens no[ch] etwas gehoben oder gesenkt werden, um eine möglichst feine Einstellu[ng] des Fernrohrs auf das Beobachtungsobjekt zu erzielen.

Im Schlitten ist ein abgeschrägter Ausschnitt über dem Buchstaben dessen eine Seite mit einem Nonius versehen ist, der gerade an d[er] Teilung des Silberstreifens anliegt. Die Stellung des Schlittens an d[er] Skala liest man durch eine Lupe *l* (Fig. 9) ab; der Nonius gibt direkt 0,02

Das Fernrohr *CD* ruht in den genau zylindrisch ausgedrehten Gab[eln] *r* und *r'* und wird dort mit gelindem Druck durch zwei zur Seite schlagende Schieber festgelegt. Dort, wo das Fernrohr auf den Gab[eln] aufliegt, hat dasselbe zwei genau zylindrisch abgedrehte Verdickungen.

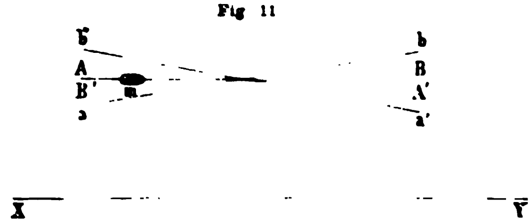
diesen Verdickungen ruhen die unten genau ebenso zylindrich ausgedrehten Füße der Libelle *N*, welche durch dieselben Schieber, die das Fernrohr festlegen, durch einen schwachen seitlichen Druck festgehalten werden.

Die beiden das Fernrohr tragenden Gabeln sind durch eine schmale Messingplatte miteinander verbunden, welche von der in dem Schlitten befestigten und dort gerade vor der Teilung befindlichen Achse *a* getragen wird und um diese Achse in einer der Ebene der Teilung parallelen Ebene drehbar ist. Diese Drehung, durch welche das Ende *C* des Fernrohres etwas gehoben oder gesenkt werden kann, wird durch die kleine Schraubenmutter *s* bewirkt. Zu dem Zwecke ist bei *b* nahe dem einen Ende der das Fernrohr tragenden Platte *bc* an diese eine Mikrometerschraube *b s* angesetzt, welche durch eine Durchbohrung des an dem Schlitten unveränderlich fest verbundenen Armes *A* hindurchgeführt ist. Schraubt man die Mutter *s* in dem einen Sinne, so wird dadurch die Mikrometerschraube und damit das Ende *C* des Fernrohrs herabgezogen; schraubt man die Mutter in dem andern Sinne, so läßt sie die Mikrometerschraube eine Strecke frei, und eine Feder *f* hebt die Schraube und damit das Ende *C* des Fernrohrs, bis die Mutter *s* wieder an der untern Fläche des Armes *A* anliegt. Der Zweck dieser Vorrichtung wird sofort hervortreten.

Nach der Beschreibung der Einrichtung unseres Meßapparates haben wir noch einiges zu bemerken über die Art, wie er zu regulieren ist.

Das Fernrohr ist ein optischer Apparat, den wir später zu beschreiben haben. Hier müssen wir nur erwähnen, daß es in seinem Innern zwei unter einem rechten Winkel gekreuzte Spinnfäden besitzt, ein sogenanntes Fadenkreuz, welches man stets zugleich mit dem Objekt, auf welches das Fernrohr eingestellt ist, genau sieht. Man kann leicht bewirken, daß der Kreuzungspunkt der Fäden den zu fixierenden Punkt deckt. Es gibt nun in jedem Fernrohr eine festbestimmte Linie, die optische Achse, welche durch den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes und durch den Mittelpunkt des Objektives geht. Wenn der Mittelpunkt des Fadenkreuzes den zu fixierenden Punkt deckt, so kann man sicher sein, daß der fixierte Punkt in der Verlängerung der optischen Achse liegt.

Fig. 11



Die Gabel, in welcher das Fernrohr liegt, sowie das Fernrohr selbst sind genau zylindrisch gearbeitet. Dreht man daher das Fernrohr in seinen Lagern um sich selbst, so kann seine geometrische Achse nicht geändert werden, es darf aber auch die optische Achse dadurch nicht geändert werden, d. h. sie muß genau mit der geometrischen Achse zusammenfallen. Sieht man bei der Drehung des Fernrohrs nach und nach verschiedene Punkte in den Mittelpunkt des Fadenkreuzes fallen, so ist das nicht der Fall; dann muß man die optische Achse korrigieren, d. h. das Fadenkreuz so lange regulieren, bis bei einer Drehung des Fernrohrs um sich selbst stets derselbe Punkt von seinem Kreuzungspunkte bedeckt wird. Will man dann die

Lage der optischen Achse korrigieren, so hat man nur die der geometrischen zu regulieren, da nach dieser Korrektion beide zusammenfallen.

Nachdem also die Fernrohrachse korrigiert ist, hat man vor Gebrauch des Kathetometers

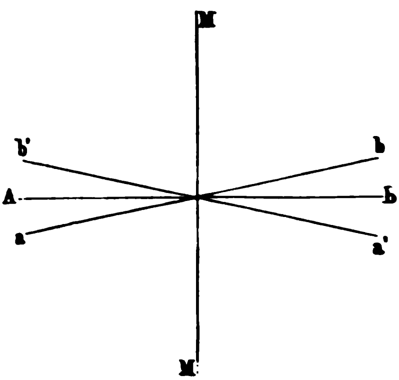
1) dafür zu sorgen, daß die Libelle der Achse des Fernrohrs parallel ist;

2) die Achse des Fernrohrs genau senkrecht zu dem Maßstab zu stellen;

3) die Rotationsachse des Kathetometers und damit den Maßstab AB vertikal zu stellen.

Um die erste Bedingung zu prüfen, ist die Libelle auf die zylindrisch abgedrehten Verdickungen des Fernrohrs mit den ebenso genau ausgedrehten Füßen einfach aufgesetzt, so daß sie abgenommen und wieder in umgekehrter Lage hingestellt werden kann, so daß das vorher nach D zeigende Ende jetzt nach C zeigt, und umgekehrt. Sei nun XY die Fernrohrachse und stelle AB (Fig. 11) die Libelle vor, deren Luftblase bei m stehe. Wird nun die Libelle in der angegebenen Weise umgesetzt, und ist sie der Fernrohrachse in der Tat parallel, so kehrt sich dieselbe blos um, in ihrer zweiten Lage die erste deckend; sie muß wieder in $A'B'$ liegen. Die Luftblase muß dann wieder genau so liegen wie früher, sie darf gegen den Beobachter ihre Lage nicht geändert haben. Hatte dagegen die Libelle die Lage ab, so hat sie nach der Umstellung die Lage $a'b'$, und die Luftblase würde ihre Lage geändert haben. Durch Drehung einer Schraube, welche das eine Ende der Libelle in ihren Lagern hebt und senkt, wird sie in dem letzteren Falle korrigiert, bis eine Umstellung der Lage der Luftblase nicht mehr ändert.

Fig. 12.



Um die zweite Bedingung zu prüfen, hat man dem Instrument nur eine Drehung um 180° zu erteilen. Ist das Fernrohr AB (Fig. 12) senkrecht zum Maßstab MM, so ist es nach der Drehung sich selbst parallel, es muß also die Luftblase in bezug auf den Beobachter dieselbe Lage beibehalten haben. Steht das Fernrohr nicht senkrecht, sondern etwa parallel ab, so hat es nach der Drehung die Lage $a'b'$, und die Luftblase der Libelle muß ihre Stellung geändert haben. Ist das der Fall, so wird durch Drehung der Schraubenmutter das eine Ende des Fernrohrs soviel gehoben oder gesenkt, bis die Drehung des Instrumentes um 180° die Stellung der Libellenblase nicht mehr ändert.

Diese Korrektion genügt es nicht ein für allemal vorzunehmen; denn auch bei den bestgearbeiteten Apparaten kann der Schlitten nicht immer vollkommen in der gleichen Weise an das Prisma angepreßt werden, und deshalb ist das Fernrohr nicht an allen Stellen sich genau parallel. Hat man deshalb in gleich zu beschreibender Weise den Maßstab vertikal gestellt, so muß man, wenn die Lage der Luftblase bei irgend einer Stellung des Schlittens anzeigt, daß das Fernrohr nicht mehr genau horizontal steht, durch Drehung der Mutter s das Fernrohr in die horizontale Lage zurückführen.

Um die dritte Regulierung, das Vertikalstellen der Rotationsachse des Instrumentes vorzunehmen, stellt man das Fernrohr der Verbindungslinie zweier Stellschrauben des Fußes parallel, und dreht eine oder beide Stellschrauben so lange, bis die Blase der Libelle in der Mitte steht; darauf dreht man den Apparat um 90° und bringt durch Drehung der dritten Schraube die Blase ebenfalls in die Mitte. Hat man auf diese Weise die Fernrohrachse in zwei aufeinander senkrechten Richtungen horizontal gestellt, so ist sie es in allen, und die zur Fernrohrachse senkrechte Rotationsachse und somit auch der Maßstab des Apparates stehen vertikal.

Der Theodolith.

Außer der Abmessung von Längen haben wir, besonders in dem optischen Teile der Physik, häufig genaue Winkelmessungen auszuführen. Dieselben werden mittels des Theodolithen angestellt. Der Theodolith ist ein in geringerer oder größerer Vollkommenheit schon sehr lange bekanntes Winkelmeßinstrument, dessen erster Verfertiger ebenso unbekannt ist als die eigentliche Bedeutung des Namens. Man hat zwar seinen Namen aus dem Griechischen herleiten wollen, doch ist die Ableitung ebenso unbestimmt als gezwungen.

Fig. 13.

Der Theodolith ist ein Winkelmeßinstrument, welches aus zwei geteilten Kreisen, einem horizontalen und einem vertikalen, mit Fernrohr besteht.

Nachfolgender Zeichnung (Fig. 13) und Beschreibung liegt ein Exemplar aus der Werkstätte mathematischer Apparate von Breithaupt in Kassel zugrunde.

Auf einem massiven, mit Stellschrauben X versehenen Dreifuß CC befindet sich ein Kreis von Messing K, der mittels Speichen in dem Mittelstücke des Dreifußes befestigt ist. Auf dem Kreise ist

ein silberner, mit einer Kreisteilung versehener Streifen eingelegt. Mit diesem Kreise in gleicher Ebene und genau zentriert liegt ein kleiner Kreis, dessen äußerer Umfang den innern Rand des Kreises *K* berührt. Derselbe ist um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, im Mittelpunkt des Dreifußes eingeschliffene Achse, mit welcher er durch Speichen verbunden ist, drehbar. Der Kreis heißt der Alhidadenkreis. An den beiden Enden eines Durchmessers besitzt der Alhidadenkreis Nonien *N*, welche je nach der Teilung des Kreises halbe Minuten oder noch kleinere Bruchteile von einem Grade geben. An demselben Kreise sind über den Nonien kleine Mikroskope befestigt zur genaueren Ablesung. Der Alhidadenkreis kann mittels der Klemmschraube *S* festgestellt werden, an der zur feineren Einstellung des Kreises die Mikrometerschraube *s* angebracht ist.

An einer Säule *UU*, welche auf dem Alhidadenkreis festgeschraubt ist, befindet sich das Fernrohr *FF'*. Die optische Achse des Fernrohrs wird von der mit der Achse des Alhidadenkreises zusammenfallenden Drehungsachse der Säule *U* geschnitten. Das Fernrohr selbst ist an einer auf seiner optischen Achse senkrechten Achse *D* befestigt, welche in zwei Zapfenlagern drehbar eingelegt ist. Die Achse *D* ist genau dem Horizontalkreis parallel. Auf dem Fernrohr befindet sich eine Libelle *L*. An dem Fernrohr in unveränderlich fester Verbindung und auf der Drehungsachse *D* desselben senkrecht ist der Vertikalkreis *V* angebracht. Zu beiden Seiten des Kreises, an den Enden eines Durchmessers, befinden sich feste, nicht drehbare Nonien *A* und *B*. Den Nullpunkten der Nonien entsprechend sind auf der Teilung des Vertikalkreises zwei Nullpunkte, von denen aus die Teilung nach beiden Seiten von 0—90° fortzählt. Die optische Achse des Fernrohrs muß mit dem durch die Nullpunkte angegebenen Durchmesser des Vertikalkreises zusammenfallen. Dreht man Fernrohr samt Kreis, so liest man an den Nonien die Größe der Drehung ab. Der Vertikalkreis kann durch die Klemmschraube *Q* festgestellt und mittels der an dieser befestigten Mikrometerschraube *q* feiner eingestellt werden.

Der ganze Apparat steht auf einem massiven Stativ, an welchem er mittels einer Schraube und einer Spiralfeder befestigt ist.

Will man mittels des Theodolithen z. B. die Winkeldistanz zweier in einer Horizontalebene befindlicher Punkte nehmen, so hat man das Instrument zunächst in ähnlicher Weise wie das Kathetometer zu regulieren, und zu prüfen, ob die Libelle parallel dem Fernrohr ist, ob die Drehachse des Fernrohrs zur optischen Achse senkrecht und mit dieser in einer zur Achse des Alhidadenkreises senkrechten Ebene liegt, und dann, ob die Drehungsachse des Alhidadenkreises senkrecht zum Horizontalkreis ist. Dann hat man den Horizontalkreis horizontal und damit die Rotationsachse des Vertikalkreises vertikal zu stellen[1]).

Hat man so das Instrument vorbereitet, so stellt man das Fernrohr zunächst auf den einen Punkt ein und merkt den Stand der Nonien am Horizontalkreise. Darauf verfährt man ebenso mit dem andern Punkte, und die Differenz der Nonienangaben gibt die gesuchte Winkeldistanz. Die beiden Nonien *N* geben jedesmal zwei Ablesungen, also auch zwei sich kontrolierende Werte, die zugleich zum Eliminieren etwaiger Teilungsfehler dienen.

1) Eine vorzügliche Zusammenstellung aller Korrektionen am Theodolithen gibt *Bauernfeind*, „Elemente der Vermessungskunde" Bd. I.

Außer Längen und Winkel sind es nun vorzüglich noch Gewichte, welche wir in der Physik zu messen haben. Dieses geschieht mit der Wage, deren Beschreibung und Gebrauch wir aber erst an einer andern Stelle vorführen können.

Einige Sätze aus der Differential- und Integralrechnung.

Differentiation.

Wir haben bei Besprechung der in der Physik anzuwendenden Methode die Bedeutung der Mathematik hervorgehoben, indem dieselbe nicht nur dazu dient, die physikalischen Gesetze in kurzer Form auszusprechen, sondern auch dazu, aus diesen Gesetzen weitere Folgerungen abzuleiten. Ganz besonders dient zu diesen Entwicklungen die Differential- und Integralrechnung, so daß man bei einer vollständigen Darlegung auch der experimentellen Physik dieses Hilfsmittel nicht ganz entbehren kann. Da wir nicht bei allen Lesern dieses Buches die Vertrautheit mit diesen Rechnungsoperationen voraussetzen dürfen, wollen wir an dieser Stelle die Grundbegriffe dieser Methoden kurz darlegen, soweit wir sie später unumgänglich nötig haben. Unsere späteren Entwicklungen gewinnen dadurch an Kürze und Übersichtlichkeit, da wir dann nicht genötigt sind, in jedem einzelnen Falle die erforderlichen Ableitungen zu machen, sondern auf diese Stelle verweisen können.

Die physikalischen Gesetze geben uns eine Gleichung zwischen den eine Erscheinung bedingenden veränderlichen Größen, so daß also, wenn der Wert der einen, die wir in der Regel willkürlich ändern können, gegeben ist, die andere nach dieser Gleichung berechnet werden kann. Als Beispiel führten wir das Reflexionsgesetz an, der Zurückwerfungswinkel ist stets dem Einfallswinkel gleich; nennen wir ersteren y, letzteren x, so ist das Gesetz dargestellt durch die Gleichung

$$y = x.$$

Die Gleichung gibt somit für jeden Wert, den wir x willkürlich beilegen, den zugehörigen Wert von y. Andere Gesetze werden durch andere Beziehungen gegeben, wir werden Beziehungen finden wie $y = ax^2$, $x \cdot y = a$, $y = \sin ax$ u. a. m., wenn immer y die Größe bedeutet, welche bestimmt werden soll, und die Größe, von der sie abhängt, gleich x gesetzt wird, und außerdem a irgend eine konstante Größe bedeutet. Allgemein deutet man bekanntlich irgend eine Beziehung zwischen zwei solchen veränderlichen Größen durch das Zeichen

$$y = f(x)$$

an und nennt y eine Funktion von x.

In vielen Fällen ist es uns von der größten Bedeutung, die Änderung kennen zu können, welche y erfährt, wenn sich x um eine verschwindend kleine Größe ändert, das heißt um eine Größe, die kleiner ist als jeder angebbare Wert. Man nennt diese Änderungen die Differentialien von y und x und bezeichnet sie mit dy und dx, den Quotienten aus diesen beiden Differentialien, oder $\frac{dy}{dx}$ nennt man den Differentialquotienten von y nach x.

Die Berechnung dieser Größen ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff der Funktion, daß sie jeden Wert von y darstellt, wenn der zugehörige Wert von x gegeben ist. Ist y der Wert für irgend einen Wert von x, so können wir den dem Werte $x + dx$ zugehörigen Wert mit $y + dy$ bezeichnen, und erhalten dann

$$y + dy = f(x + dx)$$
$$dy = f(x + dx) - f(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Es sind nur die durch das Funktionszeichen $f(x)$ angedeuteten Rechnungen auszuführen. Nehmen wir z. B. die Funktion $y = ax^2$, so wird die Rechnung folgende:

$$y + dy = a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + adx^2$$
$$dy = 2axdx + adx^2.$$

Da nun der Voraussetzung nach schon dx einen verschwindend kleinen Wert hat, so ist $dx \cdot dx$ selbst gegen dx verschwindend klein, so daß wir es gleich Null setzen dürfen, und damit wird

$$dy = 2axdx; \quad \frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Dieses Beispiel läßt zugleich erkennen, daß wenn auch dy einen verschwindend kleinen Wert hat, doch der Differentialquotient, also der Quotient aus den beiden verschwindend kleinen Größen dy und dx einen ganz bestimmten Wert hat, und zwar um so genauer, je näher wir uns dx d… Null denken. Denn die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + adx$$

gilt für jeden selbst endlichen Wert von dx; lassen wir aber dx immer näher und näher gleich Null werden, so nähert sich der Quotient immer mehr dem Werte $2ax$; lassen wir also dx kleiner werden als jede angebbare Größe, so unterscheidet sich auch der Quotient $\frac{dy}{dx}$ von $2ax$ um weniger als jede angebbare Größe, das heißt er nimmt diesen Wert an.

Ehe wir dazu übergehen, die wichtigsten der uns später begegnenden Differentialien abzuleiten, wollen wir zunächst einige allgemeine Sätze angeben, welche uns dabei dienen werden.

I. Ist die Funktion von x, der y gleich ist, eine Summe mehrerer Glieder, so ist dy gleich der Summe der Differentiale der einzelnen Glieder und der Differentialquotient der Summe gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Glieder. Es folgt das unmittelbar aus dem Begriffe der Summe, nach welchem die Veränderung einer Summe gleich ist der Summe der Veränderungen der einzelnen Summanden.

Hieraus folgt sofort, daß wenn in dieser Summe ein Glied vorkommt, welches konstant ist, also sich nicht ändert, wenn x sich ändert, dieses Glied in dem Differential nicht vorkommt, oder wie man sich kurz ausdrückt, das Differential einer konstanten Größe ist gleich Null.

Ist z. B.

$$y = ax^2 + b$$

so ist:

$$y + dy = a(x + dx)^2 + b$$

$$dy = a(x + dx)^2 + b - ax^2 - b = 2axdx.$$

II Ist y gleich dem Produkte zweier Funktionen von x, so erhalten wir allgemein das Differential in folgender Weise. Seien die beiden Funktionen mit u und v bezeichnet, also $y = u \cdot v$. Wenn sich dann x um dx ändert, wird u in $u + du$ und v in $v + dv$ verwandelt, es wird also

$$y + dy = (u + du)(v + dv) = uv + udv + vdu + dudv.$$

Da nun auch hier das letzte Glied wieder verschwindend klein ist, so wird

$$dy = udv + vdu; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Es ist somit jede Funktion mit dem Differential resp. dem Differentialquotienten der andern Funktion zu multiplizieren und diese Produkte sind zu addieren.

III Aus dem soeben abgeleiteten Satze erhalten wir auch unmittelbar das Differential oder den Differentialquotienten eines Quotienten zweier Funktionen. Ist

$$y = \frac{u}{v},$$

so können wir auch setzen

$$y \cdot v = u$$

$$ydv + vdy = du,$$

somit wird

$$dy = \frac{du - ydv}{v}$$

und setzen wir auf der rechten Seite wieder y durch seinen Wert

$$dy = \frac{du - \frac{u}{v}dv}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Das Differential, resp. der Differentialquotient eines Quotienten ist gleich dem Produkte aus dem Nenner und dem Differential resp. Differentialquotienten des Zählers, minus dem Produkte aus Zähler und dem Differential resp. Differentialquotienten des Nenners, die Differenz dividiert durch das Quadrat des Nenners.

Wir werden diese Sätze, wenn wir später darauf hinweisen, stets mit E I, E II, E III bezeichnen.

Differentiale der wichtigsten Funktionen.

Wir leiten jetzt die Differentiale der Funktionen, welche uns vorzugsweise bei unseren physikalischen Untersuchungen vorkommen werden, kurz ab.

Um das Differential einer Potenz

$$y = x^n$$

zu erhalten, haben wir nur $(x + dx)^n$ nach dem binomischen Satze zu entwickeln

$$(x + dx)^n = x^n + n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \cdots\cdots$$

Unter Beachtung, daß alle höheren Potenzen von dx gegen die erste zu vernachlässigen sind, wird

1 . . . . $dy = n x^{n-1} dx; \quad \frac{dy}{dx} = n x^{n-1}.$

Da der binomische Satz für jeden beliebigen Wert von n, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen gilt, so gilt dieser Differentialausdruck ebenfalls für jeden Wert von n.

Das Differential des Ausdruckes

$$y = \log x$$

erhalten wir durch Entwicklung von $\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ in eine Reihe, denn es ist

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Ist der Logarithmus ein natürlicher, der auf die Grundzahl $e = 2{,}71828$ bezogen ist, so ist

$$\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{dx^3}{x^4} - \cdots + \cdots$$

Ist der Logarithmus in einem andern System genommen, so muß die Reihe auf der rechten Seite mit dem in diesem System genommenen $\log e$ multipliziert werden. Es folgt somit ganz allgemein

2 . . . . $dy = d \log x = \frac{dx}{x} \cdot \log e; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e.$

Aus dem Differential des Logarithmus erhalten wir sofort das Differential der Exponentialfunktion

$$y = a^x.$$

Es ist

$$\log y = x \cdot \log a$$

$$\log(y + dy) = (x + dx) \log a$$

$$\frac{dy}{y} \cdot \log e = dx \log a,$$

somit

3 . . . . . $dy = y \cdot dx \frac{\log a}{\log e} = a^x dx \frac{\log a}{\log e}; \quad \frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$

Wird $a = e$ gleich der Basis des natürlichen Logarithmensystems gesetzt, so wird

3a . . . . $dy = e^x dx; \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$

Der Differentialquotient der Exponentialfunktion mit der Basis e ist somit der Funktion selbst gleich.

Für das Differential der trigonometrischen Funktion

$$y = \sin x$$

erhalten wir zunächst

$$dy = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x$$
$$= \sin x (\cos dx - 1) + \cos x \sin dx .$$

Für ein verschwindendes dx ist nun $\cos dx = 1$ und $\sin dx$ gleich dem Bogen dx selbst zu setzen, damit wird

4) . . . $$dy = d \sin x = \cos x \cdot dx ; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x .$$

Ganz in derselben Weise wird

5) . . $$dy = d \cos x = - \sin x \cdot dx ; \quad \frac{dy}{dx} = - \sin x .$$

Die Differentiale von $y = \operatorname{tang} x$ erhalten wir durch Anwendung des Satzes E III. Wir schreiben

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$dy = \frac{\cos x \, d \sin x - \sin x \, d \cos x}{\cos^2 x}$$

6) $$dy = d \operatorname{tang} x = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Ganz in derselben Weise erhält man

7) . . $$dy = d \cot x = - \frac{dx}{\sin^2 x} ; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x} .$$

Aus den Differentialen der trigonometrischen Funktionen ergeben sich sofort jene der zyklometrischen Funktionen. Ist nämlich

$$y = \sin x ,$$

so ist

$$x = \operatorname{arc} (\sin = y) .$$

Die Zunahme des Bogens x, wenn der Sinus um dy wächst, ergibt sich dann aus (4)

$$dy = \cos x \, dx$$

$$dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} .$$

Setzen wir also, um das Zeichen x für die gegebene willkürlich veränderliche Größe beizubehalten

$$y = \operatorname{arc} (\sin = x) ,$$

so wird

8) $$dy = d \operatorname{arc} (\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Ebenso wird

$$9 \ldots dy = d \operatorname{arc}(\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10 \ldots dy = d \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = \frac{dx}{1+x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11 \ldots dy = d \operatorname{arc}(\cot = x) = -\frac{dx}{1+x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Bei einem Hinweis auf die hier entwickelten Ausdrücke werden w dieselben stets mit E 1, E 2 ... bezeichnen.

Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

Es wird uns mehrfach der Fall vorkommen, daß die Funktionen, z denen wir bei den physikalischen Untersuchungen gelangen, zusamme gesetzte sind, daß also innerhalb des Funktionszeichens log, sin etc. selb noch wieder eine Funktion steht. Sei uns also z. B. der Ausdruck g geben $y = \log u$, und sei nun u wieder eine Funktion von x, etwa glei $\sin x$. Wir erhalten dann zunächst unter Beachtung, daß jedenfalls y u dy wächst, wenn u um du zunimmt, nach E 2

$$dy = \log e \frac{du}{u}.$$

Die Zunahme von $u = \sin x$ oder du, wenn x um dx wächst, dann nach E 4

$$du = \cos x\, dx;$$

setzen wir diesen Wert von du in die Gleichung für dy ein, so wird

$$dy = \log e \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad \frac{dy}{dx} = \log e \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da nun

$$\log e \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{dy}{du}; \quad \cos x = \frac{du}{dx},$$

so ist der für $\frac{dy}{dx}$ erhaltene Ausdruck gleich

$$\text{IV} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir leiten daraus die allgemeine Regel ab, die wir bei späterer nutzung stets mit E IV bezeichnen, daß wir bei solchen zusammengese Funktionen zunächst den Differentialquotienten so zu bilden haben, wenn die Funktion u eine einfache veränderliche Größe wäre, und diesen Quotienten mit dem Differentialquotienten der Funktion u n multiplizieren müssen. Da nun das Differential eines Ausdrucks glei dem Differentialquotienten multipliziert mit dem Differential der geg veränderlichen Größe, so wird

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx.$$

Unter Anwendung dieser Regel erhalten wir z. B. sofort

$$\frac{da^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Denn setzen wir zunächst

$$y = a^{\sqrt{x}} = a^u,$$

so ist nach E 3

$$\frac{dy}{du} = \frac{\log a}{\log e} a^u.$$

Da nun $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, so ist nach E 1

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Differentiation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß wir nur zwei veränderliche Größen haben, eine x, der wir willkürlich jeden Wert beilegen können, und die zweite y, welche als Funktion von x bestimmt wird. Wenn auch vorwiegend, so kommen uns später doch nicht lediglich solche einfachere Beziehungen zur Behandlung: in manchen Fällen hängt die zu bestimmende Größe von zwei oder drei Größen ab, die wir willkürlich ändern können. So z. B. werden wir später finden, daß der Raum, den eine gegebene Quantität eines Gases ausfüllt, abhängig ist von dem Drucke, unter welchen wir dasselbe bringen, und von der Temperatur, welche wir demselben erteilen. Wir können Druck und Temperatur beliebig wählen: erst wenn diese gegeben sind, ist das Volumen des Gases bestimmt. Sei nun wieder die zu bestimmende Größe gleich y gesetzt, und dieselbe durch die beiden willkürlich zu ändernden Größen x und z bestimmt. Der allgemeine Ausdruck dieser Abhängigkeit ist

$$y = f(x, z).$$

Nach dem Begriffe des Differentials ist dann

$$dy = f(x + dx, z + dz) - f(x, z).$$

Die so eintretende Änderung von y können wir auch als die Summe der beiden Änderungen auffassen, wenn sich erstens nur x um dx ändert, während z konstant bleibt, und sich zweitens z um dz ändert, wenn x konstant bleibt, also setzen

$$dy = \{f(x + dx, z) - f(x, z)\} + \{f(x, z + dz) - f(x, z)\}.$$

Die in der ersten Klammer eingeschlossenen Glieder sind das Differential von y, wenn es nur eine Funktion von x wäre, die in der zweiten dasselbe, wenn es nur eine Funktion von z wäre. Da wir nun das Differential

einer Funktion auch als das Produkt des Differentialquotienten in das Differential der veränderlichen Größe schreiben können, so schreibt man

$$f(x+dx, z) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx; \; f(x, z+dz) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial z} dz,$$

worin man das Zeichen ∂ anstatt d wählt, um anzudeuten, daß bei Bildung dieses Differentialquotienten nur die Größe als veränderlich betrachtet wird, deren Differential im Nenner steht. Man nennt die so gebildeten Differentialquotienten die partiellen Differentialquotienten jedesmal nach der Größe, die bei Bildung derselben als veränderlich genommen wird. Für das Differential dy, das sogenannte totale Differential der Funktion erhalten wir dann

$$\text{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz.$$

Die Regel zur Berechnung dieses Differentials ist somit folgende: Wir berechnen zunächst die Differentiale der Funktion, wie wenn jedesmal nur eine der veränderlichen Größen veränderlich wäre, und addieren dann diese einzelnen Differentiale zusammen.

Ganz dieselbe Regel liefert uns, wie man durch die gleichen Überlegungen erkennt, das Differential einer Funktion von drei Veränderlichen. Sei

$$r = f(x, y, z),$$

so ist

$$\text{VI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz.$$

Um nach dieser Regel ein Beispiel durchzuführen, sei

$$y = \sqrt{x^2 + z^2} = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach E IV setzen wir zunächst $x^2 + z^2 = u$, dann wird zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Da nun bei dieser Differentiation in u nur x veränderlich, z als konstant zu betrachten ist, so ist $\partial u = 2x\partial x$, somit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x.$$

Ganz ebenso wird

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} z$$

und darnach

$$dy = \frac{x\,dx + z\,dz}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Es wird hiernach nicht nötig sein noch ein spezielles Beispiel für eine Funktion aus drei Veränderlichen zu berechnen, da die einzelnen Rechnungen genau dieselben sind, wie bei den Funktionen mit zwei Veränderlichen

Zweiter Differentialquotient.

Schließlich haben wir noch zu erwähnen, daß in vielen Fällen außer dem bisher besprochenen Differential und Differentialquotienten, welche man als erste bezeichnet, noch die zweiten Differentiale und Differentialquotienten von Funktionen bei unseren Untersuchungen vorkommen werden. Das zweite Differential ist in folgender Weise definiert. Das erste Differential einer Funktion von einer Veränderlichen erhielten wir durch die Gleichung

$$y + dy = f(x + dx).$$

Setzen wir $y + dy = y_1$ und lassen jetzt x noch einmal um dieselbe Größe dx wachsen, so wird

$$y_1 + dy_1 = f(x + 2dx).$$

Die beiden Zunahmen dy_1 und dy sind nun im allgemeinen verschieden, und ihre Differenz

$$dy_1 - dy = d^2y$$

nennt man das zweite Differential der Funktion; dasselbe ergibt sich durch Ausführung der hier angedeuteten Rechnungen

$$d^2y = \{f(x + 2dx) - f(x + dx)\} - \{f(x + dx) - f(x)\}.$$

Als zweiten Differentialquotienten bezeichnet man den Quotienten aus dem zweiten Differential und dem Quadrate von dx.

Wir bemerken hier gleich, daß die Werte dy_1 und dy nur um eine Größe verschieden sein können, welche gegen die Veränderungen dy_1 und dy selbst verschwindend klein sein muß, oder die zweiten Differentiale sind gegen die ersten verschwindend klein. Daraus folgt dann, daß der zweite Differentialquotient, der Quotient aus dem zweiten Differential und dem gegen dx selbst verschwindend kleinen dx^2 wieder einen endlichen Wert hat.

Anstatt das zweite Differential und den zweiten Differentialquotienten aus der Funktion selbst abzuleiten, können wir auch von dem ersten Differential oder Differentialquotienten ausgehen; das zweite Differential ist das erste des ersten Differentials und der zweite Differentialquotient einer Funktion ist der erste des ersten Differentialquotienten. Setzen wir den ersten Differentialquotienten der Funktion gleich $f'(x)\,dx$, so daß

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)\,dx,$$

$$d^2y = f'(x + dx)dx - f'(x)dx = df'(x)\,dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx}.$$

Es ergibt sich das aus folgender Überlegung. Die Gleichung $dy = f'(x)\,dx$ gibt uns für jeden beliebigen Wert, den wir für x einsetzen, die Zunahme des Wertes y, wenn wir in der gegebenen Funktion anstatt x den Wert $x + dx$ einsetzen. Setzen wir deshalb in die Gleichung, welche uns dy liefert, den Wert $x + dx$ ein, so erhalten wir die Zunahme,

welche der Wert von y erhält, wenn wir in der ursprünglichen Funktion von $x + dx$ aus nochmals um dieselbe Größe dx fortschreiten, also den Wert, den wir vorhin mit dy_1 bezeichneten. Die Differenz dieses Wertes gegenüber dy ist es aber, die wir vorhin als das zweite Differential definierten.

Ein einfaches Beispiel läßt uns die Richtigkeit dieser Überlegung unmittelbar erkennen. Es sei $y = \sin x$, so ist nach E 4

$$dy = \cos x\,dx,$$

ferner ist

$$dy_1 = \sin(x + 2dx) - \sin(x + dx) = \sin\big((x + dx) + dx\big) - \sin(x + dx).$$

Letzteres ist aber

$$dy_1 = \cos(x + dx)\,dx.$$

Somit wird

$$d^2y = dy_1 - dy = \cos(x + dx)dx - \cos x\,dx.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als das Differential von $\cos x\,dx$, dem ersten Differential von $\sin x$. Es wird demnach

$$d^2y = -\sin x\,dx^2; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

Wir erhalten daher als Regel VII: zur Berechnung eines zweiten Differentials oder Differentialquotienten haben wir nur die ersten Differentiale oder Differentialquotienten einer Funktion gerade so zu behandeln wie die Funktion selbst zur Bildung der ersten Differentiale.

Diese Regel liefert uns auch das zweite Differential einer Funktion von zwei Veränderlichen. Für das erste Differential einer solchen erhielten wir

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dx = M dx + N dz,$$

wenn wir die partiellen Differentialquotienten mit M und N bezeichnen. Bei der Berechnung des zweiten Differentials ist nur darauf zu achten, daß im allgemeinen sowohl M als N Funktionen von x und z sind. Dann erhalten wir in Ausführung der Regel VII nach E V und unter Beachtung des Satzes E I

$$d^2y = \left(\frac{\partial M}{\partial x}dx + \frac{\partial M}{\partial z}dz\right)dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x}dx + \frac{\partial N}{\partial z}dz\right)dz$$

$$d^2y = \frac{\partial M}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial M}{\partial z}dz\,dx + \frac{\partial N}{\partial x}dx\,dz + \frac{\partial N}{\partial z}dz^2.$$

In diesem Ausdrucke ist stets

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn M ist der erste partielle Differentialquotient nach x, N derjenige nach z. Bilden wir nun von M den partiellen Differentialquotienten nach z, so heißt das, wir lassen jetzt das bei der ersten Differentiation als konstant betrachtete z sich ändern; es ist also der Differentialquotient von M nach die Funktion, die entsteht, wenn wir erst x und dann in der so entstandenen Funktion sich z ändern lassen. Bei der Bildung des Differentialquotienten von N nach z haben wir genau dasselbe nur in umgekehrter

Reihenfolge getan. Die Reihenfolge, in welcher wir die willkürlich veränderlichen Größen sich ändern lassen, kann aber auf das schließliche Resultat keinen Einfluß haben. Ein Beispiel läßt die Richtigkeit dieser Folgerung sofort erkennen; setzen wir

$$y = x^n \cdot \sin z,$$

so ist nach E V

$$dy = n x^{n-1} \sin z\, dx + x^n \cos z\, dz,$$

somit

$$M = n x^{n-1} \sin z, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = n x^{n-1} \cos z$$

$$N = x^n \cos z, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = n x^{n-1} \cos z = \frac{\partial M}{\partial z}.$$

In dem zur Erläuterung der Regel V gerechneten Beispiel war

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\, dx + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\, dz.$$

Auch hier wird

$$\frac{\partial \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\partial z} = \frac{\partial \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\partial x} = -\frac{x \cdot z}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus ergibt sich, daß wenn uns ein Ausdruck von der Form

$$dy = M dx + N dz$$

gegeben ist, in welchem M und N irgend welche Funktionen von x und z sind, derselbe nur dann das erste Differential irgend einer Funktion

$$y = f(x, z)$$

ist, wenn die Differentialquotienten $\frac{\partial M}{\partial z}$ und $\frac{\partial N}{\partial x}$ einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so ist der Ausdruck nicht das vollständige Differential einer Funktion, das heißt, es gibt keine Funktion von x und z, durch deren Differentiation jener Ausdruck entstanden ist.

Integration.

Bei den physikalischen Untersuchungen kommt uns sehr häufig der Fall vor, daß die Beobachtungen uns nicht sofort die Beziehung zwischen den eine Erscheinung bedingenden Größen liefern, daß wir vielmehr nur die Differentiale oder Differentialquotienten der gesuchten Beziehungen erhalten. Wir finden so Ausdrücke von der Form

$$dy = ax\,dx; \quad dy = a \sin x\, dx,$$

und ähnliche andere. Ganz besonders oft kommt das vor, wenn wir aus den durch die Erfahrung uns gegebenen Gesetzen durch Deduktion die Gesetze anderer Erscheinungen ableiten wollen. In den meisten Fällen können wir für die aus dem bekannten Gesetze weiter abzuleitenden Beziehungen aus diesem Gesetze nur die Differentiale oder Differentialquotienten angeben, und es handelt sich dann für uns darum, aus diesen

Differentialausdrücken die Gleichung zwischen den veränderlichen Größen aufzusuchen. Man bezeichnet dieses Verfahren als Integration und nennt den Ausdruck, welcher durch Differentiation auf den gegebenen Differentialausdruck führt, das Integral des letztern. Man bezeichnet das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes durch ein vorgesetztes Summenzeichen $\int$, so daß also, wenn der Ausdruck etwa

$$dy = axdx$$

gegeben ist,

$$y = \int axdx$$

gesetzt wird; es wird also angedeutet, daß y das Integral des unter dem betreffenden Summenzeichen stehenden Differentialausdruckes ist.

Dem Integralausdruck können wir eine doppelte Bedeutung beilegen, deren eine uns das Integral als eine Summe erkennen läßt, wodurch zugleich die Bezeichnung des Integrals durch ein Summenzeichen gerechtfertigt ist.

Die erste Bedeutung ist die eben erwähnte, das Integral eines Differentialausdrucks ist jene Funktion, welche durch Differentiation den gegebenen Differentialausdruck liefert. Wir wissen nun z. B., daß das Differential $dy = ax$ durch Differentiation des Ausdruckes $y = \frac{1}{2}ax^2$ entsteht, somit erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}ax^2 = \int axdx.$$

Indes ist dabei zu beachten, daß nach E I bei der Differentiation einer Summe, von der ein oder mehrere Glieder konstante nicht mit x sich ändernde Größen sind, diese Größen verschwinden; wir können daher nicht wissen, ob die Funktion, durch deren Differentiation unser gegebenes Differential entstanden ist, oder entstanden gedacht werden kann, nicht einen konstanten Summand enthielt. Gehen wir vom Differential zum Integral über, so müssen wir aus diesem Grunde immer zu der Funktion eine Konstante addieren, deren Wert allerdings, solange uns nichts anderes als das Differential gegeben ist, durchaus unbestimmt ist, ja jeder beliebiger sein kann. Wir müssen also als das Integral der Funktion $dy = axdx$ schreiben

$$\int axdx = \tfrac{1}{2}ax^2 + C,$$

worin C also eine jede beliebige konstante, das heißt mit x sich nicht ändernde Größe sein kann.

Den so vervollständigten Integralausdruck des Differentials nennt man dessen unbestimmtes Integral.

Um dann den Wert unserer Funktion für jedes gegebene x in der Tat angeben zu können, muß man den Wert derselben für irgend einen Wert von x auf andere Weise bestimmen können. Wissen wir z. B., daß für den Wert $x = 0$ die Funktion den Wert b annimmt, so folgt $C = b$ und unsere Funktion wird

$$y = \tfrac{1}{2}ax^2 + b.$$

Durch die so erfolgte Festsetzung des Wertes der Konstanten wird unsere Funktion eine bestimmte, das heißt sie gibt uns jetzt für jeden Wert, den wir der veränderlichen Größe x beilegen, einen ganz bestimmten Wert von y.

Das an diesem Beispiel Gezeigte gilt selbstverständlich allgemein; ist

$$d\varphi(x) = f(x)\,dx,$$

so ist

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Die zweite Bedeutung des Integrals ist die einer Summe von Differentialen. Wie wir sahen ist das Differential einer Funktion der Unterschied der beiden Werte derselben, wenn die veränderliche Größe von einem Werte x um dx zunimmt. Den Wert, welchen die Funktion für irgend einen Wert x_n annimmt, können wir dann als die Summe bezeichnen des Wertes, welchen die Funktion für irgend einen kleinern Wert von x, etwa x_0 besitzt, und aller der Differentiale, welche wir erhalten, wenn x jedesmal durch Hinzufügen um dx allmählich von x_0 bis x_n zunimmt. Denn setzen wir der Einfachheit wegen $x_1 = x_0 + dx$, $x_2 = x_0 + 2dx \cdots x_n = x_0 + n\,dx$ und die den Werten $x_0, x_1 \cdots x_n$ entsprechenden Werte der Funktion $y_0, y_1 \cdots y_n$, so ist, wenn wir $y_0 = \frac{1}{2} a x_0^2 + C$ setzen,

$$y_1 = y_0 + dy = y_0 + a x_0\,dx$$

$$y_2 = y_1 + dy_1 = y_1 + a x_1\,dx = y_0 + a x_0\,dx + a x_1\,dx$$

$$y_n = y_{n-1} + dy_{n-1} = y_{n-1} + a x_{n-1}\,dx = y_0 + a x_0\,dx + a x_1\,dx \ldots a x_{n-1}\,dx,$$

oder es ist

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} a x\,dx,$$

wenn also das Integralzeichen ein eigentliches Summenzeichen ist, das heißt es muß die Summe aller der Differentialausdrücke gebildet werden, wenn wir in den Differentialausdruck nach und nach für x alle Werte zwischen $x = x_0$ und $x = x_n$ einsetzen, wie wir deren oben einige hinzuschreiben haben. Diese so von einem bestimmten untern Werte x_0, der untern Grenze des Integrals, bis zu einem bestimmten obern Werte, der obern Grenze gebildete Summe, nennt man das bestimmte Integral des Differentials zwischen den Grenzen x_0 und x_n.

Wie die obige Entwicklung zeigt, ist dieses bestimmte Integral nichts anderes als die Differenz der Werte, welche die Funktion, deren Differential unter dem Integralzeichen steht, annimmt, wenn wir in derselben einmal der Veränderlichen den durch die obere Grenze bestimmten Wert, das andere Mal den durch die untere Grenze bestimmten Wert beilegen. Denn aus der letzten Gleichung folgt

$$\int_{x_0}^{x_n} a x\,dx = y_n - y_0 = \tfrac{1}{2} a x_n^2 - \tfrac{1}{2} a x_0^2.$$

Dadurch, daß das bestimmte Integral die Differenz zweier Werte der Funktion ist, fällt die in dem unbestimmten Integral vorhandene Konstante heraus, da sie im Minuend und Subtrahend dieselbe ist.

Auch das hier Entwickelte gilt ganz allgemein, was wohl keines weiteren Beweises bedarf; ist

$$f(x)\,dx = d\varphi(x),$$

so ist stets

$$\text{VIII} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \varphi(x_n) - \varphi(x_0).$$

Wir können darnach den Wert des bestimmten Integrals immer angeben, wenn wir das unbestimmte Integral kennen.

Das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes können wir nicht durch eine bestimmte Methode der Rechnung erhalten, wie wir den Differentialausdruck aus der Funktion ableiten. Wirklich integrieren, das heißt eine geschlossene Integralfunktion für dieselben angeben, können wir nur solche Differentialausdrücke, welche vollständige Differentiale einer Funktion sind. Die Integralrechnung lehrt die Methoden, durch welche wir erkennen können, ob ein gegebener Ausdruck ein vollständiger Differentialausdruck ist, oder durch welche wir ihn in einen solchen verwandeln können. Wir gehen auf diese Methoden nicht ein, sondern werden, wo es etwa nötig ist, in den speziellen Fällen die erforderlichen Rechnungen machen. Nur bemerken wir hier, daß wenn wir die vorhin entwickelten Differentialausdrücke vorfinden, wir stets sofort deren Integrale angeben können, da uns die Funktionen bekannt sind, durch deren Differentiation sie entstanden sind. So ist

$$\text{nach E 1} \quad x^n dx = d\,\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}, \qquad \text{also} \int x^n dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$$

$$\text{nach E 2} \quad \frac{dx}{x}\log e = d\log x, \qquad \text{also} \int \frac{dx}{x}\log e = \log x + C.$$

Sind die Logarithmen, mit denen wir rechnen, natürliche, so ist

$$\frac{dx}{x} = d\log x, \qquad \text{also} \int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

$$\text{nach E 3} \quad \frac{\log a}{\log e}\,a^x dx = da^x, \ \text{also} \int \frac{\log a}{\log e}\,a^x dx = a^x + C$$

und so weiter; es wird nicht nötig sein, die einzelnen Integralausdrücke hinzuschreiben.

Erster Teil.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

Erstes Kapitel.

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§ 1.

Bewegung. Die erste Tatsache, welche uns bei der Betrachtung der Außenwelt auffällt, ist die, daß einige Körper ihren Ort im Raume, soweit wir es beurteilen können, stets behaupten, andere ihn verändern. Von den ersteren sagen wir, sie seien in Ruhe, von den letzteren, sie seien in Bewegung. Bei den Bewegungen erkennen wir dann sehr bald einen Unterschied, indem einige Körper in einer bestimmten Zeit einen größeren Weg zurücklegen als andere. Den ersteren legen wir eine größere, den anderen eine kleinere Geschwindigkeit bei. Als Geschwindigkeit einer Bewegung bezeichnen wir somit die Beziehung zwischen dem durchlaufenen Wege und der Zeit, in welcher er durchlaufen ist.

Einen weiteren Unterschied in der Bewegung nehmen wir wahr, wenn wir die in gleichen aufeinander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege miteinander vergleichen. Die einen legen in gleichen Zeiten immer die gleiche Anzahl Meter zurück. Bilden wir dort das Verhältnis zwischen dem in irgend einer Anzahl t Sekunden zurückgelegten Wege s und dieser Zahl der Sekunden, $\frac{s}{t}$, so ist der Wert desselben immer der gleiche. Solche Körper besitzen demnach, da die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt ist, immer dieselbe ist, eine konstante Geschwindigkeit. Man nennt die Bewegung eine gleichförmige. Für diese Bewegung erhalten wir auch sofort ein Maß der Geschwindigkeit eben in dem konstanten Verhältnis zwischen Weg und Zeit

$$c = \frac{s}{t}.$$

Man sieht weiter, daß dieser Quotient die Strecke ist, welche der Körper in der Zeit einer Sekunde zurücklegt, so daß wir die Geschwindigkeit des Körpers als die in der Zeit einer Sekunde zurückgelegte Wegestrecke bezeichnen können. Der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg s ist dann

$$s = c \cdot t.$$

Andere Körper bewegen sich ungleichförmig, das heißt, beobac[h]
wir den jedesmal in t Sekunden aber zu verschiedenen Zeiten zur[ück]
gelegten Weg s, so finden wir, daß der Quotient

$$\frac{s}{t}$$

zu den verschiedenen Zeiten der Bewegung einen verschiedenen Wert [hat,]
bei einigen Bewegungen wächst dieser Quotient, bei andern nimmt [der]selbe ab. Erstere Bewegungen nennt man beschleunigte, letztere verzög[erte.]
Man kann deshalb bei solchen Bewegungen von einer bestimmten [Ge]schwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen. Als [die] Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bezeichnet man [die]jene, mit welcher der Körper sich nach der vorherigen Definition w[eiter] bewegen würde, wenn seine Bewegung von diesem Augenblicke ab [eine] gleichförmige würde. Können wir also bei der Untersuchung einer [un]gleichförmigen Bewegung bewirken, daß von einem bestimmten Augen[blicke] ab die Änderung der Geschwindigkeit aufhört, so haben wir nur in [der] dann gleichförmigen Bewegung die in einer Sekunde zurückgelegte Str[ecke] zu messen, um die Geschwindigkeit für den Augenblick zu erhalten, [in] welchem die Bewegung gleichförmig wurde.

Auch für die ungleichförmige Bewegung läßt sich für die Gesch[win]digkeit gemäß der vorhin gegebenen Definition, daß dieselbe der Quot[ient] aus Weg und Zeit sei, ein mathematischer Ausdruck ableiten, wenn [wir] wissen, wie der Weg mit der Zeit wächst, wenn wir also den zurückgele[gten] Weg als Funktion der Zeit kennen. Nehmen wir an, der Körper habe [in der] Zeit t den Weg s zurückgelegt, und in der Zeit von t_1 Sekunden, [die] größer sein möge, als die erste, den Weg s_1. In der Zeit $t_1 - t$ ha[t er] dann den Weg $s_1 - s$ zurückgelegt, und der Quotient

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

gibt uns die Strecke, welche der Körper in der Sekunde zurückgelegt h[aben] müßte, um mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit $t_1 - t$ dens[elben] Weg zurückzulegen, den er in Wirklichkeit zurückgelegt hat. Man n[ennt] diese Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit t_1 [− t.] Diese mittlere Geschwindigkeit hat der Körper einmal in der Zeit t_1 [− t] besessen, vor dem Augenblicke aber, wo er dieselbe besaß, war die [Ge]schwindigkeit, wenn wir die Bewegung als eine beschleunigte voraus[setzen,] kleiner, nach derselben war sie größer. Von allen den in der Zeit t_1 [− t] vorkommenden Geschwindigkeiten unterscheidet sich nun diese mi[ttlere] Geschwindigkeit um so weniger, je kleiner die Zeit und der Weg ist, [aus] welcher wir dieselbe ableiten. Bilden wir deshalb für die denkbar kle[inste] Zeit $t_1 - t = dt$ und den in dieser verschwindend kleinen Zeit zu[rück]gelegten Weg ds den Quotienten

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist die berechnete Geschwindigkeit v, welche die mittlere für die Ze[it dt] ist, von derjenigen, die zur Zeit t vorhanden ist, nicht mehr versch[ieden,] wenn wir die Zeit dt eben kleiner als jede angebbare Größe annehmen.

anderen Worten, wenn wir jenen Quotienten als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit betrachten.

Wir können demnach bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren. Ja diese Definition gilt ganz allgemein auch für die gleichförmige Bewegung, denn nach E 1 ist für die Funktion

$$s = ct,$$

welche die gleichförmige Bewegung definiert,

$$\frac{ds}{dt} = c = \frac{s}{t}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke; das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der Zeit, in welcher diese Änderung eintritt, nennt man die Beschleunigung der Bewegung. Der einfachste Fall der Geschwindigkeitsänderung ist der, daß die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten sich immer um dieselbe Größe ändert, daß sie also für die Zeiteinheit immer um dieselbe Größe zu- oder abnimmt. Wächst die Geschwindigkeit auf diese Weise in der Zeit t von v auf v_1, so ist der Quotient

$$h = \frac{v_1 - v}{t}$$

konstant und gibt uns die Geschwindigkeitszunahme für die Sekunde; in diesem Falle ist also die Beschleunigung gleich der in jeder Sekunde stattfindenden Geschwindigkeitszunahme. Eine solche Bewegung nennt man eine gleichmäßig geänderte; eine gleichmäßig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeit in dieser Weise zunimmt, eine gleichmäßig verzögerte, wenn sie abnimmt.

Aus dem Satze, daß die Geschwindigkeit der Differentialquotient des Weges nach der Zeit sei, können wir auch sofort ableiten, welches bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit ist. Nehmen wir an, der Körper bewege sich von der Ruhe aus sofort mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung, und seine Beschleunigung sei gleich h; dann ist die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v = ht.$$

Da nun

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist

$$ds = ht\,dt.$$

Der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist die Summe aller Wege ds, die wir erhalten, wenn die Zeit von $t = 0$ an, jedesmal um dt, allmählich bis t wächst, oder es ist s das bestimmte Integral

$$s = \int_0^t ht\,dt.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist uns nach E 1 bekannt, er ist das Differential von $\frac{1}{2}ht^2$, somit ist

$$s = \tfrac{1}{2}ht^2 - \tfrac{1}{2}ho^2 = \tfrac{1}{2}ht^2,$$

oder der mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung in der Zeit t zurückgelegte Weg ist gleich der halben Beschleunigung multipliziert mit dem Quadrate der Zeit.

Ist die Änderung der Geschwindigkeit nicht immer in gleichen Zeiten dieselbe, so ist die Bewegung eine ungleichmäßig geänderte; bei einer solchen kann man von einer bestimmten Beschleunigung nur für einen bestimmten Augenblick sprechen, gerade wie man bei der ungleichförmigen Bewegung allgemein von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen kann. Wir gelangen aber hier zu einer Definition der Beschleunigung durch die ganz gleiche Überlegung, wie sie uns vorher zur Definition der Geschwindigkeit führte. Ist dv die Geschwindigkeitszunahme in der Zeit dt, so ist $\frac{dv}{dt}$ die mittlere Beschleunigung in der Zeit dt. Diese mittlere Beschleunigung unterscheidet sich um so weniger von der wirklich innerhalb der Zeit dt in den verschiedenen Augenblicken derselben stattfindenden, je kleiner die Zeit dt ist, sie wird der wirklich in dem betrachteten Moment stattfindenden gleich, wenn wir dt als eine verschwindend kleine Zeit betrachten. Es folgt somit, daß die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist; da die Geschwindigkeit der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist, folgt gleichzeitig, daß wir die Beschleunigung auch als den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren können. Die so definierte Beschleunigung ist dann die Geschwindigkeitszunahme, welche in einer Sekunde stattfinden würde, wenn die Geschwindigkeit in jedem der die Sekunde zusammensetzenden kleinen Zeitelemente dt um die gleiche Größe dv zunähme.

§ 2.

Kräfte. Die Erfahrung zeigt uns, daß die Materie beweglich ist, zeigt uns aber zugleich, daß kein in Ruhe befindlicher Körper seinen Ruhezustand ohne eine äußere Veranlassung, ohne einen äußern Antrieb verläßt. Ist ein Körper aber einmal in Bewegung, so zeigt uns die Erfahrung weiter, daß derselbe die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält, bis er wieder durch eine äußere Veranlassung, etwa einen dem früheren entgegengesetzten Antrieb abgeändert oder aufgehalten wird. Auf den ersten Blick scheint der letztere Satz der Wirklichkeit nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung allmählich zur Ruhe kommen. Betrachten wir indes die Bewegungen genauer, so finden wir bei jeder an der Erde stattfindenden Bewegung eine Reihe von äußeren Umständen, welche die Bewegung stören, wie der Widerstand der Luft, in welcher sich ... bewegen muß, die Reibung auf der Unterlage usf.; je mehr wir ... Hindernisse der Bewegung beseitigen, um so weniger wird die Bewegung gestört, um so länger hält sie an. Werfen wir einen Körper über ... ebene horizontale Grundlage hin, so hört seine Bewegung um so eher

je rauher die Grundlage ist, indem der Körper gegen die verschiedenen Unebenheiten anstößt. Nehmen wir eine möglichst glatte Fläche und rollen über diese eine Kugel fort, so dauert die Bewegung sehr viel länger, so daß wir schließen dürfen, daß wenn wir alle Widerstände fortnähmen, die Bewegung ohne Aufhören dauern würde. Eine solche ohne Ende fortdauernde Bewegung materieller Massen sehen wir sogar in den Gestirnen, deren Bewegung seit 2000 Jahren, seitdem man ihre Bahnen beobachtet hat, sich nicht geändert hat. Es ergibt sich somit aus der Erfahrung, daß die Materie den ihr einmal gegebenen Bewegungszustand aus sich selbst niemals ändert: diese Eigenschaft nennt man die Trägheit der Materie.

Die äußeren Ursachen, welche den Bewegungszustand der Materie ändern, nennen wir Kräfte.

Um alles zu kennen, wodurch eine Kraft bestimmt wird, müssen wir ihren Angriffspunkt und ihre Größe kennen.

Die Richtung einer Kraft erkennen wir aus der Richtung, nach welcher sie eine Materie in Bewegung setzt, die Richtung der Kraft fällt zusammen mit der Richtung, nach welcher sie die Materie, auf welche sie wirkt, hintreibt.

Die Größe einer Kraft können wir strenge genommen nur durch die Größe ihrer Wirkung, also durch die von ihr erzeugte Bewegung messen. Um aber dieses Maß anwenden zu können, müssen wir zunächst wissen, von welchen Umständen überhaupt die Bewegung eines Körpers abhängt. Zu dieser Untersuchung selbst ist es aber durchaus wünschenswert, schon ein Maß für die Kraft zu haben. Wir gelangen dazu durch folgende Überlegung. Zwei Kräfte müssen wir als gleich ansehen, wenn sie, an demselben Punkte angreifend, nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkend, sich aufheben, das heißt keine Bewegung hervorbringen oder eine vorhandene Bewegung ungeändert lassen. Da man nun stets einer Kraft das Gleichgewicht halten kann, indem man an demselben Punkte in einer ihr entgegengesetzten Richtung ein Gewicht wirken läßt, so ist dieses Gewicht der Kraft gleich und ihr Maß. Man kann demnach die Größe einer Kraft in Gewichten auswerten.

Welcher Art nun auch die Kräfte sind, aus welcher Quelle sie auch stammen, man kann sie in zwei Klassen teilen; die einen wirken stets in derselben Richtung und erfordern stets die gleiche Anzahl von Kilogrammen, um im Gleichgewicht gehalten zu werden, es sind die konstanten Kräfte. Die anderen können sich mit der Zeit nach Größe und Richtung ändern, d. h. es bedarf, um sie im Gleichgewicht zu halten, zu verschiedener Zeit verschieden großer Gewichte, welche man nach verschiedenen Richtungen wirken läßt. Man nennt diese Kräfte veränderliche.

Es ist nun unsere Aufgabe zu untersuchen, wie die in § 1 betrachteten Bewegungen durch solche Kräfte erzeugt werden, wie also infolge der Wirkung einer Kraft sich die Körper bewegen. Wir verfahren zu dem Ende folgendermaßen: wir beobachten einige einfache Fälle der Bewegung und entwickeln deren experimentelle Gesetze; dann suchen wir aus diesen Gesetzen jene durch Abstraktion zu erhalten, welche uns allgemein angeben, wie Kräfte wirken, aus welchem also die experimentell gefundenen Gesetze sich durch Deduktion ableiten lassen. Dadurch erhalten wir die Gesetze der Kräfte, und diese allgemeinen Sätze bieten uns die Grundlage der mathematischen Deduktionen, welche die theoretische Mechanik bilden.

§ 3.

Dasein und Richtung der Schwere. Das sich uns am häufigsten zeigende Beispiel einer fortschreitenden Bewegung ist das Niederfallen eines nicht unterstützten Körpers zur Erde; dies eignet sich daher am besten dazu, die Gesetze der Bewegung zu untersuchen. Alle Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt sind, zur Erde nieder. Heben wir sie auf, so fühlen wir, daß sie das Bestreben haben zu fallen, indem es einer gewissen Anstrengung bedarf, sie am Fallen zu hindern. Wir nennen deshalb die Körper schwer und jene Kraft, welche sie zur Erde niedertreibt, die Schwere. Verschiedene Körper haben ein verschiedenes Bestreben zu fallen, sie üben auf ihre Unterlage einen verschiedenen Druck aus. Wir legen ihnen daher ein verschiedenes Gewicht bei, indem wir den Druck auf die Unterlage als Gewicht bezeichnen. Welche Einheit wir der Messung der Gewichte zugrunde legen, haben wir in der Einleitung besprochen.

Die Richtung, in welcher die Schwere wirkt, läßt sich leicht durch einen einfachen Versuch bestimmen. Man befestigt einen schweren Körper, etwa eine Metallkugel, an einen Faden, der mit seinem andern Ende an irgend einem festen Punkte befestigt ist, und läßt die Kugel frei herabhängen. Eine Zeitlang schwingt die Kugel hin und her, dann hängt sie ruhig. Da sie nicht fällt, so folgt, daß eine der Schwere gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft die Kugel hält; es ist dies die Festigkeit des gespannten Fadens. Die Richtung des Fadens gibt uns somit die Richtung der Schwere; man überzeugt sich ferner dadurch, daß man den Faden durchschneidet; denn die Kugel fällt dann in der Richtung des gespannten Fadens zu Boden.

Die Richtung der Schwere ist also an jedem Orte durch einen solchen mit einem Gewichte versehenen Faden, dem Lote oder Senkel gegeben; man nennt diese Richtung die lotrechte oder vertikale.

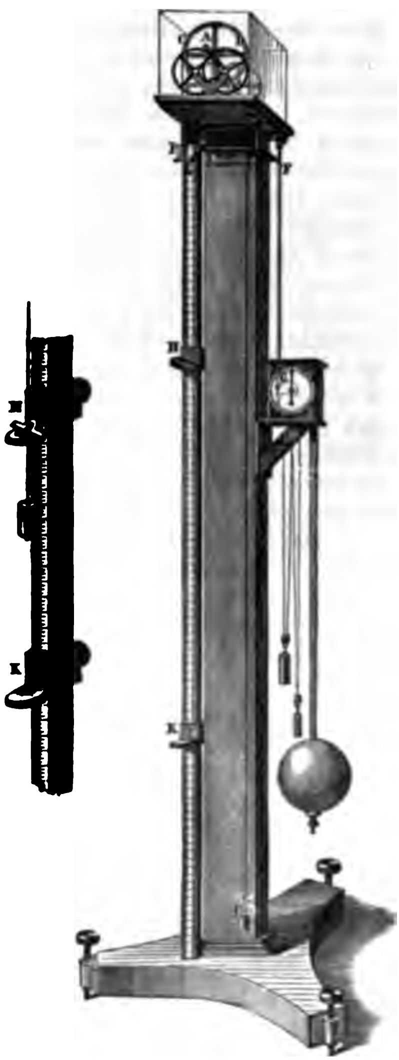
Hält man ein solches Lot über einer ruhenden Flüssigkeitsfläche, so findet man, daß es mit allen in der Ebene der Flüssigkeitsfläche durch seinen Fußpunkt gezogenen Linien einen rechten Winkel bildet, daß es also auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht steht. Man kann also die Richtung des Lots ebenso durch die Lage der Flüssigkeitsebene bestimmen; die Ebene der Flüssigkeit nennt man die horizontale.

§ 4.

Atwoods Fallmaschine. Um die Gesetze der Bewegung mit Hilfe der Schwerkraft zu untersuchen, genügt es nicht, einfach einen fallenden Körper zu beobachten. Denn einmal ist, wie sich jeder leicht überzeugt, die Fallgeschwindigkeit bald so groß, daß sie einer exakten Beobachtung sich entzieht, und andererseits bietet der freie Fall der Körper nur einen speziellen Fall von Bewegung, nämlich die Bewegung eines Körpers, der durch sein eigenes Gewicht bewegt wird. Man hat deshalb Apparate konstruiert, welche beiden Übelständen abhelfen, welche die Bewegung verlangsamen und in vieler Beziehung abändern lassen; einer der bequemsten Apparate dieser Art ist die Atwoodsche Fallmaschine, mit deren Hilfe daher die Gesetze der Bewegung untersucht werden sollen.

Das Prinzip dieser Maschine ist folgendes. Wenn man an einem vollkommen biegsamen Faden zwei ganz gleich schwere Körper befestigt und dann den Faden über eine leicht bewegliche Rolle führt, so halten sich die beiden Gewichte das Gleichgewicht, es tritt keine Bewegung ein, da jeder der beiden Körper durch ein dem anderen gleiches Gewicht der Schwere entgegen gezogen wird. Um dieses System von Körpern, die beiden Gewichte, den Faden und die Rolle in Bewegung zu setzen, bedarf es einer äußern Kraft, die wir erhalten, indem wir auf den einen Körper ein Übergewicht legen. Die Größe dieses Übergewichtes, sowie die Größe des zu bewegenden Körpers und die Dauer der Wirkung des Übergewichtes, können wir dann beliebig ändern. Die Einrichtung des Apparates ist zu dem Zwecke folgende.

Fig. 14.



Auf einer massiven hölzernen mit 3 Stellschrauben versehenen Platte (Fig. 14) befindet sich ein Holzpfeiler von ungefähr 2 Meter Höhe. Auf dem Pfeiler ist eine Platte horizontal befestigt, und auf dieser ist ein möglichst exakt gearbeitetes, aus 4 Speichen und einem Radkranze bestehendes Rad möglichst beweglich aufgestellt. Um seine Beweglichkeit zu erhöhen, ist die Achse des Rades nicht in feste Lager, sondern auf Friktionsräder gelegt. Dieselben bestehen aus zwei Systemen von Rädern C, D, welche, wie die Zeichnung zeigt, sich kreuzen, und welche das Rad A mit in Bewegung setzt. Die Reibung des Rades ist dadurch sehr vermindert; wie man dieselbe ganz unschädlich macht, werden wir gleich zeigen.

Der Umfang des Rades hat eine Rinne, und in dieser ist über das Rad ein Seidenfaden gelegt, an dessen Enden zwei gleiche Gewichte P und P^1 befestigt sind. Legt man auf P ein Übergewicht p, so sinkt P nach unten, P^1 steigt empor und das ganze System erhält eine gemeinschaftliche Bewegung. Die zu bewegenden Gewichte sind in diesem Falle $p + P + P^1$ und das Gewicht des Fadens und der Rolle. Sind die Zapfen der Rolle hinreichend fein gearbeitet, so darf man annehmen, daß das ganze Gewicht derselben im Radkranze vereinigt wäre. Dann

erhält aber dieses Gewicht, da die Rolle mitgedreht wird, und die einzeln Punkte derselben ebenso schnell bewegt werden wie der Faden oder (Gewichte P, ganz dieselbe Bewegung wie die übrigen Teile des Syster Bezeichnen wir das Gewicht der Rolle und des Fadens mit Π, so ist d Gewicht der zu bewegenden Körper $p + P + P^1 + \Pi$. Die Kraft, welc diese Gewichte in Bewegung setzt, ist das Übergewicht p. Es muß ind um diese Kraft genau zu erhalten, von diesem Gewichte ein kleiner T π abgezogen werden, um die Reibung der Achse des Rades A zu üb winden. Wenn diese Reibung auch sehr klein ist, so ist sie doch nic gleich Null, wie man wahrnimmt, wenn man das System ohne Üb gewicht durch einen Anstoß in Bewegung setzt. Da auf das System da keine äußere Kraft wirkt, müßte es, vermöge der Trägheit, in gleic förmiger Bewegung verharren. Man findet aber stets eine, wenn au kleine Abnahme der Geschwindigkeit infolge der Reibung. Um die B wegung vollständig gleichförmig zu machen, muß man auf das nied sinkende Gewicht ein kleines Übergewicht π legen, dessen Schwere gera hinreicht, um die Reibung zu überwinden. Um die Größe dieses G wichtes π muß man daher bei Berechnung der das System bewegend Kraft das Übergewicht p vermindern. Bequemer verfährt man indes daß man ein für allemal auf das niedersinkende Gewicht das zur Üb windung der Reibung erforderliche Gewicht π hinlegt; das in Bewegu zu setzende Gewicht ist dann $p + P + P^1 + \Pi + \pi$, die bewegende Kr einfach gleich dem Übergewichte p.

Das Gewicht P fällt vor einem hölzernen in Zentimeter geteilten Ma stabe. Längs desselben kann man einen kleinen Messingteller K verschieb und durch Klemmschrauben in irgend einer Höhe befestigen; auf denselb schlägt dann das Gewicht P auf und gibt durch das infolge des Schlag entstehende Geräusch das Ende seines Laufes an.

Der Apparat ist ferner so eingerichtet, daß man an einer beliebig Stelle das Übergewicht p fortnehmen kann, ohne die Bewegung des Syst zu stören. Zu dem Ende ist an dem hölzernen Maßstabe außer dem v hin erwähnten Teller ein Ring H befestigt, durch den das Gewicht P gehindert hindurchgehen kann, der aber das Übergewicht p, welches in der Nebenfigur bezeichnete Gestalt hat, zurückhält. Dieser Ring ist l des Maßstabes verschiebbar und kann ebenfalls an beliebiger Stelle selben befestigt werden. Durch Einschalten des Ringes kann also das Ü gewicht an einer beliebigen Stelle fortgenommen werden.

An der Maschine ist überdies noch ein Apparat angebracht, der Zeit mißt. Dieser ist im Prinzip nichts anders als ein Lot; bei der L vom Pendel werden wir nachweisen, daß ein aus seiner Gleichgewicht gebrachtes Lot um dieselbe Schwingungen macht. Zu diesen Schwingu braucht es immer dieselbe Zeit; wir können es daher benutzen, um gl Zeitteile zu messen. Hat das Pendel eine bestimmte Länge, so brau zu einer Schwingung genau eine Sekunde. Ein solches Sekundenpend an dem Apparate angebracht. Mit dem Pendel ist ein Zeiger in V dung, der die einzelnen Sekunden anzeigt, und ein Schlagwerk, v jede Sekunde durch einen hörbaren Schlag markiert.

Um die Bewegung genau mit dem Schlage einer Sekunde be zu können, steht das Gewicht P vor der Bewegung auf einem kleinen

der durch eine kleine Stütze gehalten wird, welche durch den Winkelhebel EFG mit dem Pendel in Verbindung gebracht ist. Jedesmal wenn der Zeiger an einer bestimmten Stelle steht, wird diese Stütze gelöst, und das System beginnt seine Bewegung.

Wie man sieht, läßt sich an diesem Apparate ein beliebiges Gewicht durch eine beliebige konstante Kraft, deren Wirkungsdauer sich ebenfalls ändern läßt, in Bewegung setzen; der Apparat ist daher vorzugsweise geeignet, die durch konstante Kräfte erzeugten Bewegungen in allen Einzelheiten zu untersuchen.

§ 5.

Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft. Setzen wir unser System an der Atwoodschen Fallmaschine, nachdem es in der im vorigen Paragraphen beschriebenen Weise vorgerichtet ist, durch ein Übergewicht p in Bewegung und bringen an irgend einer Stelle z. B. 10 Zentimeter unter dem Ausgangspunkte der Gewichte den Ring H an. Geht P durch den Ring hindurch, so bleibt das Übergewicht zurück, und wir finden dann, daß von da ab das System sich mit gleichförmiger Bewegung weiter bewegt. Bei einem bestimmten Übergewicht, dessen Größe von der der übrigen Gewichte abhängt, wird der Raum von 10^{cm} gerade in 1 Sekunde durchfallen; suchen wir dann durch passende Stellung des Tellers K, welcher Weg in 2, 3, 4 Sekunden durchlaufen wird, so finden wir

Zeit	1″	2″	3″	4″	5″
Durchlaufener Weg	10^{cm}	30^{cm}	50^{cm}	70^{cm}	90^{cm}
Weg in den auf die erste folgenden Sekunden zurückgelegt	20^{cm}	40^{cm}	60^{cm}	80^{cm}.	

Nach der ersten Sekunde, also nach Fortnahme des Übergewichtes, ist somit die Bewegung in der Tat eine gleichförmige, in jeder Sekunde werden 20^{cm} durchlaufen; wir erhalten darin einen experimentellen Beweis dafür, daß ein Körper, der sich ohne Hindernisse bewegt, in der Tat die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält.

Lassen wir dasselbe Übergewicht anstatt einer 2, 3, 4 Sekunden wirken (der Versuch zeigt, daß wir dazu den Ring H bei 40^{cm}, 90^{cm}, 160^{cm} befestigen müssen), so finden wir stets, daß in der auf die Abnahme des Übergewichtes folgenden Zeit die Bewegung eine gleichförmige ist, daß also jedesmal der in dieser Zeit zurückgelegte Weg sich darstellen läßt durch

$$s = c \cdot t,$$

wenn t die Anzahl der Sekunden nach Fortnahme des Übergewichtes und c der in jedem Falle in der ersten Sekunde nach jener Fortnahme zurückgelegte Weg ist. Dieser Weg oder die während der Wirkung des Übergewichtes erlangte Geschwindigkeit ist aber verschieden; sie ist um so größer, je länger das Gewicht gewirkt hat. Bestimmen wir die Geschwindigkeiten in den einzelnen Fällen, so finden wir:

nach	1″	2″	3″	4″
die Geschwindigkeiten	20^{cm}	40^{cm}	60^{cm}	80^{cm}.

Dividieren wir die in den einzelnen Fällen erlangten Geschwindigkeiten

durch die Anzahl Sekunden, in welchen dieselben durch die Wirkun Übergewichts erzeugt sind, so wird

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{60}{3} = \frac{80}{4} = 20.$$

Die Quotienten haben alle denselben Wert. Wir sehen somit in Fällen, und schließen daraus für alle Fälle, daß die durch Wirkung konstanten Übergewichtes, also auch allgemein durch die Wirkung konstanten Druckes in verschiedenen Zeiten erreichten Geschwindig einfach den Zeiten proportional sind, oder daß

$$v = c_1 t,$$

die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit v gleich ist dem Produkt der in der ersten Sekunde erlangten Geschwindigkeit und der Zeit t. somit die in gleichen Zeiten stattfindenden Geschwindigkeitszunahmen sind, so erzeugt eine konstante stetig wirkende Kraft eine gleichmäßi schleunigte Bewegung.

Im § 1 haben wir bereits abgeleitet, daß bei der gleichmäßi schleunigten Bewegung die während derselben zurückgelegten Wege sind der halben Beschleunigung multipliziert mit dem Quadrate der während welcher die Bewegung gedauert hat, daß also

$$s = \tfrac{1}{2} c_1 t^2.$$

Zu dem gleichen Resultate können wir auch durch eine einfache legung gelangen. Da nämlich die Zunahme der Geschwindigkeit in gl Zeiten immer dieselbe ist, so legt der mit gleichmäßig beschleunigte wegung bewegte Körper in einer gegebenen Zeit denselben Weg z als wenn er sich während der ganzen Zeit in gleichförmiger Bewegun derjenigen Geschwindigkeit bewegt hätte, die er genau in der Mitte de gehabt hat. Denn mit dieser Geschwindigkeit hätte er in der ersten I der Zeit gerade soviel mehr zurückgelegt, wie er in Wirklichkeit z gelegt hat, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegen würde. mittlere Geschwindigkeit ist $\frac{1}{2} c_1 t$, somit der zurückgelegte Weg $\frac{1}{2} c_1 t \cdot t = \frac{1}{2} c_1 t^2$, wie es die Rechnung ergab.

Wir können leicht die Richtigkeit unserer Rechnung durch den such bestätigen, indem wir an der Fallmaschine den Ring H fortn und jene Stellen aufsuchen, an denen wir den Teller K befestigen damit das Gewicht P nach 1, 2, 3 . . . Sekunden aufschlägt. Wir diese Stellen

nach	1″	2″	3″	4″
bei	10	40	90	160.

Diese letzteren Zahlen sind aber

$$10 \cdot 1, \quad 10 \cdot 2^2, \quad 10 \cdot 3^2, \quad 10 \cdot 4^2$$

oder allgemein

$$s = 10 t^2.$$

Da wir bei demselben Versuche die Beschleunigung gleich 20 fa $10 = \frac{1}{2} c_1$.

Die durch eine jede konstante Kraft hervorgebrachte gleichm schleunigte Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn die Beschl

bekannt ist, denn mit dieser erhalten wir für jede Zeit die Geschwindigkeit und den in dieser Zeit zurückgelegten Weg. Daß die Beschleunigung von der Größe der bewegenden Kraft und von der Größe des bewegten Gewichtes abhängig sein muß, ergibt sich unmittelbar aus der Überlegung, daß es gerade die Kraft ist, welche den Bewegungszustand des Beweglichen ändert: in welcher Weise aber die Beschleunigung von diesen beiden Größen abhängt, darüber kann uns nur der Versuch belehren.

Lassen wir zunächst das Gesamtgewicht an unserer Fallmaschine ganz ungeändert, und verändern nur das Übergewicht. Zu dem Zwecke sind an den Enden des Fadens Scheiben angebracht, auf welche man eine Anzahl unter sich ganz gleiche Ringe legt. Legen wir zunächst auf beide Seiten n Gewichte p, so daß etwa diese np gleich dem vorhin angenommenen Gewichte P sind, so tritt keine Bewegung ein; legen wir dann auf die eine Seite unser Übergewicht p und das Friktionsgewicht π, so tritt die vorhin betrachtete beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $c_1 = 20^{cm}$ ein. Nun nehmen wir von der hinteren Seite einen Ring vom Gewichte p fort und legen ihn auf die vordere Seite; wir haben dann bei ganz ungeändertem Gesamtgewichte des ganzen Systems auf der einen Seite das Übergewicht $3p$, denn vorn liegen die Gewichte $(n + 1)\,p + p = (n + 2)\,p$, auf der hinteren Seite dagegen $(n - 1)\,p$. Verfahren wir ein zweites Mal so, dann erhalten wir das Übergewicht $5p$, ein drittes Mal $7p$ usf., so daß bei stets gleichem Gesamtgewichte sich die Übergewichte verhalten wie $1 : 3 : 5 : 7$ usf.

Bestimmen wir die Beschleunigungen in diesen Fällen, so finden wir, daß dieselben mit der Größe des Übergewichtes in demselben Verhältnisse zunehmen, denn wir erhalten sie

bei dem	Übergewichte		p	gleich	c_1
„	„	„	$3p$	„	$3c_1$
„	„	„	$5p$	„	$5c_1$
„	„	„	$7p$	„	$7c_1$.

Bezeichnen wir daher die durch ein der Gewichtseinheit gleiches Übergewicht unserem System erteilte Beschleunigung mit d, so können wir die durch irgend ein Übergewicht p erzeugte Beschleunigung c wiedergeben durch

$$c = dp,$$

oder die Beschleunigung ist allgemein der Größe des Übergewichts oder der Größe der bewegenden Kraft proportional.

Ändern wir bei gegebenem Übergewicht das Gesamtgewicht unseres Systems $P + P' + II + \pi + p$, was wir dadurch können, daß wir eine beliebige Anzahl von Ringen auf die am Ende des Fadens angebrachten Scheiben legen, so finden wir, daß mit der Größe dieses Gewichtes die Beschleunigung abnimmt. Legen wir bei dem Übergewichte p soviel Ringe auf, daß das Gesamtgewicht verdoppelt, verdreifacht wird, so wird die Beschleunigung die Hälfte oder ein Drittel usf. Wir finden allgemein, daß bei konstantem Übergewichte die Beschleunigung in demselben Maße kleiner wird, als die Größe des Gesamtgewichtes zunimmt.

Ändern wir aber gleichzeitig das Gesamtgewicht des Systems und das Übergewicht in demselben Sinne, verdoppeln, verdreifachen wir beide, so finden wir immer dieselbe Beschleunigung, wie wir sie bei einfachem Ge-

samtgewichte und einfachem Übergewichte fanden. Daraus folgt, daß Beschleunigung nicht allein von der Größe der bewegenden Kraft o von der Größe des zu bewegenden Gewichtes, sondern von dem Verhä nisse beider zueinander abhängt, oder daß die Beschleunigung der Grö dieses Verhältnisses direkt proportional ist. Nennen wir daher die B schleunigung, welche die der Gewichtseinheit gleiche bewegende Kr einem die Gewichtseinheit wiegenden Körper erteilt, g, so wird die B schleunigung c, welche die Kraft p dem Gewichte Q erteilt,

$$c = g\,\frac{p}{Q},$$

oder allgemein die einem Körper erteilte Beschleunigung ist der Grö der Kraft direkt, dem Gewichte des Körpers umgekehrt proportional.

Es ist gut, zu beachten, daß in dieser Gleichung das Gewicht Q einer anderen Weise auftritt als das Übergewicht p. Wir sahen sch früher, daß die Materie träge ist, daß es immer einer Kraft bedarf, u den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern, daß also in der Trägh der Materie ein Widerstand gegen eine Änderung der Geschwindigk vorhanden ist. Wir sehen nun hier, daß es bei verschiedenen Körpe zur gleichen Änderung ihres Bewegungszustandes einer verschiedenen Kr bedarf, und daß diese Kraft in demselben Verhältnisse zunehmen muß w der Druck, den der bewegte Körper auf seine Unterlage ausübt, oder d der Widerstand des Körpers gegen die Bewegungsänderung seinem G wichte proportional ist; das Gewicht ist also das Maß dieses Widerstand und in dem Sinne tritt es in dem Nenner obiger Gleichung auf.

Aus dem Ausdrucke für die Beschleunigung irgend eines Körpe vom Gewichte Q durch irgend eine Kraft p können wir nun auch sof die Geschwindigkeit v erhalten, welche die Kraft diesem Körper in d Zeit t erteilt, sowie den Weg s, den der Körper unter Wirkung dies Kraft zurücklegt. Wir erhalten

$$v = g\,\frac{p}{Q}\,t$$

$$s = \tfrac{1}{2} g\,\frac{p}{Q}\,t^2.$$

In diesen Ausdrücken ist alles enthalten, was auf die Bewegung ein Körpers infolge einer konstanten Kraft von Einfluß ist, Größe der Kr und bewegten Gewichte und Länge der Zeit, während welcher die Kr wirkt. Die vierte darin vorkommende Größe ist eine Zahl, die wir a unsern Versuchen bestimmen können. Genaue später zu besprechende Ve suche haben gezeigt, daß diese Größe aus Gründen, die dann eben hervortreten werden, an den verschiedenen Orten der Erde einen et verschiedenen Wert hat. In Göttingen ist sie nach den Bestimmu von Gauß[1]) 9,81163, für Paris nach den Bestimmungen von Biot Arago[2]) 9,80896, wenn die Zeit t in Sekunden und die Geschwindi in Metern gemessen wird.

1) *Gauß,* Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolut vocata. Göttingen 1833. Poggend. Ann. 28. p. 613. 1833.

2) *Biot* et *Arago,* Recueil d'observations géodésiques, astronomi physiques etc. Paris 1821.

Die Bedeutung dieser in der Physik immer mit g bezeichneten Zahl ist leicht zu erhalten; setzen wir nämlich $p = Q$, so wird

$$v = gt; \quad s = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Ist aber $p = Q$, so heißt das, das Übergewicht ist gleich dem Gesamtgewichte, oder wir lassen den Körper frei fallen. Die Größe g ist demnach die Beschleunigung oder der in jeder Sekunde eintretende Geschwindigkeitszuwachs beim freien Fall, und die beiden letzten Ausdrücke liefern uns die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach t Sekunden und den in t Sekunden durchfallenen Raum.

§ 6.

Fundamentalgesetz der Kraftwirkung. Das im § 5 experimentell abgeleitete Gesetz, daß eine konstante Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung hervorbringt, deren Beschleunigung der Größe der Kraft direkt proportional ist, liefert uns sofort ein Beispiel dafür, daß, wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, ein solches Gesetz nicht nur der Ausdruck derjenigen Tatsachen ist, welche es in einem allgemeinen Satze zusammenfaßt, sondern daß es gleichzeitig alle diejenigen Erscheinungen in sich schließt, welche aus demselben folgen. Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung können wir als die experimentelle Grundlage der ganzen Mechanik bezeichnen, indem aus demselben sich das Fundamentalgesetz der Wirkung einer Kraft ergibt, das Gesetz nämlich, daß die Wirkung einer Kraft nur durch sie selbst und von nichts anderm bedingt ist.

Das Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung zeigt uns nämlich zunächst, daß die Geschwindigkeitszunahme in gleichen Zeiten immer denselben Wert hat, die Geschwindigkeit ist am Ende der ersten Sekunde c_1, der zweiten $2c_1$, der dritten $3c_1$, sie wächst in jeder Sekunde um c_1, einerlei, welche Geschwindigkeit der Körper bei dem Beginne der Sekunde besaß. Wir schließen daraus, daß die Wirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper immer dieselbe ist, einerlei, ob der Körper schon eine Bewegung besitzt oder nicht.

Ganz dasselbe zeigt die Betrachtung der unter Wirkung einer Kraft zurückgelegten Wege. Dieselben sind in den aufeinanderfolgenden Sekunden

$$\frac{c_1}{2} \quad 3\frac{c_1}{2} \quad 5\frac{c_1}{2}.$$

Wäre der Körper am Schlusse der ersten Sekunde der Wirkung der Kraft entzogen, so wäre er in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit c_1 weitergegangen, er hätte also in der zweiten Sekunde den Weg c_1 zurückgelegt. Infolge der dauernden Kraftwirkung hat er den Weg $3\frac{c_1}{2}$ zurückgelegt. Die Differenz $3\frac{c_1}{2} - c_1 = \frac{c_1}{2}$ ist also Folge der Wirkung der Kraft. Dieser Weg ist gleich dem in der ersten Sekunde zurückgelegten. Ebenso ist es in den folgenden Sekunden, oder es ergibt sich allgemein, daß der durch die Wirkung einer Kraft in jeder Sekunde zurückgelegte Weg ganz unabhängig ist von der Geschwindigkeit, welche der Körper bereits besitzt.

Der soeben gezogene Schluß, daß die Wirkung einer Kraft ganz unabhängig ist von der Bewegung, die ein Körper schon besitzt, gilt zunächst nur in dem Falle, daß die Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt, welche der Körper schon besitzt. Indes läßt sich der Schluß mit Hilfe bekannter Erfahrungen leicht verallgemeinern. Befinden wir uns in einem mit gleichförmiger Bewegung begabten Raume, etwa in dem Innern eines Schiffes, so nehmen wir die Bewegung nicht direkt wahr. Lassen wir dann auf irgend einen im Innern des Raumes befindlichen Körper eine Kraft wirken, so bewegt sich derselbe innerhalb des Raumes ganz so, wie wenn das Schiff in Ruhe wäre. Die Wirkung der Kraft auf den Körper ist also unabhängig von dessen mit dem Schiffe gemeinsamer Bewegung. Ja es bedarf zum Beweise dieses Satzes nicht einmal besonderer Beobachtungen, unsere Versuche zur Ableitung des Gesetzes der gleichförmigen Bewegung liefern schon den Beweis, da uns die Astronomie lehrt, daß unsere Erde, mit allem, was auf ihr ist, eine sehr komplizierte Bewegung im Raume hat, die wir an der Erde nicht wahrnehmen, weil unsere ganze Umgebung mit uns die gleiche Bewegung hat. Wir können deshalb ganz allgemein den Satz aufstellen:

„Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben, und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt infolge dieser Kraft in Beziehung auf das System annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systemes nicht existiert."

Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung sagt weiter, daß die Beschleunigungen, welche verschiedene Kräfte an einem Systeme bewirken, der Größe der Kräfte proportional sind. Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf ein System, so ist die Beschleunigung gleich der Summe der Beschleunigungen, welche jede Kraft für sich, wenn sie allein wirksam wäre, hervorbringen würde. Es folgt somit, daß die Wirkung einer Kraft unabhängig davon ist, ob gleichzeitig mit ihr eine andere zur Wirksamkeit kommt, oder daß die Wirkung einer Summe von Kräften gleich ist der Summe der Wirkungen der einzelnen Kräfte.

Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegungen beweist diesen Satz zunächst wiederum nur für gleichgerichtete Kräfte, man kann ihn durch den vorhin angeführten ähnliche Erfahrungen leicht verallgemeinern; indes ist das nicht einmal erforderlich, da wir diesen Satz schon allgemein aus dem vorigen folgern können. Denn die Wirkung einer jeden von einer Summe gleichzeitig wirkender Kräfte ist Bewegung. Da wir nun ganz allgemein fanden, daß die Wirkung einer Kraft durchaus unabhängig von einer bereits vorhandenen oder anderweitig erteilten Bewegung ist, so folgt auch, daß die Wirkung einer Kraft unabhängig von derjenigen einer andern ist.

Dieser Satz, daß die Wirkung einer Kraft von nichts beeinflußt wird, ist der Fundamentalsatz der Mechanik, denn er setzt uns in den Stand sofort die von einer Kraft bewirkte Bewegung zu bestimmen, wenn wir die Dauer ihrer Wirkung und die Masse des bewegten Systems kennen. Wir haben mit demselben die experimentelle Grundlage der Mechanik gewonnen, aus welcher diese Wissenschaft deduktiv abgeleitet wird.

§ 7.

Das Kräfteparallelogramm. Wir gehen zunächst dazu über, die unter Wirkung mehrerer nach verschiedenen Richtungen tätiger Kräfte stattfindende Bewegung etwas genauer zu betrachten und daraus einige Folgerungen zu ziehen.

Es ist an sich klar, daß ein Körper, der sich infolge zweier nach verschiedener Richtung wirkender Kräfte bewegt, sich weder in der Richtung der einen noch in derjenigen der andern bewegen kann. Nach dem eben entwickelten Fundamentalsatze ist es aber leicht, die Richtung, nach welcher sich der Körper bewegt, zu bestimmen. Die Kräfte wirken jede, wie wenn die andere nicht da wäre; der Ort, welchen das Bewegliche nach der ersten Sekunde erreicht hat, wird daher gerade so erreicht werden, wenn wir die beiden Kräfte nacheinander jede eine Sekunde wirken lassen. Legen wir daher durch den Punkt, welchen der Körper unter Wirkung der einen Kraft erreicht hat, eine gerade Linie und tragen auf dieser parallel der Richtung, in welcher die zweite Kraft für sich den Körper bewegt haben würde, die Länge auf, welche er unter Wirkung dieser Kraft in einer Sekunde zurückgelegt haben würde, so wird der Endpunkt dieser Länge wirklich der Punkt sein, in welchem sich der Körper nach gemeinschaftlichem Wirken der beiden Kräfte befindet, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ausgangspunkte wird der Richtung und Länge nach der Weg sein, den der Körper wirklich zurückgelegt hat.

Man sieht, dieser Weg fällt der Größe und Richtung nach mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammen, welches wir aus den Längen konstruieren können, welche der Körper infolge jeder Kraft für sich in der gleichen Zeit zurücklegt, indem wir diese Längen im Ausgangspunkt in den entsprechenden Richtungen zusammenlegen und das durch diese Längen und den Winkel, den sie miteinander bilden, bestimmte Parallelogramm vervollständigen.

Diesen Weg hat der Körper allerdings durch die Wirkung zweier Kräfte zurückgelegt, welche nach verschiedenen Richtungen wirkten. Aber denselben Weg hätten wir auch in derselben Zeit den Körper durch eine einzige in der Richtung der resultierenden Bewegung wirksame Kraft zurücklegen lassen können. Da dann diese Kraft die gleiche Wirkung hat wie die beiden zusammenwirkenden, so kann man die beiden vorhandenen Kräfte auch vollständig durch diese Kraft ersetzen. In dem Sinne nennt man auch die Kraft, welche der Richtung und Größe nach dieselbe Bewegung zur Folge hat als die beiden einzelnen Kräfte durch ihr Zusammenwirken, die aus diesen resultierende Kraft.

Diese Kraft, welche also die beiden wirklich vorhandenen der Größe und Richtung nach ersetzt, läßt sich durch eine ganz ähnliche Konstruktion ihrer Größe nach erhalten. Wenden wir nämlich anstatt der in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege zu unserer Konstruktion die durch die einzelnen Kräfte bewirkten Beschleunigungen an, so sind die Kräfte den Beschleunigungen proportional und können durch dieselben dargestellt werden. Wir gelangen daher unmittelbar zu dem Satze, daß die aus zwei gegebenen in verschiedener Richtung wirkenden Kräften resultierende Kraft der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des von jenen Kräften

und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmten Parallelogramms gegeben wird.

Dieser für die theoretische Mechanik äußerst wichtige Satz, der nur eine Konsequenz des in dem vorigen Paragraphen Gesagten ist, wird der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt.

Man sieht, wie man dadurch imstande ist, die Wirkung beliebig vieler nach verschiedenen Richtungen tätiger, an einem Punkte angreifender Kräfte auf jene einer einzigen zurückzuführen, welche alle jene vollständig ersetzt, indem man die Kräfte nur paarweise zusammensetzt.

Um die Größe der aus zwei Kräften P und P_1, welche den Winkel α miteinander bilden, resultierenden Kraft zu erhalten, haben wir nur den bekannten Satz aus der ebenen Geometrie über die Größe der Diagonale eines Parallelogramms anzuwenden, welche den Winkel α schneidet; die Resultante R ist danach gegeben durch

$$R^2 = P^2 + P^2_1 + 2PP_1 \cos \alpha.$$

Umgekehrt erhellt aber auch, daß eine jede Bewegung als die Resultierende aus zwei Seitenbewegungen aufgefaßt, somit auch die jene Bewegung bestimmende Kraft als die Resultierende zweier gedachter Seitenkräfte aufgefaßt werden kann. Da nun jede Linie als Diagonale unendlich vieler Parallelogramme aufgefaßt werden kann, so kann man jede Kraft auf unendlich viele verschiedene Arten in Seitenkräfte zerlegen; jede dieser Seitenkräfte kann dann wieder als Resultierende anderer Seitenkräfte betrachtet werden, so daß also jede Kraft in unendlich viele Seitenkräfte zerlegt werden kann.

Diese letzten Sätze sind in der Mechanik von hoher Bedeutung, da sie uns in den Stand setzen, die Wirkung, welche eine Kraft nach einer von ihrer eigenen verschiedenen Richtung ausüben kann, zu berechnen. Kann z. B. ein Körper sich nur nach einer bestimmten Richtung bewegen, und wirkt auf ihn eine konstante Kraft, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung des Körpers den Winkel α bildet, so erhalten wir die Größe der die Bewegung des Körpers bewirkenden Seitenkraft, wenn wir die gegebene Kraft so zerlegen, daß die eine der Seitenkräfte in die Richtung der Bewegung fällt, die andere zu ihr senkrecht ist. Letztere trägt zur Bewegung gar nichts bei, die erstere Komponente ist es somit, welche die Bewegung bedingt. Nennen wir die ursprüngliche Kraft P, die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente R, so ist

$$R = P \cos \alpha,$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, daß P die Diagonale eines Rechtecks ist, dessen eine Seite R mit P den Winkel α bildet.

Haben wir eine ganze Reihe von Kräften P, P_1, P_2, ... die mit der Bewegungsrichtung die Winkel α, α_1, α_2 ... bilden, so ist die aus allen diesen resultierende, die Bewegung bestimmende Kraft

$$R = P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots = \Sigma P \cos \alpha,$$

wenn das Zeichen Σ die Summen aller einzelnen Produkte $P \cos \alpha$ bedeutet.

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Sätze werden wir sehr viele finden; wir erwähnen hier eines der am häufigsten vorkommenden

le, die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Wir an, daß der Körper ohne jegliche Reibung die schiefe Ebene könne.

n wir an, die schiefe Ebene bilde mit dem Horizonte den und der aufgelegte Körper habe das Gewicht p. Die Richchwere ist die der Vertikalen. Wir sehen die Schwerkraft als rende zweier Kräfte an, deren eine auf der schiefen Ebene teht, während die andere mit ihr parallel ist. Mit der Richtung e bildet die erstere den Winkel α, die zweite den Winkel ach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist die erstere h $p \cos \alpha$ und die zweite $p \sin \alpha$. Die erstere dieser Kräfte Druck gegen die schiefe Ebene bewirken und zu einer Behts beitragen; die zweite jedoch, welche parallel der schiefen wird dem Körper eine Bewegung die schiefe Ebene herab zu hen. Ihr Wert ist $p \sin \alpha$, also mit dem Neigungswinkel ver- Soll der Körper in Ruhe bleiben, so muß also eine Kraft llel und die schiefe Ebene hinaufgerichtet angebracht werden. h bestätigt es. Denn befestigt man an dem Körper einen führt ihn der schiefen Ebene parallel über eine Rolle, so muß andern Seite des Fadens Gewichte $p \sin \alpha$ anhängen, um den der schiefen Ebene festzuhalten.

nan den Körper rollen, so ist die ihn bewegende Kraft nach n $p \sin \alpha$. Diese erteilt ihm die Beschleunigung

$$G = g \frac{p \sin \alpha}{p} = g \sin \alpha.$$

ungen seiner Bewegung sind demnach

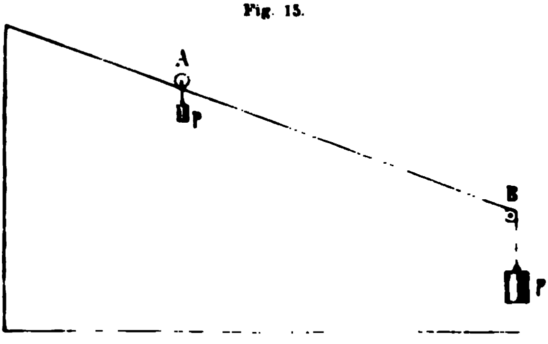
$$v = g \sin \alpha\, t \qquad s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha\, t^2.$$

der bewegliche Körper A im Punkte B angekommen ist, so Raum AB

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha}$$

, wenn wir mit h die Höhe der schiefen Ebene bezeichnen.
iesen Wert
eichung für

Fig. 15.



$g \sin \alpha\, t^2$

h
$= t$

er des Falls

$h = v$

hwindigkeit,
in B an-

i gleicher Höhe h des Ausgangspunktes A über B ist somit des Falles dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene

umgekehrt proportional; die Geschwindigkeit v dagegen ist von dies Neigung unabhängig, sie ist einfach gleich jener, welche der Körper e hält, wenn er die Höhe h frei durchfallen hat. Denn die Geschwindig keit beim freien Fall ist nach der Zeit t

$$v = gt.$$

Um die Höhe h zu durchfallen ist die Zeit t nach der Gleichung

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

somit die Geschwindigkeit v

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

Schon Galilei hat diese Sätze für die Bewegung auf der schiefen Ebene experimentell aufgefunden, und an derselben die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung erkannt.

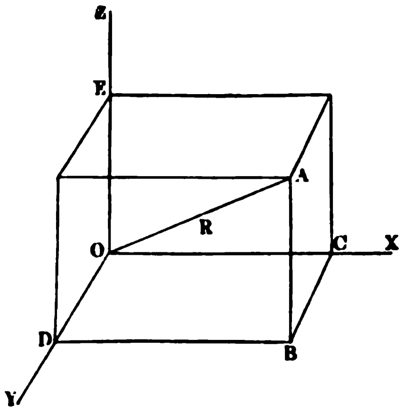
Von der schiefen Ebene macht man in der Praxis vielfache Anwendung, um Lasten eine gewisse Höhe hinaufzuschaffen. Jede Schraube ist eine um einen Zylinder gewickelte schiefe Ebene, ebenso beruht die Wirksamkeit des Keiles auf den Gesetzen der schiefen Ebene.

§ 8.

Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte wirken. Die in dem letzten Paragraphen entwickelten Sätze bieten uns das Mittel zu bestimmen, was ein fester Körper, der von beliebig vielen beliebig gerichteten Kräften affiziert wird, eine fortschreitende Bewegung annehmen kann, wann nicht. Greifen die Kräfte an demselben Punkte des Körpers an, so fallen die Gleichgewichtsbedingungen mit denen eines materiellen Punktes zusammen, ja sehen wir von den später zu betrachtenden drehenden Bewegungen ab, so ist die Bedingung, daß die Kräfte alle an demselben Punkt angreifen müssen, nicht einmal erforderlich, es fallen dann allgemein die Bedingungen des Gleichgewichtes eines festen Körpers mit denen eines materiellen Punktes zusammen. Setzen wir zunächst voraus, daß der Punkt sich vollkommen frei bewegen kann, so ist die für das Gleichgewicht notwendige Bedingung, daß wenn wir die Summe der Komponenten der Kräfte nach irgend einer beliebigen Richtung bilden, diese Summe immer gleich Null ist, wie wir diese Richtung auch wählen. Das ist aber der Fall, wenn die Summe der nach drei durch den Punkt gelegten zueinander senkrechten Richtungen gebildeten Komponenten für jede dieser Richtungen einzeln gleich Null ist. Denn sind (Fig. 16) OX, OY, OZ die drei zueinander senkrechten durch den Punkt O gelegten Richtungen, und sind die nach diesen Richtungen gebildeten Komponenten gleich Null, so folgt zunächst, da nach OY keine Kraft wirkt, daß der Punkt O sich nicht aus der durch OX und OZ gelegten Ebene bewegen kann. Jede Kraft P nämlich, welche den Punkt aus dieser Ebene zieht, würde mit OY einen Winkel β bilden, der kleiner ist als 90^0. Da nun die parallel OY gebildete Kompo

ser Kraft $P \cdot \cos\beta$ sein würde, so wäre dieselbe und damit die parallel Y gerichtete Komponente der Kräfte überhaupt nicht gleich Null. Daraus, daß die Summe aller parallel OZ gerichteten Komponenten gleich Null ist, folgt ferner, daß der Punkt nicht aus der Linie OX in der Ebene ZOX entfernt wird; denn auch dazu wäre eine Kraft nötig, die mit der Richtung OZ einen Winkel γ bildet, der kleiner ist als 90°. Die Komponente dieser Kraft parallel OZ würde $P \cos\gamma$, somit wieder von Null verschieden sein. Da nun auch die parallel OX gerichtete Komponente gleich Null ist, so folgt schließlich, daß der Punkt O auch in dieser Linie nicht bewegt werden kann, somit daß der Punkt überhaupt in Ruhe ist.

Fig. 16.



Wirken demnach auf den Punkt O beliebige Kräfte P, deren Richtungen durch die Winkel α, β, γ gegeben sind, welche sie mit den festen Richtungen OX, OY, OZ bilden, so können wir die Bedingung des Gleichgewichts nach der schon im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise schreiben

$$\Sigma P \cos\alpha = 0 \qquad \Sigma P \cos\beta = 0 \qquad \Sigma P \cos\gamma = 0.$$

Sind diese Komponenten nicht gleich 0, so haben sie eine Resultierende, welche wir mit R bezeichnen wollen, die mit den drei Richtungen OX, OY, OZ die Winkel a, b, c bilden möge. Die Größe dieser Resultierenden und ihre Richtung ist dann vollständig dadurch bestimmt, daß die parallel den drei Richtungen genommenen Komponenten den Komponenten der vorhandenen Kräfte einfach gleich sein müssen, oder daß

$$\Sigma P \cos\alpha = R \cos a \qquad \Sigma P \cos\beta = R \cos b \qquad \Sigma P \cos\gamma = R \cos c$$

sein muß. Daraus folgt weiter

$$R^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = (\Sigma P \cos\alpha)^2 + (\Sigma P \cos\beta)^2 + (\Sigma P \cos\gamma)^2.$$

In der Stereometrie wird nun bewiesen, daß wenn a, b, c die Winkel sind, welche eine Richtung OA (Fig. 16) mit den drei zueinander senkrechten Richtungen OX, OY, OZ bildet, die Quadratsumme

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

ist; daraus ergibt sich, wenn wir zugleich

$$\Sigma P \cos\alpha = X \qquad \Sigma P \cos\beta = Y \qquad \Sigma P \cos\gamma = Z$$

setzen,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

als Ausdruck für die Größe der Resultierenden. Stellen wir also, wie im vorigen Paragraphen, die Komponenten der Kräfte auf den drei Richtungen

und ebenso die Resultierende durch Linien dar, so ergibt sich, daß (Resultierende als die Diagonale eines Parallelepipeds angesehen werd kann, dessen drei Seiten die parallel den drei festen Richtungen genomn nen Komponenten aller Kräfte sind.

Ist OA (Fig. 16) diese Resultante, und sind OC, OD, OE die Ko ponenten, so erhalten wir, da OCA, ODA, OEA rechtwinklige Dreiec sind, für die die Richtung der Resultierenden bestimmenden Winkel

$$\cos a = \frac{OC}{OA} = \frac{X}{R}; \quad \cos b = \frac{OD}{OA} = \frac{Y}{R}; \quad \cos c = \frac{OE}{OA} = \frac{Z}{R}.$$

Kennen wir somit die drei Komponenten X, Y, Z aller Kräfte, ist dadurch Größe und Richtung der resultierenden Kraft, somit au wenn das Gewicht des in O befindlichen Körpers bekannt ist, die gan Bewegung desselben bestimmt.

Kann der Punkt O sich nicht frei nach allen Richtungen beweg ist er etwa genötigt auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so ist die i vorigen abgeleitete Bedingung des Gleichgewichts nicht notwendig; es g nügt dann, daß die an ihm angreifenden Kräfte den Körper in der Ob fläche nach keiner Richtung hin bewegen können; und dazu ist es n notwendig, daß die Resultierende aller Kräfte auf der Oberfläche senkred ist. Welche Bedingungen dazu erforderlich sind, das mathematisch z formulieren ist Aufgabe der theoretischen Mechanik; wir werden sie i § 22 kurz andeuten.

§ 9.

Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegun Wurfbewegung. Ebenso wie wir durch die in den §§ 6 und 7 abg leiteten allgemeinen Gesetze imstande waren, die Bedingungen des Gleic gewichts zu erhalten, sind wir nun auch imstande ganz allgemein z entwickeln, welches die Bewegung eines Körpers unter Wirkung einer ko stanten Kraft ist.

Lassen wir auf einen Körper vom Gewichte Q die Kraft P einwirk so wird die Beschleunigung des Körpers in der Richtung, nach welch die Kraft wirkt,

$$G = g\frac{P}{Q}.$$

Die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = g\frac{P}{Q}t.$$

Besaß der Körper beim Beginne der Wirkung der Kraft bereits Geschwindigkeit a, so setzt nach § 6 die neuerlangte Geschwindigkeit einfach mit dieser zusammen; ist die Geschwindigkeit a mit der gleich gerichtet, so addieren sich die beiden, ist sie entgegengesetzt richtet, so subtrahieren sie sich. Wir können die Geschwindigkeit in beiden Fällen somit nach der Zeit t allgemein setzen

$$v = a \pm g\frac{P}{Q}t.$$

Vermöge der Geschwindigkeit a durchläuft der Körper in der Zeit t den Raum at, vermöge der ihm von der Kraft P erteilten Geschwindigkeit den Raum $\frac{1}{2} g \frac{P}{Q} t^2$. Hat der Körper im Beginne der Zeit t bereits den Raum C durchlaufen, so wird die am Ende der Zeit t durchlaufene Strecke

$$s = C + at \pm \tfrac{1}{2} g \frac{P}{Q} t^2.$$

Setzen wir hierin C und a gleich Null, so erhalten wir den mit der Fallmaschine experimentell entwickelten Ausdruck, und setzen wir $P = Q$ und nehmen an, die Kraft P sei die Schwere, unsern Ausdruck für den freien Fall der Körper.

Die Bewegung geworfener Körper ist ein spezieller Fall dieser allgemeinen Sätze. Untersuchen wir zunächst den Fall, daß ein Körper mit der Geschwindigkeit a senkrecht in die Höhe geworfen wird.

Für die Geschwindigkeit nach t Sekunden erhalten wir, da in diesem Falle $P = Q$ ist,

$$v = a - gt,$$

dieselbe wird mit wachsender Zeit immer kleiner, sie wird gleich Null, der Körper hört auf zu steigen, wenn

$$a = gt; \quad t = \frac{a}{g}$$

ist. Die Höhe, bis zu welcher der Körper dann aufgestiegen ist, erhalten wir durch Einsetzen dieses Ausdruckes für t in die für s erhaltene Gleichung:

$$s = a\frac{a}{g} - \tfrac{1}{2} g \frac{a^2}{g^2} = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g}.$$

In dieser Höhe angekommen, hört er auf zu steigen und bleibt einen Augenblick in Ruhe, aber sofort wirkt die Schwere auf ihn ein und zieht ihn wieder herab. Seine rückgängige Bewegung ist durch die Ausdrücke

$$v = gt; \qquad s = \tfrac{1}{2} gt^2$$

bestimmt. Auf dem Boden angelangt hat er den Weg $\frac{1}{2}\frac{a^2}{g}$ durchlaufen; setzen wir diesen Wert in die Gleichung für s, so wird

$$\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g} = \tfrac{1}{2} gt^2; \quad t = \frac{a}{g},$$

und die Geschwindigkeit, die er dann besitzt, ist

$$v = g\frac{a}{g} = a.$$

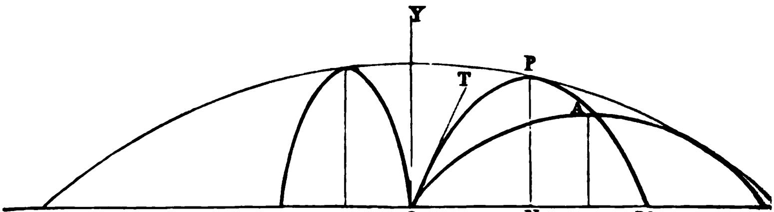
Der Körper braucht also, um die Höhe, bis zu der er gestiegen ist, zu durchfallen, dieselbe Zeit, die er zum Ersteigen der Höhe gebrauchte, und die Geschwindigkeit, mit der er an seinem Ausgangspunkt ankommt, ist von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung als die, mit der er zu steigen begann.

Letztere Bemerkung können wir unmittelbar dahin verallgemeinern, daß ein Körper, der von einem Ausgangspunkte mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausgeht und unter Wirkung von Kräften auf seinem Wege

zur Ruhe kommt, stets in den Ausgangspunkt mit der ursprünglichen schwindigkeit zurückkommen muß, wenn er auf demselben Wege Wirkung derselben Kräfte zurückkehrt. Dabei ist es sogar gleich ob die Kräfte konstant oder veränderlich sind.

Untersuchen wir jetzt den Fall, daß die Richtung der dem K ursprünglich gegebenen Bewegung nicht mit derjenigen zusammen welche die auf ihn wirkenden Kräfte ihm erteilen. Es wird genügen, d Fall an einem speziellen Beispiel, an der Bewegung eines in irgend Richtung geworfenen Körpers zu erörtern. Nehmen wir an, daß Punkte O (Fig. 17) aus ein Körper mit der Geschwindigkeit a in

Fig. 17.



Richtung OT geworfen werde. Gemäß unseres in § 6 entwickelten G satzes wirken zwei Kräfte ganz unabhängig auf ihn ein; die erste ihm in der Richtung OT die Geschwindigkeit a erteilt, die zweite Wirkung der Schwere erteilt ihm in jeder Sekunde nach der Richtung Vertikalen die Beschleunigung g. Die wirklich stattfindende Bew resultiert aus beiden.

Die Geschwindigkeit a können wir nach § 7 in zwei Kompo zerlegen, in eine vertikale und eine horizontale. Bezeichnen wir den TON mit α, so ist erstere $a \sin \alpha$, letztere $a \cos \alpha$. Die Schwere in der Richtung der vertikalen, und zwar in entgegengesetztem Sin $a \sin \alpha$. Nennen wir die horizontale Geschwindigkeit v', die verti so erhalten wir demnach für die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v' = a \cos \alpha \qquad v'' = a \sin \alpha - gt.$$

Man findet nach dem frühern daraus für die in vertikaler und zontaler Richtung zurückgelegten Wege

$$\text{für den horizontalen} \quad x = a \cos \alpha \cdot t$$

$$\text{für den vertikalen} \quad y = a \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2,$$

wo y positiv in der Richtung nach oben genommen ist.

Aus diesen Ausdrücken findet man in jedem Augenblicke den Körpers, wenn man in horizontaler Richtung von O aus die für d berechnete Größe x aufträgt und am Endpunkte dieser Linie d gleiche Zeit berechnete y vertikal anlegt. Der durch den Endpu bestimmte Punkt ist dann der Ort des Körpers. Die Linie, w durch alle so bestimmten Orte des Körpers hin legen, ist die

geworfenen Körpers. Entwickeln wir aus der zu gleicher Zeit bestehenden x und y die Größe t, so ist

$$t = \frac{x}{a \cos \alpha}$$

$$t = \frac{a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2 y g}}{g}.$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke gleich, so gibt uns die Gleichung die Beziehung, welche immer zwischen den gleichzeitigen Werten von x und y bestehen muß, oder lösen wir die Gleichung nach y auf, so erhalten wir in der Gleichung zu jedem x das zugehörige y. Lassen wir demnach x alle Werte von Null an durchlaufen, so geben uns die Endpunkte aller dazugehörigen y die Bahn des Körpers.

Wir haben

$$\frac{g x}{a \cos \alpha} = a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2 g y}$$

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - x^2 \frac{g}{2 a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Bezeichnen wir mit h die Höhe, bis zu welcher der senkrecht mit der Geschwindigkeit a emporgeworfene Körper aufgestiegen wäre, so haben wir wie vorhin

$$a^2 = 2 g h,$$

und setzen wir das in unsern Ausdruck für y

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4 h \cos^2 \alpha}.$$

Die analytische Geometrie sagt uns nun, daß eine Linie, für deren Punkte diese Beziehung zwischen x und y, den Koordinaten besteht, eine Parabel sei, die symmetrisch um eine vertikale Achse NP liegt, so daß also die Bahn des Körpers aus einem aufsteigendem Stücke OP und einem absteigendem Stücke PM besteht, die symmetrisch zur Achse der Parabel sind.

Setzen wir $y = 0$, so erhalten wir zwei Werte für x, nämlich

$$x' = 0; \quad x'' = 2h \sin 2\alpha.$$

In dem Abstande $x'' = OM$ schneidet also die Bahn des Körpers zum zweiten Male die Horizontale, der Abstand gibt also den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung zurückgelegt hat, wenn er wieder zu Boden fällt; es ist die Wurfweite.

Man sieht, dieselbe wächst anfänglich mit α, erreicht ihren größten Wert für $\alpha = 45^0$ und nimmt dann wieder ab. Außerdem ist sie proportional der Größe h, also dem Quadrate der dem Körper erteilten Anfangsgeschwindigkeit a.

Setzen wir $\alpha = 45 \pm m$, so ist die Wurfweite

$$2h \sin (90^0 \pm 2m) = 2h \cos 2m.$$

Für gleiche Neigungen über und unter 45^0 ist also die Wurfweite dieselbe.

Die höchste Höhe, welche der Körper erreichen kann, entspricht de Punkte N der Mitte der Wurfweite. Setzen wir daher $x = h \sin 2\alpha$, erhalten wir für y

$$y = h \sin^2 \alpha.$$

Diese Höhe wächst mit α und wird am größten, wenn α 90°, wen der Körper senkrecht in die Höhe geworfen ist. Sie ist überdies mit dem Quadrate der erteilten Anfangsgeschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit ist in Punkten der Bahn, welche in gleich Höhe liegen, gleich. Denn in der Tat, bezeichnen wir wieder die aufei ander senkrechten Komponenten der Geschwindigkeit mit v', v'', so fol die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn V aus

$$V^2 = v'^2 + v''^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - 2\,agt \sin \alpha + g^2 t^2$$

$$= a^2 - 2g\left(a\,t \sin \alpha - \frac{g}{2}\,t^2\right) = a^2 - 2gy,$$

woraus unmittelbar folgt, daß V für gleiche y, also für Punkte gleich Höhe der Bahn gleich ist; die Geschwindigkeiten sind symmetrisch zu mittelsten Höhe der Bahn PN. Bei P ist die Geschwindigkeit

$$V^2 = a^2 - 2gy = a^2 - 2gh \sin^2 \alpha = a^2 - a^2 \sin^2 \alpha$$

$$V = a \cos \alpha.$$

Die vertikale Bewegung ist dort Null und nur noch die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit vorhanden.

Die Zeit, welche der geworfene Körper braucht, um seinen höchsten Punkt zu erreichen, ist darnach gleich jener, in welcher er niederfällt.

Man kann es sich nun zur Aufgabe machen, jenen Wert von α zu bestimmen, unter welchem man den Körper zur Erreichung eines bestimmten Punktes bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit werfen muß. Nennt man die Koordinaten dieses Punktes x', y', so haben wir zur Bestimmung unseres Winkels α nur unsere Gleichung für y, in welcher wir setzen

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha,$$

also

$$y' - x' \operatorname{tang} \alpha + \frac{x'^2}{4h}(1 + \operatorname{tang}^2 \alpha) = 0$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - x'^2 - 4hy'}}{x'}.$$

Es gibt außer im Falle, wo die Größe unter dem Wurzelzeichen N ist, zwei Werte für α, entsprechend dem positiven und negativen Zei der Wurzelgröße. Es gibt somit außer in dem erwähnten Falle z Parabeln, in denen sich der Körper zur Erreichung seines Zieles bewegen k

Ist die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv, so ist die Lö der Aufgabe möglich, d. h. alle Punkte, die durch x' und y' so besti sind, daß

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' > 0,$$

können bei der durch h bestimmten Anfangsgeschwindigkeit get werden, denn wir erhalten für alle zwei Werte für α.

Ist der Ausdruck negativ, so wird tang α imaginär, d. h. die Punkte, deren x' und y' so bestimmt sind, daß sie den Ausdruck

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' < 0$$

machen, sind nicht erreichbar.

Die nicht erreichbaren sind von den erreichbaren Punkten getrennt durch eine Linie, deren x und y durch die Gleichung

$$4h^2 - x^2 - 4hy = 0,$$

also

$$x^2 = 4h(h - y)$$

miteinander verknüpft sind. Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist das eine Parabel, deren Achse mit der in O errichteten Oy zusammenfällt, deren Konkavität gegen die Horizontale gerichtet ist, deren Scheitel die Höhe h und deren Parameter die Länge $4h$ hat. Mit h, also mit der Anfangsgeschwindigkeit a, ändert sich die Grenze der erreichbaren Punkte.

Wenn man alle diese Folgerungen experimentell prüft, so findet man sie mit Abweichungen, welche in dem Widerstand der Luft und einigen andern später zu betrachtenden störenden Umständen ihren Grund haben, bestätigt.

§ 10.

Maß der Kraft und der Masse; absolutes Maßsystem; Dimensionen der abgeleiteten Maße. Zum Messen einer Kraft haben wir bisher den Zug benutzt, den ein Gewicht gegen den Erdboden hin erfährt, indem wir davon ausgingen, daß wir durch den Zug eines Gewichtes einer Kraft das Gleichgewicht halten können. Die Einheit der Kraft war somit die Einheit des Gewichtes, als welche wir den Zug eines Kilogramm oder eines Gramm wählten.

Bei Einführung dieses Maßes bezeichneten wir dasselbe sofort als ein Hilfsmaß und bemerkten, daß wir die nur in ihrer Wirkung erkennbare Kraft auch nur in ihrer Wirkung messen dürften.

Wir fanden dann, daß jede konstante Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung erzeugt, und daß die Beschleunigung der Größe der mit unserm Hilfsmaß gemessenen Kraft proportional ist. In dieser von der Kraft bewirkten Beschleunigung müssen wir daher das Maß der Kraft suchen.

Wir sahen aber weiter, daß diese Beschleunigung auch abhängig ist von dem in Bewegung versetzten Körper und zwar, daß die Bewegung, welche eine bestimmte durch unser Hilfsmaß gemessene Kraft einem Körper erteilt, in dem Verhältnisse kleiner wird, als das Gewicht des bewegten Körpers größer wird.

Um die Eigenschaft eines Körpers zu bezeichnen, daß es einer Kraft bedarf, um ihn in Bewegung zu versetzen bezw. den in Bewegung befindlichen Körper zu beschleunigen, sagt man, der Körper habe eine gewisse Masse. Zwei Körper haben gleiche Masse, wenn ihnen dieselbe Kraft die gleiche Beschleunigung erteilt, sie haben verschiedene Masse, wenn dieselbe Kraft ihnen verschiedene Beschleunigung erteilt; wir können die Masse also als ein Maß für den Widerstand bezeichnen, den ein Körper der

Änderung seines Bewegungszustandes entgegensetzt, als ein Maß der Trägheit des betreffenden Körpers.

Die Erfahrung zeigt uns, daß zwei Körper gleichen Gewichtes durch dieselbe Kraft in Bewegung gesetzt die gleiche Beschleunigung erhalten, somit müssen wir Körpern gleichen Gewichtes gleiche Masse beilegen. Daraus folgt, daß Körper verschiedenen Gewichtes verschiedene Masse haben und zwar, daß die Masse eines Körpers seinem Gewichte proportional ist; denn einen Körper vom Gewichte m können wir in m Körper vom Gewichte eins zerlegen, und da jeder dieser letztern m Körper die gleiche Masse hat, so folgt, daß sie zusammen die m fache Masse des einzelnen haben.

Demnach zeigen uns die erfahrungsmäßigen Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, daß die Beschleunigung der Größe der Kraft direkt, der Größe der bewegten Masse umgekehrt proportional ist.

Die Beschleunigung einer Bewegung hängt somit lediglich von der Größe der bewegenden Kraft und der Größe der zu bewegenden Masse ab, entsprechend der von uns für die Beschleunigung G einer durch die Kraft p bewegten Masse vom Gewichte q gefundenen Gleichung

$$G = g\,\frac{p}{q}\,.$$

Hierin ist die Beschleunigung gegeben, wenn wir den Quotienten aus der in Druckeinheiten gegebenen Kraft und der in Gewichtseinheiten gegebenen Masse mit einem Koeffizienten multiplizieren, der gleich ist der Beschleunigung beim freien Fall. Der so ausgedrückten Beschleunigung liegen die Einheiten zugrunde, in denen die Beschleunigung g beim freien Falle gemessen ist.

Indem wir die vorstehende Gleichung nach p auflösen, erhalten wir für die Kraft den Ausdruck

$$p = \frac{G}{g}\,q$$

und es hat den Anschein, als wenn wir in dieser Gleichung die Kraft durch ihre Wirkung durch die von ihr bewirkte Beschleunigung messen. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht der Fall, denn es ist in der für die Beschleunigung aufgestellten Gleichung die Kraft p nach unserm Hilfsmaß gemessen, und so ist auch in der letzten Gleichung als Einheit der Kraft jene gesetzt, welche dem Zuge der Gewichtseinheit entspricht.

Wollen wir in der Tat die Kraft durch ihre Wirkung messen, so müssen wir jene Kraft gleich eins setzen, welche die Einheit der Wirkung hat. Da die Wirkung der Kraft eben die Beschleunigung ist, müssen wir als Einheit der Wirkung die Erzeugung einer der Einheit gleichen Beschleunigung setzen, und zwar da die Beschleunigung von der Größe der bewegten Masse abhängt, wenn die Kraft auf die Einheit der Masse wirkt. Wir haben damit ein zusammengehöriges System von Einheiten, so daß, wenn zwei derselben bestimmt sind, die dritte Einheit ohne weiteres gegeben ist. Es erhält hiernach eine Kraft, welche einer Masse von m Masseneinheiten eine Beschleunigung von b Beschleunigungseinheiten erteilt, k Krafteinheiten, so daß

$$k = b \cdot m$$

ch dem Produkte aus der Anzahl Beschleunigungseinheiten und der zahl Masseneinheiten ist.

Von diesen drei zusammenhängenden Einheiten haben wir die eine, nlich die Einheit der Beschleunigung schon durch die Bestimmung der ngeneinheit, das Meter oder einer seiner Unterabteilungen, und der Zeit, Sekunde, bestimmt. Denn die Einheit der Beschleunigung ist vorden, wenn die Geschwindigkeit in der Einheit der Zeit um die Einit zunimmt. Die Einheit der Geschwindigkeit legen wir aber jener Begung bei, welche in der Zeiteinheit die der Längeneinheit gleiche egelänge zurücklegt.

Wenn die Kraft durch ihre Wirkung gemessen werden soll, so ist e zweite Einheit, welche wir annehmen müssen, die Einheit der Masse. ie ältere Mechanik, und dasselbe geschieht auf den meisten Gebieten der echnik bis heute, wählte die Einheit der Masse so, daß auch wenn wir ie Kraft nach ihrer Wirkung messen, die Größe der Kraft durch dieselbe ahl gegeben wird, wie wenn wir die Kraft durch die Gewichte messen, e schrieb die Gleichung, welche die Kraft durch ihre Wirkung gemessen arstellt

$$p = G\,\frac{q}{g}\,.$$

Ist hierin die Beschleunigung G gleich eins, so wird $p = 1$, wenn $q = 1$, wenn also das Gewicht des Körpers, auf welchen die Kraft wirkt, gleich g Gewichtseinheiten ist, es wird demnach die Masse eines Körpers gleich der Masseneinheit gesetzt, welche g Gewichtseinheiten besitzt. Bezeichnen wir die Masse eines Körpers mit m, so ist demnach

$$m = \frac{q}{g}$$

und mit diesem Zeichen ist

$$p = G\,m.$$

Bei dieser Bestimmung ist es jedoch in der Tat nicht die Masseneinheit, die wir willkürlich festgesetzt haben; denn diese Einheit ist dadurch gegeben, daß die Krafteinheit, die wir als Hilfsmaß eingeführt hatten, beibehalten ist, weil wir jene Masse gleich eins setzten, welche von der so gemessenen Kraft eins die Beschleunigung eins erhält. Das Maß der Kraft ist nach wie vor die Gewichtseinheit, es ist also die Kraft nur scheinbar durch ihre Wirkung gemessen. Wollen wir die Kraft in Wirklichkeit durch ihre Wirkung messen, so müssen wir die Einheit der Masse willkürlich festsetzen, und nun jene Kraft eins nennen, welche dieser ein für allemal festgesetzten Masseneinheit die Beschleunigung eins erteilt.

Diesen Weg schlug Gauß[1]) ein, indem er direkt als Maß der Masse eines Körpers das Gewicht desselben einsetzte, also die Masse m eines Körpers gleich seinem Gewichte q setzte. Die Einheit der Kraft ist damit die, welche der Gewichtseinheit die der Einheit gleiche Beschleunigung erteilt. Gauß gelangte auf diese Weise zu einem absoluten Maße, welches, wenn die Einheiten der Länge, Zeit, Masse einmal festgestellt sind, auf

[1] Gauß. Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam revocata. Göttingen 1833. Poggend. Ann. 28. p. 241. 1833.

der ganzen Welt seine Gültigkeit behält, das heißt überall dieselben Größ auch mit denselben Zahlen bezeichnet.

Messen wir die Kraft durch den Antrieb, welchen das Kubikzentimet oder das Liter Wasser gegen den Boden hin erfährt, also durch Gran oder Kilogramm, so ist das nicht der Fall. Wir werden später nachweis daß dieser Antrieb gegen den Boden hin keineswegs an allen Stellen d Erde der gleiche ist; ein ganz anderer ist der Zug gegen den Boden h wenn wir uns auf einen andern Weltkörper versetzt denken. Es folgt d einfach daraus, daß wir an den verschiedenen Stellen der Erde die B schleunigung, welche dasselbe Gramm oder Kilogramm freifallend erhä ein wenig verschieden finden; eine ganz andere Beschleunigung würde wir aber etwa auf dem Mars finden, sie ist auf diesem Planeten fast g nau die Hälfte derjenigen an der Erdoberfläche. Setzen wir die Kraft ein welche dem Antriebe des Kubikzentimeters Wasser gegen den Boden glei ist, so würden wir auf dem Mars die halbe Kraft von derjenigen an d Erdoberfläche mit eins bezeichnen, oder p Krafteinheiten an der Oberfläc des Mars hätten nur die halbe Größe der mit derselben Zahl p bezeichnete Kraft an der Erdoberfläche.

Anders in dem absoluten Maßsystem, das jene Kraft eins setzt, welch der durch die Gewichtseinheit definierten Masseneinheit die Beschleunigun eins erteilt. Wenn wir das Gewicht als Massenmaß definieren, so wird ein und dieselbe Masse überall durch dieselbe Anzahl Masseneinheiten gegeben Wir bestimmen nach dieser Festsetzung die Masse eines Körpers durch d Wage, indem wir auf die eine Wagschale den Körper legen, dessen Ma gesucht wird, auf die andere Wagschale eine Anzahl Gewichtsstücke, der jedes das gleiche Gewicht hat wie ein Kubikdezimeter Wasser bezw. w ein Teil desselben, soviel daß die Wage im Gleichgewicht ist. Die Anzah der auf der letztern Schale befindlichen Gewichtseinheiten gibt uns d Anzahl der Masseneinheiten des auf der andern Wagschale befindlich Körpers an. Würden wir uns mit Wage, Körper und Gewichten auf de Mars begeben, so würde dort eine Wägung uns für die eben angenom Masse genau die gleiche Anzahl Kilogramm geben; denn genau in de selben Verhältnisse, in welchem der Antrieb des abzuwägenden Kör gegen den Boden hin kleiner geworden ist gegenüber dem Antriebe an Erdoberfläche, ist es auch der Antrieb der Gewichtsstücke geworden. W bedürfen also genau derselben Gewichtsstücke, um auf der Wage dem zuwägenden Körper das Gleichgewicht zu halten. Auch wenn wir auf d Mars uns die Gewichtsstücke erst herstellen würden, würde das Resul kein anderes sein; das Gewichtsstück, das auf dem Mars dem Kubikz meter Wasser das Gleichgewicht hält, ist genau das gleiche, das es der Erdoberfläche tut. Wenn wir das Gewicht als Quantitätsmaß, Massenmaß nehmen, so kommt es auf die Größe des Zuges gegen Boden hin gar nicht an, wir nennen jene Masse eins, welche an der St wo wir messen, denselben Zug gegen den Boden hin erfährt wie die wählte Gewichtseinheit, jene Masse m, welche denselben Zug erfährt m Gewichtseinheiten, wie groß dieser Zug ist, das ist dabei gleich

Es folgt somit, daß wir durch eine derartige Wahl der Massene sowie der Längen- und Zeiteinheit überall in der ganzen Welt auch selbe Maß für die Kraft erhalten, indem wir jene Kraft gleich eins s

welche dieser Masseneinheit die in diesen Einheiten der Länge und der Zeit gegebene Einheit der Beschleunigung erteilt

Das absolute Maßsystem wird ein fest bestimmtes, sobald die Einheiten der Masse und der Beschleunigung festgesetzt sind. Gauß wählte Milligramm, Millimeter und Sekunde, das heißt, er nannte jene Kraft eins, welche der Masse ein Milligramm in der Sekunde die Beschleunigung von einem Millimeter erteilt. Jetzt nimmt man gewöhnlich als Einheiten die Masse eines Gramm und die Beschleunigung ein Zentimeter in der Sekunde. Die Einheit der Kraft in dem jetzigen Gramm — Zentimeter — Sekunden (als *GCS* bezeichneten) System ist das 10000fache der von Gauß gewählten Einheit, da das Gramm 1000 Milligramme und das Zentimeter 10 Millimeter enthält, die Kraft aber das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist. Das im absoluten System festgesetzte Kraftmaß wird mehrfach mit dem Namen Dyne bezeichnet, so daß die Kraft nach Dynen gemessen ist. Die Bezeichnung hat sich indes nicht allgemein eingebürgert, wir werden uns derselben nicht bedienen.

In dem absoluten Maßsystem hat man zwei Normalmaße, die man aufbewahren und jederzeit an jedem Ort mit andern Maßen vergleichen kann. Wie schon in der Einleitung erwähnt ist befindet sich im internationalen Bureau für Maß und Gewicht (Pavillon Breteuil in Sèvres bei Paris) ein Normalmeter. Ebenso befindet sich daselbst die Normalmasse. Gemäß der Definition ist bei Einheit der Masse das Massengramm d. h. die Masse eines Kubikzentimeters reinen Wassers bei 4 Grad Celsius. Da es aber aus praktischen Gründen nicht geht die Masse in Form von Wasser aufzubewahren, hat man die 1000fache Masse in Gestalt eines Gewichtstückes aus Platiniridium hergestellt.

Diese Normalmasse kann mittels der Wage mit Kopieen verglichen werden und man ist dadurch imstande, überall die Masse auf das in Paris sich befindende Normalkilogramm zu beziehen.

Die Masse dieses Gewichtstückes hat man mehrere Male mit der Masse eines Kubikdezimeters Wasser bei 4 Grad verglichen und hat nun gefunden, daß natürlich eine Differenz vorhanden ist. Je bessere Methoden angewandt wurden für den Vergleich um so genauer konnte das Verhältnis der beiden Massen ermittelt werden. Auf diese verschiedenen Methoden kann hier nicht eingegangen werden.[1] Der richtige Wert[2] für das Verhältnis des Normalkilogramms zu der Masse des Kubikdezimeters Wasser liegt nach den Messungen zwischen

$$1{,}000026 \text{ und } 1{,}000029,$$

so daß die Masse eines Kubikdezimeters Wasser ungefähr auf ein Milliontel bekannt ist.

Umgekehrt beträgt die Masse eines Kubikdezimeters Wasser

$$999{,}971 \text{ Gramm.}$$

Man erkennt also hieraus, daß nach der ursprünglichen Definition das

1 Travaux et mémoires du bureau int. d. poids et mesmes 14; Ann. d. chim. et d. phys. 2 7 p. 102. 1897; Comptes rend. d. l'ac. d. scienc. 129. p. 79. 1899.

2 Journ. d. phys. 4 4). p. 669. 1905.

Normalkilogramm aus Platiniridium einen Fehler von 26 bis 29 Milligramm hat.

Die Massenbestimmung von Wasser ist eben mit außerordentlichen Schwierigkeiten verbunden und deshalb definiert man jetzt als **Einheit der Masse das Normalkilogramm in Paris** und als **Liter das Volumen eines Kilogramms Wassers bei 4 Grad** und nicht mehr als das Volumen eines Kubikdezimeters.

Da nun aber der Unterschied dieser beiden Definitionen nur etwa $\frac{2,5}{100000}$ beträgt, so ist derselbe auch nur da zu berücksichtigen, wo die Messungen diese Genauigkeit besitzen, was übrigens nur außerordentlich selten vorkommt. In den meisten Fällen kann man den Liter auch als den Kubikdezimeter ansehen. Immerhin ist es zweckmäßig über die Grundeinheiten im klaren zu sein.

Um das Verhältnis unseres Kraftmaßes zu dem früher benutzten Hilfsmaß, der Gewichtseinheit zu erhalten, haben wir nur zu beachten, daß die Kraft F, welche der Masse m Gramm die Beschleunigung G Zentimeter in der Sekunde erteilt, gegeben ist durch die Gleichung

$$F = Gm;$$

mit der in dem Hülfsmaß, der Druckeinheit gegebenen Kraft p erhielten wir

$$G = g\frac{p}{m}$$

somit

$$gp = Gm$$

oder es ist

$$F = g \cdot p.$$

Wenn also irgend eine Kraft durch den Zug p Gramm gemessen ist, haben wir die Zahl p mit der in Zentimetern ausgedrückten Beschleunigung bei dem freien Falle an dem Orte, wo p gemessen ist, zu multiplizieren, um die Kraft in absolutem Maßsystem zu erhalten.

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man auch direkt durch das vorhin erwähnte Beispiel der Kraft an der Oberfläche des Mars; wir erwähnten, daß dort der Zug, den das Kubikzentimeter Wasser gegen den Boden erhält, nur halb so groß ist wie an der Erdoberfläche, da dasselbe nur die halbe Beschleunigung wie an der Erde erhält. Die Zahl p auf Mars bedeutet demnach nur die halbe Kraft derjenigen, welche die gleiche Zahl p an der Erde bedeutet. Das Produkt aus der Beschleunigung auf dem Mars und derselben Zahl p gibt auch nur den halben Wert von F, da die Beschleunigung dort nur die Hälfte von derjenigen an der Erde ist.

In dem absoluten Maßsystem sind die willkürlich angenommenen Grundmaße das Maß der Masse, der Länge und der Zeit, das Maß der Kraft ist ein aus diesen abgeleitetes Maß. Es ist wichtig zu beachten, in welcher Weise das Kraftmaß aus diesen drei Grundmaßen abgeleitet ist, das heißt wie sich das Maß der Kraft aus diesen drei Maßen zusammensetzt.

Die Kraft ist das Produkt aus einer Masse und einer Beschleunigung, das heißt wir erhalten die Anzahl Krafteinheiten, indem wir eine Anzahl Masseneinheiten mit einer Anzahl Beschleunigungseinheiten multiplizieren

n wir die Masseneinheit allgemein mit μ, die Beschleunigungsein-
p und mit z_1, z_2 die Anzahl Masseneinheiten und Beschleunigungs-
welche miteinander multipliziert die Anzahl Krafteinheiten geben,
n wir schreiben

$$F = z_1 \cdot \mu \cdot z_2 \cdot \varphi .$$

Beschleunigung ist die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeit-
lso der Quotient aus der Differenz der Geschwindigkeit im An-
l am Ende einer Zeit t und dieser Zeit t, sie ist demnach

$$\frac{v_2 - v_1}{t} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt}$$

eine ungleichförmige Bewegung haben, für welche wir nur für
timmten Moment einen bestimmten Wert der Beschleunigung an-
nnen. Die Geschwindigkeit ist der Quotient aus einer Länge
Zeit, das heißt die Zahl, welche uns die Geschwindigkeit an-
der Quotient aus einer Anzahl Längeneinheiten und einer Anzahl
ten. Dasselbe gilt auch für die Differenz zweier Geschwindig-
nn legte ein Körper mit der Geschwindigkeit v_1 in der Zeit von
en den Weg s_1, dagegen mit der Geschwindigkeit v_2 in der
Zeit t den Weg s_2 zurück, so ist

$$v_2 - v_1 = \frac{s_2}{t} - \frac{s_1}{t} = \frac{s_2 - s_1}{t}.$$

der Körper bei ungleichförmiger Bewegung zur Zeit t in der
lend kleinen Zeit dt den Weg ds zurück, so ist seine Geschwin-
, legt er in dem darauffolgenden Zeitelement dt den Weg ds_1
o ist in diesem Zeitelement die Geschwindigkeit $\frac{ds_1}{dt}$, die Ge-
keitszunahme von der Mitte des ersten Zeitelementes dt bis zur
zweiten Zeitelementes dt_1 also während der Zeit dt ist dem-
h

$$\frac{ds_1 - ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt};$$

leunigung erhalten wir, indem wir die in der Zeit dt eintretende
der Geschwindigkeit durch die Zeit dividieren, somit gleich

$$\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Beschleunigung ist also stets der Quotient aus einer Anzahl
heiten dividiert durch das Quadrat einer Anzahl Zeiteinheiten.
ein solcher Quotient erscheint auch die Beschleunigung in unserer
für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Ist G die Be-
ung einer Bewegung, welche zur Zeit $t = 0$ beginnt, so ist der
it t zurückgelegte Weg s

$$s = \tfrac{1}{2} G t^2$$

$$G = \frac{2s}{t^2}.$$

Bezeichnen wir mit λ die Einheit der Länge, mit τ die Einheit der Zeit, so können wir schreiben

$$z_2 \varphi = \frac{z_3 \lambda}{(z_4 \tau)^2}.$$

Setzen wir dies in den für die Kraft F gefundenen Ausdruck, so wird

$$F = z_1 \mu \frac{z_3 \lambda}{(z_4 \tau)^2}.$$

Wir erhalten also die Anzahl z Krafteinheiten, welche unserer Kraft F entspricht, indem eine Anzahl Masseneinheiten mit einer Anzahl Längeneinheiten multipliziert und durch das Quadrat einer Anzahl Zeiteinheiten dividiert wird. Um diesen Zusammenhang zwischen dem abgeleiteten Maße der Kraft und den willkürlich angenommenen Grundmaßen anzudeuten, schreibt man

$$F = \frac{z_1 z_3}{z_4^2} [\mu \lambda \tau^{-2}] = z [\mu \lambda \tau^{-2}],$$

man gibt also in den Zeichen der gewählten Einheiten in einer eckigen neben der die abgeleitete Größe angebenden Zahl gesetzten Klammer die Rechnungsweise an, wie sich die Zahl z aus den Anzahlen der einzelnen Einheiten ergibt.

Die die Größe der Kraft F darstellende Zahl z erscheint so als das Produkt aus einer Anzahl Masseneinheiten und Längeneinheiten, jede in der ersten Potenz und aus der negativ zweiten Potenz einer Anzahl Zeiteinheiten, oder wie man sich kurz ausdrückt, die Kraft ist gleich dem Produkt einer Masse und einer Länge dividiert durch das Quadrat einer Zeit.

Man nennt nach Maxwell[1]), von dem diese ganze Bezeichnungsweise herrührt, die in der eckigen Klammer angegebenen Potenzen der einzelnen Einheiten, die miteinander zu multiplizieren sind, um ein abgeleitetes Maß zu erhalten, die Dimensionen des abgeleiteten Maßes, so sagt man, die Kraft ist nach der Masse und der Länge von der ersten, nach der Zeit von der negativ zweiten Potenz.

Man kann alle Maße, die wir in unsern Untersuchungen anzuwenden haben, in ähnlicher Weise durch die drei Grundmaße, Masse, Länge und Zeit darstellen, und zwar indem wir, wenn etwa eine der Einheiten in einer zu messenden Größe nicht vorkommt, diese als mit der Potenz null vorkommend ansehen, durch das Produkt irgend einer Potenz dieser drei Größen. So ist die Geschwindigkeit Quotient aus Länge und Zeit, nach der Masse von der nullten, nach der Länge von der ersten, nach der Zeit von der negativ ersten Potenz

$$v = z [\mu^0 \lambda \tau^{-1}] = z [\lambda \tau^{-1}]$$

indem man die mit der Potenz null versehene Einheit in der Klammer fortläßt. Die Beschleunigung G ist

$$G = z [\lambda \tau^{-2}].$$

1) *Maxwell,* Report of the British Association for 1863, p. 130. Man auch *Herwig,* Physikalische Begriffe und absolute Maße. Leipzig, B. G. Teu 1880.

Eine Fläche entspricht dem Quadrate einer Länge, ein Volumen der itten Potenz einer Länge

$$\mathrm{Fl} = z\,[\lambda^2]; \quad \mathrm{Vol} = z\,[\lambda^3].$$

Ersetzen wir die allgemeinen Zeichen für die Massen-, Längen- und eitenheit durch bestimmt gewählte Größen, so ist unser Maßsystem fest stimmt: wählen wir Gramm, Zentimeter, Sekunde, so wird

$$F = z\,[\mathrm{gr\ cm\ sec}^{-2}].$$

Wir werden sehen, daß die Beachtung dieses Zusammenhanges der messenden Größen mit den Grundmaßen, die Angabe ihrer Dimensionen el zum Verständnis des inneren Zusammenhanges derselben und zur Klarstellung dessen, was die einzelnen zu messenden Größen bedeuten, beiträgt.

Einen großen Vorteil bietet uns die Beachtung der Dimensionen einer messenen Größe sofort, wenn es sich darum handelt, Größen, die in inem Maßsystem gegeben sind, in einem andern Maße auszudrücken. Wir erwähnten vorhin, daß Gauß Milligramm, Millimeter, Sekunde als Einheiten gewählt hat. Wollen wir wissen, welche Anzahl Z uns eine Kraft n Gaußischen System ergibt, welche im GCS System gleich z ist, so aben wir nur die Einheiten in der Klammer durch die Einheiten des außischen Systems auszudrücken, und die so in der Klammer auftreten-en Zahlen vor die Klammer zu setzen und miteinander und mit z zu ultiplizieren.

$$F = z\,[1000\ \mathrm{mllgr}\ \ 10\ \mathrm{mm\ sec}^{-2}] = 10000\,z\,[\mathrm{mllgr\ mm\ sec}^{-2}].$$

Die im Gramm — Zentimeter — Sekundensystem gegebenen Kräfte sind lso mit 10000 zu multiplizieren, um dieselben in Gaußischen Einheiten uszudrücken.

Oder, wir wollen eine in Kilometer und Minuten ausgedrückte Geschwindigkeit in Zentimeter und Sekunden ausdrücken

$$v = z\,[\mathrm{km\ min}^{-1}] = z\,[100000\ \mathrm{cm}\ (60\ \mathrm{sec})^{-1}]$$

$$v = \frac{100000}{60}\,z\,[\mathrm{cm\ sec}^{-1}] = 1666{,}66\,z\,[\mathrm{cm\ sec}^{-1}].$$

Besonders bei solchen Größen, welche in komplizierter Weise mit en Grundmaßen zusammenhängen, ist die Kenntnis der Dimensionen zum bergang aus dem einen in ein anderes Maßsystem von großer Bedeutung, a diese Übersetzung sonst nur durch lange Überlegungen zu erreichen t. Wir werden dafür später manche Beispiele finden.

§ 11.

Bewegungsgröße; lebendige Kraft und Arbeit. Prinzip von er Erhaltung der Arbeit. Aus unserer Gleichung für die Geschwindigt der Bewegung eines Körpers von der Masse m, auf welchen eine aft F die Zeit t hindurch gewirkt hat

$$v = \frac{F}{m} \cdot t$$

alten wir unmittelbar

$$mv = F \cdot t \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{I.}$$

Das Produkt aus der bewegten Masse und der von ihr in der Zeit t erreichten Geschwindigkeit ist gleich dem Produkte der Kraft und der Zeit, durch welche sie gewirkt hat.

Daß die beiden Produkte gleicher Art sind, zeigt die Beachtung ihrer Dimensionen. Ft ist Kraft mal Zeit, somit

$$Ft = z\,[\mu\,\lambda\,\tau^{-1}],$$

ebenso ist das Produkt auf der linken Seite Masse mal Geschwindigkei $z\,[\mu\,\lambda\,\tau^{-1}]$.

Man nennt das Produkt mv die Bewegungsgröße der Masse m und das Produkt Ft den Antrieb der Kraft in der Zeit t.

Wirkt ein anderesmal die Kraft F_1 auf die Masse m_1 und erteilt ihr in derselben Zeit t die Geschwindigkeit v_1, so ist

$$m_1 v_1 = F_1 t$$

und

$$mv : m_1 v_1 = Ft : F_1 t = F : F_1.$$

Es verhalten sich hiernach die Kräfte, welche zwei Massen in Bewegung versetzen, wie die Bewegungsgrößen, welche sie den Massen in gleichen Zeiten erteilt haben.

Wir haben ferner die Gleichungen

$$v = \frac{F}{m}\,t; \qquad s = \tfrac{1}{2}\,\frac{F}{m}\,t^2$$

und aus der ersten dieser beiden Gleichungen

$$v^2 = \frac{F^2}{m^2}\,t^2.$$

Aus dieser Gleichung und der zweiten der eben hingeschriebenen folgt

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \frac{F}{m}\,s$$

oder

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = Fs \quad \ldots \quad \text{II.}$$

Auch hier erkennen wir auf beiden Seiten die Gleichheit der Dimensionen, denn Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit ist $z\,[\mu\,\lambda^2\,\tau^{-2}]$, dieselbe Dimension hat Kraft mal Länge.

Das Produkt aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche sie besitzt, ist gleich dem Produkte aus der bewegenden Kraft und der Weglänge, auf welcher sie der Masse m diese Geschwindigkeit erteilt hat. Wirken zwei Kräfte F und F_1 eine gleiche Weglänge hindurch auf zwei Massen m und m_1 und erteilen ihnen die Geschwindigkeiten v und v_1, so besteht demnach die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} m v^2 : \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = F : F_1$$

oder auch

$$m v^2 : m_1 v_1^2 = F : F_1.$$

Die Produkte $\frac{1}{2} m v^2$ oder auch $m v^2$ nennt man die lebendige Kraft der Masse m oder auch die Wucht. Nennt man letzteres die lebendige Kraft, so nennt man ersteres, die Hälfte des letztern, wohl die lebendige

Potenz. Wir werden später die erstere Größe, welche sich unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen ergibt, als lebendige Kraft bezeichnen. Wir können dann obige Gleichung dahin interpretieren, daß die bewegenden Kräfte, welche auf zwei Massen den gleichen Weg hindurch gewirkt haben, sich verhalten wie die lebendigen Kräfte, welche sie den Massen erteilt haben.

Das Produkt Fs, aus der Kraft und dem Wege, durch welchen die Kraft gewirkt hat, nennt man die Arbeit der Kraft; diese Benennung beruht auf der Anschauung, daß eine Kraft auf dem ganzen Wege, auf welchem sie gewirkt hat, einen ihr an Größe genau gleichen Widerstand zu überwinden hat, eine Anschauung, die sich unmittelbar aus der Eigenschaft der Trägheit oder dem von Newton zuerst ausgesprochenen Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt.

Dieses Prinzip sagt aus, daß wenn ein Körper auf einen andern eine Wirkung, einen Zug oder einen Druck ausübt, daß er dann von dem letztern eine ebenso große Gegenwirkung, also einen ebenso starken Gegenzug oder Gegendruck erfährt. Dasselbe gibt sich überall in der Natur zu erkennen; ziehen wir einen Körper mit einer gewissen Kraft zu uns hin, so werden wir von demselben ebenso stark angezogen, denn ziehen wir mit aller Kraft an einem an einer Wand befestigten Seil, so fallen wir zurück, wenn es reißt. Üben wir auf einen Körper einen Druck aus, so erfahren wir einen Gegendruck von derselben Stärke; wird z. B. ein Gas komprimiert, so übt die Spannung des Gases in jedem Momente auf den Stempel einen genau ebenso großen Gegendruck aus, den wir in später zu besprechender Weise mit einem Manometer messen können. Der Magnet zieht das Eisen an, genau ebenso stark zieht aber, wie wir uns mit einer Wage überzeugen können, das Eisen den Magnet an.

Wie in diesen Fällen, so in allen, so auch wenn eine Kraft einen Körper in Bewegung setzt; während der ganzen Bewegung hat dieselbe einen ihr an Größe genau gleichen Gegenzug zu überwinden, um den augenblicklichen Bewegungszustand des Körpers zu ändern. Daß dieser Gegenzug auch dann in der Tat vorhanden ist, können wir direkt durch den Versuch nachweisen. Man hänge das Übergewicht p bei der Fallmaschine an das Gewicht P mit Hilfe einer Feder solange P auf dem festen Teller steht. Die Feder kommt dann in einen gewissen Zustand der Spannung, der beweist, daß die Feder nach entgegengesetzten Richtungen von gleich großen Kräften gezogen wird. Denn die Feder biegt sich so lange, bis die nach beiden Seiten ziehenden Kräfte genau gleich sind. Läßt man dann das System sich bewegen, so bleibt die Feder ganz genau in derselben Weise gespannt, wie groß auch die zu bewegende Masse und wie groß auch die Geschwindigkeit ist.

Die Kraft F übt also während des ganzen Weges, durch welchen sie die Last m bewegt, den Druck F aus, wir nennen deshalb das Produkt Fs ebenso die Arbeit der Kraft, wie wir die beim Heben einer Last geleistete Arbeit durch das Produkt der gehobenen Last in die Strecke, durch welche wir die Last gehoben haben, messen. Daß dort aber die Arbeit durch dieses Produkt gemessen werden muß, ergibt die einfache Überlegung, daß es dieselbe Arbeit ist, wenn wir 1^{kg} auf die Höhe von 2^m heben, wie wenn wir 2^{kg} auf die Höhe von 1^m heben. Denn

in beiden Fällen müssen wir zweimal ein Kilogramm auf die Höhe von 1^m heben.

Die Gleichung

$$Fs = \frac{1}{2} m v^2$$

ist zugleich der Ausdruck des wichtigsten physikalischen Prinzips, welches in der neueren Zeit immer vollständiger erkannt ist und dem wir an vielen Stellen begegnen werden, des Prinzips von der Erhaltung der Arbeit. Dieses Prinzip sagt aus, daß in der Natur keine Arbeit gewonnen und keine verloren werden kann. Wenn demnach eine Kraft irgend eine Arbeit leistet, so ist dieselbe nicht verloren, nicht verbraucht, sondern nur in eine andere Form umgesetzt, in der man sie vollständig wiederfindet. In einem speziellen Falle zeigt das obige Gleichung, sie zeigt, daß die Arbeit der Kraft F sich vollständig als lebendige Kraft oder wie man jetzt meistens sagt als kinetische Energie in der bewegten Masse wiederfindet. Wir können auch in der Tat dieselbe Arbeit aus dem Körper wiedergewinnen, wenn wir ihm seine Bewegung nehmen. Wie wir später sehen werden, geschieht das z. B. dann, wenn wir eine vollkommen elastische Kugel auf eine andere ihr gleiche stoßen lassen, welche sich in Ruhe befindet. Die ursprünglich bewegte Kugel kommt zur Ruhe, die gestoßene bewegt sich aber mit derselben Geschwindigkeit weiter. Gerade der Umstand, daß eine Masse m, welche die Geschwindigkeit v besitzt, eine Arbeit leisten kann, welche $\frac{1}{2} m v^2$ gleich ist, wenn man sie zur Ruhe bringt, berechtigt dazu, dieses Produkt als lebendige Kraft dieser Masse zu bezeichnen.

Wie in diesem Falle, so können wir leicht das Prinzip, daß keine Arbeit verloren werden kann, auch in andern Fällen nachweisen. Heben wir ein Gewicht P durch die Höhe s, so haben wir die Arbeit gPs nur in dieses Gewicht übertragen, wir haben dem Gewicht eine gewisse Energie der Lage oder potentielle Energie mitgeteilt, das niedersinkende Gewicht kann genau dieselbe Arbeit wieder leisten.

In manchen Fällen glaubte die ältere Physik einen wirklichen Verlust von Kraft annehmen zu müssen, so z. B. bei der Reibung; wir werden später den Nachweis liefern, daß auch hier kein Verlust, nur eine Umsetzung der Kraft in andere Formen, vorzüglich in Wärme, stattgefunden hat.

§ 12.

Bewegung infolge inkonstanter Kräfte und Maß derselben. Unsere experimentell abgeleiteten Sätze über die Bewegungen, welche durch konstante Kräfte hervorgebracht werden, und die allgemeinen Sätze über die Wirkung von Kräften, welche wir daraus ableiteten, gestatten uns schließlich auch im allgemeinen zu bestimmen, welcher Art die Bewegungen sein müssen, welche inkonstante Kräfte einem festen Körper oder einem materiellen Punkte erteilen. Wirken die Kräfte immer in derselben Richtung, aber mit verschiedener Stärke, so muß die Bewegung eine geradlinig fortschreitende, aber ungleichmäßig beschleunigte sein, das heißt, die Geschwindigkeitszunahme muß zu verschiedenen Zeiten in demselben Verhältnisse sich ändern, wie die Größe der Kraft sich ändert. Kennen wir das Gesetz, nach welchem die Kraft sich ändert, so können wir daraus auch das Gesetz bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit sich ändert

Denken wir uns nämlich die Zeit, während welcher die veränderliche Kraft wirkt, in hinreichend kleine Zeitteilchen zerlegt, so können wir, ohne ungenau zu sein, annehmen, daß innerhalb jedes dieser Zeitteilchen die Kraft konstant ist, und daß sich dieselbe erst vom einen zu dem andern Zeitteilchen ändert. Innerhalb eines solchen Zeitteilchens gelten dann die Gesetze konstanter Kräfte. Ist demnach F die auf die Masse m wirkende Kraft zur Zeit t, so erhalten wir für die Beschleunigung in diesem Zeitmomente, welche wir nach § 1 in dem Quotienten $\frac{dv}{dt}$ ausgedrückt haben,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}.$$

Ist hierin F als eine Funktion der Zeit t gegeben, so lehrt die Integralrechnung aus diesem Ausdrucke auch die Geschwindigkeit zur Zeit t und aus dieser den zurückgelegten Weg finden. Von der Form der Funktion F ist es dann, wie man sieht, abhängig, welcher Art die Bewegung sein wird, und je nach dieser Form ist auch die spezielle Lösung der Aufgabe, aus der Beschleunigung Geschwindigkeit und Weg zu finden, eine verschiedene. Einzelne Fälle werden wir später behandeln.

Kennen wir das Gesetz, nach welchem eine inkonstante Bewegung erfolgt, so können wir daraus auch umgekehrt das Gesetz ableiten, nach welchem die veränderlichen Kräfte wirken. Kennen wir nämlich den unter Wirkung der Kraft zurückgelegten Weg s in seiner Abhängigkeit von t, so können wir daraus zunächst für jeden Zeitpunkt t die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt},$$

und aus dieser die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2s}{dt^2}$ erhalten. Für die letztere haben wir aber die Gleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m},$$

so daß auch hier die bewegende Kraft in dem Momente, für welchen jener Quotient gebildet ist,

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

oder wir erhalten in dem Produkte der bewegten Masse und der jedesmaligen Beschleunigung das Maß für die Größe der veränderlichen Kraft in jedem Momente der Bewegung.

Auch diesen Satz werden wir häufig anwenden, um in speziellen Fällen das Gesetz, nach welchem eine Kraft wirkt, aus der bekannten Bewegung herzuleiten.

Wirken die Kräfte auf eine bewegte Masse nicht immer in derselben Richtung ein, so wird die Bewegung der Masse nicht eine geradlinig fortschreitende, sondern die Bahn des Bewegten wird eine von dem Gesetze der Kraftwirkung abhängige krumme Linie. Eine Untersuchung dieses Falles würde uns zu weit in die theoretische Mechanik einführen, einzelne Fälle werden wir später behandeln. Es ist unsere Aufgabe, die experimentellen Grundlagen der Bewegungslehre aufzusuchen und aus ihnen die Gesetze

abzuleiten, nach denen die Kräfte wirken; das haben wir im bisherige für die fortschreitende Bewegung getan, indem wir gleichzeitig einige de wichtigsten Sätze der theoretischen Mechanik aus denselben folgerten, so weit wir dieselben zum Verständnis des folgenden notwendig hatten. Wege des weitern müssen wir auf die Lehrbücher der Mechanik verweisen. Wi gehen jetzt über zur Betrachtung anderer Bewegungen, die wir in de Natur vorfinden.

Zweites Kapitel.

Von den drehenden Bewegungen.

§ 13.

Entstehung der drehenden Bewegung. Wir haben bereits mehrfach erwähnt, daß ein Lot, wenn es aus seiner vertikalen Richtung gebracht wird, nicht einfach in diese zurückfällt, sondern eine Bewegung um die senkrechte Lage ausführt. Ganz dasselbe sehen wir, wenn wir einen festen Stab an seinem einen Ende an einer horizontalen Achse befestigen, so daß ihm eine Bewegung in der vertikalen Ebene gestattet bleibt. Sich selbst überlassen sinkt er herab und macht Schwingungen um die senkrecht nach unten gerichtete Lage. Solche Bewegungen, bei denen jeder Punkt Kreise um einen festen Mittelpunkt beschreibt mit einem Radius, der gleich ist seinem Abstande von der Drehungsachse, nennen wir drehende Bewegungen.

Bei den drehenden Bewegungen können wir, ebenso wie bei den fortschreitenden, von einer Geschwindigkeit und Beschleunigung sprechen, di wir hier jedoch nicht auf die absolut zurückgelegten Räume, sondern au die Bogen beziehen, welche die einzelnen Punkte eines in drehender Bewegung begriffenen Körpers beschreiben. Demnach legen wir zweien i drehender Bewegung begriffenen Körpern gleiche Winkelgeschwindigkei bei, wenn ihre einzelnen Punkte in gleichen Zeiten gleiche, verschieden wenn sie in gleichen Zeiten verschiedene Bogen zurücklegen.

Es ist klar, daß dabei die Wege, welche verschiedene Punkte m gleicher Winkelgeschwindigkeit zurücklegen, absolut genommen sehr ve schieden sein können, indem die absolute Länge der Bogen proportion ist dem Abstande der Punkte von der Drehungsachse.

Ist die Winkelgeschwindigkeit eine ungleichförmige, so gilt alles, w wir im § 1 über die fortschreitende Bewegung gesagt haben, auch h wenn wir nur statt der Längen die beschriebenen Bogen in Winkel einführen.

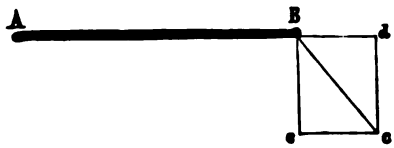
Die drehende Bewegung wird ebenso von Kräften veranlaßt als d fortschreitende, daß es aber nur Kräfte sind, die in einer ganz bestim Richtung wirken, läßt sich sofort erkennen.

Wir setzen voraus, daß unserem Stabe nur eine Bewegung in Drehungsebene gestattet ist; es ist klar, daß dann alle Kräfte, w senkrecht zu dieser Ebene, also parallel zur Drehungsachse wirken, un sam sind, und daß von Kräften, die unter einer andern Neigung

diese Ebene wirken, nur der Teil tätig sein kann, dessen Richtung in die Drehungsebene fällt, wenn wir die ganze Kraft nach § 7 in eine zu der Drehungsebene senkrechte und in eine andere zerlegt haben, deren Richtung in die Drehungsebene fällt.

Aber auch der Teil kann nicht immer vollständig zur Erzeugung der Bewegung dienen. Wirkt z. B. auf den bei A um eine horizontale Drehungsachse beweglichen Stab AB bei B eine Kraft nach der Richtung Bc, so können wir diese nach § 7 ebenfalls in zwei Teile zerlegen, die zueinander senkrecht, eine in der Richtung Bd, die andere in der Richtung Be wirksam sind. Die erstere dieser Kräfte Bd übt nur einen Zug in der Richtung senkrecht zur Achse: ihr wird durch die Befestigung des Punktes A und den Zusammenhang der Teile des Stabes AB das Gleichgewicht gehalten. Nur die andere Kraft Be kann eine drehende Bewegung des Stabes um die Achse bei A veranlassen.

Fig. 18.



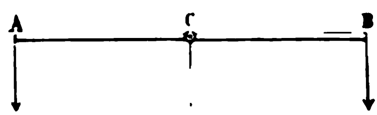
Wir sehen also, von allen Kräften, welche auf einen Körper wirken, der um eine feste Achse drehbar ist, können nur diejenigen eine drehende Bewegung erzeugen, welche in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene senkrecht auf die Verbindungslinie des Angriffspunktes mit der Drehungsachse wirken.

Die Schwere ist bei dem in A aufgehängten Stabe eine solche Kraft. Hat der Stab die horizontale Lage, so treibt das Gewicht jedes Teiles des Stabes ihn herunter, und deshalb sinkt er nieder. Die schwingenden Bewegungen um die senkrechte Lage sind dann die Folge davon, daß die Schwere, sobald der Stab die horizontale Lage verlassen hat, nur mehr zum Teil wirkt, indem dann nur eine, je mehr sich der Stab der senkrechten Lage nähert, immer kleiner werdende Komponente ihn antreibt, auf der andern Seite aber die aufsteigende Bewegung des Stabes durch die Schwere gehemmt wird. Ehe wir jedoch diese Bewegung genauer untersuchen, müssen wir uns zu der Frage wenden, ob es gleichgiltig für die entstehende Bewegung sei, in welchem Abstande von der Drehungsachse eine Kraft auf unsern Stab wirkt.

§ 14.

Die statischen Momente. Wenn wir einen Stab an einer festen vertikalen Drehungsachse C aufhängen, so kann ihm nach dem vorigen die Schwere, welche dann der Drehungsachse parallel wirkt, keine Bewegung mitteilen. Wenn wir dann an dem Stabe ein und dieselbe Kraft einmal in A, dann in C und später in B anbringen, so ist die Wirkung derselben immer eine andere. In A angebracht bringt dieselbe eine Drehung hervor, bei C nicht und bei B wieder eine Drehung, welche aber der erstern entgegengesetzt ist. Die Kraft hat

Fig. 19

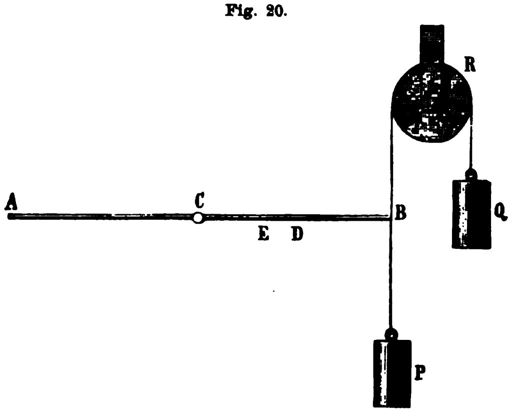


also je nach ihrem Angriffspunkte ganz verschiedene Wirkungen. W diese mit dem Angriffspunkte sich ändern, haben wir jetzt näher zu unt suchen.

Zu dem Ende wenden wir einen gleichmäßig gearbeiteten Stab der an allen Stellen gleich dick ist, so daß gleiche Längen desselben Sta gleich schwer sind. Führen wir durch die Mitte seiner Länge eine Ach die wir horizontal befestigen, so finden wir, daß er in Ruhe bleibt, daß keine Drehung unter dem Einflusse der Schwere annimmt. Der Gru dieser Erscheinung ist nach der eben gemachten Bemerkung klar; de die Schwere will den beiden Hälften des Stabes entgegengesetzte Drehung erteilen; da die beiden Hälften des Stabes sich aber nicht eine ohne andere drehen können, so heben sich die Drehungen auf.

Befestigen wir an dem Ende B (Fig. 20) unserer so aufgehangen Stange ein Gewicht P, so muß dieselbe eine Drehung annehmen, da je eine Kraft auf unser Körper einwirkt, wel senkrecht ist zur Verbi dungslinie des Angri punktes und der Drehung achse in der senkre zur Drehungsachse gelegt Vertikalebene.

Fig. 20.



Bringen wir aber an eben dem Punkte eine nach oben gericht Kraft von genau gleich Größe an, etwa indem w an B einen Faden b festigen, diesen über ei feste Rolle R führen an der andern Seite des Fadens das Gewicht $Q = P$ anbringen, so t keine Drehung des Stabes ein. Dies ist nach dem Frühern auch nicht erwarten, das Gewicht P wird durch ein ihm genau gleiches, aber entgegengesetzter Richtung wirkendes äquilibriert.

Verschieben wir aber nun das Gewicht P von B nach D hin, so seh wir sofort, daß unser Stab sich dreht und zwar in einem dem früh entgegengesetzten Sinne; er folgt dem Zuge, den das Gewicht Q auf ausübt, obwohl das genau gleiche Gewicht P den Stab nach unten drehen sucht. Es folgt daraus, daß eine Kraft einen Körper um so leich zu drehen vermag, je weiter ihr Angriffspunkt von der Drehungsachse fernt ist. Wenn wir das Gewicht P vergrößern, so sehen wir bald, wir imstande sind, die Drehung wieder aufhören zu machen. Ist näm $CD = \frac{1}{2}\,CB$, so hört die Drehung auf, sobald das Gewicht P verdo ist, sobald wir also statt P das Gewicht $2P$ an D angehängt ha Eine neue Verschiebung des Gewichtes ruft sofort wieder Bewegun vor, entweder nach unten, wenn wir das Gewicht dem Ende B n oder nach oben, wenn wir das Gewicht der Drehungsachse nähern. W aber auch der Abstand a von C sei, in welchem wir das Gewicl hängen, immer finden wir, daß eine entsprechende Änderung der Gr

das Gleichgewicht wieder herstellt und zwar, wenn wir das Gewicht P so ändern, daß das Verhältnis besteht

$$P : Q = CB : a,$$

oder daß

$$a \cdot P = CB \cdot Q.$$

Es folgt daraus, daß zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegengesetzte Drehung zu erteilen suchen, sich im Gleichgewicht halten, wenn sie sich verhalten umgekehrt wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Drehungsachse, oder wenn die Produkte aus den Kräften und den Abständen ihrer Angriffspunkte gleich sind. Diese Produkte nennt man die statischen oder mechanischen Momente, so daß wir den Satz so aussprechen können: Zwei Kräfte, welche einem Körper entgegengesetzte Drehungen zu erteilen suchen, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre mechanischen Momente gleich sind.

Wir wollen uns stets die Dimensionen der uns vorkommenden Größen merken; die Dimensionen des statischen Momentes, des Produktes einer Kraft und einer Länge ist

$$F \cdot l = z\,[\mu\,\lambda\,\tau^{-2} \cdot \lambda] = z\,[\mu\,\lambda^2\,\tau^{-2}].$$

Wir sahen eben, daß eine zwischen C und A angebrachte nach unten gerichtete Kraft unseren Stab in demselben Sinne zu drehen sucht wie das Gewicht Q. Anstatt zwischen C und B eine nach oben ziehende Kraft anzubringen, können wir daher eine ihr genau gleiche, in gleichem Abstande von C zwischen C und A anbringen. Auch dann wird nach dem obigen Satze eine Bewegung nicht eintreten können, wenn die Momente gleich sind. Der Versuch bestätigt diese Folgerung unmittelbar.

Wenn wir anstatt des einen Gewichtes P eine Reihe von verschiedenen Gewichten $p, p', p'' \ldots$ in den Abständen $d, d', d'' \ldots$ anbringen und statt des einen Gewichtes Q eine Anzahl Gewichte $q, q', q'' \ldots$ in den Abständen $e, e', e'' \ldots$, so folgt unmittelbar und zeigt uns der Versuch, daß Gleichgewicht ist, wenn die Summe der Momente nach der einen Richtung gleich ist der Summe der Momente nach der andern Richtung, wenn also

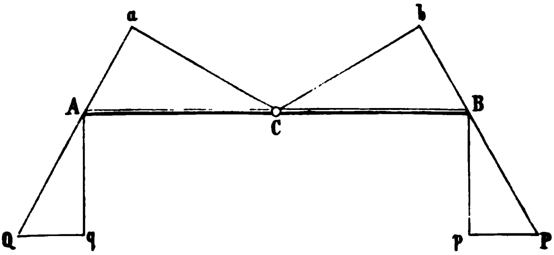
$$pd + p'd' + p''d'' \ldots = qe + q'e' + q''e'' \ldots$$

Wir können nun, wie man es in der Geometrie zu machen pflegt, entweder die Kräfte p, q, wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken, oder die Richtungen d, e, die an entgegengesetzter Seite der Drehungsachse liegen, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen und dann unseren Satz kurz dahin aussprechen, daß sich ein drehbarer Körper im Gleichgewicht befindet, wenn die Summe der Drehungsmomente der auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null ist.

Wir haben bisher zwar alle Kräfte, welche nicht senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Angriffspunktes und der Drehungsachse wirken, aus der Betrachtung ausgeschlossen, aber auch auf solche Kräfte läßt sich der soeben erkannte Satz ausdehnen, wenn man nur anstatt des Abstandes des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsachse den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft von der Drehungsachse einführt. Denn

wirkt z. B. auf unsere Stange AB an dem Hebelarm (so nennt man k den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsachse, währ man den ganzen Stab als Hebel bezeichnet) CB die Kraft F, aber einer zu CB nicht se rechten Richtung, wirkt eigentlich v dieser Kraft nur

Fig. 21.



$$p = F \cos \alpha,$$

wenn wir mit α (Winkel pBP bezei nen und das Mom der Kraft ist

$$F \cos \alpha \cdot CB.$$

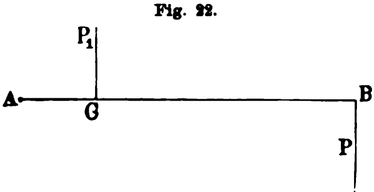
Der senkrechte Abstand der Kraft F von der Drehungsachse ist ab gleich Cb. Da nun Cb senkrecht auf bP und CB senkrecht auf pB i so ist auch $\angle bCB = \alpha$ und $Cb = CB \cdot \cos \alpha$; also

$$F \cdot Cb = F \cos \alpha \cdot CB.$$

Man sieht, daß es gleichwertig ist, das Moment der Kraft F a $p \cdot CB$ oder als $F \cdot Cb$ zu nehmen, daß also, wenn wir allgemein a Moment einer Kraft das Produkt derselben in den senkrechten Absta ihrer Richtung von der Drehungsachse definieren, der Satz von den M menten allgemein gilt, welches auch die Richtung der Kräfte ist, n vorausgesetzt, daß ihre Richtung in die Drehungsebene fällt.

Den Satz, daß bei der drehenden Bewegung zwei Kräfte sich i Gleichgewicht halten, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Abstä von der Drehungsachse, haben wir im vorigen als einen experimentell Erfahrungssatz hingestellt. Man kann indes diesen Satz auch als Folge der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über die Arbeit der Kr erhalten. Aus jenen Sätzen ergibt sich nämlich, daß ein System, an welch Kräfte an verschiedenen Punkten, welche starr miteinander verbunden s wirken, im Gleichgewicht sein muß, wenn bei der Bewegung des Syst in dem einen Sinne genau soviel Arbeit geleistet wird wie bei der wegung im entgegengesetzten Sinne. Um die Bedeutung des Satzes seine Richtigkeit zu erkennen, sei AB (Fig. 22) ein starrer Hebel, wir uns ohne Gewicht denken wo Derselbe liege horizontal und sei um eine vertikale Achse drehbar. Punkte C, im Abstande l_1 von Drehungsachse sei eine Schnur an Hebel befestigt, diese sei über Rolle geführt und trage das Gewic Ebenso sei bei B im Abstande der Drehungsachse eine Schnur

Fig. 22.



bracht, welche das Gewicht P trage. Sinkt das Gewicht P, so muß P_1 g werden, sinkt P_1, so muß P gehoben werden. Daß nun, wenn zum He Gewichtes P_1 eine Arbeit geleistet werden muß, welche gleich ist der des Gewichtes P, das ist gleich dem Produkte aus P und dem von ihm

s, durch diese beiden an dem Hebel angreifenden Kräfte keine tstehen kann, das ergibt sich folgendermaßen. Würde durch wirkende Kraft P das System aus der Ruhe in Bewegung würde ebenso in jedem Momente die Bewegung geändert, somit äßig beschleunigte Bewegung entstehen müssen. Dadurch erlassen der Gewichte P und P_1 eine mit der Zeit wachsende ıft, welche wieder einen gewissen Arbeitsvorrat repräsentiert. demnach durch das niedersinkende Gewicht die der Arbeit gleiche Arbeit des Emporhebens von P_1 leisten, außerdem Form von lebendiger Kraft einen mit der Zeit wachsenden Arbeit erhalten, diese letztere Arbeit also ohne einen ent- Aufwand von Kraft, somit aus nichts schaffen. Das wider- dem Prinzipe von der Erhaltung der Arbeit. Ist demnach Bewegung in dem einen Sinne zu leistende Arbeit gleich jener gesetzten Sinne, so müssen sich die Kräfte P und P_1 im t halten.

aus die Bedingung des Gleichgewichts zu erhalten, denken Hebel werde in dem Sinne der Kraft P um den sehr kleinen reht, so sinkt das Gewicht P um die Strecke $l\varphi$, die diesem rechende Arbeit ist $P \cdot l \cdot \varphi$. Dabei würde das Gewicht P_1 oben, die geleistete Arbeit wäre somit $P_1 \cdot l_1 \cdot \varphi$, die Bedingung, wegung eintritt, ist somit

$$Pl\varphi = P_1 l_1 \varphi$$

$$Pl = P_1 l_1,$$

hen Momente müssen gleich oder ihre Summe, dieselbe gerhin, muß gleich Null sein.

derselben Weise erhält man aus diesem Prinzip die Bedingung richtes, wenn an dem Hebel beliebig viele Kräfte angreifen; ch dann, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die bei einer einhung auf beiden Seiten geleisteten Arbeiten gleich sein, somit me aller statischen Momente gleich Null sein.

en zur Ableitung des Satzes von den statischen Momenten Prinzip, daß, wenn die von den tätigen Kräften bei einer Be- Systems nach entgegengesetzter Richtung geleisteten Arbeiten h sind, das System durch diese Kräfte keine Bewegung an- , gilt, wie leicht ersichtlich, nicht nur in dem speziellen Falle, es erläutert haben, sondern ganz allgemein. Haben wir irgend on Punkten, an dem irgend welche Kräfte angreifen, und ist ebigen Bewegung des Systems die von den Kräften geleistete derjenigen, die bei der gerade entgegengesetzten Bewegung l, so können die Kräfte keine Bewegung erzeugen, sie halten chgewicht. Das so allgemein ausgesprochene Prinzip nennt zip der virtuellen Geschwindigkeiten, eine Bezeichnung, welche l, daß die Bewegungen, welche man zur Bestimmung der htet, eben nur gedachte, nicht wirklich stattfindende sind. In wird dieses Prinzip vielfach angewandt, um die Bedingungen richts für ein System von Punkten, an welchen Kräfte an- rmulieren.

Da bei der drehenden Bewegung Kräfte, deren Drehungsmomente e gegengesetzt gleich sind, sich das Gleichgewicht halten, so folgt auch, d an einem Körper angreifende Kräfte demselben eine gleiche drehende B wegung, also in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten, erteil wenn die Kräfte gleiche Momente haben. Die Winkelgeschwindigkeit gleich jener, welche eine im Abstande eins von der Drehungsachse angreifen Kraft dem Körper erteilt, deren Drehungsmoment den gegebenen Drehun momenten gleich ist. Da nun das Drehungsmoment einer im Abstan eins angreifenden Kraft soviel Einheiten hat, wie die Kraft Einheiten h so folgt, daß die im Abstande eins angreifende Kraft soviel Einheit haben muß, als die gegebenen Drehungsmomente Einheiten besitzen, o wie man kurz sagt, daß die Kraft den gegebenen Drehungsmomenten glei sein muß. Die Summe der gegebenen Drehungsmomente gibt uns so die Größe der Kraft, welche im Abstande eins von der Drehungsachse a gebracht dieselbe drehende Bewegung erzeugt wie die gegebenen Kräft

§ 15.

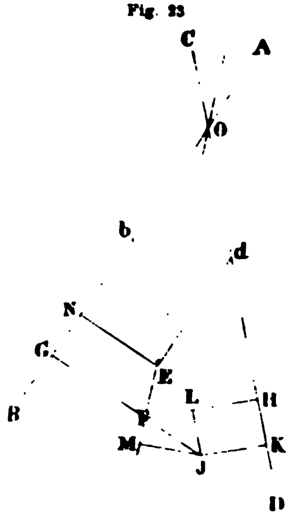
Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen. Wi haben bisher vorausgesetzt, daß der drehbare Körper sich nur um ei bestimmte Drehungsachse drehen könnte; es ist aber möglich, daß d Körper sich gleichzeitig um verschiedene Drehungsachsen drehen ka und nach den verschiedenen Richtungen, nach denen er sich drehen ka gleichzeitig angetrieben wird. Es fragt sich dann, ob diese Drehung sich ebenso zu einer resultierenden Drehung zusammensetzen, w verschieden gerichtete fortschreitende Bewegungen eine Resultieren ergeben, und welches die Richtung und Größe der resultierenden Dreh ist. Wir können uns einen solchen Fall etwa in folgender Weise realisi denken. Wir setzen eine massive Kugel in ein kleines Segment einer Hal kugel von gleichem Radius und decken, um die Kugel an der fortschrei den Bewegung zu hindern, ein ebensolches Segment oben auf die Ku Eine solche Kugel kann sich dann um jede beliebige durch den Mittelp derselben gehende Achse drehen. Um diese Kugel nach verschied Richtungen anzutreiben, denken wir uns in der Oberfläche derselben, grö Kreisen folgend, einige Rinnen eingeschnitten, und in diese Rinnen Sch gelegt, in ähnlicher Weise wie bei der Rolle der Fallmaschine. Übe dann an mehreren dieser Schnüre einen Zug aus, so erhält die K Drehungsmomente um alle Achsen, welche zu den größten Kreisen, welche die betreffenden Schnüre gelegt sind, senkrecht stehen.

Nehmen wir an, es werde die Kugel nach zwei gegeneinander neigten Richtungen angetrieben, so ergeben dieselben Überlegungen, wir bei Entwicklung des Satzes vom Kräfteparallelogramm machten, die infolge der beiden Antriebe eintretende Bewegung in ihrer Ric nicht mit der Richtung der Antriebe zusammenfallen kann, daß die Dre richtung vielmehr zwischen die Richtung der beiden Antriebe faller Betrachten wir irgend einen Punkt auf der Oberfläche der Kugel, i folge des ersten Antriebes, wenn er für sich allein wirksam wär Bogen α beschreiben würde, infolge des zweiten Antriebes in der ge erste geneigten Richtung aber den Bogen β, so muß der unter

zeitiger Wirkung der beiden Antriebe in derselben Zeit von dem betrachteten Punkte erreichte Ort ganz derselbe sein, wie wenn sich der Punkt die gleiche Zeit hindurch mit der gleichen Geschwindigkeit erst in der einen, dann in der andern Richtung gedreht hätte, also in beiden Richtungen nacheinander in der einen den Bogen α, in der andern β beschrieben hätte. Die Bahn des Punktes muß dann der Bogen sein, der den Ausgangspunkt und den so bestimmten Ort des Punktes nach der Bewegung verbindet. Dieser Bogen ist aber die Diagonale des aus den Bogen α und β auf der Kugel gebildeten Vierecks. Die Drehungsachse, um welche eine einfache Drehung durch den von dieser Diagonale der Größe und Richtung nach gegebenen Bogen genau dieselbe Drehung dieses und damit aller Punkte der Kugel ergeben haben würde, ist diejenige Achse der Kugel, welche zu dem Kreise, zu welchem der resultierende Bogen gehört, senkrecht ist. Diese Achse liegt in der durch die beiden gegebenen Achsen bestimmten Ebene und bildet mit jeder derselben den gleichen Winkel, welchen der resultierende Bogen α und β bildet.

Aus dieser letzteren Bemerkung erkennt man, daß man die Richtung der resultierenden Achse und auch die Größe der resultierenden Drehung durch eine ebene Konstruktion erhalten kann. Wir legen durch die beiden ursprünglich gegebenen Achsen eine Ebene und tragen von dem Punkte, wo sich die Achsen schneiden, auf denselben die Bogen α und β als Seiten eines Parallelogrammes auf. Die durch den Schnittpunkt der Achsen gelegte Diagonale des vervollständigten Parallelogramms ist dann die Achse der resultierenden Drehung, und gleichzeitig ist die Länge der Diagonale die Größe der resultierenden Drehung.

Fig. 23



Um die Richtigkeit dieser Konstruktion zu erkennen, seien AB und CD (Fig. 23) die beiden sich im Mittelpunkte O der Kugel schneidenden Drehungsachsen, und setzen wir voraus, daß wir in der Achse OB stehend den Kopf bei O, den Fuß bei B, die Drehung in demselben Sinne, und zwar von links nach rechts, erfolgen sehen, wie die Drehung um die Achse OD, wenn wir in dieser stehen, den Kopf bei O und den Fuß bei D. Wir wollen zunächst annehmen, die Drehungen erfolgen mit gleichförmiger Bewegung und die Bogen α und β seien die in einer Sekunde beschriebenen Bogen, also gleichzeitig die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten. Wir tragen dann auf OB den Bogen $\alpha = Ob$, auf OD den Bogen $\beta = Od$ auf, ergänzen das Parallelogramm $ObEd$ und erhalten in OE die Richtung der resultierenden Drehungsachse und die Größe des Bogens γ, um welchen der betrachtete Punkt um diese Achse in derselben Zeit einer Sekunde gedreht wird, und zwar so, daß wenn wir in der Achse stehen, den Kopf bei O, den Fuß bei E, die Bewegung in demselben Sinne von links nach rechts erfolgt.

Die Richtigkeit der Konstruktion erkennen wir durch den Nachweis, daß infolge beider Drehungen die auf OE liegenden Punkte in Ruhe

bleiben, denn bei der Drehung eines Körpers sind die Punkte der A(und nur diese in Ruhe, und zweitens dadurch, daß wir zeigen, daß irg ein beliebiger Punkt in der Tat mit der Winkelgeschwindigkeit γ diese Achse gedreht wird.

Ein Punkt F der Achse OE wird durch die Drehung um die A(OB aus der Ebene der Zeichnung nach vorn gehoben in einem Kr dessen Radius die von F auf OB herabgelassene Senkrechte FG ist. die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung α ist, so wird in der unendl kleinen Zeit dt der Punkt F um das unendlich kleine Stückchen $GF \cdot \alpha \cdot$ und zwar weil das Kreiselement auf seinem Radius senkrecht steht, se recht zur Ebene der Zeichnung nach vorn gehoben. In demselben Z element dt rückt der Punkt F infolge der Drehung um OD um die Stre $FH \cdot \beta \cdot dt$ senkrecht hinter die Ebene der Zeichnung. Die Verschiebu des Punktes F im Sinne der ersten Drehung ist die Differenz beider V(schiebungen oder

$$(FG \cdot \alpha - FH \cdot \beta)\, dt$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber gleich Null, denn es ist

$$\frac{GF}{FO} = \sin GOF \quad \frac{FH}{FO} = \sin FOH = \sin OEb$$

$$GF : FH = \sin GOF : \sin OEb = Eb : Ob.$$

Nun ist nach der Konstruktion

$$Eb = \beta, \quad Ob = \alpha,$$

somit

$$GF \cdot Ob = GF \cdot \alpha = FH \cdot Eb = FH \cdot \beta$$

oder

$$FG \cdot \alpha - FH \cdot \beta = 0.$$

Die Differenz der Verschiebungen, welche der beliebige Punkt F d Achse OE in dem Zeitelement dt erfährt, ist somit gleich Null, oder w dasselbe ist, der Punkt F, und somit alle Punkte der Achse OE erhal in dem Zeitelement dt und damit überhaupt keine Verschiebung. Richtung OE ist also die resultierende Drehungsachse.

Um den Nachweis dafür zu liefern, daß für jeden beliebigen P die Größe der Drehung pro Sekunde oder die Drehungsgeschwindi durch den durch die Länge der Diagonale repräsentierten Bogen $\gamma =$ gegeben ist, betrachten wir die Drehung eines beliebigen in der Ebene Zeichnung liegenden Punktes J. Wir wollen nur, um die Zeichnung zu sehr zu komplizieren, annehmen, dieser Punkt liege auf der Verläng der vorher durch den Punkt F gelegten zu OB senkrechten Richtung Da der Punkt F ein vorher ganz beliebig auf der Achse angenom ist, so geschieht durch diese Voraussetzung der Allgemeinheit unserer trachtung kein Eintrag. Die Verschiebung des Punktes J in der Z im Sinne der Drehung um OB ist dann

$$(GJ \cdot \alpha - JK \cdot \beta)dt.$$

Ziehen wir JL parallel OD, so können wir diesen Ausdruck s

$$\{(GE + FJ)\alpha - (FH - FL)\beta\}\, dt = (FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta)\cdot$$

Da, wie vorher gezeigt wurde, OM die resultierende Drehungsachse ist, so können wir, wenn $JM \perp OM$, die resultierende Drehung um OE resp. die in der Zeit dt in demselben Sinne eintretende Verschiebung des Punktes J durch die Winkelgeschwindigkeit γ ausdrücken

$$MJ \cdot \gamma \cdot dt$$

und haben dann zu zeigen, daß $\gamma = OE$ ist. Aus den beiden Ausdrücken für die Verschiebung des Punktes J erhalten wir

$$\gamma = \frac{FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta}{MJ}.$$

In dem Dreieck FJM ist der Winkel an J, da $MJ \perp MO$, $FJ \perp OB$, gleich dem Winkel GOE, demnach

$$MJ = FJ \cdot \cos GOE,$$

in dem Dreiecke JFL ist der Winkel an F, da $FH \perp OH$, $FJ \perp OB$, gleich dem Winkel GOH, welchen die beiden gegebenen Achsen miteinander bilden, demnach

$$FL = FJ \cdot \cos GOH,$$

somit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta \cdot \cos GOH}{\cos GOE}.$$

Ziehen wir nun EN senkrecht zu OG, so sieht man, daß der Zähler dieses Ausdrucks die Kathete ON des rechtwinkligen Dreiecks ENO ist, welche mit der Hypotenuse EO den Winkel GOE einschließt; daraus folgt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite eben dieser Hypotenuse gleich ist, oder daß

$$\gamma = OE.$$

Die Diagonale OE ist somit die aus den beiden gegebenen Drehungen α und β resultierende Drehung.

Wir haben hierbei zunächst vorausgesetzt, daß die Drehungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen, diese Beschränkung können wir aber ohne weiteres fallen lassen, wenn wir α und β als die dem betrachteten Augenblicke oder der Zeit dt entsprechenden Drehungsgeschwindigkeiten bezeichnen. Es bedeutet dann γ die aus diesen beiden resultierende augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit um die Achse OE. Die ganze Entwicklung behält auch unter dieser Voraussetzung ihre strenge Gültigkeit.

Wir erhalten somit ganz allgemein die aus zwei gegeneinander geneigten Drehungen resultierende Drehungsgeschwindigkeit, indem wir von dem Schnittpunkte der beiden Achsen die gegebenen Drehungsgeschwindigkeiten so auftragen, daß wir den Kopf im Schnittpunkte der Achsen gedacht und in die Richtung, nach welcher wir die gegebenen Drehungen aufgetragen haben, uns stellend, die Drehungen im gleichen Sinne erfolgend sehen, und dann die Diagonale des aus den beiden aufgetragenen Längen gebildeten Parallelogramms ziehen. Die Diagonale gibt der Größe und Richtung nach die resultierende Drehungsgeschwindigkeit. Man kann somit die Drehungen hiernach gerade so zusammensetzen, wie fortschreitende Bewegungen.

Ganz dieselbe Konstruktion liefert uns, gerade wie bei dem Kr parallelogramm, auch das aus zwei gegebenen gegeneinander genei Drehungsmomenten resultierende Drehungsmoment, das heißt das Drehu moment, welches an Stelle der gegebenen um die resultierende A wirkend genau dieselbe Drehung hervorbringt. Ersetzen wir in unserer I struktion die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten durch die Wir beschleunigungen, so sind diese, wie wir sahen, den Drehungsmome proportional. Damit ist der Satz vom Kräfteparallelogramm auch s auf die Drehungsmomente ausgedehnt, indem wir dieselben als Längen die Drehungsachsen auftragen und diese Längen zur Konstruktion benut

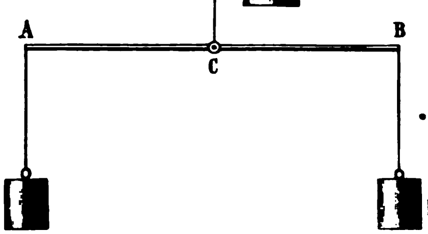
Ebenso wie zwei Drehungen oder Drehungsmomente können wi derselben Weise auch beliebig viele zu einer Resultierenden zusamm setzen, indem wir sie paarweise vereinigen.

Gerade so wie eine gegebene fortschreitende Bewegung können nun auch eine gegebene Drehung in andere zerlegen, so besonders s die Komponenten nach zwei zueinander senkrechten Richtungen bestimm Die Ausdrücke für die Komponenten fallen nach den soeben gemach Entwicklungen ganz mit denen für die Komponenten einer fortschreiten Bewegung zusammen. Die Komponente der Drehung um eine Ac welche mit der gegebenen Achse den Winkel φ bildet, ist gleich der gebenen Drehung multipliziert mit dem Kosinus des Winkels φ. Wi also auf einen Körper ein Drehungsmoment ein, dessen Achse mit Richtung der Achse, um welche sich der Körper drehen kann, ei Winkel bildet, so erhalten wir in dem Produkte aus dem gegeb Drehungsmomente und dem Kosinus dieses Winkels auch das Drehu moment, welches die mögliche Drehung bewirkt.

§ 16.

Mittelpunkt paralleler Kräfte. Wenn an einem Hebel AB Reihe von parallelen Krä wirkt, und es ist der Pun in bezug auf welchen die Su der Momente gleich Null unterstützt, so tritt keine d de und auch keine fort tende Bewegung ein. W dann die Unterstützung nommen, so nähme der St folge der parallel wirkenden eine fortschreitende Bew in der Richtung der wir Kräfte an. Diese könne jedoch hemmen, wenn w dem Punkte C (Fig. 24) in gegengesetzter Richtung Kraft anbringen, welche ist der Summe $P + Q$ der gegebenen Kräfte. Die im Punkte C ang Kraft $P + Q$ hält also den beiden einzelnen in A und B angr

Fig. 24.

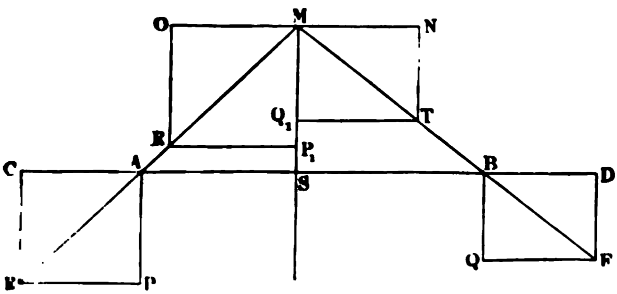


Kräften Q und P das Gleichgewicht. Diese beiden Kräfte wirken also zusammen ebenso, als wenn am Punkte C eine ihrer Summe $P + Q$ gleiche Kraft angebracht wäre.

Wir schließen demnach, daß auch parallele Kräfte eine Resultierende haben, welche ihrer Summe gleich ist, und daß diese Resultierende an jenem Punkte angreift, in bezug auf den die Summe der Momente gleich Null ist, d. h. daß die verteilt angebrachten Kräfte gerade so wirken, als wenn an diesem Punkte alle Kräfte angebracht wären. Dieser Punkt heißt daher der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Daß in der Tat der Punkt, in bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist, und daß die Mittelkraft der Summe der einzelnen Kräfte gleich ist, können wir auch ohne Versuch schon aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm beweisen. Sei zu dem Ende AB (Fig. 25) eine feste Linie, an deren Enden die beiden Kräfte P und Q parallel nach derselben Richtung wirkend

Fig. 25.



angebracht seien; die Längen AP und BQ stellen diese Kräfte dar. Bringen wir nun an A und B die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte AC und BD an, so wird, da sie sich gegenseitig aufheben, durch dieselben am System gar nichts gestört. Die je zwei Kräfte AC und AP, sowie BQ und BD geben eine Resultierende, welche der Größe und Richtung nach durch die Diagonalen AE und BF der Parallelogramme $APCE$ und $BQFD$ gegeben ist. Verlängern wir diese beiden Diagonalen rückwärts, bis sie sich im Punkte M schneiden, und denken wir uns den Punkt M mit der Linie AB in fester unveränderlicher Verbindung, so können wir uns die beiden Kräfte AE und BF an dem Punkte M in MR und MT angebracht denken. Die Verhältnisse des Systems werden dadurch nicht geändert. Die beiden Kräfte MR und MT können nun nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zerlegt werden und zwar MR in $OM = AC$ und $MP_1 = AP$ und MT in $MN = BD$ und $MQ_1 = BQ$. Die beiden Kräfte MO und MN heben sich auf, und es bleibt zuletzt als Resultierende die Summe der beiden Kräfte P und Q. Daraus folgt zunächst, daß zwei parallele Kräfte eine ihrer Summe gleiche Resultierende oder Mittelkraft haben, deren Richtung jener der gegebenen Kräfte parallel ist, und die in einem Punkte S zwischen A und B die feste Linie AB schneidet. Die Lage dieses Punktes S auf AB erhält

man aus den ähnlichen Dreiecken $ASM \sim RP_1M$ und $BSM \sim TQ_1M$. Dieselben geben nämlich

$$AS : SM = RP_1 : P_1M$$

$$BS : SM = Q_1T : Q_1M.$$

Und daraus, da $SM = SM$, $RP_1 = Q_1T$, $P_1M = P$, $Q_1M = Q$,

$$AS \cdot P = BS \cdot Q,$$

dieselbe Bedingung, welche wir soeben experimentell ableiteten, der Punkt S liegt so, daß in bezug auf ihn die Summe der Momente gleich Null ist.

Daß die so bestimmte Resultierende auch in bezug auf die drehende Bewegung die gegebenen Kräfte vollständig ersetzt, das heißt, daß sie unter allen Umständen genau dasselbe Drehungsmoment liefert, erkennen wir folgendermaßen.

Haben wir eine Anzahl von Kräften $p_1, p_2 \cdots$, welche in den Abständen $l_1, l_2 \cdots$ vom Mittelpunkte angreifen, so ist die Summe

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots\cdots = 0.$$

Legen wir durch das System eine Drehungsachse, dessen zur Kraftrichtung senkrechter Abstand von dem Mittelpunkte gleich x ist, so wird in bezug auf diese das Drehungsmoment

$$p_1(l_1 + x) + p_2(l_2 + x) + \cdots = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + (p_1 + p_2 + \cdots)x.$$

Da der Voraussetzung nach

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots\cdots = 0,$$

so folgt für das Drehungsmoment in bezug auf die angenommene Achse

$$(p_1 + p_2 + \cdots)x,$$

also ganz dasselbe, wie wenn im Mittelpunkte die Summe aller Kräfte angebracht wäre.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die einander parallelen Kräfte auch gleich gerichtet seien, aber ebenso haben zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte im allgemeinen eine Resultierende. Um die Größe derselben und ihren Angriffspunkt zu finden, sei AB Fig. 26 wieder eine feste Linie, an deren Punkten A und B die beiden Kräfte P und Q wirken. Wir können P als Mittelkraft zweier anderer betrachten, von denen die eine bei B angreift und der Kraft Q gleich ist, während die andere gleich $P - Q$ ist und in einem Punkte S angreift, dessen Lage durch die Bedingung gegeben ist, daß

$$AS \cdot (P - Q) = AB \cdot Q$$

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Die beiden Kräfte Q und Q_1 heben sich auf, da sie an demselben Punkte nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es bleibt also als Resultierende die Differenz der gegebenen Kräfte übrig, deren Richtung der ursprünglichen parallel ist, und deren Angriffspunkt wieder jener Punkt

bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist. Denn aus der Gleichung für AS folgt

$$AS \cdot P = (AS + AB)Q = SB \cdot Q.$$

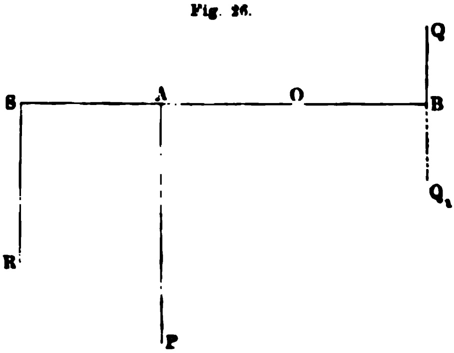
In einem Falle jedoch haben parallele Kräfte keine Resultante, bringen sie also ein ganz freies System von Punkten nicht in eine fortschreitende Bewegung, nämlich dann, wenn sie einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Daß in dem Falle keine resultierende Kraft vorhanden ist, folgt zunächst aus dem soeben abgeleiteten Satze, nach welchem bei entgegengesetzt gerichteten Kräften die Resultante gleich der Differenz der beiden Kräfte ist, es folgt aber weiter aus der Gleichung für die Lage des Angriffspunktes

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Da nämlich in diesem Falle $P - Q = 0$ ist, so wird AS unendlich, oder es gibt keinen in endlicher Entfernung von A liegenden Punkt, an dem die Mittelkraft anzubringen wäre, es gibt also keine Mittelkraft.

Ein solches Kräftepaar bringt deshalb nur eine drehende Bewegung hervor, um irgend einen zwischen A und B liegenden Punkt, und das statische Moment eines solchen Paares ist gleich dem Produkte aus einer der Kräfte und dem senkrechten Abstande beider. Denn welchen Punkt wir uns auch als fest denken, wo auch der Punkt O (Fig. 26) liegt, das Drehungsmoment ist, da beide Kräfte das System in demselben Sinne drehen, $P \cdot AO + Q \cdot BO$, oder wenn P und Q gleich sind, gleich

Fig. 26.



$$P(AO + OB) = P \cdot AB.$$

Die Kräftepaare, ihr Verhalten und die Zusammensetzung derselben ist besonders von Poinsot untersucht worden, der die Anwendung derselben zur Bestimmung der drehenden Bewegungen in die Mechanik eingeführt hat. Wir verweisen wegen dieser schönen Theorie auf die Lehrbücher der Mechanik und besonders auf Poinsot: Eléments de statique.

Haben wir eine Reihe von in einer Richtung wirkenden parallelen Kräften anstatt an einer Linie an einer festen Ebene verteilt, so müssen auch diese eine Resultierende und einen Mittelpunkt haben. Denn wir können je zwei solcher Kräfte zusammensetzen, die Resultierende dann mit der folgenden und so fort, bis uns die Mittelkraft der zuletzt übrigbleibenden Kräfte die Resultante und deren Angriffspunkt den Mittelpunkt der Kräfte gibt.

Sind die parallelen Kräfte nicht alle gleich gerichtet, so liefert die Zusammensetzung der gleich gerichteten zunächst zwei entgegengesetzt gerichtete Resultierende. Greifen dieselben an verschiedenen Punkten an

so erhalten wir die Resultierende und den Angriffspunkt in der vor angegebenen Weise; sind dieselben gleich, so gibt es nur ein res tierendes Paar.

Die gleichen Schlüsse können wir anwenden, wenn eine Anz paralleler Kräfte anstatt an einer festen Ebene an einem festen Kör angreift; auch für diesen muß es einen Mittelpunkt der parallelen Kr geben, in welchem wir uns die Summe aller Kräfte angebracht denl können, und für den die Summe aller Momente gleich Null ist. Ist d halb dieser Punkt befestigt, z. B. durch ihn eine Drehungsachse gefül so kann der Körper weder eine fortschreitende noch eine drehende B wegung annehmen.

Ändern wir die Richtung sämtlicher auf ein System wirkender Kräf aber so, daß sie einander parallel bleiben, so wird der Angriffspunkt d Resultierenden nicht geändert. Denn nach der Drehung ist die Summe d Momente in bezug auf eben diesen Punkt gerade so gleich Null wie vorh Es folgt das unmittelbar aus unserem Satze über die Momente. Hab sich z. B. alle Kräfte um den Winkel α gedreht, so sind die Mome der einzelnen Kräfte p, p_1, $p_2 \cdots$ in den Abständen d, d_1, $d_2 \cdots$, wa sie vorher waren

$$pd + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots,$$

nach der Drehung

$$pd \cos\alpha + p_1 d_1 \cos\alpha + p_2 d_2 \cos\alpha \cdots,$$

also gleich

$$(pd + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots) \cos\alpha,$$

und war die Summe $pd \cdots$ gleich Null, so ist sie es auch, wenn sie m $\cos\alpha$ multipliziert worden ist.

§ 17.

Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte greifen. Im § 8 haben wir die Bedingungen abgeleitet, unter wel ein Körper im Gleichgewicht ist, an welchem beliebige Kräfte wirk sind, die aber alle an demselben Punkte angreifen. Die Bedingungen Gleichgewichtes fielen dort zusammen mit denen eines Punktes. wenigen Sätze über die drehende Bewegung, welche wir im bisherigen geleitet haben, setzen uns nun auch in den Stand, das Gleichgewicht Körpers zu bestimmen, an welchem beliebige Kräfte an verschied Punkten angreifen. Diese Gleichgewichtsbedingungen fallen zusammen denen eines Systems von Punkten, an denen Kräfte angreifen, und miteinander in fester Verbindung stehen. Ein solches System kann fortschreitende und eine drehende Bewegung annehmen. Die Bedin des Gleichgewichts ist daher die, daß weder die eine noch die an Bewegung eintreten kann.

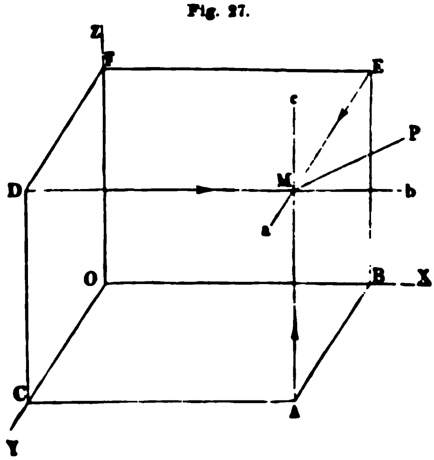
Wir denken uns, um diese Bedingungen zu erhalten, durch das S drei feste zueinander senkrechte Richtungen OX, OY, OZ (Fi gelegt, die sich in einem Punkte O schneiden. Sei M ein Pun Systems, dessen Lage durch die Koordinaten $MA = z$, $CA = 0$

$AB = CO = y$ gegeben sei. An M greife eine Kraft P an, deren Richtung durch die Winkel α, β, γ gegeben ist, welche sie mit den Achsen bildet. Zerlegen wir die Kraft nach den drei Achsen, so erhalten wir als Komponenten parallel

$$\begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ Mb = P\cos\alpha, & Ma = P\cos\beta, & Mc = P\cos\gamma. \end{array}$$

Diese drei Kräfte können dem System sowohl eine fortschreitende Bewegung, jede nach ihrer Richtung, als auch eine drehende Bewegung geben. Um die drehenden Bewegungen und ihre Momente zu erhalten, legen wir durch M die Linien MD, ME, MA parallel den drei Achsen und verlängern dieselben, bis sie die durch die Achsen bestimmten Ebenen schneiden in den Punkten D, E, A, die wir uns fest mit dem Punkte M verbunden denken. Wir können uns dann, ohne irgend etwas an der Wirkung von P zu ändern, die drei Komponenten an den Punkten D, E, A angreifend denken. Jede dieser Kräfte kann das System um zwei Achsen drehen, Mb um Z und Y, Ma um Z und X, Mc um Y und X, so daß also für jede der drei Achsen zwei Drehungsmomente vorhanden sind. Diese zwei Drehungen sind aber einander entgegengesetzt, so daß z. B. Mb das System in entgegengesetzter Richtung um Z zu drehen sucht als Ma, um deshalb die Drehungsmomente für die drei möglichen Drehungen zu bestimmen, müssen wir die Differenzen der je zwei Momente bilden. Die senkrechten Abstände der drei Kraftrichtungen von den Drehungsachsen sind nun

Fig. 27.



Ma von X gleich $EB = z$; Ma von Z gleich $EF = x$

Mb „ Z „ $DF = y$; Mb „ Y „ $DC = z$

Mc „ X „ $AB = y$; Mc „ Y „ $AC = x$.

Setzen wir die Drehungen positiv, welche im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers erfolgen, wenn wir in der Richtung der positiven Achsen OX, OY, OZ stehend die Füße in der Drehungsebene, auf die Drehungsebene hinsehen, so sind die Drehungsmomente um

$$X$$
$$Mc \cdot AB - Ma \cdot EB = P\cos\gamma \cdot y - P\cos\beta \cdot z = P(y\cos\gamma - z\cos\beta);$$
$$Y$$
$$Mb \cdot DC - Mc \cdot AC = P\cos\alpha \cdot z - P\cos\gamma \cdot x = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma);$$
$$Z$$
$$Ma \cdot EF - Mb \cdot DF = P\cos\beta \cdot x - P\cos\alpha \cdot y = P(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Haben wir eine beliebige Anzahl von Kräften P, welche an beliebigen Punkten des Systems angreifen und beliebig gerichtet sind, so können wir für jede Kraft ganz dieselbe Zerlegung vornehmen, und wir erhalten für jede Kraft drei mit den eben abgeleiteten gleich gerichtete Komponenten und drei Drehungsmomente, welche das System in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen. Die je drei Komponenten sowie die Summen der drei Drehungsmomente müssen einzeln gleich Null sein, wenn das System weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen soll. Bezeichnen wir diese einzelnen Summen mit Σ, so ist also die notwendige und ausreichende Bedingung des Gleichgewichts

$$\Sigma P \cos \alpha = 0; \quad \Sigma P \cos \beta = 0; \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$
$$\Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0; \quad \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0;$$
$$\Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0.$$

Denn diese Gleichungen zeigen, daß das System infolge der wirksamen Kräfte nach keiner Richtung fortschreiten und nach keiner Richtung gedreht werden kann.

Sind die Kräfte alle parallel einer und derselben Richtung, etwa parallel MP, so daß sie entweder nach MP oder der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, sind also für alle die Winkel α, β, γ dieselben, so vereinfachen sich die Bedingungen des Gleichgewichtes bedeutend. Da es nämlich gleichgültig ist, ob wir in einer Summe alle einzelnen Glieder mit ein und demselben Faktor multiplizieren, oder ob wir die Summe der einzelnen Glieder mit diesem Faktor multiplizieren, so können wir in obigen Gleichungen die Kosinus als gemeinschaftliche Faktoren herausschreiben; wir erhalten dann als Gleichgewichtsbedingungen

$$\cos \alpha \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos \beta \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos \gamma \cdot \Sigma P = 0;$$
$$\cos \gamma \cdot \Sigma P y - \cos \beta \cdot \Sigma P z = 0; \quad \cos \alpha \cdot \Sigma P z - \cos \gamma \cdot \Sigma P x = 0;$$
$$\cos \beta \cdot \Sigma P x - \cos \alpha \cdot \Sigma P y = 0,$$

wo in den letzten Gleichungen die Summen Px etc. die Summen der Produkte aller einzelnen Kräfte in die Abstände x etc. ihrer Angriffspunkte bedeuten.

Da nun α, β, γ die Winkel sind, welche ein und dieselbe Richtung mit drei festen Richtungen bildet, dieselben also nie gleichzeitig rechte werden können, so können obige Gleichungen nur bestehen, wenn

$$\Sigma P = 0; \quad \Sigma P x = 0; \quad \Sigma P y = 0; \quad \Sigma P z = 0,$$

wenn also sowohl die Summe aller Kräfte gleich Null ist, als auch die Summe der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände x, y, z ihrer Angriffspunkte von den drei festen Richtungen.

Ist das System nicht im Gleichgewicht, so kann es eine Resultante haben oder auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden. Wenn es eine Resultante hat, so muß Gleichgewicht bestehen, wenn wir an dem Mittelpunkte eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte Kraft anbringen. Ist die Resultante gleich R, und sind die Abstände des Mittelpunktes von den drei festen Richtungen x_1, y_1, z_1, so erhalten wir, da nach dem vorigen die Richtung der Resultante derjenigen der gegebenen Kräfte parallel sein

dieselbe mit den Achsen also dieselben Winkel α, β, γ bilden muß, zur Bestimmung derselben und ihres Angriffspunktes

$$\cos\alpha \cdot \Sigma P = \cos\alpha \cdot R; \quad \cos\beta \cdot \Sigma P = \cos\beta \cdot R; \quad \cos\gamma \cdot \Sigma P = \cos\gamma \cdot R,$$

somit zunächst, wie wir vorhin schon ableiteten,

$$\Sigma P = R.$$

Ferner aber

$$\cos\gamma \cdot \Sigma Py - \cos\beta \cdot \Sigma Pz = \cos\gamma \cdot Ry_1 - \cos\beta \cdot Rz_1;$$
$$\cos\alpha \cdot \Sigma Pz - \cos\gamma \cdot \Sigma Px = \cos\alpha \cdot Rz_1 - \cos\gamma \cdot Rx_1;$$
$$\cos\beta \cdot \Sigma Px - \cos\alpha \cdot \Sigma Py = \cos\beta \cdot Rx_1 - \cos\alpha \cdot Ry_1$$

und daraus

$$\Sigma Px = Rx_1; \quad \Sigma Py = Ry_1; \quad \Sigma Pz = Rz_1.$$

oder

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}; \quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}; \quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Wir erhalten demnach die Lage des Mittelpunktes durch seine Abstände x_1, y_1, z_1 von den Achsen, indem wir die Summen der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände ihrer Angriffspunkte von den festen Richtungen durch die Summe der Kräfte dividieren.

Das System reduziert sich auf das Kräftepaar, wenn $\Sigma P = 0$, aber eine der Summen ΣPx, ΣPy, ΣPz oder alle drei von Null verschieden sind.

Es genüge an diesen Entwicklungen, um zu zeigen, wie wir aus den experimentell abgeleiteten Gesetzen über die drehende Bewegung in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen über die Wirkung von Kräften auf mathematischem Wege zu weiteren Gesetzen gelangen können; ein weiteres Verfolgen dieses Weges würde uns zu weit in die analytische Mechanik führen.

§ 18.

Schwerpunkt. Wenden wir uns jetzt dazu, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines beliebigen festen Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, abzuleiten. Alle Körper, welche der Schwere unterworfen sind, unterliegen der Wirkung paralleler vertikal abwärts gerichteter Kräfte, da die Schwere auf alle Teile des Körpers gleichmäßig wirkt. Die Schwere wirkt überdies an einem Orte in der gleichen Richtung, nur an sehr weit voneinander entfernten Orten sind die Richtungen der Schwerkraft merklich verschieden. Für die der Schwere unterworfenen Körper gibt es demnach einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte, an dem wir uns alle Kräfte vereinigt denken können, und in bezug auf welchen die Summe der Drehungsmomente gleich Null ist. Man nennt diesen Punkt, in welchem man sich demnach das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, den Schwerpunkt des Körpers. Ist deshalb der Schwerpunkt unterstützt, oder greift an ihn eine vertikal nach oben gerichtete dem Gewichte des Körpers gleiche Kraft an, so kann der Körper gar keine, weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen, derselbe ist im Gleichgewicht.

Der Schwerpunkt ist in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn wir auch den Körper drehen. Denn eine solche Drehung hat denselben Erfolg, als wäre bei umgeänderter Körperlage die Richtung sämtlicher Kräfte um einen gleichen Winkel gedreht. Wie aber in § 16 nachgewiesen ist, ändert eine solche Drehung den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht.

Den Schwerpunkt von Linien, Flächen und geometrisch bestimmbaren Körpern kann man mit Hilfe der in den beiden letzten Paragraphen abgeleiteten Sätze und der vorhin gemachten Bemerkung, daß ein an den Schwerpunkt vertikal nach oben angebrachter Zug, der gleich dem Gewichte des Körpers ist, den Körper im Gleichgewichte halte, berechnen.

Wir können nämlich jeden schweren Körper als ein System von Punkten betrachten, auf welche alle vertikal abwärts gerichtete Kräfte wirken, indem wir den ganzen Körper als aus einzelnen schweren Elementen zusammengesetzt ansehen. Die Summe der Gewichte dieser Elemente ist das Gewicht des Körpers. Denken wir uns nun durch den Körper ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt und für alle einzelnen schweren Punkte die Abstände x, y, z gegeben, so sind es einfach die am Schlusse des vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen, die uns die Lage des Schwerpunktes geben. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Körperelemente p, das Gewicht des ganzen Körpers P, so sind die Abstände des Schwerpunktes von den drei Achsen

$$x_1 = \frac{\Sigma p x}{P}; \quad y_1 = \frac{\Sigma p y}{P}; \quad z_1 = \frac{\Sigma p z}{P}.$$

Um demnach die Lage des Schwerpunktes eines solchen Körpers zu erhalten, haben wir das Gewicht jedes Körperelementes mit seinem Abstande von jeder der drei Achsen zu multiplizieren, für jede Achse die Summe dieser Produkte zu bilden und jede dieser Summen durch das Gewicht des ganzen Körpers zu dividieren. Diese drei Quotienten bestimmen die Lage des Schwerpunktes, indem sie uns die Abstände desselben von den drei festen Richtungen geben.

In welcher Weise die Rechnungen in speziellen Fällen durchzuführen sind, können wir hier nicht besprechen, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik.

Man kann indes leicht den Schwerpunkt der Körper, auch solcher, die geometrisch nicht bestimmbar sind, experimentell bestimmen, indem man den Satz von den statischen Momenten anwendet.

Ist nämlich der Schwerpunkt unterstützt, so ist der Körper in Ruhe; ist er es nicht, so nimmt der Körper, wenn seine fortschreitende Bewegung gehemmt ist, eine drehende Bewegung an, bis sein Schwerpunkt sich senkrecht unter dem Unterstützungspunkte befindet. Denn wir sahen vorhin, daß eine Reihe von Kräften nur dann keine drehende Bewegung hervorruft, wenn die Summe ihrer statischen Momente gleich Null ist. Da wir uns nun in dem Schwerpunkte das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken können, so folgt, daß nur dann das statische Moment des Körpers gleich Null ist, wenn der horizontale Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse oder dem Unterstützungspunkte gleich Null ist, d. h. wenn beide in einer vertikalen geraden Linie liegen.

n wir einen Körper, dessen Schwerpunkt wir suchen, an einem ssen ihn frei herabhängen, so ist er darnach nur in einer ahgewicht, und wir können sicher sein, daß der Schwerpunkt kann auf der Verlängerung des Fadens liegt. Befestigen wir Körper mit einem andern Punkte am Faden, so wird der in der Gleichgewichtslage auch dann auf der Verlängerung egen. Diese beiden so bestimmten Richtungen schneiden sich m Punkte, und dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Körpers. ;t sich davon leicht, indem dieser Punkt stets in der Ver- ı Fadens liegt, wenn der Körper im Gleichgewichte ist, an rte des Körpers wir denselben auch befestigen.

e Weise kann man leicht finden, daß in einer homogenen hwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt, daß er bei ı Zylinder oder senkrechten Prisma auf der Achse in deren liegt, daß er bei einem Dreiecke mit dem Punkte zusammen- sich die drei von den Winkelspitzen zu den Halbierungs- gegenüberliegenden Seiten gezogenen Linien schneiden, daß er tigen Pyramide in $^1/_4$ der Höhe derselben liegt usf.

werpunkt eines Körpers kann auf drei verschiedene Weisen erstützungspunkte oder der Drehungsachse in einer Vertikal- diesen entsprechen drei Arten von Gleichgewicht des Körpers; Schwerpunkt liegt in der Drehungsachse. Wir mögen dem eine Lage geben, welche wir wollen, der Schwerpunkt ist r Drehungsachse in derselben Vertikalebene, er ist daher in ı Gleichgewicht. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den enten Gleichgewichtes.

Schwerpunkt liegt senkrecht unter der Drehungsachse. Dreht n Körper um seine Achse, so kehrt er, da das in seinem vereinigte Gewicht ihn nach unten treibt, in seine frühere um nach einigen Schwankungen darin zu verharren. Man Gleichgewichtszustand den des stabilen Gleichgewichtes.

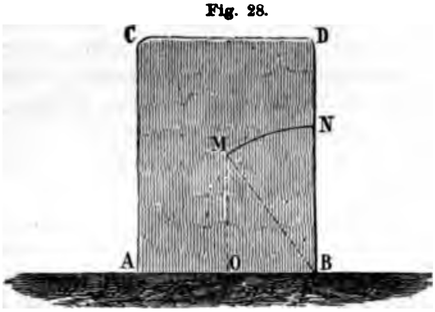
Schwerpunkt liegt senkrecht über der Drehungsachse. Der et sich dann im labilen Gleichgewicht. Ist er aus seiner t, so muß eine Drehung eintreten, da das Drehungsmoment n bezug auf die Drehungsachse nicht mehr gleich Null ist. erteilt dem Körper dann aber eine Drehung, welche den noch weiter aus seiner frühern Lage entfernt, sie dreht ihn, ßeres Hindernis die Bewegung hemmt, bis der Körper sich des stabilen Gleichgewichts befindet.

geht hervor, daß ein Körper nur dann feststeht, d. h. jeder seiner Lage einen großen Widerstand entgegensetzt und nach ungen wieder in seine frühere Lage zurückkehrt, wenn eine e Erhebung des Schwerpunktes bewirkt. Aufgestellte Körper, Schwerpunkt stets über der Stütze liegt, stehen daher nur auf 'est und zwar um so fester, je breiter die Ebene ist, auf der

wir z. B. einen Körper $ABCD$, dessen Schwerpunkt in M ıen wir denselben nur dadurch umwerfen, daß wir ihn um oder A als Drehungsachse drehen. Dabei muß der Schwer-

punkt den Kreisbogen MN beschreiben mit dem Radius MB, und MB größer ist als MO, so muß der Schwerpunkt des Körpers geho werden. Es läßt sich auch leicht berechnen, welche Kraft aufgewa werden muß, um den Körper B oder A zu drehen und so umzuwerfen. Das Drehungsmom des Körpers in bezug auf eine du B gehende Drehungsachse ist n dem vorigen

Fig. 28.



$$M \cdot OB,$$

wenn wir mit M das Gewicht Körpers bezeichnen, das wir Schwerpunkt vereinigt denken kö nen. Dieses Moment strebt d Körper eine Drehung in dem Si zu erteilen, daß M sich nach unten bewegt, eine Drehung, welche du den Widerstand des Bodens, auf welchem der Körper steht, verhindert wi

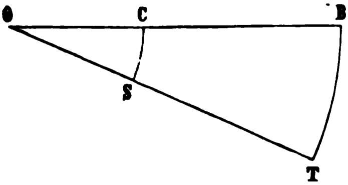
Um dem Körper eine entgegengesetzte Drehung um B zu erteil müssen wir also auf den Körper einen Druck wirken lassen, welcher entgegengesetzter Richtung dasselbe Moment hat.

Je größer also $M \cdot OB$ ist, um so größer ist die Stabilität des Körpe Man nimmt daher auch dieses Moment als Maß der Stabilität des Körpe so daß diese Stabilität durch das Produkt aus dem Gewichte des Körp und dem senkrechten Abstand einer durch den Schwerpunkt gehend Vertikalebene von der Umdrehungskante bestimmt wird.

§ 19.

Trägheitsmomente. Wir haben bisher bei der drehenden Bewegu nur die Kräfte betrachtet, welche die Bewegung hervorbringen, und unt sucht, wie die Kräfte an verschiedenen Punkten sich ersetzen könn um die gleiche drehende Bewegung zu erzeugen, indem wir bestimm welche Kräfte in verschiedenen Abständen von der Drehungsachse an bracht werden müssen, um sich gegenseitig das Gleichgewicht zu hal Dadurch ist die Abhängigkeit der drehenden Bewegung von den Krä vollständig gegeben, wir können sie in dem Satze zusammenfassen, Kräfte gleiche drehende Bewegungen, also gleiche Winkelgeschwindigk hervorbringen, wenn ihre statischen mente denselben Wert haben.

Fig. 29.



In bezug auf die drehende Bewe haben wir nun noch die Frage zu b worten, in welcher Weise dieselbe hängig ist von der Masse des durc gebene Kräfte in Bewegung zu set Systems. Denken wir uns deshalb z wieder einen gewichtlosen Heb (Fig. 29), an dessen Ende bei B eine Kraft F angreife, von der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, daß sie in jeder Lage des

constant und senkrecht zum Hebelarm sei. Im Punkte B befinde sich eine Masse m, welche durch die Kraft F in Bewegung gesetzt wird. Der Weg $BT = s$, den die Masse in irgend einer Zeit zurücklegt, ist dann, da wir die Kraft als immer von gleicher Größe vorausgesetzt haben,

$$BT = s = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2.$$

Nennen wir die Länge des Hebels l und den Bogen, dem der Weg s entspricht, φ, so können wir auch schreiben

$$s = l\varphi = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2; \quad \varphi = \frac{1}{2}\frac{F}{lm}t^2.$$

Nun werde die Masse m bei B fortgenommen, und es soll dann bei C im Abstande r von O eine Masse m' angebracht werden, so daß auch jetzt in derselben Zeit t durch die Wirkung der bei B angreifenden Kraft F von dem System derselbe Bogen φ beschrieben wird.

Um die Größe dieser Masse zu bestimmen, haben wir zunächst uns daran zu erinnern, daß die bei B wirkende Kraft F in dem Punkte C einen Druck F' ausübt, der gegeben ist durch die Gleichung

$$Fl = F'r$$

$$F' = F\frac{l}{r}.$$

Der Weg, den die Masse m' in der Zeit t durch die Wirkung dieser Kraft zurücklegt, ist

$$s' = \frac{1}{2}\frac{F\frac{l}{r}}{m'}t^2.$$

Dieser Weg soll nun demselben Bogen φ entsprechen, es ist also $s' = r\varphi$ und

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{Fl}{r^2m'}t^2.$$

Aus den beiden Gleichungen für φ ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{F}{lm} = \frac{1}{2}\frac{Fl}{r^2m'},$$

oder

$$m \cdot l^2 = m' \cdot r^2.$$

Die in dem Punkte C anzubringende Masse m' bekommt also durch die in B angreifende Kraft F dieselbe Winkelbewegung wie die in B angebrachte Masse m, wenn das Produkt aus der Masse m' und dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsachse gleich ist der Masse m, multipliziert mit dem Quadrate ihres Abstandes; oder zwei Massen erhalten durch eine und dieselbe an demselben Punkte angreifende Kraft dieselbe drehende Bewegung, wenn sie ihrer Größe nach umgekehrt sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsachse.

Das Produkt mr^2 einer Masse m in das Quadrat ihres Abstandes r von der Drehungsachse bezeichnet man als das Trägheitsmoment der Masse; mit dieser Bezeichnung können wir somit den eben abgeleiteten Satz auch so aussprechen, daß durch eine gegebene Kraft verschiedene Massen

gleiche drehende Bewegung erhalten, wenn sie gleiche Trägheitsmomente besitzen. Die Dimensionen des Trägheitsmomentes sind nach seiner Definition $K = z\,[\mu\lambda^2]$.

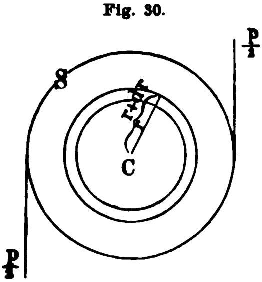
Das Trägheitsmoment einer gegebenen Masse bedeutet gleichzeitig jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angebracht werden muß, um die im Abstande r befindliche Masse m zu ersetzen, so daß die Winkelgeschwindigkeit dieselbe ist.

Dieser Satz von den Trägheitsmomenten setzt uns in den Stand, die drehende Bewegung eines Systems, in welchem Massen in verschiedenen Punkten vorhanden sind und von verschiedenen Kräften angegriffen werden, oder auch diejenige eines ausgedehnten Körpers wenigstens dann vollständig zu bestimmen, wenn wir die Verteilung der Massen und Kräfte kennen. Indem wir nämlich die Trägheitsmomente der vorhandenen Massen bestimmen, erhalten wir jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsachse die sämtlichen vorhandenen Massen so ersetzt, daß die drehende Bewegung, welche diese in der Abstandseinheit vorhandene Masse durch die wirksamen Kräfte erhält, genau jener gleich ist, welche die verteilten Massen erhalten. Durch Bestimmung der statischen Momente erhalten wir die in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angreifende Kraft, welche die sämtlichen an verschiedenen Punkten angreifenden Kräfte ersetzt. Da diese Kraft in demselben Punkte angreift, in welchem die durch das Trägheitsmoment bestimmte Masse sich befindet, so erhalten wir die Beschleunigung dieser Masse, indem wir den Quotienten aus der Kraft und der Masse bilden, und aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit und den in einer gegebenen Zeit zurückgelegten Weg ganz nach den im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätzen.

Bei einem ausgedehnten um eine Achse drehbaren Körper haben wir, um das Trägheitsmoment desselben zu bilden, uns den Körper in einzelne Elemente zerlegt zu denken; die Summe der Trägheitsmomente aller einzelnen Elemente ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Hat der Körper eine geometrisch bestimmte Gestalt, und ist die Masse in ihm gleichförmig verteilt, so daß also innerhalb des Körpers gleiche Volumina überall gleiche Masse enthalten, so läßt sich das Trägheitsmoment berechnen und damit die drehende Bewegung des Körpers vollständig bestimmen.

Um diese Rechnung zu übersehen, wollen wir als Beispiel die drehende Bewegung einer Kreisscheibe um eine durch ihre Achse gehende Drehungsachse untersuchen. Die Kreisscheibe S (Fig. 30) habe den Durchmesser $2r$, die Dicke b und an ihrem Umfange greife eine konstante Kraft F an; etwa so, daß wir die Drehungsachse der Scheibe vertikal gestellt, dann um die Scheibe zwei Schnüre gelegt denken, welche an einem Punkte des Umfangs befestigt und über zwei Rollen geführt sind. An den über die R len herabhängenden Enden der Schnüre seien jeder das Gewicht $\frac{p}{2}$ befestigt, so daß die wi same Kraft $F = gp$ ist. Das Gewicht oder die Masse eines Kubikzentimeters der Scheibe sei gleich q.

Fig. 30.



Um das Trägheitsmoment der Scheibe zu erhalten, denken wir uns s derselben einen Ring ausgeschnitten, dessen innerer Radius gleich r d dessen äußerer den um das Differential dr größern Wert $r + dr$ hat. s dr einen verschwindend kleinen Wert hat, ist der äußere Umfang des nges nur unendlich wenig von dem innern verschieden, wir können shalb ohne einen merklichen Fehler das Volumen dieses Ringes gleich $\pi rdrb$ setzen. Die Masse desselben wird dann $2\pi rdrbq$. Eben deshalb, weil wir den Ring als unendlich dünn vorausgesetzt haben, können r den Abstand aller seiner Punkte von der mit der Achse des Ringes sammenfallenden Drehungsachse als gleich, und zwar als gleich r anhen. Dann wird das Trägheitsmoment dieses Ringes gleich

$$r^2 \cdot 2\pi rdrbq = 2\pi bq \cdot r^3 dr.$$

ir bekommen somit das Trägheitsmoment dieses Ringes in Form eines fferentialausdrucks. Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe erhalten r, indem wir die Trägheitsmomente aller der unendlich vielen, unendlich nnen Ringe summieren, aus welchen wir die Scheibe zusammengesetzt nken können. Die Trägheitsmomente dieser Ringe erhalten wir, wenn r in obigem Ausdrucke für r nach und nach alle, jedesmal um dr zunehmende Werte von 0 bis a einsetzen. Das Trägheitsmoment der ganzen heibe ist somit das von 0 bis a genommene bestimmte Integral

$$K = \int_0^a 2\pi bq \cdot r^3 dr.$$

Dem Begriffe des Integrals als Summe entsprechend können wir den stanten Faktor vor das Summenzeichen setzen und erhalten

$$K = 2\pi bq \int_0^a r^3 dr.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen das Differential $\frac{1}{4} r^4$, somit nach E VIII

$$K = 2\pi bq \left(\tfrac{1}{4} a^4 - 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi bq \cdot a^4$$

Nun ist $\pi a^2 b$ das Volumen unserer Kreisscheibe, somit

$$\pi a^2 bq = m$$

e Masse der Kreisscheibe; wir können somit das Trägheitsmoment derben schreiben

$$K = \tfrac{1}{2} ma^2,$$

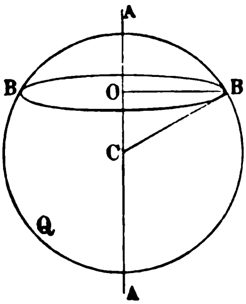
er das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe, oder allgemein eines massiven zylinders, da die Kreisscheibe ja nur ein Zylinder von geringer Höhe , in bezug auf die Achse des Zylinders ist gleich der halben Masse des nders multipliziert mit dem Quadrate des Radius. Damit erhalten r die Beschleunigung bei der drehenden Bewegung

$$G = \frac{Fa}{\frac{1}{2} ma^2} = 2\,\frac{F}{ma} = 2\,\frac{gp}{ma}.$$

ein Ausdruck, der gleichzeitig, wenn wir G als Bruchteil von 2π angeben, uns die Winkelbeschleunigung gibt, da die Beschleunigung sich auf einen Punkt bezieht, der sich im Abstande eins von der Drehungsachse befindet.

Das Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Achse können wir leicht aus dem soeben abgeleiteten Trägheitsmoment der Scheibe erhalten. Sei, um die Berechnung durchzuführen, der Kreis R ein Durchschnitt durch die Kugel, deren Radius gleich a sei, und AA sei die Drehungsachse. Sei auch jetzt wieder q das Gewicht der Volumeinheit der Kugel. Sei BB eine Scheibe, welche durch zwei unendlich nahe zur Drehungsachse senkrechte Schnitte begrenzt sei, deren erster im Abstande x, deren zweiter im Abstande $x + dx$ vom Mittelpunkte C der Kugel sich befinde. Diese Scheibe können wir als einen Zylinder ansehen, dessen Höhe gleich dx und dessen Radius r gegeben ist durch die Gleichung $r^2 = a^2 - x^2$.

Fig. 31.



Da die Drehungsachse der Kugel durch die Achse dieser Scheibe geht, so ist das Trägheitsmoment derselben, wie eben abgeleitet wurde,

$$\tfrac{1}{2}\pi q r^4 dx = \tfrac{1}{2}\pi q\,(a^2 - x^2)^2 dx \quad \ldots \quad (1).$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel ist die Summe der Trägheitsmomente aller Scheiben, in welche wir auf diese Weise die Kugel zerlegen können. Wir erhalten alle diese einzelnen Trägheitsmomente, indem wir in dem soeben entwickelten Ausdruck nach und nach für x alle die Abstände einsetzen, welche in der Kugel vorkommen. Die obere Hälfte der Kugel bekommen wir, indem wir für x nach und nach alle Werte einsetzen, von 0 bis a, die untere, deren Scheiben an der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes sich befinden, wenn wir für x alle Werte zwischen 0 und $-a$ einsetzen; denn um die in bezug auf den Mittelpunkt, von dem aus wir die Abstände x rechnen, entgegengesetzte Lage der Scheiben zu beachten, müssen wir den nach unten gerechneten Abständen x das negative Vorzeichen geben. Wir erhalten somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, indem wir von $-a$ angefangen nach und nach für x alle Werte von $-a$ bis $+a$ setzen und alle die so sich ergebenden Werte des Ausdruckes (1) summieren, oder

$$K = \int_{-a}^{+a} \tfrac{1}{2}\pi q\,(a^2 - x^2)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\pi q \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2\,dx.$$

Um dieses bestimmte Integral nehmen zu können, führen wir die unter dem Integralzeichen angedeutete Quadrierung aus; das Integral zerlegt sich dann in drei, da sich aus dem Begriffe des Integrals als Summe ergibt, daß das Integral einer Summe gleich ist der Summe der Integrale der einzelnen Glieder

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = \int_{-a}^{+a} a^4 dx - \int_{-a}^{+a} 2a^2x^2 dx + \int_{-a}^{+a} x^4 dx.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem ersten Integralzeichen das Differential von $a^4 x$, unter dem zweiten von $\frac{2}{3} a^2 x^3$, unter dem dritten von $\frac{1}{5} x^5$. Damit wird nach E VIII

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 \, dx = (a^5 + a^5) - \tfrac{2}{3}(a^5 + a^5) + \tfrac{1}{5}(a^5 + a^5) = \tfrac{16}{15} a^5$$

somit
$$K = \tfrac{1}{2}\pi q \cdot \tfrac{16}{15} a^5 = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{3}\pi a^3 q\right) a^2.$$

Der in der Klammer eingeschlossene Teil des Ausdruckes ist die Masse der Kugel; bezeichnen wir dieselben mit m, so wird

$$K = \tfrac{2}{5} m \cdot a^2.$$

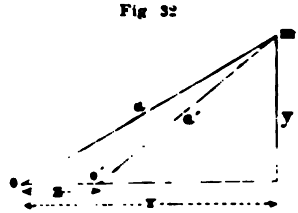
Die beiden Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie man durch Rechnung das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers von geometrisch bestimmter Gestalt erhalten kann. Für alle Formen, welche uns für das Trägheitsmoment eines Elementes einen Differentialausdruck liefern, dessen Integral man auswerten kann, läßt sich das Trägheitsmoment berechnen.

Außer durch Rechnung läßt sich das Trägheitsmoment einer Masse auch experimentell bestimmen. Dafür geeignete Methoden werden wir in § 34 kennen lernen.

§ 20.

Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente. Das Trägheitsmoment einer Masse hat nach der Definition dieses Begriffes keineswegs einen für die gegebene Masse immer gleichen Wert, sondern dieser Wert hängt wesentlich ab von der Lage der Drehungsachse, um welche die drehende Bewegung stattfindet. Auf spezielle Fälle der Art einzugehen, würde zu weit führen; wir wollen in der Beziehung nur einen allgemeinen Satz beweisen, der uns immer gestattet, das Trägheitsmoment einer Masse in bezug auf eine beliebige Achse zu bestimmen, wenn man es in bezug auf die der beliebigen Achse parallele durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Achse kennt. Ist nämlich M die Masse eines Körpers und Mk^2 das Trägheitsmoment desselben in bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Achse, so ist in bezug auf eine mit der letztern parallele und im Abstande z von derselben befindliche Drehungsachse das Trägheitsmoment gleich $M(k^2 + z^2)$.

Fig. 32.



Um diesen Satz zu beweisen, sei der senkrechte Abstand a des Punktes m (Fig. 32) von der durch den Schwerpunkt o des Körpers senkrecht zur Ebene der Zeichnung gehenden Achse durch zwei senkrechte Koordinaten x und y gegeben, so daß

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

Das Trägheitsmoment des im Punkte m befindlichen Massenelementes ist dann

$$ma^2 = m(x^2 + y^2).$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ist die Summe der so alle Massenelemente gebildeten Momente

$$\Sigma m a^2 = \Sigma m (x^2 + y^2) = M k^2.$$

Liege die zweite Achse in der Richtung der senkrechten Abstän von der ersten Achse um z entfernt, sie gehe durch o', so ist das T heitsmoment des in m befindlichen Massenelementes in bezug auf d neue Achse

$$m a'^2 = m \{(x - z)^2 + y^2\},$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers die Summe der Trägh momente aller Massenelemente

$$\Sigma m a'^2 = \Sigma m \{(x - z)^2 + y^2\}.$$

Letztere Summe ist aber gleich

$$\Sigma m \{(x - z)^2 + y^2\} = \Sigma m x^2 + \Sigma m z^2 + \Sigma m y^2 - 2 z \Sigma m x$$

oder auch

$$\Sigma m \{(x - z)^2 + y^2\} = \Sigma m (x^2 + y^2) + \Sigma m z^2 - 2 z \Sigma m x.$$

Das erste Glied des Ausdruckes auf der rechten Seite ist gleich I das zweite, da z^2 ein für alle Glieder der Summe konstanter Faktor und $\Sigma m = M$ gleich der Masse des Körpers ist, gleich $M \cdot z^2$. Wir ha demnach für das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in bezug auf neue Achse

$$M k^2 + M z^2 - 2 z \Sigma m x = M(k^2 + z^2) - 2 z \Sigma m x.$$

Das Glied $- 2 z \Sigma m x$ ist nun aber gleich Null, weil die Achse, der die Abstände x gerechnet sind, durch den Schwerpunkt geht, und nach unserer Definition des Schwerpunktes als des Mittelpunktes der die Schwere der einzelnen Körperelemente gegebenen parallelen Kräfte Summe der Momente in bezug auf denselben Null ist.

Es bleibt somit für das Trägheitsmoment des Körpers in bezug die neue Achse, welche mit der durch den Schwerpunkt gehenden pa und um z von ihr entfernt ist,

$$M (k^2 + z^2).$$

Wir werden von diesem Satze demnächst Gebrauch machen.

Mit Hilfe der Sätze über das Trägheitsmoment ist, wie schon bemerkt wurde, die Behandlung der drehenden Bewegung auf je fortschreitenden zurückgeführt, indem wir die Masse des zu beweg Körpers immer in dem Angriffspunkt der resultierenden Kraft konz denken können.

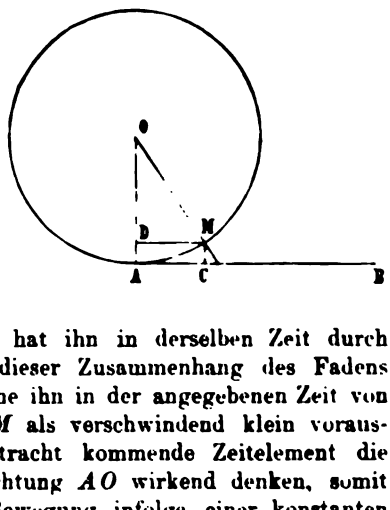
§ 21.

Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft. Bei der Untersuchun drehenden Bewegung haben wir bisher die Voraussetzung gemacht sich ein fester Körper um eine fest mit ihm verbundene Drehu drehe. Es ist das jedoch keine notwendige Bedingung, daß eine d Bewegung entstehe, notwendig ist nur, daß auf einen in Bewegung

den Körper eine Kraft einwirkt, welche die fortschreitende Bewegung in eine Drehbewegung verwandelt. Bei der Drehbewegung wird in jedem Augenblicke die Richtung der Bewegung geändert, indem die augenblickliche Bewegungsrichtung stets mit der Tangente zusammenfällt, die an den Punkt der Bahn gelegt wird, an welchem sich der Körper in dem betreffenden Augenblicke befindet. Es folgt das aus dem bekannten geometrischen Satze, daß für ein unendlich kleines Stück der Kreis, ja jede krumme Linie, mit der an dieser Stelle an den Kreis bezw. die krumme Linie gelegten Tangente zusammenfällt. Vermöge der Trägheit hat der Körper das Bestreben, in der einmal angenommenen Bewegungsrichtung zu verharren, also nach der Richtung der Tangente weiter zu gehen. Soll der Körper seine Bewegungsrichtung ändern und sich in der kreisförmigen Bahn bewegen, so muß auf ihn eine Kraft einwirken, welche ihn dem Zentrum der Bahn in derselben Zeit soviel nähert, als die Bahn selbst von der Tangente sich entfernt. Diese Kraft, welche die notwendige und ausreichende Bedingung der drehenden Bewegung ist, bezeichnet man als Zentripetalkraft.

Wie groß diese Zentripetalkraft in jedem Falle sein muß, ergibt sich in folgender Weise. Es bewege sich ein Körper A mit der Masse m in einem Kreise vom Radius R um den Mittelpunkt O (Fig. 33), mit welchem er etwa durch einen Faden verbunden sei, er habe beim Beginne der Bewegung eine konstante nach AB gerichtete Geschwindigkeit erhalten. Nach einer sehr kleinen Zeit t sei er in M angekommen, er hat den Bogen AM zurückgelegt, den wir so klein voraussetzen, daß wir ihn als mit der Sehne AM zusammenfallend ansehen dürfen. Die ursprünglich dem Körper erteilte Geschwindigkeit hätte ihn nach C geführt, der Zusammenhang des Fadens hat ihn in derselben Zeit durch die Strecke CM gleich AD gezogen; dieser Zusammenhang des Fadens ist also in diesem Falle die Kraft, welche ihn in der angegebenen Zeit von A nach D gezogen hätte. Da wir AM als verschwindend klein voraussetzen, können wir für das hier inbetracht kommende Zeitelement die Zentripetalkraft als konstant in der Richtung AO wirkend denken, somit die Größe derselben aus den für die Bewegung infolge einer konstanten Kraft gültigen Gleichungen ableiten. Ist die Zentripetalkraft gleich F, so erhalten wir für den in der Zeit t zurückgelegten Weg AD

Fig. 33.



$$AD = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \cdot t^2.$$

Nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise besteht zwischen der Strecke AM, dieselbe als Sehne betrachtet, und der Länge AD die Beziehung

$$AD \cdot 2R = AM^2.$$

Andererseits ist AM die von dem Körper in der Zeit t mit der Geschwindigkeit v zurückgelegte Strecke, somit

$$AM = v \cdot t$$

und

$$MA^2 = v^2 t^2 = 2R \cdot AD; \quad AD = \frac{v^2 t^2}{2R}$$

oder auch, indem wir diesen Wert in die erste Gleichung für AD einsetzen

$$v^2 t^2 = R \frac{F}{m} t^2$$

und daraus

$$F = \frac{m v^2}{R}.$$

Damit also der Körper sich im Kreise bewege, muß ihn an jeder Stelle seiner Bahn eine Kraft nach dem Mittelpunkte ziehen, die proportional ist der Masse des Körpers, dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, und die umgekehrt proportional ist dem Radius des Kreises, in welchem der Körper sich bewegt.

Man kann dem Ausdrucke für die Zentripetalkraft eine in manchen Fällen bequemere Form geben, indem man die Zeit T einführt, in welcher der Körper den Kreis $2\pi R$ mit der Geschwindigkeit v durchlaufen würde oder, wenn sich der Körper mit der konstanten Geschwindigkeit v im Kreise bewegt, wirklich durchläuft. Es ist dann

$$2\pi R = vT,$$

somit, indem wir den hieraus sich ergebenden Wert von v in die Gleichung für F einsetzen

$$F = \frac{4\pi^2 R m}{T^2}.$$

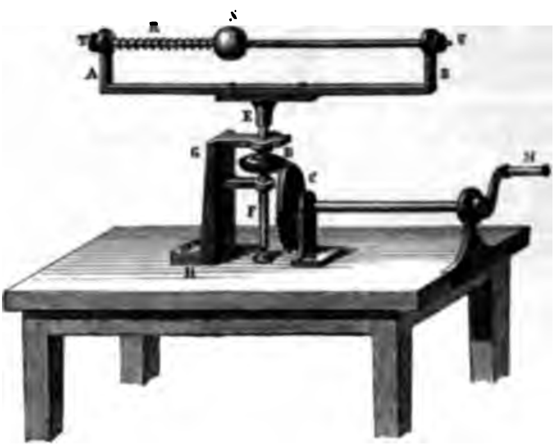
Der Zentripetalkraft an Größe gleich und in der Richtung ihr gerade entgegengesetzt ist die sogenannte Zentrifugalkraft. Daß der rotierende Körper einen genau ebensolchen Zug auf die Drehungsachse ausüben muß bezw. einen der Zentripetalkraft gleichen Druck von der Drehungsachse fort, wie der auf ihn wirkende gegen die Drehungsachse hin gerichtete Zug, das ergibt sich unmittelbar aus dem im § 11 besprochenen Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wir nehmen diese Zentrifugalkraft auch bei jeder Drehbewegung wahr. Ist der im Kreise bewegte Körper an einem Faden befestigt, so ist es, wie vorhin erwähnt, der Zusammenhang des Fadens, der ihn nach dem Mittelpunkte hinzieht; der Faden ist gespannt, ein Beweis, daß der Körper einen ebenso starken Zug auf den Mittelpunkt ausübt, als derjenige ist, welcher ihn aus der geradlinigen Bewegung ablenkt. Reißt der Faden, so bewegt sich der Körper einfach in der Tangente der Bahn weiter.

Durch einen andern sehr hübschen Versuch kann man die Existenz dieser Zentrifugalkraft und zugleich zeigen, daß sie nichts anderes ist als die Gegenwirkung der Zentripetalkraft, daß mit Aufhören der letztern bis dahin im Kreise bewegte in der Richtung der Bahntangente weitergeht. Man bringt auf die Achse der gleich zu beschreibenden Zentrifugalmaschine einen zur Hälfte mit Wasser gefüllten passend hohen Glaszyli

. 10^{cm} Weite. Sowie man den Zylinder in Rotation versetzt, Wasser an der Zylinderwand empor, deren Festigkeit das Wasser ch im Kreise zu bewegen, eine Erscheinung, die später im einsprochen wird. Ist die Drehung des Zylinders schnell genug, so Wasser bis auf den Rand des Zylinders, sowie es den Rand fliegt in der Tangente des Zylinders an dem Punkte, wo der pfen den Rand erreicht, derselbe fort. Da gleichzeitig bezw. in er Folge eine Anzahl von Tropfen den Rand erreicht, sieht man der, so lange die rasche Rotation dauert, mit einer Schar solcher umgeben, in denen das Wasser strahlenförmig von dem Zylinder t und in der Wurfkurve niederfällt.

kann die Zentripetalkraft mit der Zentrifugalmaschine sichtbar nd messen; eine Einrichtung derselben zeigt Fig. 34. Eine e Achse EF, al auf einem he steht, kann ner Kurbel M, nrad C in ein chse befestigd D eingreift, tion versetzt Auf der Achse hteck $TABV$ dessen eine aus einem en Stabe beler beliebig mmen wer-Man schiebt n Stab eine te Kugel S, wicht P sei, und zwischen die Kugel und die Scheibe T eine welche mit einem Zeiger versehen ist, um den Druck zu bewelchen die Kugel auf sie ausübt.

Fig. 34.



t man mittels der Kurbel den Apparat in rasche Rotation, so die Kugel anfangs eine Spirale, indem sie sich von der Achse dadurch wird die Feder zusammengedrückt. Ist die Rotationsigkeit eine konstante, so wird die Feder bis zu einem bestimmten sammengedrückt. Die Kugel beschreibt dann einen Kreis und der r Feder auf die Kugel ist die diese Kreisbewegung bedingende lkraft, der Druck der Kugel gegen die Feder die der Zentrigleiche nach außen gerichtete Zentrifugalkraft. Indem man n verschiedenem Gewichte P nimmt, und verschiedene Rotationsigkeiten v verwendet, kann man die Gleichung

$$F = \frac{P v^2}{R}$$

ifen

§ 22.

Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Körpers. Die i vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze lassen sich sofort auf jede B wegung in einer krummlinigen Bahn anwenden und führen uns so, we wir von einer Drehung der Körper um eine in ihnen liegende Achse a sehen, also insoweit die sich bewegenden Körper als Massenpunkte b trachten, zu den allgemeinen Gleichungen der Bewegung. Diese Gleichung sollen uns für jede Zeit den Ort des Punktes im Raume, also seine Bah ebenso auch für jeden Augenblick die Geschwindigkeit und zwar im al gemeinen aus den uns gegebenen Kräften abzuleiten gestatten.

Soll ein Körper sich in einer krummlinigen Bahn bewegen, so m stets eine Kraft auf ihn einwirken, welche ihn aus der augenblicklich Bewegungsrichtung, welche mit der Tangente der Bahn zusammenfällt, die Bahn hineintreibt. Diese Kraft muß also stets senkrecht zu d Tangente der Bahn an dem Punkte wirken, in welchem sich unser Kör gerade befindet. Die Richtung der Kraft ist also stets in der sogenannt Hauptnormale der Bahn. Für ein verschwindend kleines Stückchen fä die Bahn mit einem Kreise, dem sogenannten Krümmungskreise zusamm dessen Mittelpunkt, da der zu einem Punkte des Kreises gezogene Rad zu der in diesem Punkte gezogenen Tangente senkrecht ist, in die Ha normale der Bahn fällt. Eben weil für ein unendlich kleines Stück Bahn dieselbe mit dem Krümmungskreise zusammenfällt, ist die Gr der für die krummlinige Bewegung parallel der Normale erforderli Kraft gleich der zentripetalen Kraft, welche den Körper aus der Tangente den Krümmungskreis treibt. Ist demnach m die Masse des Körpers, v d augenblickliche Geschwindigkeit und ϱ der Krümmungsradius für die treffende Stelle der Bahn, so ist die für den betreffenden Moment erforde liche Kraft gleich $\frac{mv^2}{\varrho}$.

Wenn die Wirkung einer solchen Kraft die notwendige und reichende Bedingung ist, damit eine Bewegung in irgend einer krum linigen Bahn stattfindet, so können wir sofort ein System von Gleichu für irgend eine beliebige Bewegung aufstellen. Es sei F die Kraft, den Körper in seiner Bahn beschleunigt. Wir beziehen die Bahn auf dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem und nennen die der Rich der Koordinatenachsen parallelen Komponenten dieser Kraft X, Y, Z. B die Richtung der an der betreffenden Stelle erforderlichen Zentripetal mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so sind deren Komponenten parall Achsen $\frac{mv^2}{\varrho}\cos\alpha$, $\frac{mv^2}{\varrho}\cos\beta$, $\frac{mv^2}{\varrho}\cos\gamma$. Die gleichgerichteten Ko nenten können wir einfach summieren, die Beschleunigung des Kö parallel den einzelnen Achsen multipliziert mit der Masse des Körpe demnach gleich der Summe der beiden soeben bestimmten Kompo

Ist ds das Element der Bahn, so daß $\frac{ds}{dt}$ in dem betrachteten I die Geschwindigkeit der Bewegung ist, und sind dx, dy, dz die Proj des Elementes ds auf die Koordinatenachsen, so ist $\frac{dx}{dt}$ die Geschw

er Bewegung parallel x, $\frac{dy}{dt}$ jene parallel y und $\frac{dz}{dt}$ jene parallel z.
beso wie $\frac{d^2s}{dt^2}$ die Beschleunigung ist, welche das Bewegliche in dem ugenblicke erfährt, sind die zweiten Differentialquotienten von x, y und z ach t die den Achsen parallelen Beschleunigungen.

Wir erhalten somit die Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{m v^2}{\varrho}\cos\alpha;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{m v^2}{\varrho}\cos\beta;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{m v^2}{\varrho}\cos\gamma.$$

Soll aus diesen Gleichungen die Bahn des Beweglichen bestimmt werden, müssen die auf der rechten Seite befindlichen Kräfte, welche die gesamte ewegung bedingen, gegeben sein. In dieser Form ist das selten der Fall.

Sehr häufig sind dagegen die Bewegungsbedingungen in der Weise geben, daß das von bestimmten Kräften angetriebene Bewegliche sich uf einer gegebenen Fläche oder auf einer bestimmten Kurve bewegen soll, uf welcher es sich aber frei bewegen kann.

Soll das Bewegliche sich auf einer Fläche bewegen, so ist die notendige und ausreichende Bedingung, daß das Bewegliche einen Druck rhält, der in jedem Augenblicke senkrecht zur Fläche, also parallel zur ormalen an jedem Punkte der Fläche steht, welche auf der Bahn des unktes liegt.

Bezeichnen wir mit N diesen Druck, der mit der Zeit sich ändern kann, und mit α, β, γ die Winkel, welche seine Richtung mit den Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems bildet, und sind wie vorher X, Y, Z die den Achsen parallelen Komponenten der Kräfte, so gehen die ...en Gleichungen über in

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma.$$

Die jedem Punkte der Fläche entsprechenden Werte der Kosinus sind urch die Gleichung gegeben, welche die Fläche bestimmen, auf der das ewegliche bleiben soll. Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben

$$f(x, y, z) = 0,$$

wird in der analytischen Geometrie bewiesen, daß die Kosinus der Winkel, welche die Normale mit den drei Achsen bilden, gegeben sind urch die Ausdrücke

$$\cos\alpha = \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}};\quad \cos\beta = \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

worin $\frac{df}{dx}$ den Differentialquotienten der gegebenen Funktion beden derselbe gebildet, wie wenn lediglich x eine veränderliche Größe wi dagegen y und z konstant wären. Gleiches gilt von den beiden and Differentialquotienten nach y und z.

Daß diese Ausdrücke z. B. für die Kugel die Kosinus ergeben, si man sofort. Für die Kugel ist der zu einem Punkte derselben gezog Radius R senkrecht zu der an diesem Punkte gelegten Tangentialebe die Richtung des Radius ist also die Richtung der Normale. Legen v den Anfang des Koordinatensystems, auf welches wir die Kugel bezieh in den Mittelpunkt der Kugel, so sind die Projektionen des Radius den wir zu einem Punkte der Kugel mit den Koordinaten x, y, z zieh auf die Koordinatenachsen einfach x, y, z, und es ist

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos\beta = \frac{y}{r}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Die Gleichung der Kugel ist aber in obiger Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

woraus folgt

$$\frac{df}{dx} = 2x; \quad \frac{df}{dy} = 2y; \quad \frac{df}{dz} = 2z.$$

Setzt man diese Werte der Differentialquotienten in obige Ausdrücke f die Kosinus ein, so erhält man unmittelbar die Kosinus der Winkel, wel der Radius mit den drei Achsen bildet.

Schreiben wir

$$\frac{N}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = \lambda,$$

so gehen unsere Gleichungen für die Bewegung eines Punktes, der a einer Fläche bleiben muß, welche durch die Gleichung gegeben ist

$$f(x, y, z) = 0$$

über in die Form

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{df}{dx}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{df}{dy}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{df}{dz}.$$

In dieser Form sind die Bewegungsgleichungen zuerst von Lagr aufgestellt, man nennt sie die Gleichungen von Lagrange in der Form.

Ist gleichzeitig die Bahn des Beweglichen auf der Fläche schrieben, so erhalten die Gleichungen folgende Gestalt.

Jede Kurve können wir geometrisch als den Durchschnitt Flächen auffassen; so können wir einen Kreis als den Durchschnit Kugel und einer Ebene, als den Durchschnitt einer zur Achse eines Kreiszylinders senkrechten Ebene und des Zylinders oder auch Durchschnitt zweier Kugelflächen usf. ansehen.

Die Bedingung, daß ein Punkt eine bestimmte Bahn zurückl sich demnach dahin aussprechen, daß das Bewegliche gleichzeiti beiden Flächen sich bewege, deren Durchschnitt die gegebene

Wirkt auf allen Stellen der Bahn die Kraft N normal zu der einen der beiden Flächen, so bleibt das Bewegliche auf dieser; wirkt eine Kraft M normal zur zweiten Fläche, so bleibt das Bewegliche auch auf dieser; wirken beide Kräfte gleichzeitig, so muß der Körper auf beiden bleiben, er ist also stets im Durchschnitt derselben, beschreibt somit die Bahn, deren Durchschnitt die beiden Flächen bilden. Sind die Gleichungen der beiden Flächen

$$f(x, y, z) = 0; \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

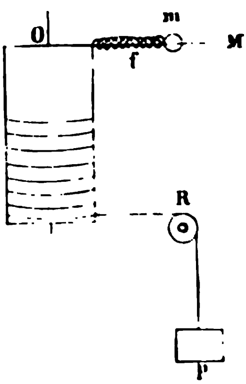
so werden die Bewegungsgleichungen des Punktes, welcher die durch diese beiden Gleichungen bestimmte Bahn zurücklegt,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{df}{dx} + \mu\frac{d\varphi}{dx}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{df}{dy} + \mu\frac{d\varphi}{dy};$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{df}{dz} + \mu\frac{d\varphi}{dz},$$

wenn μ aus M und den Differentialquotienten von φ ebenso gebildet ist, wie λ aus N und den Differentialquotienten von f.

Um die Verwendung dieser Gleichungen deutlich zu machen, wollen wir eine Aufgabe mit denselben behandeln. Es sei eine mit einem Faden umschlungene Walze vom Radius ϱ um eine vertikale Achse drehbar (Fig. 35). An der Walze sei ein Arm befestigt OM, auf welchem verschiebbar eine Masse m aufgesetzt sei; an derselben ist eine Feder angebracht, welche, wenn m sich von O entfernt, einen Zug auf m gegen O hin ausübe, welcher der Verlängerung der Feder proportional sei. Die um die Walze geschlungene Schnur führt über eine Rolle R, und an dem Ende der Schnur befindet sich ein Gewicht p, welches der Schwere folgend fällt. Das fallende Gewicht setzt die Walze in Drehung, und damit rotiert die Masse m mit der Walze um deren Achse. Infolge der Zentrifugalkraft entfernt sich m von der Achse, gleichzeitig wird aber die Feder gespannt, so daß die Masse m sich nur in dem Maße von der Achse entfernen kann, als die Zentrifugalkraft die Spannung der Feder überwiegt.

Fig. 35.



Setzen wir alles außer dem Gewichte p und der Masse m als massenlos voraus, so sind m und p die in diesem System bewegten Massen; die Masse m bewegt sich nur in der Horizontalebene und erhält in dieser eine beschleunigte Bewegung um die Achse, indem sie mit wachsendem Abstande dieselbe umkreist. Daß die Masse m immer auf dem Radius Om bleibt, ist durch die Starrheit des Armes bedingt, die überhaupt die Ursache ist, daß die Masse bei der Bewegung mitgenommen wird. Diese Starrheit des Armes führen wir in die Gleichungen von Lagrange als die Kraft ein, welche die Masse m in in ihrer Bahn erhält. Ist die Masse in Bewegung, so wirkt auf die Masse direkt der Zug der Feder ein, der sie stets in der Richtung Om zieht. Bei dem Beginne der Bewegung, wenn die Feder noch nicht gespannt ist, befinde sich m im Abstande b von O; nennen wir

den Zug der Feder, wenn sie um die Längeneinheit der Länge zugenommen hat, a, so ist der Zug derselben, wenn sich m bis zu dem Abstande r entfernt hat, $a(r - b)$. Diese Kraft führen wir als eine die Masse m in horizontaler Richtung bewegende Kraft ein.

Das Gewicht p fällt infolge der Schwere herab, es bewegt sich somit einfach in der Richtung der dasselbe bewegenden Kraft, seine Beschleunigung ist aber kleiner als die beim freien Fall, da es die Masse m mit in Rotation versetzt.

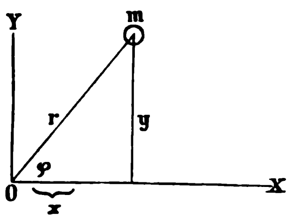
Um die Lagrangeschen Gleichungen bilden zu können, beziehen wir alles auf ein rechtwinkliges dreiachsiges Koordinatensystem. Die Richtung der XYEbene sei die horizontale; bei dem Beginne der Bewegung also zur Zeit $t = 0$ befinde sich m auf der XAchse im Abstande b; die Richtung der Drehung gehe von der positiven Seite der XAchse gegen die positive Seite der YAchse. Die Richtung der ZAchse ist vertikal positiv nach unten. Bei dem Beginne der Bewegung sei der Abstand des Gewichtes p von der XYEbene gleich c.

Ist das Gewicht p bis zu dem Abstande z von der XYEbene herabgesunken, so ist die Länge des abgewickelten Fadens gleich $z - c$; nennen wir den Radius der Walze ϱ, so ist der Bogen φ, um welchen sich dieselbe gedreht, den also unser Arm mit der Masse m durchlaufen hat,

$$\varphi = \frac{z - c}{\varrho}.$$

Ist Om (Fig. 36) die Lage des Armes zu dieser Zeit, so daß mOX der Winkel φ ist, so sieht man sofort, daß

Fig. 36.



$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \frac{z - c}{\varrho}$$

ist. Die Bedingungsgleichung für die Bahn des Beweglichen m ist somit

$$y - x \operatorname{tang} \frac{z - c}{\varrho} = 0,$$

wozu noch weiter hinzutritt $z = 0$, da die Masse m immer in der XYEbene bleibt. Diese Bedingung tritt in die Bewegungsgleichungen nicht ein, der der Masse durch ihr Gewicht erteilte Antrieb wird durch die Starrheit des Armes aufgehoben, sie erfährt parallel z keinen Antrieb.

Da der Abstand r von O gleich ist $\sqrt{x^2 + y^2}$, so ist die Kraft, welche die Masse gegen O hintreibt

$$a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right).$$

Da die Kraft gegen O gerichtet ist, wird die x Komponente

$$X = -a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) \cos \varphi = -a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$Y = -a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) \sin \varphi = -a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

...e Komponente Z der bewegenden Kraft ist $g \cdot p$, der Antrieb, den das ...ewicht nach unten erfährt.

Aus der Bedingungsgleichung

$$f(x, y, z) = y - x \cdot \operatorname{tang} \frac{z - c}{\varrho} = 0$$

...lgt, da zur Bildung von $\frac{df}{dx}$ nur x, für $\frac{df}{dy}$ nur y, für $\frac{df}{dz}$ nur z als ...änderlich anzusehen ist,

$$\frac{df}{dx} = -\operatorname{tang} \frac{z - c}{\varrho}; \quad \frac{df}{dy} = 1; \quad \frac{df}{dz} = -\frac{x}{\varrho} \frac{1}{\cos^2 \frac{z - c}{\varrho}},$$

...ie sich unmittelbar aus den Sätzen der mathematischen Einleitung, der ...te Differentialquotient aus E 6 und E IV, ergibt.

Hiermit werden die Gleichungen von Lagrange

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{df}{dx} = -a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \lambda \operatorname{tang} \frac{z - c}{\varrho}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{df}{dy} = -a\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lambda$$

$$p \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{df}{dz} = gp - \lambda \frac{x}{\varrho} \frac{1}{\cos^2 \frac{z - c}{\varrho}}.$$

Anstatt durch die drei veränderlichen x, y, z können wir alles durch ... zwei veränderlichen r und φ ausdrücken, denn es ist

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = \varrho \varphi + c.$$

Es ist r der mit der Zeit wachsende Abstand der Masse m von O ... φ der mit der Zeit wachsende Drehungswinkel. Die Differential...quotienten von x und y und z nach t, also die Geschwindigkeiten parallel ... drei Richtungen, werden nach den Sätzen der Einleitung

$$\frac{dx}{dt} = \cos \varphi \frac{dr}{dt} + r \frac{d \cos \varphi}{dt} = \cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin \varphi \frac{dr}{dt} + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}; \qquad \frac{dz}{dt} = \varrho \frac{d\varphi}{dt}.$$

Aus diesen Geschwindigkeiten erhalten wir die Beschleunigungen, indem wir die Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit, also ... den ersten Differentialquotienten der Wege nach der Zeit, die zweiten ...entialquotienten nach der Zeit ableiten. Dieselben werden, da auch ... und $\frac{d\varphi}{dt}$ Funktionen der Zeit sind,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \cos \varphi \frac{d \frac{dr}{dt}}{dt} - \frac{dr}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{dr}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$
$$- r \sin \varphi \frac{d \frac{d\varphi}{dt}}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos\varphi\,\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\varphi\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} - r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\sin\varphi\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

ebenso wird

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin\varphi\,\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\varphi\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} - r\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\cos\varphi\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \varrho\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Führen wir diese Ausdrücke in unsere Gleichungen ein, und setz der Kürze wegen

$$\frac{dr}{dt} = r', \quad \frac{d^2r}{dt^2} = r'', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi'',$$

so werden unsere Gleichungen

$$m(\cos\varphi\cdot r'' - 2\sin\varphi\cdot r'\varphi' - r\cos\varphi\cdot\varphi'^2 - r\sin\varphi\cdot\varphi'') = - a(r-b)\cos\varphi - \lambda\,\mathrm{tang}\,\varphi$$

$$m(\sin\varphi\cdot r'' + 2\cos\varphi\cdot r'\varphi' - r\sin\varphi\cdot\varphi'^2 + r\cos\varphi\cdot\varphi'') = - a(r-b)\sin\varphi + \lambda$$

$$p\varrho\varphi'' = gp - \lambda\frac{r}{\varrho}\,\frac{1}{\cos\varphi}.$$

Unsere eigentliche Aufgabe ist, r und φ in ihrer Abhängigkeit vo zu bestimmen, denn kennen wir diese, so können wir daraus die Ge schwindigkeiten und Beschleunigungen ableiten als die Differentialquotien von r und φ nach t. Aus jenen Gleichungen können wir nun zunäch λ fortschaffen. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos\varphi$, die zwei mit $\sin\varphi$ und addieren die beiden dann entstandenen Gleichungen, so er gibt sich

$$m(r'' - r\varphi'^2) = - a(r-b) \quad . \; . \; . \; . \quad \mathrm{A}.$$

Multiplizieren wir die erste mit $- r\sin\varphi$, die zweite mit $r\cos$ die dritte mit ϱ und addieren die drei so entstandenen Gleichungen, so wi

$$m(2rr'\varphi' + r^2\varphi'') + p\varrho^2\varphi'' = gp\varrho \quad . \; . \; . \; . \quad \mathrm{B}.$$

Diese beiden letzten Gleichungen geben uns gleichzeitig die sogen zweite Form der Grundgleichungen von Lagrange, welche eine Bezie liefern zwischen den lebendigen Kräften der bewegten Massen und wirksamen Kräften. Ist die lebendige Kraft unseres bewegten Sys gleich T, so können wir dieselbe, da $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ die Komponenten Geschwindigkeiten des bewegten Systems parallel den drei Achsen stets schreiben

$$T = \tfrac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} + \tfrac{1}{2}p\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Das erste Glied der rechten Seite gibt die lebendige Kraft der in der horizontalen Ebene beweglichen Masse m, das zweite die leb Kraft der nur parallel z beweglichen Masse p. Ersetzen wir die Differ quotienten durch ihre Werte in r und φ ausgedrückt, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}mr'^2 + \tfrac{1}{2}mr^2\varphi'^2 + \tfrac{1}{2}p\varrho^2\varphi'^2.$$

Die Richtigkeit der Gleichung erkennt man sofort, denn die Masse m bewegt sich gleichzeitig parallel r mit der Geschwindigkeit r' und senkrecht zu r in der Richtung des Bogens φ mit der Geschwindigkeit $r\varphi'$, die Masse p sinkt abwärts mit der Geschwindigkeit $\varrho\varphi'$. Betrachten wir jetzt T als abhängig von den vier veränderlichen Größen r, φ und den Geschwindigkeiten r' und φ', so daß insoweit auch die letzteren als unabhängige veränderliche angesehen werden, so können wir die Änderungen von T bestimmen, wenn jede dieser vier Größen sich ohne die andere ändert. Wenn sich nur r ändert, so wird

$$dT = mr\varphi'^2 dr; \quad \frac{dT}{dr} = mr\varphi'^2.$$

Ändert sich φ ohne die andern, so ändert sich die lebendige Kraft nicht, denn eine Änderung von φ allein ändert die Geschwindigkeit der Bewegung nicht. Da φ auf der rechten Seite der Gleichung für T gar nicht vorkommt, folgt auch

$$\frac{dT}{d\varphi} = 0.$$

Ändert sich die Geschwindigkeit r', so wird

$$\frac{dT}{dr'} = mr'$$

und schließlich wenn φ' sich ändert,

$$\frac{dT}{d\varphi'} = mr^2\varphi' + p\varrho^2\varphi'.$$

Die Quotienten $\frac{dT}{dr'}$ und $\frac{dT}{d\varphi'}$ ändern sich mit der Zeit, da r' φ' und r von der Zeit abhängig sind. Wir erhalten die Quotienten aus den in der Zeit dt eintretenden Änderungen und dem Zeitelement dt nach den Sätzen der mathematischen Einleitung

$$\frac{d\,\frac{dT}{dr'}}{dt} = m\frac{dr'}{dt} = mr''; \quad \frac{d\,\frac{dT}{d\varphi'}}{dt} = mr^2\varphi'' + 2mrr'\varphi' + p\varrho^2\varphi''.$$

Setzen wir die so bestimmten Quotienten in die Gleichung A, so können wir dieselbe schreiben

$$\frac{d\,\frac{dT}{dr'}}{dt} - \frac{dT}{dr} = -a(r-b) \quad . \ . \ . \ . \ \text{Aa.}$$

und ebenso können wir Gleichung B schreiben

$$\frac{d\,\frac{dT}{d\varphi'}}{dt} - \frac{dT}{d\varphi} = gp\varrho \quad . \ . \ . \ . \ \text{Ba.}$$

Die Gleichung Aa gibt den parallel der Richtung r wirkenden Zug, das die das Bewegliche m in der Richtung r bewegende Kraft, die Gleichung Ba das auf die Walze ausgeübte Drehungsmoment des Zuges gp, die das System in der Richtung φ bewegende Kraft.

Wir erhalten also hier die nach einer Richtung hin wirksame Kraft, indem wir den Differentialquotienten der lebendigen Kraft des bewegten Systems nach der Geschwindigkeit parallel der Richtung dieser Kraft bilden, von diesem Differentialquotienten denjenigen nach der Zeit bilden, und von diesem den Differentialquotienten der lebendigen Kraft nach dem der Kraftrichtung parallelen Wege abziehen.

Die hier für einen speziellen Fall aus der ersten Form der Lagrangeschen Gleichung abgeleitete zweite Form gilt ganz allgemein. Ist die einem Systeme erteilte lebendige Kraft zur Zeit t gleich T, ist die Geschwindigkeit parallel x gleich x', so ist die nach dieser Richtung wirksame Kraft stets gegeben durch

$$\frac{d\,\frac{dT}{dx'}}{dt} - \frac{dT}{dx} = X$$

und entsprechend für Y und Z.

Wir können zur Ableitung der Gleichungen A und B auch von dieser Form der Gleichungen von Lagrange ausgehen, da wir die lebendige Kraft unseres Systems sofort angeben können; in Fällen, wo das möglich ist, bietet dieser Weg oft Vorteile.

Wir haben die uns gestellte Aufgabe nur behandelt, um zu zeigen, wie man die von Lagrange aufgestellten Bewegungsgleichungen zu verwenden hat und um aus der ersten auch die zweite Form der Gleichungen abzuleiten, da wir in einem spätern Teile dieselben benutzen müssen; wir wollen sie deshalb auch nicht im speziellen weiter verfolgen. Nur wollen wir noch zeigen, daß in dem Grenzzustande diese Gleichungen zu den uns bereits bekannten, denselben darstellenden Ausdrücken führen.

Als diesen Grenzzustand bezeichnen wir jenen, bei welchem die Feder vollständig gespannt ist, so daß sie keiner Verlängerung mehr fähig ist. Von da ab hält der Zusammenhang der Feder der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht, wie groß auch die Geschwindigkeit der Drehung sein mag. Ist r_e der Abstand der Masse m von der Achse, so ändert sich r nicht mehr, es wird r' und r'' gleich Null. Die Gleichung A wird dann

$$\frac{m r_e^2 \varphi'^2}{r_e} = a\,(r_e - b).$$

Die linke Seite ist nichts anderes als die Zentripetalkraft, welche auf das Bewegliche wirken muß, um es, welches auch die Geschwindigkeit $r\varphi'$ ist, in der Kreisbahn zu halten, und die auf der rechten Seite stehende Größe a bedeutet dann nicht mehr eine Konstante, sondern eine mit der Geschwindigkeit wachsende Größe, und die Gleichung sagt eben aus, daß, wenn dieser Zustand erreicht ist, die Zentrifugalkraft durch einen ihr stets gleichen Zug aufgewogen werden muß.

Die Gleichung B wird

$$\varphi'' = \frac{gp\varrho}{m r_e^2 + p\varrho^2}; \quad \varrho\varphi'' = \frac{gp}{m\frac{r_e^2}{\varrho^2} + p},$$

die Beschleunigung in Längenmaß des Gewichtes p ist gleich dem Q tienten aus dem Zuge des Gewichtes und der Summe der Masse des

wichtes und der auf dem Umfange der Walze die Masse m ersetzenden Masse. In der Tat sind ja diese die durch den Zug des Gewichtes zu bewegenden Massen.

Aus der konstanten Beschleunigung erhalten wir nach den Gesetzen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit φ' zur Zeit t, dieselbe von dem Eintritt des Endzustandes an gerechnet,

$$\varphi' = \frac{g p \varrho}{m r^2 + p \varrho^2} t + \varphi'_e,$$

wenn φ'_e die Geschwindigkeit zur Zeit des Eintrittes des Endzustandes ist.

Ebenso erhält man in bekannter Weise den zurückgelegten Weg.

Ein weiteres Eingehen auf die Sätze der Dynamik ist uns hier nicht möglich, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik. Es erübrigt uns jetzt noch, einige Anwendungen unserer Sätze auf die wichtigsten Apparate zu betrachten.

§ 23.

Die Wage. Wir wenden unsere Sätze zunächst an, um die Theorie des für uns wichtigsten Meßapparates, der Wage zu erhalten.

Die Wage hat die Aufgabe, das Gewicht der Körper zu bestimmen, das heißt das Gewicht eines gegebenen Körpers mit demjenigen uns bekannter Gewichtstücke zu vergleichen. Zu dem Zwecke besteht dieselbe aus einem in seiner Mitte unterstützten Stabe, der an seinem Ende die Wagschalen trägt, deren eine den abzuwägenden Körper, deren andere die Gewichte aufnimmt. Die Wagschalen sind um ihre Aufhängeachse drehbar, so daß sie stets vertikal, das heißt mit ihrem Schwerpunkte unter der Aufhängeachse hängen. Wir schließen, daß das Gewicht des abzuwägenden Körpers demjenigen der Gewichte gleich ist, wenn der die Schalen tragende Stab, der Wagebalken horizontal steht. Die horizontale Stellung erkennen wir an einem mit dem Wagebalken fest verbundenen Zeiger, der dann auf eine bestimmte Marke zeigt. Wir verlangen ferner, daß der Wagebalken in einer geneigten Stellung zur Ruhe kommt, wenn auf der einen Seite ein nicht zu großes Übergewicht ist. Die Neigung soll für das kleinste Übergewicht noch deutlich sichtbar sein, der Wagebalken also mit einen deutlich erkennbaren Winkel mit der Horizontalen bilden. Dieses kleinste Übergewicht ist je nach dem Zwecke der Wagen verschieden; Wagen zu wissenschaftlichen Untersuchungen sollen schon einen deutlich sichtbaren Winkel mit der Horizontalen, einen deutlichen Ausschlag geben, wenn die eine Seite um Bruchteile eines Milligramm schwerer ist.

Aus dieser Aufgabe der Wage läßt sich unmittelbar ableiten, wie dieselbe eingerichtet sein muß. Wir wollen aus der Horizontalstellung der Wage auf die Gleichheit der abzuwägenden Gewichte schließen; daraus folgt zunächst, daß die Wage im unbelasteten Zustande horizontal stehen, das heißt, daß dann der Schwerpunkt mit der Drehungsachse in derselben Vertikalen liegen muß. Dazu ist erforderlich, daß die beiden Hälften der Wage an jeder Seite der Drehungsachse derselben durch die Schwere gleiche Drehungsmoment erhalten, somit daß, wenn die beiden Hälften gleichartig gearbeitet sind, was wir voraussetzen, dieselben gleiche Gewichte haben müssen.

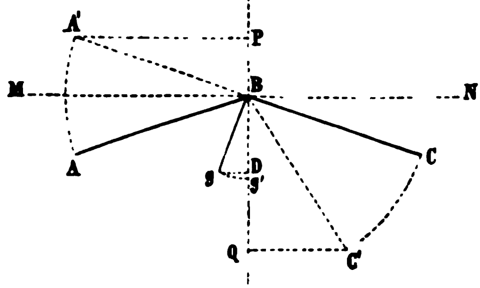
Es ergibt sich daraus zweitens, daß die beiden Hälften des Wagebalkens, die Abstände der Drehungsachse der Wage von den Aufhängepunkten der Wagschalen, gleiche Längen haben müssen. Denn in der Voraussetzung, daß die erste Bedingung erfüllt ist, beweist uns die horizontale Stellung der belasteten Wage nur, daß die Drehungsmomente der beiden Seiten gleich sind. Aus der Gleichheit der Drehungsmomente folgt aber die Gleichheit der wirkenden Kräfte, hier also der in den Wagschalen liegenden Gewichte, nur dann, wenn die Hebelarme, hier also die horizontalen Abstände der Aufhängepunkte der Wagschalen von der Drehungsachse, einander gleich sind. Inwieweit diese Bedingung strenge erfüllt werden kann, werden wir im nächsten Paragraphen besprechen.

Da die Wage, wenn auf der einen Wagschale ein kleines Übergewicht liegt, in einer geneigten Lage zur Ruhe kommen soll, so folgt als dritte notwendig zu erfüllende Bedingung, daß die unbelastete Wage im stabilen Gleichgewichte sich befinden, daß also der Schwerpunkt unter der Drehungsachse liegen muß. Würde die Wage im labilen Gleichgewichte sein, so würde sie bei der geringsten Bewegung umschlagen. Wäre die Wage im indifferenten Gleichgewicht, so würde sie unbelastet in jeder Lage im Gleichgewichte sein, bei dem geringsten Übergewichte auf der einen Seite sich dagegen um 90° drehen, so weit, bis der Schwerpunkt des Übergewichtes unter der Drehungsache in derselben Vertikalen liegen würde. Denn da im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der einzelnen Teile der Wage in bezug auf die Unterstützungsachse selbst Null ist und in jeder Lage Null bleibt, kann bei Hinzufügung eines Übergewichtes nur dann Gleichgewicht sein, wenn das Moment des Übergewichtes für sich gleich Null ist; das ist aber nur dann der Fall, wenn sein Schwerpunkt mit der Drehungsachse in derselben Vertikalen ist. In diesem Falle würde somit die Wage ebenfalls unbrauchbar sein. Ist die unbelastete Wage dagegen im stabilen Gleichgewicht, so tritt eine vom der Größe des Übergewichtes abhängige Drehung der Wage ein. Denn dadurch, daß die Wage sich nach der Seite des Übergewichtes neigt, wird ihr Schwerpunkt nach der andern Seite gehoben, somit ein die Wage zurückdrehendes Moment erzeugt; die Gleichgewichtslage ist dann jene, in welcher die nach entgegengesetzter Richtung drehenden Momente einander gleich sind.

Indem wir diese Gleichgewichtsbedingung formulieren, erkennen wir weiter, von welchen Umständen außer von der Größe des Übergewichtes die Größe der Drehung abhängig ist, welche speziellere Einrichtung somit die Wage haben muß, damit sie für ein möglichst kleines Übergewicht einen deutlich erkennbaren Ausschlag gibt. Bei dieser Formulierung machen wir die allgemeinste mit den bereits erkannten Bedingungen verträgliche Annahme, die sich im allgemeinen stets realisiert findet, daß nämlich der Wagebalken ABC (Fig. 37) nicht eine gerade Linie bilde, daß also die Verbindungslinie der Aufhängepunkte der Wagschalen nicht durch die Drehungsachse gehe. Wir nehmen aber an, daß in der Gleichgewichtslage die Verbindungslinie AC horizontal sei, daß also AB und BC mit der horizontalen MN den gleichen Winkel β bilden. Die Längen $AB = BC$ seien gleich l. Der Schwerpunkt des Wagebalkens liege in g' im Abstande l' unter B.

Ferner sei p das Gewicht des Balkens und sei das Gewicht der an A [und] C angehängten Wagschalen inklusive der eingelegten Gewichte auf der [ein]en Seite gleich Q, auf der [ande]rn Seite $Q+q$. Die Wage [wir]d sich um einen Winkel α [dreh]en und die Lage $A'BC'$ [ann]ehmen. Der Schwerpunkt [der] Wage rückt dann nach g. [Be]steht Gleichgewicht, so muß [die] Summe der Momente der [wir]kenden Gewichte Q, p, $Q+q$ [gle]ich Null sein.

Fig. 37.



Die Hebelarme der Ge[wi]chte sind für Q die Länge [A']P, für das Gewicht p der [W]age gD und für die Ge[w]ichte $Q+q$, welche an dem [Pu]nkte C' angreifen, $C'Q$, es muß sonach

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD - (Q+q)\, C'Q = 0,$$

[o]der

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD = (Q+q)\, C'Q \;\ldots\; 1.$$

Nun sind

$$A'P = A'B \cdot \cos BA'P = A'B \cos A'BM = l \cdot \cos(\alpha - \beta),$$
$$gD = gB \cdot \sin gBD = l' \cdot \sin \alpha,$$
$$C'Q = C'B \cdot \cos QC'B = C'B \cdot \cos C'BN = l \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

[Es fol]gt daraus, wenn wir diese Ausdrücke in (1) einsetzen,

$$Ql \cos(\alpha - \beta) + pl' \sin \alpha = (Q+q)\, l \cos(\alpha + \beta)$$

[od]er auch

$$ql \cos \beta \cdot \cos \alpha = \{2Ql \sin \beta + ql \sin \beta + pl'\} \sin \alpha.$$

Dividieren wir durch $\cos \alpha$ und lösen die Gleichung nach $\operatorname{tang} \alpha$ auf,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{ql \cos \beta}{2Ql \sin \beta + ql \sin \beta + pl'}$$

[od]er

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{ql}{(2Q+q)\, l \operatorname{tang} \beta + \dfrac{pl'}{\cos \beta}} \;\ldots\; 2.$$

Der Winkel α gibt die Neigung des Wagebalkens, wenn in die Wag[sch]ale bei C das Übergewicht q gebracht ist, er mißt also die Empfind[lich]keit der Wage. Da α immer sehr klein ist, können wir auch $\operatorname{tang} \alpha$ [al]s Maß der Empfindlichkeit betrachten. Man sieht in obiger Gleichung, [da]ß, wenn der Winkel β von Null verschieden ist, der Wert α abhängig ist [vo]n $2Q+q$, das heißt, die Empfindlichkeit der Wage ist nicht konstant, [si]e ändert sich bei gleichem Übergewichte q mit der gemeinsamen Be[last]ung der Wage, sie ist größer, wenn die Wage weniger belastet ist. [Da]ß das der Fall sein muß, ergibt die direkt an Fig. 37 als richtig ein-

zusehende Überlegung, daß bei der hier vorausgesetzten Neigung der Wagebalken die Drehung der Wage zur Folge hat, daß der Hebelarm, an welchem das Übergewicht wirkt, in stärkerem Verhältnisse kleiner wird, als der Hebelarm an der andern Seite der Wage.

Lägen die Punkte A und C anstatt unter der Horizontalen über derselben, so wäre die Rechnung genau so durchzuführen, nur müßte man in den Gleichungen den Winkel β negativ setzen, wo in den vorigen Gleichungen $\alpha + \beta$ steht, müßten wir $\alpha - \beta$ setzen und umgekehrt. Die Gleichung (2) wird dann

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{q l}{\frac{p l'}{\cos \beta} - (2 Q + q) l \operatorname{tang} \beta}.$$

Hier wird der Nenner unseres Ausdrucks mit zunehmender Belastung kleiner, die Empfindlichkeit der Wage also größer.

Ist der Winkel β gleich Null, so ist die Empfindlichkeit der Wage konstant, unabhängig von der Belastung. Da das durchaus wünschenswert ist, so sucht man soviel wie möglich die drei Punkte A, B, C in eine gerade Linie zu legen. Nehmen wir an, daß das erreicht, also $\beta = 0$ sei, so wird die Empfindlichkeit der Wage gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{l'} \left(\frac{l}{p}\right) q.$$

Bei gleichem gegebenen Übergewicht wird somit der Ausschlag der Wage um so größer,

1) je kleiner l', also der Abstand des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte ist. Man erkennt das auch an der Fig. 37 sofort als richtig, denn je näher g an B liegt, um so größer muß der Winkel α werden, damit der Hebelarm, an welchem das Gewicht des Wagebalkens angreift, einen solchen Wert hat, daß das zurückdrehende Moment dem Drehungsmoment des Übergewichtes gleich wird.

2) Der Winkel α wird um so größer, je größer der Quotient $\frac{l}{p}$, also aus der Länge des Wagebalkens und dem Gewichte desselben, wird, je länger also bei gegebenem Gewichte p die Wagebalken sind, oder je leichter bei gegebener Länge das Gewicht des Wagebalkens ist. Diese Bedingungen sind selbstverständlich innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen, da bei zu großer Länge, oder zu kleinem Gewichte die Wagebalken sich biegen, somit die Bedingung, daß $\beta = 0$ ist, nicht mehr erfüllt sein kann. Von zwei Wagen, bei denen der Quotient $\frac{l}{p}$ denselben Wert hat, ist schon deshalb diejenige die beste, deren Wagebalken die kürzeren sind, da bei dieser nicht so leicht Verbiegungen eintreten. Es wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen, daß sich mit einer solchen Wage auch schneller wägen läßt.

Die Theorie liefert daher für eine gute Wage folgende Bedingungen, die man in der Praxis möglichst zu erfüllen sucht;

1) Die beiden Wagebalken sollen einander gleich sein.

2) Der Quotient $\frac{l}{p}$ soll möglichst groß sein.

3) Der Aufhängepunkt des Wagebalkens und diejenigen der Wag-len sollen in einer geraden Linie liegen.

4) Der Schwerpunkt der Wage soll unter der Drehungsachse liegen, r derselben möglichst nahe.

Um diesen vielfachen Bedingungen Genüge zu leisten, wendet man Wagebalken einen Messingstreifen von ungefähr 5^{mm} Dicke und 60^{cm} ge an. Man gibt ihm die Form (Fig. 38) eines länglichen verschobenen recks, und, um ihn leicht zu machen, wird er vielfach durchbrochen, daß nur die Seiten des Vierecks übrig bleiben nebst einigen das Vier-durchsetzenden Stützen. Man erfüllt dadurch die zweite Bedingung, n erhält einen bei gegebener Länge möglichst leichten Wagebalken, ohne ürchten zu müssen, daß er sich biegt.

Fig. 38.

Auf die Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen ist große merksamkeit zu verwenden. Es ist notwendig, Träger herzustellen, die einer zur Drehungsebene des Wagebalkens senkrechten Linie auslaufen, fähig sind, dem Drucke zu widerstehen, welchen die angehängten Ge-ichte ausüben, die sich während der Drehung des Wagebalkens nicht wackeln und die hinlänglich beweglich sind, um nicht durch einen grossen Reibungswiderstand die Bewegung des Wagebalkens zu hemmen. ist befestigt zu dem Ende in dem Wagebalken ein Prisma von gehär-tem Stahl F, dessen untere möglichst geradlinig gearbeitete Kante auf einer gut polierten Platte von Stahl, oder besser noch von Achat, aufliegt.

An den Enden des Wagebalkens sind ebenfalls zwei Prismen ange-acht, deren Kanten nach oben gerichtet sind, um auf diese die unten eben abgeschliffenen Stahlstücke A aufzunehmen, an denen die Wagschalen aufgehängt sind. Die Aufhängeachsen des Wagebalkens sowie der Wag-schalen sind demnach die Kanten dieser drei Prismen. Diese drei Kanten müssen gemäß der dritten Regel möglichst in eine gerade Linie gebracht werden, und die beiden Abstände der an den Enden des Wagebalkens angebrachten von der mittlern nach der ersten Regel unter sich so genau als möglich gleich gemacht werden.

Meistens ist zur Erfüllung dieser Bedingungen an den feinen Wag eine Korrektionsvorrichtung angebracht. In dem Falle sind nur zw Prismen unveränderlich fest. Das dritte kann durch Schrauben vertik verschoben werden, um die Kanten der drei Prismen in eine Linie bringen, und horizontal, um die Abstände der beiden äußeren Prismen v dem mittlern unter sich gleich zu machen.

Um die vierte und wichtigste Bedingung herzustellen, ist an de obern Rande des Wagebalkens gerade über dem Aufhängepunkt ei Schraubenspindel mit sehr schmalen Gängen eingesetzt, auf welcher si zwei Laufgewichte E auf und abschrauben lassen. Das untere ist größ und schwerer, das obere kleiner und leichter. Eine Bewegung dieser G wichte ändert die Lage des Schwerpunktes; werden sie hinaufgeschraub so steigt der Schwerpunkt, werden sie hinabgeschraubt, so sinkt derselb Die gröbern Hebungen und Senkungen des Schwerpunktes werden dur eine Bewegung der großen, die kleinern durch eine Drehung der kleine Schraubenmutter bewirkt. Durch diese Vorrichtung wird also der Schwe punkt des Wagebalkens beweglich, und man sieht, wie man ihn dadur der Aufhängeachse so nahe bringen und dadurch die Wage so empfindli machen kann, wie man will. Man hat diese Vorrichtung noch dahin ve vollkommnet, daß man mittels derselben dem Schwerpunkt auch eine sei liche Bewegung geben kann. Zu dem Ende ist auf der einen Schraube mutter ein exzentrischer Knopf angebracht, der durch seine seitlich Bewegung bei der Drehung des Laufgewichtes den Schwerpunkt auch sei lich etwas verschiebt, uns also in den Stand setzt, ihn genau vertikal unter die Aufhängeachse zu bringen in dem Augenblicke, wo die drei Prismenkanten sich in der Horizontalen befinden.

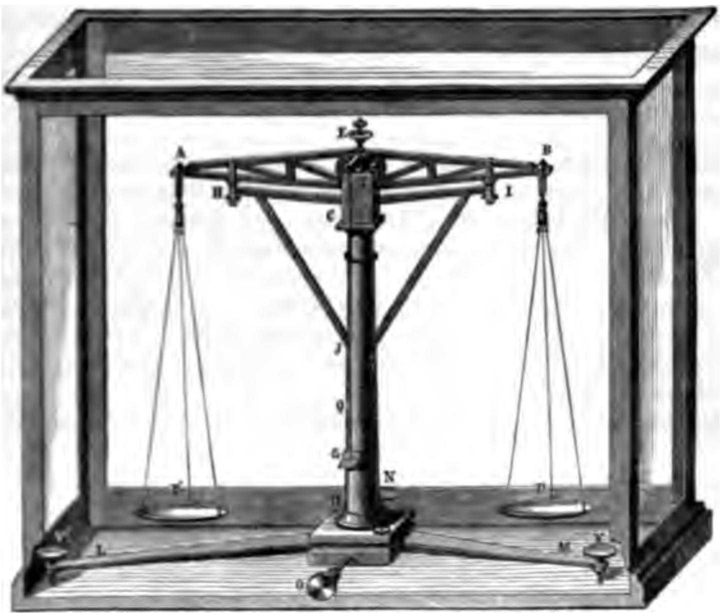
Um zu erkennen, ob die Wage horizontal steht, ist in der Mitte des Balkens über der Aufhängeachse eine stählerne Nadel Q (Fig. 39) be festigt, die bis unten an die Säule hinabreicht, welche die Wage trägt Die Spitze der Nadel schwingt vor einer Elfenbeinplatte G hin und her welche mit einer Teilung versehen ist. Man reguliert die unbelastete Wage durch Drehung der Stellschrauben $V V'$ so, daß das Ende der Na auf der Mitte der Teilung, dem mit 0 bezeichneten Teilstrich, einst Von dem Punkte geht man aus, eine Neigung des Wagebalkens w dann durch einen Ausschlag der Nadel angegeben; und da letztere lang ist, so gibt sie für die geringste Neigung schon einen deutlich Ausschlag.

Es erübrigt noch, die Aufstellung der Wage zu betrachten. Die steht auf einem eisernen Dreifuß LMN (Fig. 39), welcher mit St schrauben VV' versehen ist. Von der Mitte des Dreifußes erhebt eine Messingsäule DC, auf deren Spitze die Achatplatte angebracht auf welcher die Schneide des Stahlprisma F ruht. Teils um die St schneide zu schonen, teils um die Wagebalken vor einer Biegung zu wahren und die Wage besser transportieren zu können, ist an der Säule eine Gabel HIJ angebracht, deren Arme den Wagebalken erreichen. kann mittels einer in der Säule verborgenen Zahnstange, in welch mittels des Knopfes O drehbares Zahnrad eingreift, gehoben und ge werden. Dreht man den Knopf nach der einen Seite, so hebt ma Gabel; dieselbe nimmt den Wagebalken zwischen ihre Arme bei H

d unterstützt ihn, indem sie ihn ein wenig emporhebt. Dreht man den opf O, und damit das Zahnrad, nach der entgegengesetzten Seite, so kt die Gabel hinunter, läßt die Schneide F sehr langsam auf ihre terlage herab und läßt dann den Wagebalken frei.

Um beim Vornehmen einer Wägung die störenden Luftströmungen, elche die Bewegung der Wage hemmen, um die Wirkung der Feuchtigit auf die zu wägenden Körper zu hindern, und andererseits um die

Fig. 29



Wage selbst vor Staub und sonstigen verderblichen Einflüssen zu schützen, umgibt man den ganzen Apparat mit einem Glaskasten, der vorn und an den Seiten geöffnet werden kann.

§ 24.

Prüfung der Wage; Methode der Wägungen. Wenn man die von der Theorie geforderten Bedingungen bei Herstellung der Wagen auch möglichst zu erfüllen sucht, so läßt sich eine theoretisch vollkommene Wage nicht herstellen. Man muß deshalb eine jede Wage prüfen, besonders wie weit die Grundbedingung an derselben, die Gleichheit der Wagebalken erfüllt ist. Man kann das leicht durch zwei Wägungen. Wir legen in die Wagschale links einen Körper, dessen Gewicht mit q bezeichnet werde, und bringen ihn durch das auf die Schale rechts gelegte erforderliche Gewicht p ins Gleichgewicht. Ist die Länge des Wagebalkens links gleich l, rechts gleich r, so folgt

$$lq = pr.$$

Wir legen dann den Körper vom Gewichte q auf die Wagschale rech und bringen ihn durch die erforderlichen in die linke Schale gelegten G wichte ins Gleichgewicht. Sei dazu $p + p_1$ erforderlich, so ist

$$(p + p_1)\, l = rq.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{r}{l} = \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei der Wägung mit einer solchen Wage müßte somit auch das b obachtete Gewicht korrigiert werden, es wäre

$$q = p \cdot \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei Wägungen, bei denen es sich um die äußerste Genauigkeit hande wird man sich indes nicht mit dieser Korrektion begnügen, da schon g ringe Temperatureinflüsse das Verhältnis der Längen der Wagebalk ändern können. Man wendet da besser die Methode der doppelten Wägu an. Zu dem Zwecke legt man den abzuwägenden Körper auf die ei Wagschale und bringt ihn durch Schrotkörner und ähnliches, die auf di andere Wagschale gelegt werden, ins Gleichgewicht. Dann ersetzt ma den abzuwägenden Körper durch Gewichtsstücke, bis wiederum die Wa im Gleichgewichte ist.

Da auf diese Weise die Gewichtsstücke, durch welche das Gewic des Körpers bestimmt wird, in derselben Schale liegen, somit an demselb Hebelarme wirken, so muß das Gewicht derselben auf das genaueste de Gewichte des Körpers entsprechen, mögen die Arme des Wagebalke gleich sein oder nicht, wenn nur die Wage empfindlich genug ist, um di kleinsten Gewichtsdifferenzen anzugeben.

Die Empfindlichkeit der Wage nimmt, wenn die Aufhängepunkte d Wagebalkens und der Wagschalen nicht in einer geraden Linie liegen, m steigender Last ab. Wenn nun auch ursprünglich diese drei Punkte einer geraden Linie liegen, so ist bei den feinen Wagen doch nicht vermeiden, daß bei Wägung großer Gewichte eben wegen der Länge Leichtigkeit des Wagebalkens derselbe eine geringe Biegung erhält. D durch aber sinkt der Schwerpunkt des Wagebalkens herab, und die Wa verliert an Empfindlichkeit. Um diesen Fehler zu korrigieren, sind über dem Wagebalken angebrachten Laufgewichte vorzüglich brauchb indem sie die Lage des Schwerpunktes ändern. Man kann mittels d selben der Wage die größte Empfindlichkeit geben.

Will man kleine Gewichte wägen, so schraubt man vorher die bei Laufgewichte in die Höhe, bis die Wage in den Zustand des labilen Gl gewichts versetzt wird; dann schraubt man das eine der Gewichte wi herunter, bis das Gleichgewicht der Wage gerade wieder anfängt stab werden. Auf diese Weise ist in dem Falle das Maximum der Emp lichkeit erreicht. Will man große Gewichte abwägen, so legt ma nächst auf die beiden Wagschalen Gewichte, welche nahezu eine Belastung ausmachen als die zu bestimmenden. Dann verfährt man wie vorher, man schraubt die beiden Laufgewichte bis zum labilen

gewichte der Wage in die Höhe und läßt dann das eine soweit herab, bis das Gleichgewicht der Wage wieder stabil wird. Auch hier ist so wieder das Maximum der Empfindlichkeit erreicht.

Da die Wägungen zu den feinsten und wichtigsten Versuchen in der Physik gehören, so wird es gut sein, das Verfahren bei denselben etwas genauer zu beschreiben. Wir setzen voraus, die Wage stehe auf einem festen Tische, durch die Stellschrauben sei der Zeiger bei unbelasteter Wage auf den Nullpunkt geführt, man habe der Wage den abzuwägenden Gewichten gemäß das Maximum der Empfindlichkeit gegeben und wolle die Methode der doppelten Wägung anwenden. Man legt alsdann den abzuwägenden Körper in die eine Wagschale und Schrot in die andere, bis das Gleichgewicht nahezu hergestellt ist; das bietet keine Schwierigkeit. Ist das erreicht, so arretiert man mittels der Gabel den Wagebalken, hemmt mit der Hand die Schwankungen der Schalen, schließt den Kasten und läßt die Gabel vorsichtig wieder herab. Die Nadel wird dann vor der Teilung hin und her schwingen. Man beobachtet eine Anzahl Schwingungen; ist das Gleichgewicht erreicht, so sind die Schwingungen um den Nullpunkt symmetrisch, so daß die Summe zweier aufeinander folgender Schwingungen nach der einen Seite gleich ist dem doppelten Werte der zwischen den beiden liegenden Schwingung nach der entgegengesetzten Seite. Man wird nämlich bei absolut gleicher Belastung, oder auch wenn man die mit aller Genauigkeit justierte Wage ohne Belastung in Schwingung versetzt, finden, daß die aufeinander folgenden Schwingungen nicht von gleicher Größe sind, daß die Weite der Schwingungen vielmehr stetig und regelmäßig abnimmt. Geht etwa die erste Schwingung nach rechts um r Skalenteile, so findet man die darauf folgende Schwingung nach links etwa $r - \alpha$ Skalenteile; dann bewegt sich der Zeiger nach rechts um $r - 2\alpha$ Skalententeile, wieder nach links um $r - 3\alpha$ Skalenteile usf. Der Grund dieser Abnahme liegt darin, daß der Bewegung der Wage der Widerstand der Luft und die Reibung in der Aufhängung entgegen wirkt. Bezeichnen wir nun die Schwingungen, ausgedrückt in Teilen der Skala nach rechts mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$, nach links mit $l_1, l_2, l_3, \ldots$, so muß, wenn die Wage um die horizontale Lage, der Zeiger also um den Nullpunkt schwingt,

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 &= 2l_1,\\
2r_2 &= l_1 + l_2\\
r_3 + r_2 &= 2l_2
\end{aligned}
$$

sein. Findet man also nach der vorgenommenen Tarierung, daß dies erreicht ist, so folgt, daß die Ruhelage des Wagebalkens die horizontale, oder daß das Gleichgewicht erreicht ist. Findet man dagegen, daß

$$r_1 + r_2 \gtrless 2l_1$$

ist, so beweist das, daß die Ruhelage des Wagebalkens nicht die horizontale, somit daß das Gleichgewicht noch nicht erreicht ist; ist $r_1 + r_2 < 2l_1$, so ist die Wage rechts zu schwer, im entgegengesetzten Falle auf der linken Seite. Man muß dann, nachdem man die Wage arretiert hat, mit einer Pinzette ein Schrotkorn fortnehmen oder zulegen,

je nachdem die Tara zu groß oder zu klein ist. Wenn durch Wegnehı oder Zulegen eines Schrotkornes aber die Tara zu sehr geändert wird, muß man feineres Schrot anwenden, oder Papierschnitzel oder auch Sa körner, und so lange mit dem Ab- und Zugeben dieser kleinen Gewichte fortfahren, bis die Schwingungen des Zeigers der angegebenen Beding entsprechen[1]).

Dann ist der Körper tariert; nun wird er aus der Wagschale nommen, statt seiner werden Gewichte hineingelegt und mit den Gewich jetzt gerade so verfahren, wie vorhin mit der Tara. Man findet zunä das notwendige Gewicht leicht als zwischen n und $n+1$ Gramm halten und hat dann zu dem Gewichte noch die Bruchteile eines Gra zu legen. Zu dem Ende befinden sich in den Gewichtssätzen 9 Dezigra in Stücken von 5, 2 und 1 Dezigramm, so daß man dadurch eine liebige Zahl von Dezigramm zwischen 1 und 9 herstellen kann. Ebe findet man 9 Zentigramm und 9 Milligramm in ähnlichen Stücken, so man bis auf Milligramm genau das Gewicht eines Körpers erhalten ka

An vielen Wagen ist nun noch eine Vorrichtung, um selbst die Bru teile der Milligramm bis auf 0,1 zu erhalten. Es ist nämlich jede Hä des Wagebalkens durch vertikale Striche zunächst in 10 gleiche Teile teilt und diese einzelnen Teile nochmal in 10 gleiche Unterabteilung Bei den Gewichtssätzen befinden sich dann Häkchen von Platindraht od Aluminiumdraht, ein Zentigramm schwer, welche als Reiterchen auf de Wagebalken verschoben werden können. Auf dem ersten Hauptteilstri wirkt dann ein solches Reiterchen gerade soviel als 1 Milligramm in d Wagschale, weil es an einem Hebelarm wirkt, der nur 0,1 der Länge d Wagebalkens hat; auf den Teilstrichen 2, 3 ⋯ als 2, 3 ⋯ Milligram und auf den zwischen den Hauptteilstrichen eingeschnittenen Teilstrich als 1,1; 1,2 etc. Milligramm, so daß man durch Verschiebung der Rei zugleich die Milligramme und ihre Bruchteile erhält.

§ 25.

Spezifisches Gewicht und Dichtigkeit. Mittels der Wage sind imstande, eine wichtige Eigenschaft der Körper zu erkennen. Man nämlich sehr oft, daß zwei gleiche Volumina verschiedener Körper das gleiche Gewicht haben, oder was dasselbe ist, daß das Verhältnis Volumina verschiedener Körper zu ihren Gewichten nicht dasselbe ist. einen und denselben Körper ist das Gewicht P seinem Volumen V pro tional, also

$$P = V \cdot s \quad \text{oder} \quad \frac{P}{V} = s.$$

Diese Größe s nennt man das spezifische Gewicht der Körper. Größe s gibt also das Verhältnis des Gewichtes zum Volumen eines Kö

1) Die oben auseinandergesetzte Beobachtung der Gleichgewichtsla den Schwingungen ist der Beobachtung ohne Schwingungen vorzuziehen genauer ist und rascher zum Ziele führt. Gerade dann zeigt sich Vorzug der Wagen, welche bei gleicher Empfindlichkeit die kürzeste haben, da die Schwingungsdauer bei kürzern Balken immer kleiner i längern Balken.

oder das Gewicht der Volumeneinheit. Die Größe s ist konstant für ein und dieselbe Substanz bei gleicher Temperatur, für verschiedene Substanzen verschieden.

Da die Größe s das Gewicht eines bestimmten Volumens eines Körpers ausdrückt, so ist sie eigentlich abhängig von den gewählten Einheiten des Gewichtes und des Volumens und war daher vor Einführung des metrischen Gewichtssystems numerisch verschieden. Um jedoch diese Verschiedenheit zu vermeiden war man übereingekommen, die spezifischen Gewichte überall in derselben Weise auszudrücken, nämlich als Einheit das Gewicht der Volumeneinheit Wasser zu nehmen. Man gelangte darnach zu der Definition des spezifischen Gewichtes, daß es das Verhältnis zwischen dem Gewichte eines Körpers und dem Gewichte des dem Körpervolumen gleichen Volumens Wasser sei.

Da in dem metrischen System das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bei 4° C., des Kubikzentimeters, die Gewichtseinheit, das Gramm ist, so fällt, wenn wir das Gewicht in Gramm, das Volumen des Körpers in Kubikzentimeter angeben, die alte Definition mit der neuen zusammen. Ebenso wie Gramm und Kubikzentimeter können wir selbstverständlich Kilogramm und Liter als Einheiten wählen. Das spezifische Gewicht oder, wie man es auch häufig bezeichnet, die Dichtigkeit eines Körpers ist gleich dem Quotienten aus seinem Gewicht und seinem Volumen; da wir das Gewicht eines Körpers gleich seiner Masse setzen, können wir es auch als den Quotienten seiner Masse und seines Volumens bezeichnen. Da das Volumen der dritten Potenz einer Länge gleich ist, so folgt für das spezifische Gewicht die Dimension

$$s = \frac{P}{V} = z\,[\mu\,\lambda^{-3}].$$

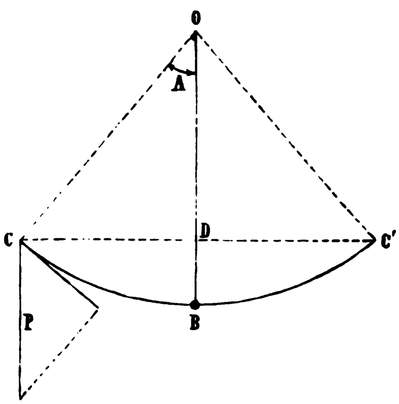
Bei den Gasen und Dämpfen pflegt man das spezifische Gewicht etwas anders zu definieren: man bezeichnet dort als solches das Verhältnis des Gewichtes eines Volumens Gas zu dem unter gleichen Umständen genommenen Volumen Luft. Man bezeichnet dieses Verhältnis als das spezifische Gewicht des Gases oder Dampfes bezogen auf Luft. Das Gewicht eines Volumens Gas ist also nicht gleich dem Produkte aus dem Volumen und dessen spezifischem Gewichte, sondern es muß als Faktor noch das Gewicht der unter gleichen Umständen genommenen Volumeneinheit Luft hinzutreten, oder das spezifische Gewicht eines Gases im strengen Sinne ist das Produkt aus dem spezifischen Gewichte bezogen auf Luft und dem Gewichte der unter gleichen Umständen genommenen Volumeneinheit Luft.

§ 26.

Das Pendel. Die zweite Anwendung, welche wir von den in den frühern Paragraphen abgeleiteten Gesetzen der drehenden Bewegung machen, ist die Untersuchung der Bewegung des Pendels; wir erhalten dadurch zunächst die Theorie des gewöhnlichen Pendels, welches wir zum Messen der Zeit gebrauchen; weiter aber benutzen wir diese Sätze in ausgedehntester Weise zur Messung von Kräften, Trägheitsmomenten und Beschleunigungen.

Das Pendel in seiner einfachsten Form ist ein Stab oder Faden (Fig. 40), welcher um eine Achse O drehbar ist und an seinem unt Ende oder in der Nähe desselben ein Gewicht B trägt. In der Gle gewichtslage muß der Schwerpunkt des Pendels vertikal unter der Drehu achse sich befinden, das Pendel muß also vertikal hängen. Heben dasselbe aus der Gleichgewichtsl nach der einen Seite heraus, e nach OC, so daß die Lage des I dels mit der Gleichgewichtslage Winkel A bildet, und überlassen dann sich selbst, so muß das Pe sich gegen die Gleichgewichtsl hin bewegen. Denn das im Schw punkte des Pendels angreifende wicht P, welches vertikal abwä gerichtet ist, gibt demselben gegen die Gleichgewichtslage geri tetes Drehungsmoment, gleich d Produkte aus der zu OC senkre ten, also der in die augenbli liche Bewegungsrichtung falleı Komponente der Kraft des Schwerpunkte angreifenden Gewichtes P, und dem Abstande des Schw punktes von der Drehungsachse. Die zu OC senkrechte Kompone der Kraft ist $gP \sin A$; nennen wir den Abstand des Schwerpunktes v der Drehungsachse z, so ist das Drehungsmoment, welches das Pen aus seiner augenblicklichen Lage gegen die Gleichgewichtslage hintrei $gP \sin A \cdot z$. Sowie aber das Pendel seine Lage OC verlassen hat u einen kleinern Winkel α mit der Gleichgewichtslage bildet, wird sofort das Drehungsmoment kleiner, es geht über in $gP \sin \alpha \cdot z$, da d Komponente der Kraft nur noch $gP \sin \alpha$ ist. Die bewegende Kraft wi somit stetig kleiner mit $\sin \alpha$, um gleich Null zu werden, wenn α u damit $\sin \alpha = 0$ wird. Das Pendel muß daher auf seiner Bahn OB beschleunigte Bewegung erhalten, deren Beschleunigung mit Annäheı an die Gleichgewichtslage aber immer kleiner wird.

Fig. 40.



In der Lage OB angekommen besitzt das Pendel eine gewisse Wi geschwindigkeit, es kann deshalb in dieser Lage nicht verharren, so muß vermöge der Trägheit nach der andern Seite weitergehen. es aber an dieser mit der Gleichgewichtslage einen Winkel α bildet, wieder ein Drehungsmoment von der Größe $gP \sin \alpha \cdot z$ auf dasselbe aber jetzt in entgegengesetzter Richtung, da α jetzt an der andern der Vertikalen liegt. Dasselbe wirkt somit jetzt gerade so verzögern die Bewegung ein wie vorher beschleunigend. Da die jetzt verzög Drehungsmomente genau denselben Wert haben, wie bei einem gl Winkel α auf der andern Seite die beschleunigenden, so folgt, d Pendel sich nach dieser Seite der Vertikalen, bis durch die fort wirkende Verzögerung die Geschwindigkeit gleich Null geworden is genau denselben Winkel BC' aufsteigend bewegen muß, als der B war, auf welchem die Geschwindigkeit von Null bis zu jenem V

wachsen ist, den das Pendel bei dem Passieren der Gleichgewichtslage besaß. In dieser äußersten Lage angekommen muß das Pendel einen Augenblick in Ruhe sein; das dann aber wirkende Drehungsmoment $gP \sin A \cdot z$ treibt das Pendel zurück, und da das Pendel diesen Rückgang unter genau denselben Umständen beginnt und fortsetzt, so folgt, daß es jetzt genau denselben Bogen $C'BC$ und genau in derselben Weise in entgegengesetztem Sinne durchläuft wie bei der ersten Bewegung von C nach C'. Daraus folgt, daß das Pendel unaufhörlich denselben Bogen CBC' einmal in der einen, dann in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen muß. Das Pendel nimmt somit eine schwingende Bewegung an, es vollführt Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die Größe des Bogens, durch welchen das Pendel schwingt, nennt man seine Schwingungsweite oder Amplitude. Dieselbe müßte nach unserer Betrachtung konstant sein; in Wirklichkeit ist das indes nicht der Fall, da wir bei unserer Ableitung die der Bewegung entgegenstehenden Hindernisse, als Reibung in der Aufhängeachse, Widerstand der Luft, außer Acht gelassen haben. Da die Überwindung derselben in jedem Momente etwas Arbeit erfordert, so wird die dem Pendel durch die erste Hebung erteilte Arbeit allmählich verbraucht, die Amplituden werden kleiner, und das Pendel kommt allmählich zur Ruhe. Diese Abnahme lassen wir zunächst außer Acht und nehmen an, das Pendel bewege sich ohne Widerstand, oder, wie es in unsern Uhren der Fall ist, es erhalte jedesmal in der äußersten Lage einen solchen Antrieb, daß dadurch der zur Überwindung der Widerstände stattgehabte Arbeitsverlust gerade ausgeglichen werde.

Dann erkennt man weiter, daß die Zeit, welche das Pendel zur Vollführung einer Schwingung braucht, seine Schwingungsdauer, immer dieselbe sein muß, da es immer denselben Weg unter denselben Verhältnissen zurücklegt. Gerade das macht das Pendel zu einem vorzüglichen Mittel der Zeitmessung, daß es uns genau gleiche Zeitabschnitte angibt.

§ 27.

Ableitung der Schwingungsdauer des Pendels. Die Untersuchung, von welchen Umständen die Schwingungsdauer des Pendels abhängig ist, könnten wir zum Teil wenigstens experimentell führen, wir wollen indes die Gesetze der Pendelbewegung aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableiten, da sie uns ein ausgezeichnetes Beispiel der Bewegung durch nicht konstante Kräfte bietet.

Zur Ableitung der Pendelgesetze könnten wir von den im § 22 besprochenen Grundgleichungen von Lagrange ausgehen, aber wir kommen rascher zum Ziele, wenn wir die Bewegungsgleichung direkt hinschreiben.

Die das Pendel in jedem Momente bewegende Kraft ist das demselben durch den Zug des Gewichtes P bezw. der in die Bahnrichtung desselben fallenden Komponente erteilte Drehungsmoment. Die zur Bahnrichtung senkrechte Komponente des Zuges ebenso wie die Zentrifugalkraft wird durch Festigkeit des Stabes oder Fadens aufgehoben. Die bewegende Kraft ist somit $gPz \sin \alpha$. Setzen wir den Bogen α als so klein voraus, daß wir den Sinus mit dem Bogen vertauschen können, so wird dieselbe $gPz\alpha$.

Um die dem Pendel in der Lage α erteilte Beschleunigung zu e halten, haben wir die Kraft durch die in der Abstandseinheit von der Ach die Masse des Pendels ersetzende Masse, also durch das Trägheitsmome des Pendels in bezug auf die Drehungsachse zu dividieren. Dasselbe s gleich K. Dann ist die Beschleunigung des Pendels bezw. die Beschle nigung des in der Abstandseinheit von der Drehungsachse befindlich Punktes

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gPz\alpha}{K}.$$

Wir müssen in dieser Gleichung indes für die rechte Seite noch da Vorzeichen richtig bestimmen, da wir sahen, daß die Beschleunigung bal positiv, bald an der andern Seite der Gleichgewichtslage negativ ist. D das Pendel sich zu verschiedenen Zeiten an den entgegengesetzten Seite der Gleichgewichtslage in gleichen Abständen α befindet, so müssen wir, u die absolut gleichen aber an entgegengesetzten Seiten der Ruhelage vor kommenden Lagen zu unterscheiden, dieselben mit entgegengesetztem Vor zeichen versehen. Wir wollen nun die Abstände von der Gleichgewichts lage nach links hin mit dem positiven, diejenigen nach rechts hin mit dem negativen Vorzeichen versehen. Dann müssen wir auch die Beschleunigung nach links hin als positive, die nach rechts hin als negative bezeichnen. Nun ist, solange das Pendel sich links befindet, also α positiv ist, die Beschleunigung nach rechts gerichtet, also negativ, solange α negativ ist, das Pendel sich rechts befindet, nach links; oder die Beschleunigung hat immer die dem augenblicklichen Abstande α entgegengesetzte Richtung. Wir müssen daher in unserer Gleichung der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, um zu erkennen, daß die Beschleunigung immer der Richtung, nach welcher α gerechnet ist, entgegengesetzt ist, oder es ist

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gPz\alpha}{K}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{gPz}{K} = k^2,$$

so wird

$$\frac{dv}{dt} = -k^2\alpha \quad \dots\dots\dots\dots\dots (1$$

Wir erhalten hier den Differentialquotienten der Geschwindigkeit n der Zeit nicht als eine Funktion der Zeit angegeben, sondern als Funktion der Lage des Punktes in seiner Bahn. Wir können demnach nicht die in der Einleitung abgeleiteten Sätze, nach denen wir aus Differentialquotienten nach einer Veränderlichen die Funktion ableiten, mittelbar anwenden. Wir gelangen indes leicht dazu, wenn wir mit H des im § 11 abgeleiteten Satzes, daß die Arbeit der Kraft gleich ist lebendigen Kraft, welche diese Arbeit der Masse erteilt hat, aus Gleichung (1) eine andere ableiten. Wir gehen dabei aus von der äuß sten Lage des Pendels, in welcher es die Ablenkung α_0 und die Gesch digkeit o hat. Fällt es herab, bis die Ablenkung α ist, so sei seine schwindigkeit in diesem Momente gleich v, somit seine lebendige gleich $\frac{1}{2} Kv^2$. Diese lebendige Kraft ist der Masse K dadurch

worden, daß auf jedem Wegeelement $d\alpha$ von α_0 bis α die Kraft $gPz\alpha$ gewirkt hat. Da die Masse K sich in der Abstandseinheit von der Drehungsachse befindet, und wir α als Bogen in Bruchteilen des Kreisumfanges 2π rechnen, so ist $d\alpha$ im Längenmaß der Weg, durch welchen die Kraft $gPz\alpha$ gewirkt hat, somit $gPz\alpha d\alpha$ die auf dem Wegeelement $d\alpha$ geleistete Arbeit. Die Summe aller der Arbeiten von α_0 bis α genommen ist demnach gleich der überhaupt geleisteten Arbeit oder gleich der gewonnenen lebendigen Kraft, oder es ist

$$\tfrac{1}{2} Kv^2 = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} gPz\alpha d\alpha,$$

worin wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil das Zurücklegen des Bogens $d\alpha$, wenn α positiv ist, während die Geschwindigkeit v wächst, einer Verminderung des Bogens α entspricht. Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende bestimmte Integral ergibt sich unmittelbar nach E 1 und VIII, es ist

$$\tfrac{1}{2} Kv^2 = -\tfrac{1}{2} gPz\,(\alpha^2 - \alpha^2_0) = \tfrac{1}{2} gPz\,(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Für die Geschwindigkeit v im Abstande α von der Gleichgewichtslage ergibt sich daraus

$$v^2 = \frac{gPz}{K}\,(\alpha_0^2 - \alpha^2) = k^2\,(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Daß diese Gleichung die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung gemäß unserer vorigen Betrachtung wiedergibt, erkennt man sehr leicht. Die Geschwindigkeit ist gleich Null, wenn $\alpha = \alpha_0$, in der äußersten Lage, von wo aus die Bewegung beginnt; sie wächst mit abnehmendem α und erhält ihren größten Wert, wenn $\alpha = 0$, wenn das Pendel die Gleichgewichtslage passiert. Nach Überschreiten derselben nimmt sie wieder ab, und hat für gleiche Werte α auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage denselben Wert, da α^2 für ein positives oder negatives α denselben Wert hat. Da die Gleichung für v

$$v = \pm k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}$$

wird, so gibt sie gleichzeitig an, daß die Geschwindigkeit bei der einen Schwingung an der einen, bei der andern nach der entgegengesetzten gerichtet ist.

Aus dieser Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung müssen wir nun ableiten, welche Zeit das Pendel braucht, um irgend ein beliebiges Stück seiner Bahn zurückzulegen, woraus sich dann die Zeit ergibt, welche das Pendel zum Durchlaufen seiner ganzen Bahn braucht. Wenn s die von dem Körper in der Zeit t durchlaufene Bahn ist, so ist die Geschwindigkeit zur Zeit t gleich

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad ds = v \cdot dt.$$

Da nun $d\alpha$ die von dem Pendel in der Zeit dt zurückgelegte Strecke ist, so wird

$$d\alpha = vdt = -k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2} \cdot dt.$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreibe
wir die Bewegung von dem positiven Werte α_0 aus verfolgen, da
schwindigkeit, wenn wir die Schwingung von $+\alpha_0$ zu $-\alpha_0$ be
nach der negativen Seite gerichtet, also negativ zu setzen ist. Für
dt, während welcher die Strecke $d\alpha$ durchlaufen wird, ergibt sic

$$dt = -\frac{d\alpha}{k\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Die Bewegung beginnt in dem Augenblicke, in welchem wir
del in seiner äußersten Lage, wo $\alpha = \alpha_0$, loslassen, die Zeit t, v
braucht, um einen solchen Bogen zurückzulegen, daß α_0 in α
ist die Summe der Zeitelemente dt, während deren es die Wege
$d\alpha$ durchlief, welche auf dem Wege von α_0 bis α liegen, also

$$t = \int dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{-d\alpha}{k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

oder auch

$$k \cdot t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\frac{1}{\alpha_0} d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck
E 9 abgeleitete, wie man unmittelbar erkennt, wenn man $\frac{\alpha}{\alpha_0} =$
wonach $dx = \frac{1}{\alpha_0} d\alpha$ wird. Demnach wird

$$kt = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\alpha_0}{\alpha_0}\right).$$

Der Bogen, dessen Kosinus gleich $\frac{\alpha_0}{\alpha_0}$, also gleich 1 ist, is
oder überhaupt irgend ein Vielfaches von 2π. Welchen Wert w
setzen, ist gleichgültig, da wir für $t = 0$ auch in dem ersten Gl
der rechten Seite $\alpha = \alpha_0$ zu setzen haben, wir also dort von d
Werte ausgehen müssen, den wir dem zweiten beilegen. Wir set
halb am einfachsten das Glied gleich Null und erhalten

$$kt = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right).$$

Die Schwingungsdauer des Pendels T erhalten wir hieraus, w
α so bestimmen, daß die zurückgelegte Bahn der ganzen Ampli
spricht; das ist der Fall, wenn $\alpha = -\alpha_0$ wird, demnach

$$kT = \operatorname{arc}(\cos - 1) = \pi,$$

somit

$$T = \pi \frac{1}{k}.$$

Da wir nun gesetzt hatten

$$k^2 = \frac{gPz}{K}; \quad \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{K}{gPz}},$$

so folgt schließlich

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{g P z}}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist somit gleich der Zahl π multipliziert mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Trägheitsmomentes des Pendels und des Drehungsmomentes, welches die wirksamen Kräfte dem Pendel erteilen, wenn α oder vielmehr, da wir α für $\sin \alpha$ gesetzt haben, wenn $\sin \alpha = 1$ ist, also das Pendel in horizontaler Lage ist.

Beachtet man die Dimensionen der unter dem Wurzelzeichen auf der rechten Seite der Gleichung für T stehenden Größen, so erkennt man sofort, daß die Wurzel die Dimension einer Zeit hat; es ist M als Trägheitsmoment gleich $z[\mu \lambda^2]$, der Nenner als Drehungsmoment gleich $z[\mu \lambda^2 \tau^{-2}]$. Der Quotient aus beiden ist daher $z[\tau^2]$.

Um zu erkennen, daß obige Gleichung für t uns die Schwingung des Pendels so darstellt, wie uns die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sie lieferten, schreiben wir

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \cos kt; \quad \alpha = \alpha_0 \cos kt,$$

wofür wir auch, da

$$k = \frac{\pi}{T},$$

setzen können

$$\alpha = \alpha_0 \cos \pi \frac{t}{T}.$$

Ist $t = 0$, so wird der Kosinus gleich 1, somit $\alpha = \alpha_0$; wächst t, so wird der Kosinus immer kleiner, bis er für $t = \frac{1}{2} T$ gleich Null wird, das Pendel hat somit nach der ersten Hälfte der Schwingungsdauer die Gleichgewichtslage erreicht. Wächst t weiter, so wird der Kosinus und damit α negativ, das Pendel bewegt sich auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, bis für $t = T$ die Ablenkung $\alpha = -\alpha_0$ wird. Bei weiterer Zunahme von t nimmt der negative Wert des Kosinus und damit α wieder ab, wird für $t = \frac{3}{2} T$ gleich Null, und wird dann wieder positiv und wächst bis α_0 für $t = 2T$ usf. Kurz, wir sehen, das Pendel geht unaufhörlich hin und her und legt jedesmal in der Zeit T seine Bahn zurück.

Die abgeleitete Gleichung gibt somit in der Tat die Bewegung des Pendels gerade so wieder, wie wir sie durch die Betrachtung des vorigen Paragraphen erkannt hatten.

§ 28.

Mathematisches und physisches Pendel. Der vorhin für die Schwingungsdauer des Pendels erhaltene Ausdruck

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{g P z}}$$

nimmt eine sehr einfache Form an, wenn wir voraussetzen, das Pendel bestehe aus einem gewichtslosen Faden, an dessen unterem Ende sich ein schwerer Punkt befände. Sei die Länge des Fadens gleich l, das

Gewicht des Punktes gleich P, so erhalten wir für das Trägheitsmome des Pendels

$$K = Pl^2,$$

und für das statische Moment

$$gPz = gPl,$$

da, wenn der Faden gewichtslos ist und das Gewicht P ein schwerer Pun ist, die ganze Masse sich im Abstande l von der Drehungsachse befind und ebenso der Schwerpunkt in den Punkt P fällt. Die Schwingungsdau wird dann

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein solches Pendel, welches man in Wirklichkeit strenge nicht he stellen kann, nennt man ein mathematisches Pendel. Für dieses gelang wir zu dem Satze, daß die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus d Pendellänge direkt und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung bei dem freien Falle umgekehrt proportional ist.

Die wirklich herstellbaren Pendel, bei denen also die Masse an dem ganzen Pendel verteilt ist, nennt man physische Pendel. Mit einem jed physischen Pendel hat ein mathematisches bestimmter Länge die gleich Schwingungsdauer; diese Länge bezeichnet man als die Länge des math matischen Pendels. Einen Ausdruck für diese Länge gibt uns unsere Gl chung für die Schwingungsdauer des physischen Pendels unmittelbar;

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{gPz}},$$

so ist die Länge l des isochron schwingenden mathematischen Pendels

$$l = \frac{K}{Pz}.$$

Den in dem so bestimmten Abstande l von der Drehungsachse lie den Punkt des physischen Pendels nennt man den Schwingungspunkt Pendels.

§ 29.

Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze. Die theoretisch geleiteten Gesetze über die Schwingungsdauer des Pendels lassen sich doppelter Weise experimentell prüfen. Zunächst kann man Pendel h stellen, welche einem mathematischen Pendel möglichst nahe kom indem man einen möglichst leichten Faden unten mit einer kleinen möglichst schweren Kugel belastet. Für ein solches Pendel muß dann Schwingungsdauer durch die Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gegeben sein, worin man für l ohne merklichen Fehler den Abstan Mittelpunktes der Kugel von der Drehungsachse einsetzen kann.

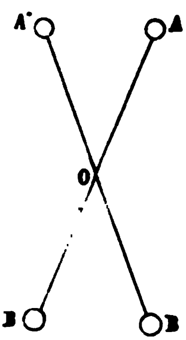
Stellt man ein solches Pendel etwa aus einem ganz feinen w Kupferdraht her, an welchem unten eine Bleikugel befestigt ist, so

ıst leicht zeigen, daß bei kleinen Amplituden die Schwingungs- t merklich von der Amplitude beeinflußt wird. Man versetzt in Schwingungen, so daß α_0, der Anfangsausschlag, nur etwa Wie wir schon bemerkten, werden wegen der verschiedenen e, welche der Bewegung des Pendels entgegenwirken, die Am- r Bewegung immer kleiner, ein solches Pendel macht aber doch, Ruhe kommt, einige hundert Schwingungen. Bestimmt man ıner etwa der ersten hundert, dann der zweiten usw. hundert gen, so findet man die Zeit stets gleich, trotzdem die Größe der bei den weiter folgenden Schwingungen stets kleiner ist als bei gehenden.

bhängigkeit der Schwingungsdauer von der Länge des Pendels n, indem man Fäden von verschiedener Länge anwendet. Nimmt deren Längen sich verhalten wie 1 : 4 : 9 : 16, so findet man, hwingungsdauern sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4.

rollständigere experimentelle Prüfung der Pendelgesetze können lurch Herstellung eines Pendels erreichen, an welchem wir die Momente und die Trägheitsmomente zu ver- ande sind. An den beiden Enden AB (Fig. 41) en und leichten Stabes von Tannenholz be- r zwei schwere Bleikugeln, deren Gewicht l $P + p$ ist. Mittels einer in der Mitte O befestigten Stahlschneide setzen wir den Stab este Unterlage und erhalten so ein Pendel, wingungsdauer wir leicht berechnen können. nde Kraft für dieses Pendel ist nicht der Zug ewichts, sondern nur der des Übergewichts p, n Gewichte P im Abstande $\pm l = OB = OA$ die Gewichte der beiden Stabhälften sich das h: halten. Der Angriffspunkt der Kraft ist i, wenn wir annehmen, daß dort der Schwer- untern Gewichtes sei. Das statische Moment dels ist somit gleich $gp \cdot l$. Bezeichnen wir das Trägheits- s Holzstabes mit m und die Radien der beiden Kugeln mit r ist nach § 19 und 20 das Trägheitsmoment des ganzen Pendels

Fig. 41.



$$M = m + P\left(\tfrac{2}{5} r^2 + l^2\right) + (P + p)\left(\tfrac{2}{5} r_1^2 + l^2\right)$$
$$= m + \tfrac{2}{5}\left(Pr^2 + (P + p) r_1^2\right) + (2P + p) l^2.$$

n wir den Stab recht leicht und geben ihm eine Länge von) $l = 1^{m}$ wird, so können wir ohne merklichen Fehler die n Glieder vernachlässigen, da der Radius der Bleikugeln, selbst bis zu einem Gewichte von 2^{kg} gehen, nur etwa $3{,}5^{cm}$ be- Wert der beiden ersten Glieder erreicht dann noch nicht 0,001

orausgesetzt erhalten wir für die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{(2P + p) l^2}{gpl}} = \pi \sqrt{\frac{(2P + p) l}{gp}}.$$

Wählen wir nun als Kugel bei A eine von 1^{kg} Gewicht und bei B der Reihe nach Kugeln von

$$1{,}6666^{kg}, \quad 1{,}25^{kg}, \quad 1{,}1333^{kg},$$

wodurch also

$$p = \tfrac{2}{3}^{kg}, \quad \tfrac{2}{8}^{kg}, \quad \tfrac{2}{15}^{kg}$$

wird, so werden die Schwingungsdauern des Pendels

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \qquad 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \qquad 4\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

die Schwingungsdauern müssen also untereinander und zu denen des einfachen Pendels von der Länge l im Verhältnis $2:3:4$ stehen.

Man wird bei Versuchen diese Resultate leicht bestätigt finden, um so genauer, je leichter man den Pendelstab gewählt hat.

Wir können noch in anderer Weise die Beschleunigungen und Schwingungsdauern variieren und damit gleichzeitig einen experimentellen Beweis für die Richtigkeit des im § 19 abgeleiteten Satzes über das Trägheitsmoment liefern. Wir nehmen zwei Bleikugeln, jede vom Gewichte P, und durchbohren sie so, daß sie auf dem Stabe verschiebbar und in verschiedenen Abständen von der Drehungsachse festgeklemmt werden können. Im Abstande l unten am Ende des Stabes befestigen wir eine Kugel vom Gewichte p. Klemmen wir dann die Kugeln P einmal so ein, daß ihr Mittelpunkt sich im Abstande $\frac{3}{4}l$ befindet, dann, daß der Abstand der Mittelpunkte wird $\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{4}l$, so lassen wir die bewegende Kraft und die bewegte Masse ganz ungeändert, geben letzterer aber eine andere Verteilung, und infolgedessen muß die Schwingungsdauer jedesmal eine andere sein. Befinden sich die Kugeln im Abstand $\frac{3}{4}l$, so wird das Trägheitsmoment des Pendels

$$M = m + 2P\left(\tfrac{9}{16}l^2 + \tfrac{2}{5}r^2\right) + p\left(l^2 + \tfrac{2}{5}r_1^2\right),$$

wenn r der Radius der Kugeln P und r_1 jener der Kugel p ist. Nach der vorhin gemachten Bemerkung können wir auch hier die nicht mit l^2 multiplizierten Glieder vernachlässigen und erhalten dann

$$M = \left(\tfrac{9}{8}P + p\right)l^2$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(18P + 16p)\,l}{16 \cdot gp}}.$$

Klemmen wir die beiden Kugeln P_1 so, daß ihre Mittelpunkte sich in $\frac{1}{2}$ befinden, so wird in derselben Weise berechnet

$$t = \pi\sqrt{\frac{(8P + 16p)\,l}{16 \cdot gp}},$$

und wenn die Kugeln in $\frac{1}{4}l$ eingeklemmt werden,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(2P + 16p) \cdot l}{16 \cdot pg}}.$$

Nehmen wir nun jede der Kugeln P gleich 1^{kg} und p gleich $\frac{1}{16}^{kg}$, so werden diese Schwingungsdauern

$$t = 4{,}35\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad 1{,}732\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

die man leicht durch den Versuch bestätigt findet. Damit ist dann
perimentell der Nachweis geführt, daß das Produkt einer Masse in
adrat ihres Abstandes von der Drehungsachse ihr Trägheitsmoment
r daß bei der drehenden Bewegung Massen sich ersetzen, welche
gekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungs-

§ 30.

rrektion wegen der Amplitude. Wir haben schon im § 26
hingewiesen, daß unsere Ableitung der Pendelgesetze die Voraus-
machte, daß die Amplitude so klein sei, daß wir die Bogen für
is einsetzen dürfen. Das ist strenge nur für unendlich kleine Bogen
l. In der Tat ist deshalb auch die Schwingungsdauer etwas von
plitude abhängig und etwas größer, als unsere Gleichung sie an-
ie Berechnung der Schwingungsdauer, wenn wir in der Gleichung 1
7 sin α anstatt α beibehalten, ist ziemlich kompliziert, ohne jedoch
zip irgendwie anders geführt zu werden, als wir sie führten. Wir
n uns deshalb hier damit, das Resultat der Rechnung mitzuteilen.
ler Ausschlagswinkel des Pendels, so wird

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{gPs}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_0 + \tfrac{9}{64}\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha_0 + \cdots\right).$$

enn α_0 nur wenige Grade beträgt, so kann man schon das dritte
er Klammer fortlassen. Der Wert der ganzen Korrektion beträgt
nn $\alpha_0 = 10^0$ ist, etwa 0,2 Prozent der Schwingungsdauer, das heißt
del, welches mit dieser Amplitude 1000 Schwingungen vollführt,
mit unendlich kleiner Amplitude 1001,89 Schwingungen machen.
er Korrektion erhält man aus der beobachteten Schwingungsdauer
auf unendlich kleine Amplitude reduzierte T'

$$T' = \pi\sqrt{\frac{K}{gPs}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha_0},$$

che somit die abgeleitete Gleichung für die Schwingungsdauer des
strenge gilt.

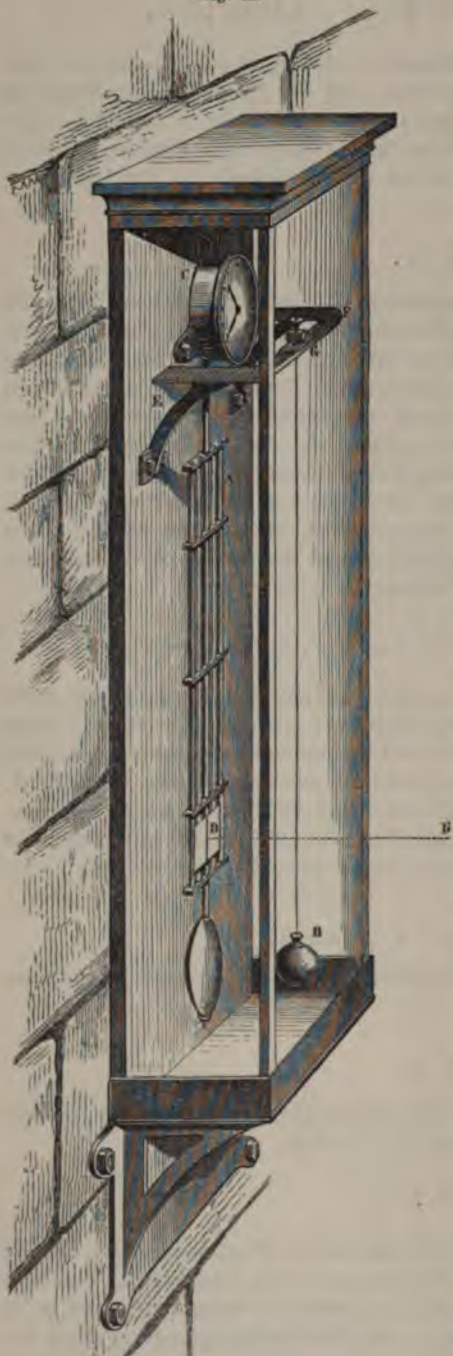
§ 31.

stimmung von g. Eine der wichtigsten Anwendungen unserer
g für die Schwingungsdauer des Pendels,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

die vorhin definierte Länge des physischen Pendels bedeutet, ist die
ung der Größe g, der Beschleunigung beim freien Fall, da diese
uf keinem andern Wege mit einer ähnlichen Genauigkeit bestimmt
kann, als durch Beobachtung der Pendelschwingungen. Man be-
dazu mit möglichster Genauigkeit die Schwingungsdauer eines

Fig. 42.



Pendels, bestimmt die L
mathematischen Pendels
cher Schwingungsdauer
rechnet g. Die einzige S
keit ist die Bestimmung d
des mathematischen m
physischen isochron sc
den Pendels. Man kann
einem doppelten Wege g
entweder gibt man de
eine geometrisch bestim
stalt und sorgt dafür,
Masse des Pendels üb
gleiche Dichtigkeit hat
man das Trägheitsmor
Pendels berechnen kan
Weg schlugen Borda,
und Biot, sowie Be
seinen ersten Bestimmun
g ein; oder man gibt d
del eine solche Form,
an ihm experimentell d
des mit ihm isochron sc
den mathematischen Pe
stimmen kann. Letztere
ist von Bohnenberg
geben und vorzugswe
Kater ausgeführt word

Die Anordnung d
suche, wie sie Borda u
Arago und Biot an
zeigt Fig. 42. Das Pende
steht aus dünnem Platin
welchem unten eine K
Platin befestigt ist. Dr
ist befestigt an einem s
Prisma, das mit seine
scharfen Kante auf e
dem eisernen Träger E
gelegten, in ihrer Mi
Durchlassen des Pendel
bohrten Platte von St
Achat aufsteht. Da da
und die Klemmvorrichtun
den Draht hält, an der
tionen teilnehmen und
zu vernachlässigendes
haben, so würde die Schw
dauer des Pendels auch

Verteilung der Masse des Prismas abhängen. Dadurch würde es schwierig sein, durch Rechnung das Pendel auf ein mathematisches zu reduzieren, da man der Aufhängevorrichtung nicht eine so einfache geometrische Gestalt geben kann, wie sie zur Berechnung des Trägheitsmomentes erforderlich ist. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit richtete **Borda** die Aufhängevorrichtung so ein, daß sie auf die Schwingungsdauer des Pendels gar keinen Einfluß hatte. Wegen der unter dem Prisma angebrachten, zur Aufnahme des Platindrahtes dienenden Klemmvorrichtung liegt der Schwerpunkt der ganzen Aufhängevorrichtung unterhalb der Schneide. Stellt man daher das Prisma ohne angehängtes Pendel auf die Unterlage, so schwingt es selbst als Pendel hin und her. Um nun die Schwingungsdauer dieses kleinen Pendels verlängern zu können, ist, wie die Figur zeigt, in der Mitte des Prismas, gewissermaßen als eine nach oben gerichtete Verlängerung des Pendelfadens, eine Schraubenspindel aufgesetzt, auf welcher ein Laufgewicht auf und nieder bewegt werden kann. Durch eine Hebung des Laufgewichtes wird der Schwerpunkt der Aufhängevorrichtung der Schneide näher gebracht, und damit wird die Schwingungsdauer derselben eine größere. Denn nennen wir das Gewicht der Aufhängevorrichtung p, den Abstand ihres Schwerpunktes von der Schneide a, und das Trägheitsmoment in bezug auf die Schneide K_1, so ist die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{K_1}{gap}};$$

es wächst somit t, wenn a kleiner wird. Das Laufgewicht wurde nun so gestellt, daß die Schwingungsdauer der Aufhängevorrichtung für sich genau gleich war der Schwingungsdauer des ganzen zusammengesetzten Pendels. Dann ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels dieselbe, als wenn es nur aus dem Aufhängedraht und der unten angehängten Kugel bestände. Sei, um das nachzuweisen, K das Trägheitsmoment des Fadens und der unten angehängten Kugel, A der Abstand des Schwerpunktes dieser beiden Teile von der Schneide, und P das Gewicht von Faden und Kugel. Ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels ebenfalls gleich t, so ist

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K_1 + K}{g\,ap + AP}},$$

da das Trägheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers gleich ist der Summe der Trägheitsmomente der Bestandteile, und das statische Moment mehrerer Kräfte gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{K_1}{gap} = \frac{K_1 + K}{g\,ap + AP},$$

und daraus unmittelbar

$$\frac{K_1 + K}{g(ap + AP)} = \frac{K}{g\,AP}$$

oder auch

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{g\,AP}}.$$

Bei den eigentlichen Versuchen zur Bestimmung von g war die Kugel von Platin; um aber zu untersuchen, ob der Wert von g für alle Substanzen

genau derselbe sei, wurde die Kugel zuweilen gewechselt. Deshalb wa die Kugel nicht direkt, sondern durch ein ganz kleines Ansatzstück B welches unten konkav als Teil einer Kugelfläche, deren Radius gleich de der anzuhängenden Kugeln war, befestigt. Die Kugel wird mittels eine ganz dünnen Wachsschicht in diese Vertiefung eingeklebt. Dadurch is gleichzeitig ermöglicht, die Kugel an verschiedenen Stellen ihrer Obe fläche anzukleben, um so zu untersuchen, ob der Mittelpunkt der Kug auch der Schwerpunkt derselben ist.

Das Pendel wurde an einem festen schmiedeeisernen Träger EG (Fig. 42) aufgehängt, welcher in einer massiven steinernen, von belebte Straßen entfernten Mauer derartig befestigt und durch Streben E unterstützt war, daß er weder durch äußere Stöße, noch auch durch die Schwingungen des Pendels die geringste Bewegung annahm. Auf diese Träger war bei G die gut polierte Platte von Stahl oder Achat fest aufgesetzt, auf welcher die Schneide der Aufhängevorrichtung aufstand.

Das Pendel hing vor einer gut regulierten astronomischen Uhr herab, so daß man gleichzeitig die Bewegung des zu den Beobachtungen dienenden und des Pendels der Uhr übersehen konnte. Schließlich war Uhr und Pendel von einem Glasgehäuse umgeben, welches etwaige Luftströmungen von dem Pendel abhielt.

Zur Bestimmung von g bedarf es zunächst der Kenntnis der Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem physischen isochron schwingt, also des Wertes

$$l = \frac{K}{AP}.$$

Dazu ist es notwendig, die Länge f des Fadens, das Gewicht des Fadens und den Radius, sowie das Gewicht der Kugel, zu dem wir ohne merklichen Fehler das Gewicht des Ansatzstückes B hinzuziehen können, zu messen. Die Länge des Fadens, deren Bestimmung vor Konstruktion des Kathetometers mit einiger Schwierigkeit verknüpft war, ist mit Hilfe dieses Meßapparates leicht zu erhalten. Borda brachte eine genau horizontale Platte durch eine Mikrometerschraube mit dem tiefsten Punkte der Kugel zur Berührung und maß dann mit Hilfe eines Maßstabes den Abstand der Platte von der Schneide. Jetzt visiert man mit einem Kathetometer einmal die Schneide und dann den tiefsten Punkt der Kugel, so daß der horizontale Faden des Fadenkreuzes gerade als Tangente der Kugel erscheint. Die Differenz der Stellungen des Kathetometerfernrohrs gibt die Länge des Fadens plus dem Durchmesser der Kugel. Ist das Pendel länger als die Skala des Kathetometers, so visiert man zunächst die Schneide und irgend einen zwischen dem obern und untern Ende des Pendels liegenden Punkt, setzt dann das Kathetometer tiefer und visiert von neuem den eben visierten Punkt und darauf den tiefsten Punkt der Kugel.

Um den Durchmesser der Kugel zu erhalten, kann man sich eines Sphärometers bedienen, oder genauer man bestimmt den Gewichtsverlust der Kugel beim Eintauchen derselben in Wasser von bestimmter Temperatur; in welcher Weise, wird später hervortreten, wenn wir die Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der festen Körper besprechen. Die Differenz zwischen den Ablesungen des Kathetometers und dem Durchmesser $2r$ der Kugel gibt die Länge f des Fadens.

Da der Faden überall dieselbe Dichtigkeit hat, so liegt sein Schwerpunkt in dem Abstande $\frac{1}{2} f$ von der Aufhängeachse; der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte. Ist daher p_1 das Gewicht des Fadens, P_1 das Gewicht der Kugel, so ist

$$A P = p_1 \frac{f}{2} + P_1 (f + r).$$

Das Trägheitsmoment des Fadens erhalten wir in folgender Weise. Sei q das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, so ist das Gewicht eines unendlich kleinen Stückchens von der Länge dx gleich $q \cdot dx$. Befindet sich dieses Stückchen im Abstande x von der Schneide, so ist das Trägheitsmoment dieses Stückchens

$$q x^2 dx$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Fadens

$$K_2 = q \int_0^f x^2 dx = \frac{1}{3} q f^3.$$

Nun ist $q f = p_1$ gleich dem Gewichte des Fadens, somit

$$K_2 = \frac{1}{3} p_1 f^2.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende, der Schneide parallele Achse ist

$$\frac{2}{5} P_1 r^2.$$

Da diese Achse sich im Abstande $f + r$ von der Drehungsachse des Pendels befindet, so wird das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf diese Achse

$$K_3 = P_1 \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (f + r)^2 \right\},$$

somit

$$K = K_2 + K_3 = \frac{1}{3} p_1 f^2 + P_1 \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (f + r)^2 \right\}$$

und schließlich die Länge l des mathematischen Pendels

$$l = \frac{\frac{1}{3} p_1 f^2 + P_1 \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (f + r)^2 \right\}}{p_1 \frac{f}{2} + P_1 (f + r)}.$$

Da die Länge f des Fadens und der Radius der Kugel von der Temperatur abhängig sind, so ändert sich auch die Länge l des Pendels mit der Temperatur. Ist daher die Temperatur bei den Beobachtungen nicht immer dieselbe und zwar jene, bei welcher die Längenmessungen durchgeführt sind, so muß man eine Korrektion anbringen, um die für jeden Versuch richtige Länge des Pendels zu erhalten. Ist Faden und Kugel von demselben Metall und t die Temperatur, bei welcher die Längenmessungen vorgenommen sind, t_1 die Temperatur, bei welcher die Schwingungen beobachtet werden, so ist die zur Bestimmung von g in Rechnung zu ziehende Länge l'

$$l' = l (1 + \beta (t_1 - t)),$$

wenn β den Ausdehnungskoeffizienten des Metalls bedeutet. Die Werte

von β für die verschiedenen Metalle werden wir im zweiten Bande kenn lernen[1]).

Um die Schwingungsdauer des Pendels mit größter Genauigkeit bestimmen, vergleicht man die Schwingungen des Beobachtungspendels denen des Uhrpendels. Zu dem Zwecke beobachtet man die Schwingung des durch einen kleinen Stoß in Bewegung gesetzten Pendels mit Hi eines dem Apparate gegenüber in der Richtung DD' in einer Entfernu von mehreren Metern aufgestellten Fernrohrs.

Man sieht dann, wenn man durch das Fernrohr auf den Apparat h blickt, das Pendel der Uhr, auf welches man vorher einen feinen vertika Strich gezogen hat, und das davor aufgehängte Pendel gesondert durch Gesichtsfeld gehen. Da nun das eine der Pendel immer etwas rasc schwingt als das andere, nehmen wir an, das raschere sei das Pendel G so werden nach einigen Schwingungen die beiden Pendel zugleich in d Gesichtsfeld treten und sich decken. Diesen Zeitpunkt einer Koinzide der beiden Pendel wählt man zum Ausgangspunkte der Beobachtungen. U ihn genau zu erhalten, beginnt man die Beobachtungen schon etwas frühe man sieht dann, daß bei den aufeinanderfolgenden Durchgängen die Pend sich immer näher rücken, bis sie endlich bei einem Durchgange zur K inzidenz kommen. Bei den weiter folgenden Schwingungen eilt dann d Pendel GB vor, so daß nach einiger Zeit das Pendel GB schon ei rückgängige Bewegung hat, während das Uhrpendel noch eine vorwärt gerichtete Bewegung besitzt. Dabei kommt wieder ein Zeitpunkt, i welchem die beiden Pendel sich in der Mitte des Gesichtsfeldes deck aber jetzt mit entgegengesetzt gerichteter Bewegung. Dann hat d Pendel GB eine Oszillation mehr gemacht als das Pendel der Uhr v dem als Ausgangspunkt der Bewegung gerechneten Zeitpunkte der vorig Koinzidenz an. Weiterhin eilt das Pendel GB immer mehr vor, es g bald wieder in gleicher Richtung mit dem Uhrpendel durch das Gesicht feld und kommt dann wieder mit dem Uhrpendel zur Koinzidenz wie der ersten Beobachtung, Bei dieser zweiten Koinzidenz hat das Pend zwei Schwingungen mehr gemacht, und so bei jeder folgenden Koinzide jedesmal eine Schwingung mehr. Setzen wir nun voraus, daß das U pendel genau Sekunden schwingt, und daß man, während man m Koin denzen beobachtet hat, an dem Sekundenzeiger der Uhr n Sekunden abli so ist die Schwingungsdauer t gleich

$$t = \frac{n}{n+m}.$$

Diese Art, die Schwingungen des Pendels zu beobachten, die Met der Koinzidenzen, bietet eine Reihe von Vorteilen. Zunächst leitet die Dauer einer Schwingung aus der Beobachtung einer sehr großen $(n + m)$ Schwingungen ab; der bei der Zeitmessung begangene Fehler deshalb durch die Division mit dieser großen Zahl beträchtlich verkl Ferner kann man bei der Beobachtung mit dem Fernrohr den Zeit

1) Genaueres über die Bestimmung der Pendellänge und insbesonder den Einfluß der als Drehungsachse dienenden Schneide auf die Länge des sehe man: *F. W. Bessel,* Untersuchungen über die Länge des einfachen Sel pendels. Aus den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1826.

der einzelnen Koinzidenz scharf beobachten. Schließlich bedarf es nur einer sehr scharfen Beobachtung der ersten und letzten Koinzidenz; ja man kann sogar, nachdem man die zweite Koinzidenz beobachtet und so jedenfalls mit großer Annäherung die zwischen zwei Koinzidenzen liegende Anzahl z von Sekunden erhalten hat, die Beobachtungen bis kurz vor der letzten Koinzidenz unterbrechen, indem dann der Koeffizient $\frac{n}{z} = m$ uns die Anzahl der Koinzidenzen liefert.

Zur Berechnung von g müssen die Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bogen reduziert werden. Sind die Bogen überhaupt nur sehr klein, so genügt es, das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude zu nehmen. Man mißt zu dem Ende die Amplituden an einem hinter dem Pendel angebrachten Gradbogen, den man gleichzeitig mit dem Pendel im Fernrohr sehen kann. Ist die erste Amplitude α_1, die letzte α_n, so setzt man in der Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha\right)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}.$$

Will man bei der Rechnung strenge verfahren, so hat man zu beachten, daß die Dauer der einzelnen Schwingungen untereinander nicht ganz gleich ist, und daß der gefundene Mittelwert t nicht gerade die Schwingungsdauer des Pendels bei der so bestimmten Amplitude α ist. Es würde das nur der Fall sein, wenn die Schwingungsdauer sich in einfach linearer Weise mit dem Bogen änderte, und wenn weiter die aufeinanderfolgenden Bogen immer um dieselbe Größe kleiner würden. Beides ist nicht der Fall; daß ersteres nicht der Fall ist, zeigt unsere Gleichung für die Schwingungsdauer, und daß letzteres nicht der Fall ist, ergibt die Beobachtung. Dieselbe zeigt nämlich, daß nicht die Differenzen der aufeinanderfolgenden Schwingungsbogen konstant sind, sondern daß dieselben sehr nahe in einem konstanten Verhältnisse stehen, oder daß die Schwingungsbogen sehr nahe eine geometrische Reihe bilden, um so näher, je kleiner überhaupt die Schwingungen sind. Sind also $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_h$ die einzelnen Bogen, so ist

$$\alpha_2 = c \cdot \alpha_1; \quad \alpha_3 = c \cdot \alpha_2 = c^2 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_h = c^{h-1} \cdot \alpha_1,$$

wenn wir mit c einen echten Bruch bezeichnen.

Da wir bei den hier vorausgesetzten kleinen Bögen die Sinus noch den Bogen proportional setzen können, so dürfen wir auch schreiben

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha_2 = c \cdot \sin \tfrac{1}{2} \alpha_1; \quad \sin \tfrac{1}{2} \alpha_3 = c^2 \cdot \sin \tfrac{1}{2} \alpha_1 \cdots \sin \tfrac{1}{2} \alpha_h = c^{h-1} \cdot \sin \tfrac{1}{2} \alpha_1,$$

und zur genaueren Berechnung von g erhalten wir dann folgende Gleichungen, wenn wir mit $t_1, t_2 \cdots t_h$ die Dauer der ersten, zweiten usw. bis zur letzten Schwingung, für welche wir $h = m + n$ setzen, bezeichnen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1\right)$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} c^2 \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$t_h = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \cdot c^{2h-2} \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1\right).$$

Die Summe aller dieser Schwingungsdauern ist gleich der Dauer n der ganzen Beobachtung. Bilden wir die Summe aller dieser Gleichungen, so erhalten wir deshalb auf der linken Seite n, und die Gleichung wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{h + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 (1 + c^2 + c^4 + \cdots c^{2h-2})\right\}.$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist bekanntlich

$$1 + c^2 + c^4 + \cdots c^{2h-2} = \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1},$$

somit wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{h + \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1\right\},$$

worin c nach dem eben angeführten Gesetze aus zwei aufeinanderfolgenden Amplituden, oder aus der ersten und letzten Amplitude gegeben ist durch

$$c^{h-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_h}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1}.$$

Bei einer Bestimmung von g darf man weiter den bisher von uns außer acht gelassenen Einfluß der Luft, in welcher das Pendel schwingt, nicht vernachlässigen. Dieser Einfluß der Luft ist ein doppelter. Zunächst wird das Gewicht des Pendels verkleinert, somit das statische Moment, also die bewegende Kraft, verkleinert. Diese Verkleinerung des Gewichtes ist, wie wir später nachweisen werden, gleich dem Gewichte der von dem Pendel verdrängten Luft, wofür wir auch ohne merklichen Fehler das Gewicht der von der Kugel verdrängten Luft einsetzen dürfen. Nennen wir dieses Gewicht L, so haben wir das von dem Gewichte P_1 der Kugel abzuziehen, und der Nenner unseres Ausdruckes für l, den wir auf Seite 147 entwickelten, geht dadurch über in

$$p_1 \frac{f}{2} + (P_1 - L)(f + r).$$

Dann aber zweitens, und darauf hat Bessel[1]) zuerst aufmerksam gemacht, wird die Bewegung des Pendels durch den Widerstand der Luft verzögert; das Pendel muß, indem es in der Luft von einer Stelle zur andern geht, die Luft verdrängen, welche den Raum einnimmt, in welchen das Pendel eintritt; dazu muß eine gewisse Arbeit verwendet werden, welche in jedem Momente von der Beschleunigung des Pendels abzuziehen ist; außerdem tritt durch die Reibung in der Luft eine Verminderung der Geschwindigkeit ein, wie wir bei der Untersuchung der Luftreibung nachweisen werden. Diese beiden Umstände kann man dadurch in Rechnung ziehen, daß man annimmt, mit dem Pendel bewege sich gleichzeitig nahezu die den Raum des Pendels ausfüllende Luftmenge. Wir müssen demnach zu dem Trägheitsmomente des Pendels eine dem Trägheitsmomente dieser Luftmenge nahezu gleiche Größe hinzuaddieren. Bezeichnet demnach K' das Trägheitsmoment, für das wir ohne merklichen Fehler dasjenige der von

1) *Bessel,* Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. d. Berl. Ak. 1826, p. 32 ff.

Platinkugel verdrängten Luftkugel setzen dürfen, und ist k eine Zahl kleiner wie 1, so wird der Zähler unseres Ausdruckes für l

$$K + kK',$$

oder die **Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raume schwingend, dieselbe Schwingungsdauer hat, wird**

$$l = \frac{K + kK'}{p_1 \frac{f}{2} + (P_1 - L)(f + r)} \, .$$

Die Konstante k hängt von der Länge und Gestalt des Pendels ab; Bessel bestimmte dieselbe, indem er die Schwingungsdauer zweier Pendel verglich, deren einziger Unterschied darin bestand, daß bei dem einen die Kugel aus Messing, bei dem andern aus Elfenbein hergestellt war. Der Durchmesser der Kugeln war bei beiden gleich. Der Wert des Gliedes kK' ist dann in beiden Fällen derselbe, während K für das Pendel mit der Messingkugel einen erheblich größern Wert hat als für die Elfenbeinkugel. Eine Vergleichung der Schwingungsdauern der Pendel gestattet demnach, dieses Glied zu eliminieren oder auch den Wert von k zu berechnen und so die Länge l des Pendels zu berechnen, welches im luftleeren Raume die gleiche Schwingungsdauer hat[1]). Mit dem so berechneten l erhalten wir dann den Wert von g aus der Gleichung

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2} \, .$$

Der so berechnete Wert für g gilt nur für den Ort, an dem man die Messungen durchgeführt hat. Im nächsten Kapitel wird sich ergeben, daß der Wert von g mit der Erhebung von der Erdoberfläche resp. dem Meeresniveau kleiner wird; wir werden dort auch zeigen, wie wir den beobachteten Wert auf das Meeresniveau reduzieren; wir werden weiter sehen, daß der Wert von g von der geographischen Breite abhängig ist.

Borda erhielt auf diese Weise für g in Paris unter 48° 50′ 14″ n. Br. reduziert auf die Meereshöhe

$$g = 980{,}882^{\text{cm}}.$$

Biot fand unter denselben Verhältnissen

$$g = 980{,}896^{\text{cm}},$$

zwei Werte, die sich nur um $0{,}14^{\text{mm}}$ unterscheiden. Bessel erhielt für Königsberg unter 55° 42′ n. B. und auf das Niveau der Ostsee reduziert

$$g = 981{,}443^{\text{cm}},$$

für Berlin unter 52° 30′ 16″ n. Br.

$$g = 981{,}278^{\text{cm}}.$$

Borda sowohl als Bessel haben weiter gezeigt[2]), daß der Wert von g stets derselbe ist, aus welcher Substanz man auch die Kugel des Pendels wählt; daraus folgt mit aller Strenge, daß die Schwere auf alle Körper gleichmäßig wirkt, daß alle Körper beim freien Fall dieselbe Beschleunigung erhalten.

1) **Man sehe** *Bessel* a. a. O. und *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. **142**. 1871.
2) *Bessel*, Über die Kraft der Schwere. Abh. der Berl. Akad. von 1830.

§ 32.

Bestimmung von g mittels des Reversionspendels. Die im vori Paragraphen besprochene Methode zur Bestimmung von g leidet an ei Unsicherheit, ob nämlich, wie es bei der Berechnung des Trägheitsmomen vorausgesetzt werden muß, die Kugel am untern Ende des Pendels a überall dieselbe Dichtigkeit besitzt. Von dieser Unsicherheit ist die zw der vorhin erwähnten Methoden frei, welche die Länge des mit dem ph schen isochronen Pendels auf experimentellem Wege bestimmt. Die Meth wurde im Anfange des 19. Jahrhunderts von dem Astronomen Bohn berger zu Tübingen vorgeschlagen und später besonders von dem e lischen Naturforscher Kater zur Messung der Länge des Sekundenpend benutzt. Das Verfahren beruht auf einer besonderen Eigenschaft Schwingungspunktes des physischen Pendels. Führt man nämlich du den Schwingungspunkt eines physischen Pendels eine der Aufhängead des Pendels parallele Achse und hängt an dieser als Drehungsachse Pendel auf, so ist die Schwingungsdauer des Pendels bei dieser Aufhängu genau gleich derjenigen bei der frühern Aufhängung. Da der Abst des Schwingungspunktes von der Drehungsachse gleich ist der Länge mathematischen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hat wie physische Pendel, so gibt uns der Abstand der beiden Schneiden Länge des mathematischen Pendels, mit der wir den Wert von g zu rechnen haben.

Wir können diese Eigenschaft des Schwingungspunktes leicht na weisen mit Hilfe des im § 20 abgeleiteten Satzes, daß wenn das Tr heitsmoment eines Körpers in bezug auf eine durch den Schwerpunkt führte Achse gleich ist Pa^2, daß es dann in bezug auf eine mit die parallele und im Abstand z von ihr befindliche gleich ist $P(a^2 + z^2)$.

Ist nämlich P die Masse unseres Pendels, und z bei der ersten A hängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse, so die Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer

$$l = \frac{P(z^2 + a^2)}{P \cdot z} = z + \frac{a^2}{z}.$$

Sei bei der zweiten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von Drehungsachse gleich z', so ist der Abstand der beiden Schneiden gl $z + z'$, und die Länge des mathematischen Pendels

$$l' = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Ist nun die Schwingungsdauer in beiden Fällen dieselbe, so folgt auch

$$l = l'$$

oder

$$z + \frac{a^2}{z} = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Diese Gleichung besteht erstens, wenn $z = z'$ ist, wenn also der Sch punkt des Pendels in der Mitte zwischen den beiden Schneiden Ist das aber der Fall, so können wir aus der Gleichheit der Schwi dauern nur auf die Gleichheit der beiden Werte von l und l' sc

ß der Abstand der beiden Schneiden $z + z'$ gleich l zu sein braucht.
r z von z' verschieden, so ergibt sich durch Auflösung der letzten
ng nach a^2

$$a^2 = zz'$$

Fig. 43.

$$l = z + z'.$$

aber der Schwerpunkt nicht in der Mitte zwischen beiden
en, so folgt aus der Gleichheit der Schwingungsdauern,
e zweite Schneide durch den Schwingungspunkt geht,
laß der Abstand der beiden Schneiden gleich ist der
des mathematischen Pendels mit gleicher Dauer der
gungen.

ıs auf diesen Satz gegründete Katersche Pendel (Fig. 43)
aus einem Messingstabe, der an seinen beiden Enden mit
versehen ist, um bei der Beobachtung der Schwingungen
dem vorigen Paragraphen besprochene Methode der Ko-
ıen anwenden zu können. Die beiden Schneiden S und S^1
n für allemal an dem Pendel unveränderlich, und zwar
stigt, daß das fertige Pendel ungefähr jede Sekunde eine
gung vollführt. Unterhalb der einen Schneide S^1 ist eine
nse angebracht, welche den Schwerpunkt des Pendels, das
ıgen in bezug auf die beiden Schneiden symmetrisch ein-
't ist, sicher unterhalb der Mitte von SS^1 herab, also
ıu S^1 legt. Zwischen den beiden Schneiden ist auf dem
'abe eine Masse m mit Reibung verschiebbar, und außer-
findet sich an einer andern Stelle eine zweite Masse m_1,
durch eine in dem Ringe a befestigte Mikrometerschraube
·ne Verschiebung auf und ab erhalten kann.

an hängt das Pendel zunächst an die eine der Schneiden,
, und beobachtet in der vorher beschriebenen Weise seine
gungsdauer. Darauf hängt man das Pendel um und be-
durch eine Verschiebung der Massen m und m_1, daß bei
Aufhängungen die Schwingungsdauer dieselbe ist. Hat
s erreicht, so hat man nur mit dem Kathetometer den
d der Schneiden zu messen und die so gefundene Länge
Gleichung zur Berechnung von g für die Länge l des Pen-
zusetzen, also in die Gleichung

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{h + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1\frac{c^{2k}-1}{c^2-1}\right\}.$$

ie Bedeutung der Zeichen dieselbe ist wie im vorigen Para-

ist selbstverständlich, daß man bei einem solchen Pendel auch
luktion auf den luftleeren Raum anbringen muß, was bei der ur-
ichen Form des Reversionspendels einige Schwierigkeit hat. Bei
on Bessel angegebenen Form des Reversionspendels fällt indes der

Einfluß der Luft ganz aus dem Resultate fort[1]). Es ist das der Fall, wenn man dem Pendel in bezug auf beide Schneiden eine genau symmetrische Gestalt gibt. Man würde das in Fig. 43 mit hinreichender Annäherung erreichen, wenn man über der Schneide S eine in der äußern Form der untern ganz gleiche Linse anbrächte, die indes hohl und überdies möglichst leicht gearbeitet wäre. Durch diese symmetrische Form wird nämlich erreicht, daß der Schwerpunkt der verdrängten Luftmenge genau in die Mitte der beiden Schneiden fällt, und daß das Trägheitsmoment der verdrängten Luft in bezug auf beide Schneiden genau denselben Wert hat. Nennen wir L die Masse oder das Gewicht der verdrängten Luft, z_1 den Abstand ihres Schwerpunktes von jeder der beiden Schneiden, und K_1 das Trägheitsmoment der verdrängten Luft, so wird nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen die Schwingungsdauer um die Schneide S

$$t = \pi \sqrt{\frac{P(z^2 + a^2) + kK_1}{g(Pz - Lz_1)}},$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem gegebenen die gleiche Schwingungsdauer hat, ist

$$l = \frac{P(z^2 + a^2) + kK_1}{Pz - Lz_1}.$$

Lassen wir das Pendel um die andere Schneide schwingen, so wird

$$l = \frac{P(z'^2 + a^2) + kK_1}{Pz' - Lz_1}.$$

Multiplizieren wir beide Ausdrücke mit den Nennern und subtrahieren, so wird

$$Pl(z - z') = P(z^2 - z'^2)$$

$$l = z + z'.$$

In dem Falle gibt uns also der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raume dieselbe Schwingungsdauer hat, wie das Reversionspendel.

Eine volle Übereinstimmung der Schwingungsdauern ist nur schwierig zu erreichen; wenn man indes die Lage des Schwerpunktes des Pendels bestimmt und die Schwingungsdauern so nahe gleich macht, daß man annehmen darf, der Schwerpunkt der verdrängten Luft läge auch jetzt in der Mitte zwischen beiden Schneiden, und das Trägheitsmoment der verdrängten Luft habe für beide Aufhängungen denselben Wert, so läßt sich aus der Beobachtung der beiden Schwingungsdauern auch jetzt g ableiten, oder die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels bestimmen, dessen Länge gleich ist dem Abstande der beiden Schneiden.

Sei die Schwingungsdauer um die Schneide S gleich t_1, um die Schneide S^1 gleich t_2, so ist

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{P(z^2 + a^2) + kK_1}{g(Pz - Lz_1)}}$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{P(z'^2 + a^2) + kK_1}{g(Pz' - Lz_1)}}.$$

1) *Bessel,* Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. der Berl. Ak. 1826. p. 97.

Wir erhalten dann zunächst

$$g\frac{t_1^2}{\pi^2}(Pz - Lz_1) = Pz^2 + Pa^2 + kK_1$$

$$g\frac{t_2^2}{\pi^2}(Pz' - Lz_1) = Pz'^2 + Pa^2 + kK_1$$

und daraus

$$g = \pi^2 \frac{z^2 - z'^2}{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{L}{P} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels von der Länge $z + z'$

$$t = \sqrt{\frac{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{L}{P} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}{z - z'}}.$$

Wie man sieht, muß man in dem Falle nur das Gewicht der verdrängten Luft bestimmen. Da L gegen P indes schon sehr klein ist, darf man, wenn t_1 und t_2 nahe gleich sind, das davon abhängige Korrektionsglied außer acht lassen.

Bei den letzteren Gleichungen ist zu beachten, daß für t_1 und t_2 die auf unendlich kleine Schwingungen reduzierten Schwingungsdauern zu nehmen sind.

Mit einem solchen Pendel erhielt Kater für die Länge eines Pendels, welches in einer Sekunde seine Schwingung vollführt, unter der Breite von Paris und im Niveau des Meeres

$$l = 99{,}38606^{\mathrm{cm}}.$$

Daraus ergibt sich der Wert von g nach der Gleichung

$$1 = \pi \sqrt{\frac{99{,}38606}{g}}$$

$$g = \pi^2 \cdot 99{,}38606 = 980{,}904^{\mathrm{cm}},$$

eine Zahl, welche mit der von Biot gefundenen fast genau übereinstimmt.

§. 33.

Anwendung des Pendels bei Uhren. Da die Schwingungen eines Pendels von gegebener Länge eine ganz bestimmte Dauer haben, so kann man sich derselben zu Zeitmessungen bedienen.

Deshalb findet das Pendel seine ausgedehnteste Anwendung bei den Uhren. Die Einrichtung der Uhren ist im wesentlichen folgende. Um eine Walze Q (Fig. 44) ist ein Faden geschlungen, an dessen Ende sich ein Gewicht P befindet, welches beim Herabsinken bewirkt, daß sich die Walze dreht. Auf die Walze ist ein gezähntes Rad H mit schräg geschnittenen Zähnen aufgesetzt. An einer mit der Achse der Walze parallelen Umdrehungsachse A ist ein Pendel ACB aufgehängt, welches durch seine Schwingungen einem Stift CD und einem mit dem Stift verbundenen Doppelhaken GE eine hin- und hergehende Bewegung erteilt. Die um-

gebogenen Enden des Doppelhakens greifen in die Zähne des Rades *H*. Bewegt sich das Pendel und hebt sich der Haken bei *E*, so sinkt das Gewicht, und die Walze dreht sich; während dessen senkt sich jedoch die andere Seite des Doppelhakens, greift in die Zähne des Rades ein und hemmt die Drehung der Walze. Bei der folgenden Schwingung hebt sich diese Seite, die Walze dreht sich wieder, bis das Ende *E* neuerdings in das Rad eingreift, aber nicht in denselben, sondern in den folgenden Zahn des Rades. Für je zwei Oszillationen des Pendels dreht sich also die Walze um einen Zahn weiter. Die Walze dreht sich somit während gleicher Zeiten, die durch die Schwingungen des Pendels gegeben sind, um gleiche Winkel; ist an ihrer Achse ein Zeiger befestigt, der sich vor einem Zifferblatte dreht, so schreitet auch der Zeiger in gleichen Zeiten um gleiche Bogen fort. Hat das Rad z. B. 30 Zähne und vollführt das Pendel in der Sekunde eine Schwingung, so wird der Zeiger sich in einer Minute um das ganze Zifferblatt bewegen, und ist der Umkreis desselben in 60 Teile geteilt, so entspricht jeder Teilstrich einer Sekunde. Wie man mittels passend angebrachter Räderwerke die Bewegung der Zeiger ändern, Sekunden- und Minutenzeiger anbringen kann, ist leicht ersichtlich. Nur ist zu erwähnen, daß die Stellung der Zähne und Haken derartig ist, daß der Haken jedesmal, wenn er gehoben wird, zugleich einen Anstoß erhält, wodurch die Bewegung des Pendels, welche sonst durch die Reibung aufhören würde, erhalten wird.

Fig. 44.

Um die Bewegung der Uhr zu regulieren, ist die Linse *B* an der Pendelstange verschiebbar angebracht; ein Heraufschieben beschleunigt, ein Herabziehen verzögert die Bewegung. Dadurch ist es möglich zu bewirken, daß das Pendel gerade in der gewünschten Zeit eine Schwingung vollführt.

§ 34.

Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze. Es wird im Laufe unserer Untersuchungen häufig unsere Aufgabe sein, Kräfte zu messen, welche zwar den verschiedensten Ursprung haben, sich aber durch Anziehungen und Abstoßungen äußern. Wir haben dann zwei Mittel, diese Kräfte zu messen: entweder halten wir der Kraft durch eine in entgegengesetzter Richtung an ihrem Angriffspunkte wirkende das Gleichgewicht; diese Methode gibt meist nur angenähert richtige Resultate; oder wir messen die Beschleunigung, welche sie einer bekannten Masse m erteilt. Bezeichnen wir diese Beschleunigung mit G, so ist nach § 11 und 12 die Kraft F gegeben durch

$$F = G \cdot m.$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung ist das genaueste Mittel, ein Pendel unter dem Einflusse der Kraft schwingen zu lassen. Sind die Kräfte

einer festen Richtung parallel, oder sind sie, wie die Schwerkraft, nach einem festen Zentrum gerichtet, welches hinlänglich weit entfernt ist, so daß man sie in bezug auf ein kleines Pendel als parallel ansehen kann, so beobachtet man die Schwingungsdauer, welche dasselbe unter Wirkung dieser Kräfte annimmt. Nach § 27 ist diese Schwingungsdauer gleich

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{D}},$$

wenn K das Trägheitsmoment des Pendels und D das Drehungsmoment bedeutet, welches die wirksame Kraft dem Pendel in einer zur Richtung der Kraft senkrechten Lage erteilt. Die Beschleunigung, welche diese Kraft jener Masse erteilt, die in der Abstandseinheit von der Drehungsachse die Masse des Pendels ersetzt, ist dann

$$G = \frac{D}{K},$$

und da K die Masse ist, der jene Beschleunigung erteilt ist, so erhalten wir für die Größe der Kraft

$$F = GK = D,$$

so daß also schon der Nenner des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen im Ausdruck für die Schwingungsdauer uns die gesuchte Größe der Kraft gibt, indem wir den Ausdruck für t nach D auflösen

$$D = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Ändert sich die Größe der Kraft mit dem Abstande vom anziehenden Mittelpunkte, so können wir durch Annäherung oder Entfernung des Pendels von demselben auch das Gesetz ableiten, nach welchem die Kraft sich ändert.

Die Pendelgesetze finden noch weitere Anwendung: wir werden mehrfach schwingende Bewegungen von Körpern um eine bestimmte Gleichgewichtslage beobachten, deren Schwingungsdauer von der Größe der Amplitude unabhängig ist. Wir schließen daraus stets, daß die Kraft, welche die Schwingungen veranlaßt, dem Ausschlagswinkel proportional ist, oder daß bei einem Ausschlagswinkel α diese in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angreifende Kraft gleich $F \cdot \alpha$ ist. Die Kraft F, welche das auf den schwingenden Körper wirkende Drehungsmoment gibt, wenn der Wert von α gleich 1 wird, also auch den in dieser Lage auf die Masse, welche die Masse des Körpers in der Abstandseinheit von der Drehungsachse ersetzt, wirkenden Druck bedeutet, erhalten wir ebenfalls aus der Beobachtung der Schwingungsdauer t. Ist K das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, so ist gerade wie in den vorher besprochenen Fällen

$$F = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Es ergibt sich das aus der Überlegung, daß die Kraft F in diesem Falle ganz an die Stelle des Gewichtes an dem unter der Wirkung der Schwere schwingenden Pendel tritt, indem ja bei diesem die Kraft bei dem Ausschlagswinkel α, so lange derselbe nur klein ist, gleich $gP_2 \cdot \alpha$ ist. Die Kraft F bewirkt also in dem jetzt betrachteten Falle die schwingende Be-

wegung, wie die Kraft gPz bei dem unter Wirkung der Schwere schwingenden Pendel; beide müssen also auf dieselbe Weise aus der beobachteten Schwingungsdauer abgeleitet werden.

Ebenso benutzen wir die Pendelgesetze in manchen Fällen zu einer experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente, wo die Formen oder die Verteilung der Massen der schwingenden Körper eine Berechnung derselben nicht zulassen. In welcher Weise das geschehen kann, möge kurz an einem Beispiele angedeutet werden. Man hänge an einem Metalldrahte einen Stab in seiner Mitte so auf, daß der Stab horizontal schwebt. Ist der Draht oben ganz fest eingeklemmt, so nimmt der Stab eine bestimmte Lage an; stößt man ihn an, so vollführt er in horizontaler Ebene Schwingungen um seine Gleichgewichtslage, deren Dauer von der Größe der Schwingungen unabhängig ist. Es ergibt sich somit, daß auf den Stab eine Kraft wirkt, welche der Ablenkung des Stabes von der Gleichgewichtslage proportional ist; dieselbe rührt, wie wir später nachweisen werden, daher, daß der Draht um eine in ihm liegende Achse gedreht, daß er tordiert ist. Bezeichnen wir diese Kraft, wenn die Ablenkung gleich Eins ist, mit F und das Trägheitsmoment des Stabes und Drahtes in bezug auf die Drehungsachse mit K, so ist nach der vorhin gemachten Bemerkung

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{F}}.$$

Um K experimentell zu bestimmen, hängen wir etwa mit Hilfe einer Schlinge von ganz feinem Draht an den Stab an jeder Seite des Aufhängedrahtes und in gleichen Abständen r_1 von demselben ein Gewicht, dessen Masse mit der der Drahtschlinge gleich p sei. Da jetzt das Trägheitsmoment der schwingenden Masse ein anderes ist, so wird auch die Schwingungsdauer eine andere; bezeichnen wir das Trägheitsmoment nach dem Anhängen der Gewichte mit K_1, so wird die Schwingungsdauer sein

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{K_1}{F}}.$$

Das Trägheitsmoment K_1 ist gleich dem frühern Trägheitsmomente K plus dem Trägheitsmomente der angehängten Gewichte. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment jedes der angehängten Gewichte in bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Gewichte gehende vertikale Achse mit pa^2, so ist das Trägheitsmoment desselben in bezug auf die Drehungsachse des horizontalen Pendels gleich $p(a^2 + r_1^2)$. Denn jedes der Gewichte hängt sich so, daß sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkte liegt; die Verbindungslinie des Aufhängepunktes mit dem Schwerpunkte ist also jene Achse, in bezug auf welche das Trägheitsmoment des Gewichtes gleich pa^2 ist. Da diese Achse dem Aufhängedrahte parallel und im Abstande r_1 von demselben befindlich ist, so ist das Trägheitsmoment jedes der Gewichte in bezug auf den Aufhängedraht gleich $p(a^2 + r_1^2)$. Damit wird

$$K_1 = K + 2p(a^2 + r_1^2)$$

und

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2p(a^2 + r_1^2)}{F}}.$$

gen dieselben Gewichte in einem Abstande r_2 von der Drehungs-
d beobachten die Schwingungungsdauer t_2, dann ist

$$t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2p(a^2 + r_2^2)}{F}}.$$

beobachteten Schwingungsdauern liefern die Gleichungen

$$F \cdot t^2 = \pi^2 K$$
$$F \cdot t_1^2 = \pi^2 (K + 2pa^2 + 2pr_1^2)$$
$$F \cdot t_2^2 = \pi^2 (K + 2pa^2 + 2pr_2^2).$$

ren wir von der zweiten die dritte Gleichung, so wird

$$F(t_1^2 - t_2^2) = \pi^2 2p(r_1^2 - r_2^2)$$
$$F = \pi^2 \frac{2p(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (A),$$

wir diesen Wert von F in die erste Gleichung setzen und nach
en

$$K = t^2 \cdot \frac{2p(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (B).$$

erhalten somit den Wert von K ausgedrückt in lauter bekann-
en.

Gleichung (A) zeigt gleichzeitig, daß wir aus so geführten Be-
en auch direkt die Größe der bewegenden Kraft ableiten können,
wir den Wert des Trägheitsmomentes K zu berechnen haben.
sieht demnach, wie das Pendel in der einen oder andern Form
perimentelle Physik einer der wichtigsten Apparate ist; wir werden
zur Messung von Kräften von demselben Gebrauch machen.

§ 35.

ltung der Rotationsebene. In gleicher Weise, wie ein Körper
ehenden Bewegung der Änderung der Bewegungsrichtung in seiner
n gewissen Widerstand leistet, welcher sich in der Zentrifugal-
rt, so strebt auch ein rotierender Körper in der Ebene, in welcher
zu verharren. Jeder Teil des Körpers beschreibt nämlich bei seiner
einen ebenen Kreis und in jedem Augenblicke besitzt derselbe
der Tangente des Kreises gerichtete Geschwindigkeit. Wenn man
rotierenden Körper so drehen will, daß die Ebene, in der sich
kt desselben bewegt, mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel
muß ebenfalls die Richtung der Bewegung geändert werden.
bedarf es aber ebenso einer Kraft, wie zu der Änderung der
richtung in der Rotationsebene. Wirken demnach keine äußeren
einen solchen rotierenden Körper ein, so bleibt er in seiner Lage,
von den einzelnen Punkten beschriebenen Kreise stets derselben
allel bleiben.

sieht dieses sehr deutlich an einem schmalen Rade oder einer
Scheibe, welche sofort umfallen, wenn man sie ruhend auf dem

Rande vertikal aufstellen will, welche aber in der vertikalen Ebene fo rollen, wenn man sie in rasche Drehung um eine horizontale Achse verset Dasselbe zeigt sich in dem Beharren der sogenannten freien Achsen roti render Körper. Dreht sich nämlich der Körper um eine Achse, um welc die Masse desselben ganz symmetrisch verteilt ist, so zwar, daß die Schwe punkte aller einzelnen auf der Achse senk rechten Schichten auf der Achse liegen, dan übt die Zentrifugalkraft nach allen Rich tungen hin einen gleichen Zug auf die Achse aus, ihre Wirkung hebt sich also auf. Eine solche Achse, welche durch die Zentrifugalkraft gar keinen Zug erfährt, nennt man eine freie Achse. Daß eine solche Achse ihre Richtung im Raume beibehält, sieht man sehr deutlich an dem **Bohnenberger**schen Apparate. Derselbe besteht aus drei ineinander liegenden Ringen, in deren innerstem eine Kugel in rasche Rotation versetzt werden kann. Der äußerste Ring *A* (Fig. 45) ist fest vertikal aufgestellt. Der zweite Ring *B* kann sich in dem ersten um eine vertikale Achse frei drehen. Der dritte Ring *C* kann sich in dem zweiten um eine Achse frei drehen, welche mit der Drehungsachse des zweiten Ringes einen rechten Winkel bildet, und die Kugel *D* endlich ist um eine auf dieser senkrechten Achse drehbar. An der Achse der Kugel ist eine kleine Rolle angebracht, um welche ein Faden vielfach geschlungen werden kann. Zieht man den Faden rasch ab, während man den Ring festhält, so nimmt die Kugel eine rasche Rotation um ihre Achse an.

Fig. 45.

Man sieht, durch diese dreifache Aufhängung kann sich die Achse der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen; rotiert die Kugel nicht, so bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Achse hervor. Hat man aber die Kugel mittels raschen Abziehens der Schnur in schnelle Rotation versetzt, so mag man den Apparat drehen und wenden wie man will, die Achse der Kugel bleibt sich immer parallel. Sehr deutlich sieht man das, wenn man den Apparat auf der Zentrifugalmaschine befestigt und diese dann in langsame Rotation versetzt; die Richtung der Drehungsachse wird dadurch nicht geändert.

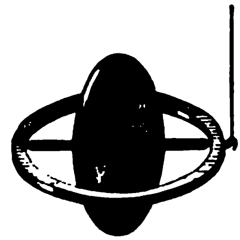
Ganz dieselbe Erscheinung zeigt sich bei dem bekannten Kinderspielzeug, dem Kreisel. Wenn derselbe nicht rotiert, so fällt er, auf die Spitze gestellt, sofort um, weil er sich dann im Zustande des labilen Gleichgewichts befindet. Rotiert er dagegen, so fällt er nicht um, selbst wenn die Achse gegen die Vertikale geneigt ist, also der Kreisel durch die Schwerkraft umgeworfen würde, wenn er nicht rotierte.

Wie groß der Widerstand ist, den ein rotierender Körper einer Änderung der Rotationsebene entgegensetzt, fühlt man sehr deutlich, wenn man versucht, die Achse der rotierenden Kugel im **Bohnenberger**schen Appa

drehen. Noch auffallender zeigt es sich an einem Versuche, welcher ·hanikus Fessel auf die Konstruktion eines besonderen Apparates, selschen Rotationsapparates, führte.

›nn man eine an ihrem Rande mit einem starken Messingwulste ver- ·cheibe auf einer Achse befestigt, welche wie die Bohnenberger- gel in einem Ringe angebracht ist, nun die in sehr rasche Rotation versetzt und dann g in der in Fig. 46 bezeichneten Weise an 'aden aufhängt, so sinkt Ring und Scheibe fort herab, sondern bleibt frei schweben, weil ·rabsinken eine Änderung der Rotationsebene ı würde, welcher die Rotation entgegenwirkt, das Gewicht des Apparates wegen der ·scheibe ein ziemlich bedeutendes ist.

Fig. 46.



gegen sieht man an diesem Apparate sowohl Kreisel eine andere auf den ersten Blick ıuffallende Erscheinung; die Scheibe dreht sich um den vertikalen n einer der Rotation der Scheibe in ihrem Ringe entgegengesetz- tung, während ein langsames nken der Drehungsachse statt-

Fig. 47.

allseitiger Darstellung dieser ıungen dient der Fesselsche ›apparat (Fig. 47). Die Scheibe ı Ringe von Fig. 46 ist nach Bohnenbergerschen Auf- : in einem zweiten Ringe be- an welchem sich ein Stiel welcher in der Gabel G um r.zontale Achse drehbar be- ›ird Die Gabel befindet sich r vertikalen im Fuß des Ap- drehbaren Achse. An der Ver- :g des Stieles können Gewichte gt werden, um die rotierende ganz oder zum Teil zu äqui- ı. Hängt die Scheibe ganz l rotiert sie, so sieht man eine : der Scheibe mit den Ringen vertikale Achse in dem eben eten Sinne: ist sie ganz äquilibriert, so hängt die Scheibe ganz ıls wenn sie nicht rotierte: ist dagegen das Übergewicht auf der Seite des Stieles, so dreht sich die ganze Vorrichtung in einer der angegebenen entgegengesetzten Richtung um die vertikale Achse, der Richtung der Rotation der Scheibe.

ß alle diese Erscheinungen nur Folge der tangentialen Geschwin- der einzelnen Teile der Scheibe sind, hat Poggendorff in sehr r Weise gleich nach dem Bekanntwerden des Fesselschen Appa- ·zeigt.

Wird nämlich die Drehungsachse der rotierenden Scheibe zuerst hor zontal gehalten, wie Fig. 46, und die Scheibe in der Vertikalebene rotiere gelassen, indem man den zweiten Ring parallel dem ersten feststellt, s wird beim Loslassen der Scheibe, wenn sie nicht durch ein Gewicht i Gleichgewichte gehalten wird, zunächst die Schwere einwirken und die Vor richtung ein wenig sinken machen.

Durch dieses Sinken tritt eine geringe Drehung der Scheibe um ein horizontale Achse ein, und dadurch wird die Bewegung der Teilchen der Scheibe vorn, wo sie aufsteigen, und hinten, wo sie hinuntersinken, gestört. Dieselben haben eine vertikale Geschwindigkeit, die Scheibe nimmt dagegen eine etwas geneigte Lage an. Die vertikalen Geschwindigkeiten der Teilchen treten daher vorn, wo sie aufsteigen, zur Rechten, hinten, wo sie absteigen, zur Linken aus der Scheibe heraus. Da nun die Teilchen der Scheibe ihnen nicht mehr ganz folgen können, so üben sie einen Zug senkrecht auf die Scheibe aus, vorn nach rechts hin, hinten nach links hin. Beide Wirkungen unterstützen sich, und die Folge davon ist eine Drehung der ganzen Vorrichtung um die vertikale Achse, und zwar von oben gesehen umgekehrt, wie die Bewegung eines Uhrzeigers stattfindet.

Sobald aber diese Drehung der Vorrichtung um die vertikale Achse beginnt, wird auch die Bewegung der Teilchen unten, wo sie sich nach vorn, oben, wo sie sich nach hinten bewegen, gestört. Die augenblickliche Geschwindigkeit derselben tritt unten nach links und oben nach rechts aus der augenblicklichen Stellung der Scheibe hervor. Zerlegen wir sie in zwei Komponenten, eine in der Richtung der augenblicklichen Bewegung der Scheibe und eine darauf senkrechte, so sieht man sofort, wie dadurch an dem tiefsten Punkte des Scheibendurchmessers ein Zug nach links und am höchsten ein Zug nach rechts entsteht. Beide Kräfte zusammen müssen die Drehungsachse der Scheibe ein wenig heben, also in der entgegengesetzten Richtung bewegen, in welcher die Schwere ursprünglich das Bestreben hatte, die Achse zu drehen.

Ist dagegen dem Gewichte der Vorrichtung durch ein gleiches Gegengewicht das Gleichgewicht gehalten, so fehlt der erste Impuls, der die Scheibe ein wenig dreht, die Wirkung der Schwere, deshalb tritt gar keine Bewegung ein.

Ist aber das Gegengewicht schwerer, so ist die Wirkung eine ganz entgegengesetzte, wie eine der vorigen ganz analoge Betrachtung unmittelbar ergibt.

Die Bewegung der Rotationsachse des Kreisels auf einem Kegel um die Vertikalrichtung wird man sich leicht auf die gleiche Weise ableiten können.

§ 36.

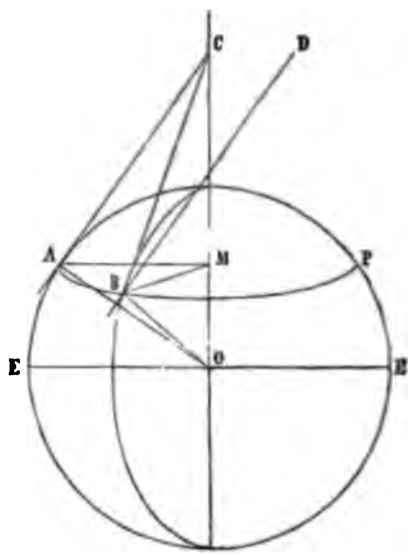
Foucaults Pendelversuch. Ein schwingendes Pendel hat eben das Bestreben, stets in derselben Vertikalebene zu schwingen, indem sich an diesem die einzelnen Teile in ebenen Kurven, in Kreisbogen, sich bewegen. Wenn daher keine seitliche Einwirkung auf das Pendel stattfindet, so wird es stets in derselben Ebene schwingen.

Diese Eigenschaft des Pendels hat der französische Physiker Foucault benutzt, um einen experimentellen Beweis für die Achsendrehung

lern. Man denke sich ein Pendel gerade über dem Pole der dem Nordpole, aufgehängt und das Pendel in einem Meridiane Das Pendel bleibt sich mit seinen Schwingungen stets paralidian aber, mit dem es sich anfänglich parallel hin und her eht sich unter dem Pendel in 24 Stunden vollständig im Kreise Beobachter muß daher nach und nach die Richtung der Pendelvon der des Meridians abweichen sehen und, da er die Drehung cht wahrnimmt, glauben, daß sich die Pendelebene in entgegeninne drehe. Es muß daher den Anschein haben, als wenn sich bene mit der Sonne drehe.

lern Orten der Erde ist das Verhältnis nicht ganz so einfach, ie Pendelebene nicht ganz ihre Lage beibehalten, wie unter dem t der Rotation der Erde die Richtung der Schwere sich ändert; ort eine Drehung der Pendelebene eintreten muß, gibt folgende Die Lage der Pendelebene in einem bestimmten Momente ist urch die Richtung der Vertikalen und durch die Richtung der Tangente, die wir an den ukt des von dem Pendel n Kreisbogens legen, also den Winkel, den diese mit ne bildet. Nehmen wir der wegen an, das Pendel dem betrachteten Momente h den Meridian gelegten e, so würde OAC (Fig. 48) ge der Pendelebene dar-n A einen Ort auf dem BP, und O den Mittel-Erde bedeutet. Dreht sich CO als Achse, so ändert tung der Vertikalen stetig, r Drehung der Vertikalen die Lage der Pendelebene, el immer um die augen-ertikale als die Gleich-infolge der nach der gerichteten Wirkung der und her schwingen muß.

Fig. 48.



ie Erde so weit gedreht, daß der Punkt A auf dem Parallel gekommen ist, so hat sich die Vertikale um den Winkel AOB e Drehung, die wir indessen nicht wahrnehmen, da wir uns mit rehen.

e andere Richtung dagegen, welche uns die Lage des Pendels esp. auf die horizontale Komponente seiner Bewegung wirkt gar ein, so daß die horizontale Richtung, das heißt die an den ukt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente, im Raume elbe Richtung beibehalten muß. Denn ein Verlassen dieser äre nur möglich, wenn auf das schwingende Pendel in der Ebene irgend eine der horizontalen parallele Kraft einwirkte.

Es muß deshalb im Punkte B die zweite Richtung, welche die Lage d Pendelebene bestimmt, die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens geleg horizontale Tangente BD der ursprünglichen Richtung AC parallel sei Wir setzten ursprünglich voraus, das Pendel schwinge in der durch d Meridian gelegten Vertikalebene. Da diese Ebene, resp. die Richtung d Meridians, sich gedreht hat, so muß die an den untersten Punkt des Pend bogens gelegte horizontale Tangente mit der Richtung des Meridians i Punkte B einen Winkel β bilden, der, wenn φ die geographische Brei und α der Winkel AB ist, den der Punkt A auf seinem Parallelkrei durchlaufen hat, wie sich leicht zeigen läßt, gegeben ist durch

$$\beta = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Dieser Ausdruck für die Größe des Winkels β ergibt sich unmittelb aus dem § 15 bewiesenen Satze über die Zusammensetzung und Zerlegun von Drehungen. Wir können nämlich darnach die um die Erdachse O stattfindende Drehung der Erde in zwei zueinander senkrechte Kompone ten zerlegen, und zwar in die beiden Komponenten, die wir auch eben g sondert betrachtet haben. Die beiden Komponenten sind die Drehung u eine zu AO senkrechte mit AC parallele Achse und um AO als Ach Die erstere Drehung bringt die Vertikale in die Richtung BO, oder brin die Ebene AOC in die Lage DBO. Die zweite gleichzeitig mit der erst in jedem Momente um AO stattfindende Drehung dreht dann die Ebe aus der Lage DBO in die Lage CBO. Der Winkel CBD, den die Pend ebene DBO mit der Meridianebene CBO bildet, ist demnach gleich die zweiten Komponente der Drehung. Nach § 15 ist die Komponente ei Drehung um eine Achse, welche mit der gegebenen Drehungsachse d Winkel ψ bildet, gleich der gegebenen Drehung multipliziert mit cos Die Achse AO bildet nun, wenn wir die geographische Breite AE des obachtungsortes mit φ bezeichnen, mit der gegebenen Drehungsachse d Winkel $90 - \varphi$. Einer Drehung α um die Achse CO entspricht als Komponente der Drehung um die Achse AO der Winkel

$$\beta = \alpha \cdot \cos(90 - \varphi) = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Oder der Winkel der scheinbaren Drehung der Pendelebene ist g dem Produkte des Winkels, um den sich die Erde in der Zeit gedreht in den Sinus der Breite.

Am Pole ist $\varphi = 90^0$, $\sin \varphi = 1$, $\beta = \alpha$;. am Pole dreht sich Pendelebene ebenso rasch wie die Erde, am Äquator ist $\varphi = 0$, $\sin \varphi$ $\beta = 0$, dort dreht sich die Pendelebene gar nicht, wie sich auch unm bar daraus erkennen läßt, daß am Äquator alle an den Meridian ge nen Tangenten der Erdachse und somit einander parallel sind

Für Berlin ist $\beta = \alpha \cdot \sin 52^0 30' = 0{,}793\,35\,\alpha$.

Für Aachen $\beta = \alpha \cdot \sin 50^0 46' 48'' = 0{,}774\,59\,\alpha$.

In 24 Stunden dreht sich somit, da α dann gleich 360^0 ist, das P

zu Berlin um $285^0 36'$,

zu Aachen um $278^0 51' 43''$,

oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel

in Berlin 30 Stunden 15 Minuten

und

in Aachen 30 Stunden 59,5 Minuten.

Genau ausgeführte Versuche haben wirklich diese von der Theorie geforderten Zahlen geliefert und haben somit einen experimentellen Beweis für die Achsendrehung der Erde gegeben.

Am bequemsten werden die Versuche in hohen Räumen ausgeführt. Man befestigt an einem langen feinen Drahte ein schweres Gewicht und stellt um den Punkt, auf welchen das Pendel zeigt, wenn es vertikal herabhängt, als Mittelpunkt einen geteilten Kreis. Man sieht, wie nach und nach das schwingende Pendel über immer andere Teilstriche geht, indem sich seine Schwingungsebene scheinbar mit der Sonne dreht.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§ 37.

Allgemeine Anziehung. Kepplers Gesetze. In den beiden vorigen Kapiteln haben wir mehrfach gesehen, daß alle Körper auf der Erde von Kräften angegriffen werden, die wir ihr Gewicht nannten, und welche an jeder Stelle senkrecht gegen den Horizont wirken. Es hat demnach den Anschein, als wenn die ganze Masse der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Körper eine Anziehung ausübe, welche überall merklich gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, und welche bis zu irgend einer Höhe über dem Boden wirksam ist. Durch Induktion schließen wir daraus, daß sich diese Anziehung über jene Grenzen ausdehnt, welche wir erreichen können, daß sie sich bis zu den Sternen erstreckt, aber mit der Entfernung an Größe abnehmend.

Andererseits dürfen wir mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die Gestirne ähnliche Erscheinungen darbieten, daß es auf allen eine gegen ihren Mittelpunkt gerichtete Schwere gebe, die bis zu einer gewissen Entfernung auf alle anderen Himmelskörper wirkt. Diese Schlüsse waren es, welche Newton dahin führten, anzunehmen, daß alle Gestirne sich anziehen, daß ihre Bewegungen durch die wechselseitige Einwirkung derselben aufeinander bestimmt seien, und daß das ganze Weltall durch Kräfte regiert werde, die aus einer einzigen Quelle fließen, aus der Anziehung der Materie.

Ist dem so, so müssen die Bewegungen der Gestirne äußerst verwickelter Natur sein, weil ihre Zahl äußerst groß ist, und alle aufeinander wirken. Indes ist es leicht ersichtlich, daß sich das Problem mit einer ersten Annäherung einfacher stellt. Die Himmelskörper teilen sich in zwei Klassen: die eine umfaßt die Fixsterne, welche sich in so großen Entfernungen von der Sonne und Erde befinden, daß man ihren Einfluß vernachlässigen kann; die andern stehen sich näher, sie wirken einer auf den andern ein und bilden eine abgeschlossene, von Fixsternen freie Gruppe;

es sind dies die Sonne nebst ihren Planeten. Wir haben uns zunächst n mit der Wechselwirkung dieser aufeinander zu befassen. Vergleichen w nun die einzelnen Körper dieser Gruppe miteinander, so erkennen wir s fort, daß die Sonne wegen ihrer überwiegenden Größe in dem Syste auch einen überwiegenden Einfluß haben muß, derart, daß ein Planet w unsere Erde von der Sonne sehr stark angezogen werden muß, von d übrigen so unbedeutend, daß wir auch deren Einfluß zunächst vernachlä sigen dürfen. Wir betrachten daher die Sonne als den einzigen anziehe den Mittelpunkt in unserem Systeme und nehmen an, daß die übrig Planeten unabhängig voneinander sich nach denselben Gesetzen beweg jeder so, als sei er allein der Anziehung der Sonne unterworfen. Wir habe dann, um die Gesetze der Anziehungskraft zu erhalten, nur die Aufgab die Bewegung der einzelnen Planeten um die als fest betrachtete Sonn zu untersuchen, und aus dieser nach den bisher entwickelten Gesetzen au diejenigen zurückzuschließen, nach welchen die Kraft wirksam ist.

Die Gesetze, nach denen sich die einzelnen Planeten um die Sonne be wegen, sind im Anfange des 17. Jahrhunderts von dem großen deutsch Astronomen Keppler aus den sorgfältigen und langjährigen Beobachtung Tycho de Brahes abgeleitet worden und werden daher nach ihm di Kepplerschen Gesetze genannt[1]). Es sind folgende drei:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne welche in dem einen Brennpunkte der Ellipsen steht.

2. Die von dem Radius vector jedes Planeten beschriebenen Fläche räume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten ver halten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von d Sonne.

Auf diese Gesetze gründete Newton den Nachweis von der Existen einer zwischen verschiedenen Massen tätigen, anziehenden Kraft und d Entwicklung der Gesetze, nach welchen dieselbe sich ändert.

§ 38.

Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet. Sei O (Fig. das Zentrum der Sonne, und A das eines Planeten in einem bestim Augenblicke. Während einer sehr kleinen Zeit beschreibt letzterer Stück AB seiner Bahn. Wenn nun keine äußere Kraft auf ihn einwi so würde er in einer der ersten gleichen und ihr folgenden Zeit das gl Stück BC in der Richtung seiner Bewegung zurücklegen. Anstatt d legt jedoch der Punkt A in der auf die erste folgenden und ihr glei Zeit den Weg BD zurück. Man muß daraus schließen, daß auf ihn e Kraft einwirkt, welche seine Bewegungsrichtung ändert. Um die Richt dieser Kraft zu erhalten, bedenken wir, daß nach dem zweiten Keppl schen Gesetze die Fläche

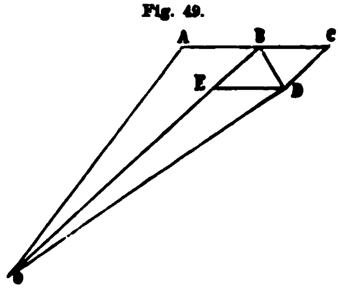
$$ABO = BDO = CBO$$

sein muß. Soll aber das Dreieck BDO gleich dem Dreieck CBO

1) Man sehe *Poggendorff*, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, p

ABO ist, weil $AB = BC$ ist, und die Spitzen der Dreiecke ..., so müssen die Spitzen C und D der beiden Dreiecke BDO auf einer mit BO parallelen ..., da sie die Seite BO gemein... Konstruieren wir das Paralle...DC, so sehen wir, daß auf ... eine Kraft wirken muß, welche ...en Raum BE zu durchlaufen, ... vermöge seiner anfänglichen ...eit sich nach BC bewegt haben ...e Kraft ist aber nach dem ... O gerichtet. Es ist also be... die Planeten, da sie sich in ...n Linie bewegen, einer stetig ...raft unterworfen sind, und daß aus dem zweiten Keppler..., nach welchem die von den Radien vectoren in gleichen ...iebenen Flächenräume gleich sind, hervorgeht, daß diese Kraft ...ntrum der Sonne gerichtet sein muß. Das ist der erste Teil ...schen Entwicklung.

Fig. 49.



§ 39.

...klung des Anziehungsgesetzes. Das erste Kepplersche ...mt die Gestalt der Planetenbahnen, es erklärt sie für Ellipsen, ...izitäten verschieden sind. Nehmen wir als einen bestimmten ... die Exzentrizität gleich Null sei, daß also die elliptische ... Kreisbahn übergehe. In Wirklichkeit ist das zwar für keinen ...eten der Fall; da jedoch die Exzentrizität der Planetenbahnen ...lein ist, so wird unsere Annahme nicht weit von der Wahrheit ...nd wir werden durch unsere Entwicklungen eine erste An...alten. Den gleichen Weg schlug Newton ein.

... der Planet sich in einer kreisförmigen Bahn bewegt, in derem ...sich die Sonne befindet, müssen die einzelnen Bogen, welche ...n gleichen Zeiten durchläuft, gleich sein, da diese Gleichheit ...weiten Kepplerschen Gesetze für die von den Radien be...räume, die Sektoren, bestehen muß. Die Geschwindigkeit, mit ... Planet sich in seiner Bahn bewegt, ist demnach eine gleich...rend der ganzen Umlaufszeit. Wir haben somit hier einen ...isbewegung, wie wir ihn in dem Paragraphen über die Zen... und Zentrifugalkraft betrachtet haben.

... Zentripetalkraft hatten wir den Ausdruck

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R},$$

... von der Zentripetalkraft hervorgebrachte Beschleunigung

$$\frac{F}{m} = G = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

... Radius des von dem bewegten Körper beschriebenen Kreises ...mlaufszeit bedeutet. Nehmen wir für R den Radius der Planeten-

bahn und für T seine Umlaufszeit, so haben wir also hier den Ausdruck für die Beschleunigung, welche der Planet gegen die Sonne erhält, als die Anziehung der Sonne auf die Einheit der Masse des Planeten, in dem Abstande R von der Sonne.

Für die verschiedenen Planeten in den Abständen R, R', R'' von der Sonne erhalten wir aus den Umlaufszeiten T, T', T'' für die Größe der anziehenden Kraft der Sonne auf die Einheit der Masse in den Entfernungen R, R', R'' die Ausdrücke

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 R''}{T''^2}.$$

Nach dem dritten Kepplerschen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen, so daß wir haben

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \frac{T''^2}{R''^3} = K,$$

also

$$T^2 = K \cdot R^3, \quad T'^2 = K \cdot R'^3, \quad T''^2 = K \cdot R''^3.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Ausdrücke für $G, G' \cdots$ ein, so erhalten wir

$$G = \frac{4\pi^2}{KR^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2}{KR'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2}{KR''^2},$$

oder in Worten: die von der Sonne in verschiedenen Entfernungen den Planeten erteilten gegen die Sonne gerichteten Beschleunigungen, welche die auf die Einheit der Massen ausgeübte Anziehungskraft messen, sind dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional.

Wollen wir aus der Beschleunigung die anziehende Kraft F erhalten, welche die Sonne auf die verschiedenen Planeten ausübt, so haben wir $F = m \cdot G$, also die Beschleunigung G mit der Masse m zu multiplizieren. Es wird dann

$$F = m \cdot G = \frac{m}{R^2} \cdot \varphi,$$

wenn wir mit φ die Anziehung der ganzen Sonnenmasse auf die Einheit der Planetenmasse in der Einheit des Abstandes bezeichnen. Da nun diese Anziehung gleich ist der Summe der Anziehungen der einzelnen Massenteilchen, so ist sie proportional der gesamten Masse M der Sonne, so daß wir setzen können

$$\varphi = M \cdot A$$

und dann allgemein

$$F = \frac{m \cdot M}{R^2} \cdot A.$$

Das Gesetz der Massenanziehung können wir daher ganz allgemein ausdrücken: „Die Anziehung zweier Körper aufeinander ist proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes."

Wir haben bisher die der Wirklichkeit nicht entsprechende Annahme gemacht, daß die Planetenbahnen Kreise seien; es entsprach das uns

Absicht, durch eine angenäherte Methode zu zeigen, wie Newton die Gesetze der Attraktion entwickelte. In der theoretischen Mechanik werden diese Probleme jedoch ohne diese Beschränkung abgehandelt; man gelangt dann genau zu denselben Resultaten, daß auf die Planeten eine gegen die Sonne gerichtete Kraft wirke, die mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Sonne abnimmt.

Nachdem man die Gesetze erkannt hat, denen die Attraktionskraft folgt, liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, wodurch es dahin gekommen, daß die Planeten sich in diesen Bahnen bewegen. Es ist das eine rein mathematische Aufgabe, wie aus folgendem ersichtlich ist. Wären Sonne und Erde z. B. anfänglich ohne Bewegung sich im Raume in einem gewissen Abstande gegenübergestellt, so würden beide Gestirne infolge der Anziehung sich gegeneinander bewegt haben, bis sie sich berührt hätten. Hatte aber die Erde anfänglich eine Geschwindigkeit in anderer Richtung als in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte erhalten, so mußte sie sich unter dem doppelten Einfluß dieser Anfangsgeschwindigkeit und der Anziehung der Sonne in einer krummlinigen Bahn bewegen. Die Rechnung zeigt nun, daß diese Bahn jedenfalls ein Kegelschnitt sein mußte, und zwar je nach dem anfänglichen Abstande der beiden Körper und der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen, ein Kreis, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Einmal auf dieser Bahn bewegt, muß das Gestirn dieselbe unaufhörlich durchlaufen, entweder wenn die Kurve geschlossen ist, seinen Weg immer wieder zurücklegend, wie es bei den Planeten der Fall ist, oder ohne Wiederkehr fortschreitend, wenn die Kurve eine nicht geschlossene ist. Letzteres ist für einige Kometen wahrscheinlich.

Dieses ist jedoch noch nicht die exakte Lösung des Problems der Astronomie, man kann die Gestirne in ihrer Bewegung nicht als unabhängig voneinander betrachten, denn jedes derselben wird in jedem Augenblicke von der Sonne und allen anderen angezogen. Deshalb sind die Bahnen der Planeten nicht vollkommene Ellipsen, als welche Keppler sie ansah, sondern sehr verwickelte Kurven, welche infolge der Störungen der anderen Planeten, bald an der einen, bald an der andern Seite von der Ellipse abweichen. Dadurch wird das allgemeine Problem der Bewegung der Gestirne äußerst verwickelt.

Wir haben in den beiden letzten Paragraphen die zwischen den Gestirnen wirksame Kraft als eine Anziehung der Materie bezeichnet; mit dieser Bezeichnung haben wir bereits den Boden der Tatsachen verlassen und uns auf das Gebiet der Hypothese begeben. Die Tatsachen beweisen uns nur, daß zwischen den Gestirnen ein Antrieb zur Wirksamkeit kommt, welcher die Planeten gegen die Sonne treibt, und daß dieser Antrieb den Massen der Planeten direkt, den Quadraten ihrer Abstände umgekehrt proportional ist. Nach unserer Definition des Wortes Kraft, als die Ursache dieses Antriebes, können wir ebenso sagen, daß zwischen den Weltkörpern eine Kraft tätig ist. Sowie wir aber als die Quelle dieser Kraft eine durch den Raum wirkende Anziehung der Materie bezeichnen, machen wir zur Befriedigung unseres Kausalitätsbedürfnisses, zur Beantwortung der Frage, woher rührt diese Kraft, eine Hypothese. Ob Newton diese Hypothese hatte, läßt sich nicht mit Sicherheit behaupten, sicher ist, daß diese Hypothese zuerst von Roger Cotes in der Vorrede zu der von demselben noch

bei Lebzeiten Newtons veranstalteten Ausgabe der Philosophiae naturalis Principia mathematica deutlich ausgesprochen wurde.

Bis vor wenigen Jahren hat man sich mit dieser Hypothese ziemlich allgemein begnügt. In neuester Zeit sucht man indes die zwischen zwei entfernten Massen tätige Kraft in anderer Weise zu erklären, indem man davon ausgeht, daß die Annahme einer durch nichts weiter vermittelten Anziehung in die Ferne unserem Kausalitätsbedürfnisse nicht genüge, oder mit anderen Worten, daß eine solche unvermittelte Wirkung in die Ferne für uns nicht begreiflich sei. Man hat deshalb ein Zwischenmittel angenommen, welches die von den einzelnen Massen ausgehenden Antriebe übermittelt, und hat als solches vorzugsweise den Äther angesehen, auf dessen Existenz im sogenannten leeren Raume wir aus den Lichterscheinungen schließen müssen. Man hat weiter verschiedene, zum Teil als abenteuerliche zu bezeichnende Vorgänge ersonnen, durch welche die Antriebe und deren Übermittlung zwischen den Massen zustande kommen sollen[1]). Wir können auf die verschiedenen Erklärungsversuche hier nicht eingehen, kein einziger derselben ist haltbar, entweder sind die Hypothesen, auf denen die Erklärungsversuche beruhen, selbst ebenso unbegreiflich als die Wirkung in die Ferne, welche sie erklären sollen, oder sie stehen mit anderweitig erkannten Prinzipien oder Gesetzen im Widerspruch.

Nur wollen wir hier sofort schon bemerken, daß alle diese Erklärungsversuche eigentlich müßig sind, solange wir in der Auffassung der Naturerscheinungen an der atomistischen Konstitution der Materie festhalten. Vom Beginne des nächsten Abschnittes an werden wir nämlich sehen, daß wir in einer Erklärung der Naturerscheinungen am weitesten kommen, oder um an die Sätze der Einleitung anzuknüpfen, daß wir die weitaus größte Zahl von Naturerscheinungen aus einer einzigen Hypothese ableiten können, wenn wir annehmen, daß die Materie aus einzelnen Teilchen, den Atomen oder Molekülen besteht, welche, ohne sich gegenseitig zu berühren, nebeneinander gelagert sind. Damit sind wir genötigt, Kräfte anzunehmen, welche zwischen diesen Teilchen tätig sind, ohne daß wir ein Zwischenmittel annehmen können, welches die Wirkungen von einem Molekül auf das andere übermittelt. Zwar sind die Abstände der Moleküle für uns unmeßbar klein. Indes eine unvermittelte Fernewirkung ist für kleine Entfernungen gerade so schwer oder so leicht begreiflich als für große Entfernungen. Klein und groß sind überhaupt nur relative Begriffe. Zudem wissen wir nicht, ob nicht der Abstand der Moleküle im Verhältnis zur Größe derselben ein ebenso großer ist, als der Abstand der Weltkörper im Verhältnis zur Größe dieser. Nur in einer solchen Hypothese zur Erklärung der Fernewirkung können wir daher einen Fortschritt erblicken, welche gleichzeitig die sogenannten Molekularkräfte überflüssig macht, welche uns also gestattet, die Materie als ein nicht aus diskreten Teilchen bestehendes Kontinuum aufzufassen. Da vorläufig dazu noch keine Aussicht vorhanden ist, halten wir an der Hypothese der Fernewirkung fest[2]).

1) Eine ziemlich vollständige Übersicht über die verschiedenen Versuche zur Erklärung der Fernewirkung gibt Dr. *Isenkrahe* in seinem Buche: Das Rätsel der Schwerkraft. Braunschweig bei Vieweg 1879.

2) Wir werden im 3. Bande bei Besprechung der Gesetze der elektrischen Anziehung Gelegenheit nehmen, nochmals auf diese Frage zurückzukommen.

wir indes eine Fernewirkung annehmen oder nicht, das sogenannte nsgesetz, das Gesetz, nach welchem der zwischen zwei Massen ver- Antrieb von der Größe und dem Abstande der Massen bedingt ht fest, und nur dieses Gesetz ist es, welches unseren weiteren hungen zugrunde liegt.

§ 40.

ntität der Schwere und der allgemeinen Anziehung. Machen uns jetzt zur Aufgabe, den Nachweis zu liefern, daß die Ursache, uf der Erde die Körper fallen macht, dieselbe ist wie jene, welche betrachteten Bewegungen regelt. Auch dieses zuerst nachgewiesen ist Newtons Verdienst.

Erde besitzt einen Trabanten, den Mond, dessen Zentrum im 0 Erdradien von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist. Astro- gesprochen ist dieser Abstand sehr gering, und daher kommt es, Anziehung der Erde auf den Mond viel größer ist als die An- der Sonne, so zwar, daß man annehmen darf, der Mond sei nur ehung der Erde unterworfen. Es ist dieses allerdings nicht genau, e ähnliche Annäherung an die Wirklichkeit wie bei unserer vorigen r, daß die Planetenbahnen Kreise seien. Der Mond wird deshalb Erde, letztere als ruhend betrachtet, eine Ellipse beschreiben. wir überdies an, daß die Mondbahn ein Kreis sei, was bei ihrer Exzentrizität nur wenig von der Wahrheit abweicht, sowie die d der Mond seien vollkommene Kugeln. Nach allen diesen An- können wir zwar keine genauen numerischen Daten erwarten, je- unsern Zweck hinreichende, da alle diese Annahmen nur sehr on der Wahrheit abweichen.

Anziehung, welche der Mond von der Erde erfährt, können wir zentripetalen Beschleunigung berechnen, welche der Mond von der ihrt; diese Beschleunigung ist gleich der Kraft, welche die Massen- ies Mondes von der ganzen Erde erfährt. Bezeichnen wir die Um- des Mondes mit T, den Radius der Mondbahn mit r, so ist die ale Beschleunigung

$$G = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Radius der Mondbahn ist, wie erwähnt, gleich 60 Erdradien; n wir letztern mit R, so wird

$$G = \frac{2\pi R \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{T^2}.$$

diesem Ausdrucke ist $2\pi R$ gleich dem Umfange der Erde, gleich 000 m; die Umlaufszeit T des Mondes ist gleich 27 Tage, 7 Stunden, ten = 39 343 · 60 Sekunden. Demnach wird G

$$G = \frac{40\,000\,000 \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{(39\,343 \cdot 60)^2} = \frac{40\,000\,000\,\pi}{(39\,343)^2 \cdot 30}$$

$$G = 0{,}002706^{\mathrm{m}} \quad \text{oder} \quad 0{,}2706^{\mathrm{cm}}.$$

se Zahl gibt uns die Beschleunigung, welche der Mond durch die g der Erde in jeder Sekunde gegen den Mittelpunkt der Erde hin

erhält, also auch die Anziehung in Krafteinheiten, welche die an der St des Mondes befindliche Gewichtseinheit, das Gramm, von der Erde erh

Ein an der Erdoberfläche befindlicher Körper erhält die Beschleunigu 981^{cm}, oder was dasselbe ist, die Erde zieht an ihrer Erdoberfläche Gewichtseinheit, das Gramm, mit 981 Krafteinheiten an. Ist deshalb Schwerkraft mit der allgemeinen Gravitation dieselbe Kraft, so würden in beiden Fällen auf die Masseneinheiten wirkenden Kräfte sich umgekel verhalten wie die Quadrate der Abstände derselben von dem Punkte Erde, von welchem wir uns die Anziehung der Erde ausgehend denk können.

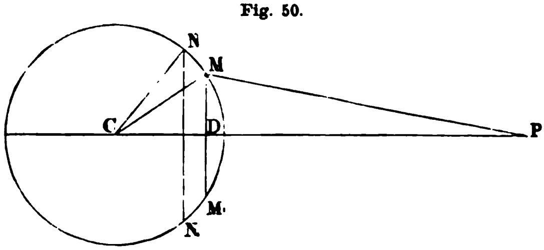
Um diese Vergleichung durchführen zu können, müssen wir desh zunächst untersuchen, von welchem Punkte der Erde aus die auf außerh der Erde befindliche Massen ausgeübte Anziehung ausgeht, von wo aus die Abstände der zu vergleichenden Masseneinheiten zu rechnen haben.

Befindet sich die angezogene Masse von der Erde so weit entfer daß wir die Verbindungslinien aller Punkte der Erde mit dieser Masse einander parallel ansehen können, so lehrt uns schon der Satz vom Mitt punkte der parallelen Kräfte, daß die Erde und die Masse sich gerade anziehen müssen, als ginge die gesamte Anziehung von dem Mittelpunk der Erde aus. Denn da an allen Punkten der Erde in dem Falle paralle gegen die angezogene Masse gerichtete Kräfte angreifen, so befindet si die Erde jener Masse gegenüber gerade wie eine auf der Erde befindlic schwere Kugel. Wie nun letztere von der Erde gerade so angezogen wir als wäre ihr ganzes Gewicht im Schwerpunkte, welcher bei einer homoge Kugel der Mittelpunkt ist, vereinigt, so ist auch die Anziehung der en fernten Masse auf die Erde und der Erde auf die entfernte Masse gera so, als wenn die ganze anziehende Masse der Erde in deren Mittelpunkt vereinigt wäre.

Als Abstand der an der Stelle des Mondes befindlichen angezogen Masseneinheit von der Erde müssen wir deshalb den Abstand der Mitt punkte des Mondes und der Erde oder 60 Erdradien einsetzen.

Aber ebenso wie auf entfernte Massen wirkt eine Kugel auch a solche, die sich in ihrer Nähe befinden, gerade so, als wenn die ganze a ziehende Masse der K in ihrem Schwerpu also bei einer homoge Kugel in ihrem Mitt punkte, vereinigt wä Zunächst erkennt m leicht, daß die Anzieh einer Kugel gegen d Mittelpunkt derselben g richtet sein muß. D stellt der Kreis (Fig. 5 den Durchschnitt einer Kugel nach einem größten Kreise vor, welche a ziehend auf irgend einen Punkt P wirkt, so sieht man sofort, daß d anziehenden Punkte der Kugel ganz symmetrisch um die Verbindung PC des Punktes P mit dem Mittelpunkte verteilt sind. Jedem Punk oberhalb PC entspricht ein genau so weit von P entfernter Punkt

Fig. 50.



halb PC. Zerlegen wir nun die nach M und M_1 gerichteten Anziehungen in ihre Komponenten parallel zu PC und senkrecht zu PC, so heben die letzteren sich auf, da die Winkel MPC und M_1PC einander gleich sind. Wie hier, so bleiben in allen Fällen nur die gegen den Mittelpunkt gerichteten Komponenten übrig, es muß also die gesamte Anziehung gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtet sein.

Um die Anziehung der Kugel auf eine im Punkte P befindliche Masse m, deren Abstand vom Mittelpunkte CP gleich a sei, zu berechnen, denken wir uns die Kugel in lauter einzelne sehr dünne Schalen zerlegt, deren Dicke gleich δ sei. Stelle jener Kreis den Durchschnitt einer solchen Schale vor; die Dichtigkeit der Schale, d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Masse, sei gleich σ. Führen wir durch die Kugelschale zwei einander sehr nahe, zu PC senkrechte Schnitte MM_1 und NN_1, so schneiden dieselben aus der Schale eine Zone heraus, deren Volumen gleich dem Produkte aus dem Kreisumfange MM_1, dem Bogen MN und der Dicke δ der Schale ist, wenn wir eben MN und δ so klein voraussetzen, daß der Kreis MM_1 von dem in der Mitte der Schale mitten zwischen M und N gelegten Schnitte nur unendlich wenig verschieden ist. Das Volumen dieser Zone ist demnach

$$2\pi MD \cdot MN \cdot \delta,$$

und die in dieser Zone enthaltene Masse erhalten wir, wenn wir das Volumen mit σ multiplizieren. Nennen wir die Anziehung, welche zwei der Einheit gleiche Massen in der Entfernungseinheit aufeinander ausüben, A, so erhalten wir für die Anziehung der Kugelzone auf die in P befindliche Masse m nach dem im vorigen Paragraphen entwickelten Anziehungsgesetze

$$A \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2}$$

und die allein übrig bleibende in PC fallende Komponente, wenn wir obigen Ausdruck mit $\cos CPM$ multiplizieren,

$$A \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2} \cdot \cos CPM.$$

Bezeichnen wir den Radius der Kugelschale CM mit r, den Abstand des Punktes P von der Zone MP mit e, den Winkel MCP mit ϑ, die Breite der Zone im Winkelmaße oder MCN mit $d\vartheta$, so erhalten wir

$$MD = r \cdot \sin\vartheta, \quad MN = r \cdot d\vartheta$$

$$\cos CPM = \frac{DP}{e} = \frac{a - r\cos\vartheta}{e};$$

zur Bestimmung des Zählers im Ausdrucke für $\cos CPM$ haben wir

$$MP^2 = MC^2 + CP^2 - 2MC \cdot CP \cdot \cos\vartheta = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos\vartheta$$

$$r \cdot \cos\vartheta = \frac{r^2 + a^2 - e^2}{2a}$$

$$a - r \cdot \cos\vartheta = \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in den für die Anziehung der Kugelzone erhaltenen ein, so wird derselbe

$$A \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot r \cdot d\vartheta \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{e^2} \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a \cdot e},$$

oder, indem wir passender ordnen,

$$A \cdot \frac{\pi r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a} \cdot \sin\vartheta d\vartheta \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{e^3}.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale auf m zu erhalten, haben wir für alle die Kugel zusammensetzenden Zonen obigen Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu addieren. Wir erhalten diese Werte für die einzelnen Zonen, indem wir für ϑ nach und nach alle Werte von $0 - \pi$ und gleichzeitig den jeder Zone entsprechenden Wert von e einsetzen. Mit Hilfe unseres Wertes für e können wir bequemer den Winkel ϑ eliminieren und die Breite der einzelnen Zonen durch e ausdrücken. Nennen wir nämlich die Länge von e, wenn wir von dieser Zone zur nächstfolgenden übergehen, deren Grenze in N liegt, $e + de$, so haben wir nach E 1 und E 5 aus

$$e^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta,$$

da auf der rechten Seite nur ϑ veränderlich ist,

$$2e\,de = 2ar\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

und daraus

$$\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{e}{ar}\, de.$$

Setzen wir diesen Wert in unsern Ausdruck ein, so erhalten wir für die Anziehung der ganzen Kugelzone

$$A \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Lassen wir hierin e nach und nach alle der Kugelschale entsprechenden Werte annehmen, also e von $a - r$ bis $a + r$ sich ändern, so gibt uns die Summe der unendlich vielen Ausdrücke, die den einzelnen zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werten von e entsprechen, die Anziehung der ganzen Kugelschale.

Die Anziehung der ganzen Kugelschale ist somit das Integral

$$\int_{a-r}^{a+r} A\, \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de,$$

oder, da wir den nicht von e abhängigen Faktor vor das Integralzeichen schreiben können,

$$A\, \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2} \int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Das Integral zerfällt in zwei, von denen das erste nach E 1 und E V

$$\int_{a-r}^{a+r} de = (a + r) - (a - r) = 2r,$$

das zweite nach denselben Regeln, da $\frac{de}{e^2} = -d\frac{1}{e}$

$$\int_{a-r}^{a+r} (a^2 - r^2)\frac{de}{e^2} = -(a^2 - r^2)\left(\frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r}\right) = 2r.$$

Die Summe der beiden Integrale ist somit gleich $4r$ und damit der Ausdruck für die Anziehung der ganzen Kugelschale

$$A\cdot\frac{4r^2\pi\cdot\delta\cdot\sigma\cdot m}{a^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist $4r^2\pi$ die Oberfläche der mit dem Radius r beschriebenen Kugel, $4r^2\pi\delta$ somit das Volumen und $4r^2\pi\delta\cdot\sigma$ die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir diese Masse mit M, so erhalten wir für die Anziehung der Kugelschale auf die im Abstande a von ihrem Mittelpunkte befindliche Masse m

$$A\cdot\frac{M\cdot m}{a^2},$$

oder die Kugelschale zieht die Masse m gerade so an, als wenn die gesamte Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Was nun für diese Kugelschale gilt, dasselbe gilt für alle, in welche wir uns die Kugel zerlegt gedacht haben, selbst dann, wenn die einzelnen Schalen eine verschiedene Dichtigkeit haben, jedoch in einer und derselben Schale die Dichtigkeit σ überall die gleiche ist. Wir erhalten deshalb ganz allgemein den Satz, daß die Anziehung einer homogenen oder einer aus konzentrischen Schalen zusammengesetzten Kugel, bei der nur die einzelnen Schalen überall dieselbe Dichtigkeit haben, nach außen gerade so wirkt, als wäre die ganze Masse derselben im Mittelpunkte vereinigt.

Zur Vergleichung der Anziehung, welche der Mond von der Erde erhält, mit der Schwere auf der Erde, müssen wir also auch für die auf der Erde befindlichen Gegenstände als anziehenden Punkt den Mittelpunkt der Erde ansehen, als Abstand der Masseneinheit auf der Oberfläche von der anziehenden Masse der Erde somit den Radius der Erde einsetzen.

Für die auf die Masseneinheit des Mondes wirkende Anziehung erhielten wir 0,2706, für die auf der Erdoberfläche wirkende 981; ist deshalb die Schwere mit der allgemeinen Massenanziehung identisch, so müssen sich diese Zahlen umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung der beiden Massen vom Mittelpunkte der Erde, oder es muß

$$g = 981 = 3600\,G = 3600\cdot 0,2706$$

sein. Führen wir die angedeutete Multiplikation aus, so erhalten wir aus der Anziehung des Mondes

$$g = 974,2,$$

eine Zahl, die so nahe mit der aus der Pendelbewegung gefundenen übereinstimmt, daß unter Berücksichtigung der gemachten nicht ganz genauen Annahmen dadurch der sicherste Beweis geführt ist, daß die Schwere mit der allgemeinen Anziehung identisch ist.

Dieser Satz, daß die Schwere mit der allgemeinen Gravitation identisch ist, und daß die Erde auf alle auf ihr befindlichen Gegenstände gerade so

wirkt, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt, führt unmittelbar zu der am Schluß von § 31 erwähnten Folgerung, daß ein Pendel in verschiedener Höhe über der Erdoberfläche eine verschiedene Schwingungsdauer haben, oder daß g in verschiedenen Höhen verschieden groß sein muß. In einer Höhe h über der Erdoberfläche muß der Wert von g nach dem Gesetze der Massenattraktion sich ergeben aus der Gleichung

$$g : g_0 = R^2 : (R + h)^2$$
$$g\,(R + h)^2 = g_0 R^2,$$

wenn g_0 die Beschleunigung an der Erdoberfläche oder im Niveau des Meeres bedeutet; es ist somit

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2},$$

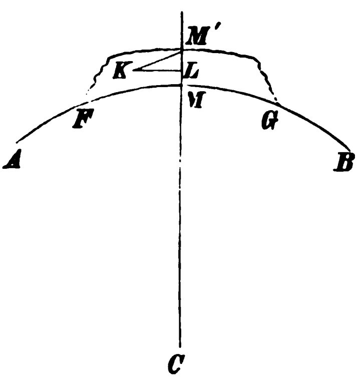
oder mit hinreichend großer Annäherung, da h gegen R immer sehr klein ist,

$$g = g_0 \left(1 - 2\,\frac{h}{R}\right); \quad g_0 = g\left(1 + 2\,\frac{h}{R}\right),$$

ein Ausdruck, der uns gestattet, aus den in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche oder dem Meeresniveau beobachteten Werten von g den Wert von g_0 für das Meeresniveau zu berechnen.

Poisson hat darauf aufmerksam gemacht[1]), daß diese Korrektion des Wertes g auf das Meeresniveau nur dann zulässig ist, wenn man sich in einem isolierten Punkte in der Höhe über dem Meeresniveau befindet, nicht aber, wenn der Punkt auf einem ausgedehnten Festlande in der Höhe h gegeben ist. In diesem Falle wird nämlich die Beschleunigung g' gleich der soeben berechneten vermehrt um die Anziehung des Festlandes. Dieselbe läßt sich in folgender Weise berechnen. Sei (Fig. 51) C der Mittelpunkt der Erde, AMB das Meeresniveau, $FM'G$ ein sich über demselben befindendes Festland und M' ein Punkt auf demselben in der Höhe h über M. Wir betrachten dann das Festland als einen um die Vertikale CM' gelegten Zylinder von der Höhe h und dem Durchmesser $2c$. Aus diesem Zylinder denken wir uns an irgend einer Stelle einen unendlich dünnen Kreisring geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der Achse CM' liegt, dessen Radius $KL = y$, dessen Breite gleich dy ist, dessen Abstand LM' von der Oberfläche gleich z, dessen Dicke dz ist. Das Volumen des Ringes ist dann

Fig. 51.



$$2\pi\, y\, dy\, dz.$$

Ist σ die Dichte des Festlandes, also die Masse der Volumeneinheit

1) *Poisson,* Traité de mécanique Bd. I. § 255.

so wird gerade wie vorhin die gegen C gerichtete Anziehung dieses Ringes auf die in M' befindliche Masse m

$$A \frac{2\pi\sigma' m y dy dz}{KM'^2} \cos KM'L.$$

Nun ist

$$KM'^2 = y^2 + z^2; \quad \cos KM'L = \frac{LM'}{KM'} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Damit wird die Anziehung des Ringes

$$A\, 2\pi\sigma' m \frac{yz dy dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Anziehung des Festlandes ist die Summe der Anziehungen aller dasselbe zusammensetzenden Ringe, die wir erhalten, wenn wir in dem letzten Ausdrucke für y und z alle dem Festlande entsprechenden Werte einsetzen. Zur Bildung dieser Summe berechnen wir zunächst die Anziehung einer Platte von der Dicke dz, welche in der Tiefe $LM' = z$ unter M' liegt; diese ist die Summe der Anziehungen aller Kreisringe, deren Radius zwischen $y = 0$ und $y = c$ ist, somit das nach y genommene Integral von $y = 0$ bis $y = c$

$$2\pi A\sigma' m z dz \int_0^c \frac{y dy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dasselbe ist, da nach E IV und E 1

$$\frac{y dy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = d\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right),$$

$$2\pi A\sigma' m z dz \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + z^2}}\right).$$

Die Anziehung des Festlandes ist dann die Anziehung aller Platten, die zwischen $z = 0$ und $z = h$ liegen, also das Integral des letztern Ausdruckes von $z = 0$ bis $z = h$. Dieses ist aufgrund derselben Regeln

$$\varphi = 2\pi A\sigma' m \left(h + c - \sqrt{c^2 + h^2}\right).$$

Ist die horizontale Ausdehnung des Festlandes gegen die Höhe h sehr groß, so können wir unter dem Wurzelzeichen h^2 gegen c^2 vernachlässigen und erhalten

$$\varphi = 2\pi A\sigma' m h.$$

Die Beschleunigung, welche die Masse infolge dieser Anziehung erhält, ist

$$\gamma = \frac{\varphi}{m} = 2\pi A\sigma' h.$$

Somit wird

$$g' = g + \gamma = g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right) + 2\pi A\sigma' h.$$

Ist nun σ die Masse der Volumeneinheit unserer Erde, dieselbe als gleichmäßig dicht vorausgesetzt, so ist die Masse der Erde

$$\tfrac{4}{3} R^3 \pi\sigma,$$

somit die auf die Masseneinheit an der Oberfläche wirkende Anziehung oder die derselben erteilte Beschleunigung

$$g_0 = A\,\frac{\frac{4}{3}R^3\pi\sigma}{R^2} = \tfrac{4}{3}\pi A\sigma R.$$

Damit wird

$$\frac{\gamma}{g_0} = \frac{2\pi A\sigma' h}{\frac{4}{3}\pi A\sigma R} = \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}$$

oder

$$g' = g_0\left(1 - 2\,\frac{h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}\right)$$

und mit hinreichender Genauigkeit

$$g_0 = g'\left(1 + \frac{2h}{R} - \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}\right).$$

Die in diesem Falle anzubringende Korrektion ist also eine erheblich kleinere, als wenn man sich in einem isolierten Punkte in der Höhe h über der Erde befindet.

Ist ein Punkt in der Höhe h' über dem Festlande gegeben, so erhalten wir die Anziehung des Festlandes auf denselben, indem wir beachten, daß die nächste Scheibe, deren Anziehung auf denselben wirkt sich nicht im Abstande 0, sondern im Abstande h' von demselben befindet. Wir haben dann nur das zuletzt gebildete Integral nicht von $z = 0$ bis $z = h$, sondern von $z = h'$ bis $z = h + h'$ zu nehmen. Dasselbe wird

$$\varphi' = 2\pi A\sigma' m\left(h + h' - h' + \sqrt{c^2 + h'^2} - \sqrt{c^2 + (h + h')^2}\right).$$

Ist nun h' ebenso wie h gegen c klein, so wird auch jetzt

$$\varphi' = 2\pi A\sigma' m h.$$

Die Anziehung des als Zylinder betrachteten Festlandes ist auf Punkte, welche nicht weit über demselben liegen, von dem Abstande dieser Punkte unabhängig. Die Beschleunigung g'', welche ein Punkt in dieser Höhe erhält, ist dann

$$g'' = g_0\left(1 - \frac{2(h + h')}{R}\right) + 2\pi A\sigma' h$$

$$g'' = g_0\left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R} - \frac{2h'}{R}\right) = g' - g_0\,\frac{2h'}{R}$$

oder

$$\frac{g'}{g''} = \frac{1}{1 - \frac{g_0}{g'}\,\frac{2h'}{R}} = 1 + \frac{g_0}{g'}\,\frac{2h'}{R}.$$

Jolly hat diese Zunahme der Anziehung direkt beobachtet[1]). In einem Turm zu München, der von drei Seiten frei stand, wurde 25^{m} über dem Boden eine empfindliche Wage aufgestellt, an der man bei einer Belastung von 5^{kg} auf jeder Seite noch $0{,}01^{\mathrm{mg}}$ ablesen konnte. Von jeder Wagschale führte ein Draht, geschützt durch eine Röhre von Zinkblech in den Turm hinab. An den unteren Enden der Drähte waren ebenfalls

1) *Jolly*, Abhandlungen der Münchener Akademie **14**. II. Abtlg. 1883.

Wagschalen aufgehängt. Der Abstand der unteren und oberen Schalen ergab sich zu $21{,}005^{\mathrm{m}}$.

Wiegt man einen Körper in dem oberen Schalenpaar ab und bringt ihn dann in die untere Schale, während die ihn äquilibrierenden Gewichte in der oberen Schale beobachtet werden, so nimmt das Gewicht des Körpers in dem Verhältnis der Beschleunigungszunahme $\frac{g'}{g''}$ zu, während das Gewicht der vorher ihn oben äquilibrierenden Gewichtsstücke ungeändert bleibt. Man muß daher in die obere Wagschale, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, der Gewichtszunahme des nach unten gebrachten Körpers entsprechend, Gewichte hinzulegen. Ist m die Masse des Körpers, so ist der Antrieb, welchen der Körper durch die Schwere oben erhält, gleich mg'', unten gleich mg', somit ist

$$\frac{mg'}{mg''} - 1 = \frac{g_0}{g'}\,\frac{2h'}{R}; \qquad mg' - mg'' = \frac{g_0}{g'}\,\frac{2h'}{R}\,mg''.$$

Als abzuwägender Körper wurde eine mit Quecksilber gefüllte Glasflasche angewandt. Um den später zu besprechenden Einfluß des Gewichtes der verdrängten Luft auszuschließen, wurden zunächst vier Glaskolben von gleichem Volumen und gleichem Gewichte hergestellt. Zwei der Kolben wurden mit dem gleichen Gewichte Quecksilber gefüllt und alle Kolben an der Glasbläserlampe zugeschmolzen. Das Gewicht m des Quecksilbers war

$$m = 5009\,450^{\mathrm{mg}}.$$

Es wurden nun zunächst die beiden gefüllten Kolben auf die obern, die beiden leeren auf die untern Wagschalen gelegt und durch Hinzufügen der erforderlichen Ausgleichgewichte scharf das Gleichgewicht hergestellt. Darauf wurde an der einen Seite der mit Quecksilber gefüllte Kolben nach unten, der leere Kolben nach oben gebracht, das Quecksilber somit dem Mittelpunkte der Erde um $21{,}005^{\mathrm{m}}$ genähert. Es mußten zur Herstellung des Gleichgewichtes oben $31{,}686^{\mathrm{mg}}$ hinzugefügt werden, so daß

$$mg' - mg'' = 31{,}686 \cdot g''.$$

Nach der Theorie soll demnach

$$31{,}686 \cdot g'' = \frac{g_0}{g'}\,\frac{2h'}{R}\,mg''.$$

Der Erdradius R in der Breite von München, $48^0\,8'$ n. Br. ist

$$R = 6\,365\,722^{\mathrm{m}}.$$

Es müßte demnach das Zulagegewicht μ sein

$$\mu = \frac{g_0}{g'} \cdot 2 \cdot 21{,}005\,\frac{5009450}{6365722} = \frac{g_0}{g'} \cdot 33{,}059^{\mathrm{mg}}$$

München liegt auf einer Hochebene von 515^{m} Höhe; nehmen wir für die Dichte σ' etwa die Hälfte der mittleren Dichte der Erde, so würde

$$\frac{g_0}{g} = 1{,}00011$$

$$\mu = 33{,}063.$$

Der theoretische Wert der Gewichtsdifferenz ist also etwas größer der beobachtete. Jolly glaubt, daß der Grund dieser Abweichung der i daß in der Umgebung des Turmes der Boden etwas höher war als d Boden des Turmes, so daß von der Umgebung ein kleiner nach oben g richteter Zug ausging.

§ 41.

Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten. Ist die B schleunigung g eine Folge der Anziehung der Erdmasse auf die an d Oberfläche befindlichen Körper, so muß der Wert derselben an verschieden Punkten der Erde verschieden sein. Denn die Erde dreht sich in 24 Stund um ihre Achse, und jeder Punkt beschreibt in dieser Zeit einen Krei dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstand desselben von der Erd achse. Die bei der drehenden Bewegung auftretende Zentrifugalkraft such daher alle Punkte von der Erde zu entfernen. Da aber diese Radien und somit die Kreise um so kleiner werden, je mehr wir uns den Polen nähern so wird auch die Rotationsgeschwindigkeit und mit ihr die Zentrifugal beschleunigung im quadratischen Verhältnisse kleiner. Die Zentrifugalkraf wirkt aber auch nur unter dem Äquator der Schwere gerade entgegen an allen andern Orten bildet ihre Richtung, da sie senkrecht zur Erd achse ist, mit der Richtung der nach dem Mittelpunkt der Erde gehende Anziehung einen Winkel, der gleich ist der Breite des Ortes. Nur d in der Richtung der Schwere fallende Komponente, welche gleich d Produkte aus der Zentrifugalkraft in den Kosinus der Breite ist, wi an diesen Orten der Schwere entgegen. Es muß deshalb die Beschle nigung der Körper durch die Schwere zunehmen, so wie wir uns vo Äquator zu den Polen entfernen.

Andererseits ist, wie uns geodätische Messungen lehren, die E nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid, zwar, daß die Abplattung, das Verhältnis der Differenz zwischen Äquato und Polarradius zum Äquatorialradius $= {}^1/_{299}$ ist. Daraus folgt aber, wir dem Mittelpunkt der Erde näher kommen, wenn wir uns vom Äq aus zu den Polen hin bewegen. Es muß also auch aus diesem Gr die Beschleunigung des freien Falles zunehmen, da, wie wir vorhin zeigt haben, die Erde alle auf ihr befindlichen Körper so anzieht, als die gesamte anziehende Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

Mit diesen Forderungen der Theorie ist die Beobachtung im klang, sie zeigt uns, daß die Beschleunigung vom Äquator zu den P hin zunimmt, und daß sie stärker zunimmt, als sie es allein wegen Abnahme der Zentrifugalbeschleunigung tun müßte. Ja noch mehr, theoretische Mechanik gibt uns an, in welcher Weise wegen der Abplatt die Beschleunigung wachsen muß, und gibt uns so ein Mittel an die H aus der beobachteten Beschleunigungsänderung die Abplattung theor zu berechnen. Der so erhaltene Wert stimmt sehr nahe mit de geodätischen Messungen abgeleiteten überein.

Die Änderungen der Größe g hat man aus den Änderungen der des Sekundenpendels bestimmt. Man hat

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}};$$

ir $t = 1$, so wird

$$g = \pi^2 \cdot l.$$

genügt also, die Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten
n. um daraus den Wert für g zu erhalten.
ı ist nach den Messungen von Sabine reduziert auf das Meeresniveau

Breite.	Länge des Sekundenpendels. cm.	g. cm.
0°	99,0938	978,009
45°	99,3509	980,552
90°	99,6080	983,089.

se Werte für g, sowie alle an verschiedenen Orten beobachteten,
ich wiedergeben und durch die von Helmert[1]) im Jahre 1884
te Formel darstellen

$$g = 978{,}009 + 5{,}190 \sin^2 \varphi,$$

r mit φ die Breite des Ortes bezeichnen, an welcher die Beschleu-
gleich g cm ist.

Jahre 1901 hat Helmert[2]) mit Berücksichtigung der später ge-
Messungen der Formel die Gestalt gegeben

$$g = 978{,}046 \{1 + 0{,}005302 \sin^2 \varphi - 0{,}000007 \sin^2 2\varphi\}$$

welcher Weise g sich ändern müßte, wenn nur die Zentrifugal-
igung es affizierte, läßt sich leicht berechnen. Die Zentrifugal-
nigung am Äquator ist

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{2\pi \cdot 40000000}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 0^{\mathrm{m}},03368 = 3{,}368^{\mathrm{cm}}.$$

Radius der Kreise, in welchem sich die nicht unter dem Äquator
. Punkte bewegen, ist der senkrechte Abstand der Punkte von
ungsachse der Erde. Nennen wir daher die Breite eines Ortes φ,
$R \cos \varphi$. Die Zentrifugalbeschleunigung ist also für einen Ort
Breite φ gleich $3{,}368 \cos \varphi$. Die in die Richtung der Schwere
und ihr entgegenwirkende Komponente ist demnach $3{,}368 \cos^2 \varphi$.
wir G die Beschleunigung durch die Schwere, wenn die Zentri-
nicht vorhanden wäre, so ist die wirklich stattfindende Be-
ung g

$$g = G - 3{,}368 \cos^2 \varphi.$$

ist für den Äquator, wo $\varphi = 0$ ist, nach Sabine

$$G = 978{,}009 + 3{,}368.$$

ausgesetzt, daß nur die verschiedene Zentrifugalkraft die Beschleu-
ndert, muß dies aber auch die Beschleunigung durch die Schwere

1) Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höhern
II Teil: Die physikalischen Theorien etc. Leipzig 1884.
2) Helmert, Sitzungsber. der Berliner Akad. 1901 Nr. 14.

an allen Orten der Erde sein, demnach allgemein die um die Zentrifu
beschleunigung verminderte und zu beobachtende Beschleunigung g

$$g = 978{,}009 + 3{,}368 - 3{,}368 \cos^2 \varphi$$

$$g = 978{,}009 + 3{,}368 \sin^2 \varphi.$$

Nach unserer obigen aus der Beobachtung abgeleiteten Formel ist Koeffizient von $\sin^2 \varphi$ größer, so daß also die Beschleunigung g in Tat stärker zunimmt, als sie es nur der Abnahme der Zentrifugalk wegen tun würde.

Um aus der Beschleunigungsänderung die Abplattung zu berechn dient das Clairautsche Theorem[1]), nach welchem die Summe des Quotien aus der Beschleunigungsdifferenz am Pol und Äquator und der Beschl nigung am Äquator, und der Abplattung gleich dem Zweiundeinhalbfac des Quotienten aus der Zentrifugalbeschleunigung und der Beschleuni durch die Schwere am Äquator ist, oder

$$\frac{\Delta g}{g_0} + e = 2{,}5 \frac{c}{g_0},$$

wenn Δg den Unterschied der Beschleunigung an dem Pole und Äquator, g_0 die Beschleunigung am Äquator, e die Abplattung und c an dem Äquator stattfindende Zentrifugalbeschleunigung bedeutet. W erhalten daraus für die Abplattung

$$e = 2{,}5 \frac{c}{g_0} - \frac{\Delta g}{g_0}$$

oder, wenn wir die eben erhaltenen Zahlenwerte einsetzen,

$$e = 2{,}5 \frac{3{,}368}{978{,}046} - \frac{5{,}1856}{978{,}046} = 0{,}003308 = \frac{1}{302}.$$

Man sieht, daß dieser aus den Pendelschwingungen unter Annah daß die nicht kugelförmige Anordnung der Erdmasse die Beschleuni ändere, berechnete Wert für die Abplattung sehr nahe mit dem du geodätische Messungen erhaltenen übereinstimmt. Der Unterschied ka nicht auffallen, wenn man einerseits die Schwierigkeit der Messungen wägt und andererseits bedenkt, daß die besondere Bodenbeschaffenheit d Ortes auf die Pendelschwingungen von Einfluß ist.

§ 42.

Dichtigkeit der Erde. Daß die Bodenbeschaffenheit auf die wegung des Pendels von Einfluß ist, folgt direkt aus dem experime Nachweis, daß die einzelnen Körper auf der Erde anziehend aufein wirken. Die ersten, welche diesen Nachweis lieferten, waren die engl Physiker Cavendish und Maskelyne. Cavendish zeigte, daß

1) *Clairaut*, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743. Das ergibt sich aus der Untersuchung, welche Gestalt die Erde annehme unter der Voraussetzung, daß die Erde früher eine flüssige Masse gew und unter der Voraussetzung, daß nicht die ganze Masse der Erde h sondern daß die Erde aus konzentrischen homogenen Schalen bestehe.

…e Bleimasse eine metallene Kugel anzieht, Maskelyne bewies, daß …s Pendel in der Nähe großer Gebirge aus der Vertikalen abgelenkt wurde.

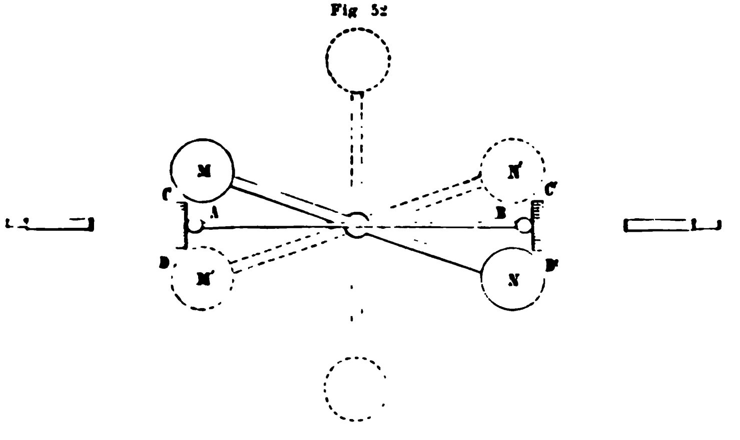
Beide Anziehungen sind gemessen und durch Vergleichung mit der …ziehung der Erde die Masse der Erde bestimmt.

Die ersten Versuche wurden von Cavendish durchgeführt nach …gender von Michell angegebenen Methode.

Ein leichter und gleichmäßig gearbeiteter Hebel von Tannenholz AB (Fig. 52) ist in seiner Mitte an einem sehr feinen Metalldrahte horizontal …gehängt, welcher an der Decke eines verschlossenen Zimmers befestigt …t. An seinen Enden trägt er zwei ganz gleiche Kugeln A und B und …n diesen zwei mit einer Teilung versehene Elfenbeinplättchen CD und $C'D'$. Faden und Hebel sind von einem hölzernen Gehäuse umgeben, um …ie Luftströmungen abzuhalten. Die Seiten desselben bei A und B sind …on Spiegelglas, um die Teilungen CD und $C'D'$ beobachten zu können. Die Beobachtungen der Teilungen geschehen mittels zweier mit Fadenkreuz …sehener Fernrohre, welche den Teilungen gegenüber in der Mauer des Zimmers angebracht sind.

Wir haben schon im § 34 die Bedingungen kennen gelernt, unter …nen ein solches System im Gleichgewicht ist und dort ebenfalls erwähnt, …daß dasselbe infolge der im nächsten Abschnitt näher zu besprechenden …rsion des Drahtes als horizontales Pendel Schwingungen um die Gleich…wichtslage vollführt, wenn durch Drehung des Stabes um die Achse des …fhängedrahtes das System aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist.

Fig. 52.



…gt daraus, wie wir sahen, daß auf den abgelenkten Stab ein Drehungs…ment wirkt, welches ihn gegen die Gleichgewichtslage zurückführt, und … dem Ablenkungswinkel φ, denselben in Bogenmaß als Bruchteil … 2π gemessen gleich ist

$$D = F\varphi.$$

Das Drehungsmoment F, wenn φ gleich 1 ist, erhalten wir durch …achtung der Schwingungsdauer t aus der Gleichung

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{F}}.$$

Das Trägheitsmoment K bestimmt man füglich nach der in § 34 besprochenen Methode.

Ist F auf diese Weise bestimmt, so erhalten wir die an A und B anzubringende Kraft, welche eine Ablenkung φ hervorbringt, aus der Erwägung, daß F die im Abstande eins von der Drehungsachse anzubringende Kraft ist, wenn $\varphi = 1$ ist. Nennen wir den Abstand der Mittelpunkte der Kugeln A und B von der Achse des Drahtes l, so ist die zu einer Ablenkung φ an jeder der Kugeln anzubringende Kraft

$$f = \frac{1}{2} \frac{F}{l} \cdot \varphi.$$

Der Bogen φ wird bei der Anordnung von Cavendish dadurch bestimmt, welcher Teilstrich der Skala CD oder $C'D'$ an Stelle des Nullpunktes der Skala am Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs erscheint. Sei das der n-Teilstrich und sei α der Abstand zweier Teilstriche, so ist, da der Bogen φ dem Radius 1 entspricht

$$\varphi = \frac{n\alpha}{l},$$

damit wird die an A und B angreifende Kraft, welche der Hebel um n Teilstriche ablenkt,

$$f = \frac{1}{2} \frac{F}{l} \frac{n\alpha}{l}.$$

Eine solche Ablenkung des Hebels wurde hervorgebracht durch die beiden Bleikugeln M und N von je 158^{kg} Gewicht, welche in einer passenden Entfernung von den beiden Kugeln A und B aufgestellt werden konnten. Dieselben sind an den Enden eines drehbaren Stabes befestigt, der von außen gedreht wird, ohne daß der Beobachter in das zu den Messungen dienende Zimmer eintritt. Man kann diesen Stab senkrecht zu AB stellen und ihn ebenso in der Lage MN und $M'N'$, die symmetrisch sind zu der Ruhelage des Stabes AB, feststellen. In der ersten Lage beeinflussen die Kugeln die Lage des Hebels nicht; beide Kugeln ziehen sowohl A als B ganz gleichmäßig an, diese Anziehungen können demnach eine Änderung der Stellung des Hebels nicht bewirken. Man beobachtet zunächst die Stellung des Hebels, wenn die Kugeln diese Lage haben, und nimmt diese Lage des Hebels als die Gleichgewichtslage. Darauf bringt man die Kugeln in die Lage MN; jetzt zieht M die Kugel A, N die Kugel B an; der Hebel dreht sich und erreicht eine neue Gleichgewichtslage, wenn die Anziehung von M auf A und von N auf B gleich der Kraft f geworden ist, mit welcher die Torsionskraft den Faden zurückzudrehen sucht. Sei die beobachtete Ablenkung n. Eine zweite Messung macht man, indem man die Kugeln in die Stellung $M'N'$ bringt, man erhält dann die Ablenkung n nach der entgegengesetzten Seite. Da man die Ablenkungen nach beiden Seiten nie absolut gleich findet, nimmt man als richtigen Wert von n die halbe Summe beider Ablenkungen.

Es möge bemerkt werden, daß man in allen den drei Fällen [die] Ruhelagen nicht direkt beobachten kann, weil der Stab stets kleine Schw[in]gungen vollführt. Da die Schwingungen nur klein sind, erfolgt aber s[tets] eine hinreichende Anzahl derselben mit konstanter Amplitude. Man nim[mt]

halb als Gleichgewichtslage die Mitte zwischen den beiden äußersten gen.

Aus der gemessenen Ablenkung n ergibt sich die Anziehung jeder der geln A oder B nach der vorhin abgeleiteten Gleichung

$$f = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{F}{l} \cdot \frac{n\alpha}{l},$$

nd aus dieser die Dichtigkeit der Erde in folgender Weise.

Ist die Kugel M in der Entfernung e von dem Mittelpunkte der Kugel A, wenn sie in ihrer Ruhelage war, aufgestellt, so ist die Entfernung der beiden Kugelmittelpunkte nach der Ablenkung $e_1 = e - n\alpha$. Ist p die Masse bezw. das Gewicht der Kugel A, P dasjenige der Kugel M, so ist

$$f = A \frac{pP}{e_1^2}.$$

Ist E die Masse und R der Radius der Erde, so ist der Zug, den die Kugel vom Gewichte p gegen die Erde hin erfährt, gleich gp, gleich der Anziehung, welche die Masse E im Abstande R auf die Kugel ausübt, also

$$gp = A \frac{pE}{R^2},$$

wenn A die Anziehung der Masseneinheiten bedeutet, welche sie in der Einheit der Entfernung aufeinander ausüben.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{f}{gp} = \frac{PR^2}{Ee_1^2}.$$

Bezeichnen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde mit d, so ist

$$E = \tfrac{4}{3} \pi R^3 d,$$

so

$$\frac{f}{gp} = \frac{\tfrac{3}{4} P}{\pi R d e_1^2},$$

$$d = \frac{\tfrac{3}{4} P \cdot gp}{\pi R e_1^2 f}.$$

Cavendish wandte zu seinen Versuchen zwei Drähte mit sehr verschiedenen Werten von F an; die Schwingungsdauer t des ersten betrug 14 Minuten, die Anzahl n der Teilstriche, um welche die Kugel abgelenkt wurde, war etwa 16; die Schwingungsdauer des zweiten Drahtes war $t = 7$ Minuten, $n = 5{,}7$. Mit beiden Drähten erhielt er für d denselben Wert

$$d = 5{,}48.$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist darnach $5\tfrac{1}{2}$ mal größer als jene des Wassers.

In späterer Zeit wurden die Versuche zunächst von Reich in Freiberg im Jahre 1837 wiederholt. Derselbe fand in der letzten Berechnung dieser Versuche im Jahre 1851 denselben Wert wie Cavendish $d = 5{,}49$. Später unternahm Baily zu London im Auftrage der königlichen Astronomischen Gesellschaft eine große Reihe von Versuchen und erhielt nach Korrektion einiger Fehler als Mittel aus mehr als 2000 Versuchen $d = 5{,}67$, also

etwas größer wie Cavendish. Darauf bestimmte Reich 1852 nochmals Wert von d und fand ihn gleich 5,5832. Cornu und Baille erhi nach derselben Methode bei zwei Versuchsreihen einmal den Wert 5 das andere Mal 5,55.

Boys[1]) wandte als Aufhängefaden einen feinen Quarzfaden an, er kurz vor seinen Versuchen über die Dichte der Erde darzustellen lehrt hatte.[2]) Bei der geringen Torsionskraft eines solchen Quarzfa konnte er die Dimensionen seines Apparates erheblich verkleinern trotzdem eine große Ablenkung des die kleinen Kugeln tragenden He erhalten. Als Resultat erhielt er $d = 5{,}527$.

C. Braun[3]) brachte Draht und Hebel, um von Luftströmungen m lichst wenig gestört zu sein, in einen sehr stark luftverdünnten Ra Er beobachtete einmal wie Cavendish die Ablenkung, welche der H durch die seitlich angebrachten Kugeln M und N (Fig. 52) erhielt, d aber auch die Veränderung der Schwingungsdauer, wenn die Kugeln und N in die Verlängerung von AB gebracht wurden. Da in die Lage die Kugeln M und N den Kugeln A und B einen Antrieb ge die Gleichgewichtslage gab, so mußte die Schwingungsdauer verklei werden. Als definitives Resultat seiner Versuche erhält Braun $d = 5{,}527$

Jolly[5]) hat das Verfahren von Cavendish in der Weise modifizi daß er direkt die Wage benutzte, um die Anziehung einer großen Ma auf eine andere zu messen. Unter der einen Wagschale der in § 40 l schriebenen Wage, auf dem Boden des Turmes wurde aus passend geform Bleibarren eine Bleikugel von 1^{m} Durchmesser aufgebaut, so daß d Mittelpunkt der Kugel vertikal unter dem Aufhängedraht der Wagsch sich befand. Es wurde dann genau wie § 40 verfahren, es wurde mit Quecksilber gefüllte Glaskugel oben abgewogen, dann die Kugel n unten gebracht, so daß sich ihr Mittelpunkt vertikal über dem Mittelpu der Bleikugel befand, und nun das Zulagegewicht bestimmt, welches forderlich war, um die Wage wieder ins Gleichgewicht zu bringen. Di Zulagegewicht war größer als in dem § 40 betrachteten Falle, weil j außer der Vermehrung der Schwere die Anziehung der Bleikugel auf Quecksilber zur Wirksamkeit kam. Ist r der Radius der Bleikugel, δ d Dichtigkeit, e der Abstand des Mittelpunktes des Quecksilbers von Mittelpunkte der Bleikugel, so ist die Beschleunigung, welche das Qu silber gegen den Mittelpunkt der Bleikugel erfährt,

$$\gamma_1 = A \tfrac{4}{3} \pi r^3 \delta \frac{1}{e^2}.$$

Für die Beschleunigung, welche das Quecksilber von der Erde er erhielten wir § 40

$$g' = A \tfrac{4}{3} \pi d R \left(1 - 2\frac{h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2 d R}\right),$$

1) *Boys,* Nature 1. p. 330. 366. 417. 571. 1894.
2) *Boys,* Phil. mag. 23. (5). p. 489. 1887.
3) *Carl Braun,* Denkschr. der mathem.-naturw. Klasse der Wiene 64. p. 187. 1896.
4) *Jolly,* Abhandlungen der Münchener Akademie 14. II. Abt. — W Annalen 14. p. 331. 1881.

wenn wir jetzt entsprechend der in diesem Paragraphen gewählten Bezeichnung die mittlere Dichtigkeit der Erde mit d bezeichnen. Wie wir sahen, ist der in der Klammer stehende Ausdruck, wenn wir $\sigma' = 0{,}5d$ setzen, gleich 0,99989, wir können dafür ohne weiteres 1 setzen, da in den hier zu berechnenden Dezimalen der Unterschied ganz ohne Einfluß ist. Dann wird

$$\frac{\gamma_1}{g'} = \frac{r^3 \delta}{R d e^2} = \frac{q}{Q},$$

wenn wir mit q das nach Anbringen der Bleikugel erforderliche Zulagegewicht, mit Q das Gewicht des Quecksilbers bezeichnen. Damit wird

$$d = \delta \frac{r^3 Q}{R e^2 q}.$$

Die Versuche ergaben, daß nach Anbringen der Bleikugel zur Herstellung des Gleichgewichtes $0{,}589^{\mathrm{mg}}$ mehr erforderlich waren als ohne dieselbe, es ist somit

$$q = 0{,}589^{\mathrm{mg}}.$$

Wie wir § 40 bereits angaben, war

$$Q = 5009450^{\mathrm{mg}}$$

$$R = 6365722^{\mathrm{m}}.$$

Den Durchmesser der Bleikugel ergaben direkte Messungen zu $0{,}995^{\mathrm{m}}$, somit ist

$$r = 0{,}4975.$$

Der Abstand e des Mittelpunktes der Quecksilberkugel von dem Mittelpunkte der Bleikugel ist gleich r plus dem Halbmesser der Quecksilberkugel plus dem Abstande der beiden Oberflächen. Ersterer war $0{,}0445^{\mathrm{m}}$, letzterer $0{,}0266^{\mathrm{m}}$; es ist somit

$$e = 0{,}5686^{\mathrm{m}}.$$

Zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit δ der Bleikugel wurde das Gewicht der aus 115 Stücken zusammengesetzten Kugel bestimmt und durch das Volumen der Kugel dividiert. Es ergab sich in dieser Weise

$$\delta = 11{,}186.$$

Durch Einsetzen dieser Zahlenwerte ergibt sich

$$d = 5{,}692$$

mit einer Unsicherheit von $\pm 0{,}068$, so daß nach diesen Versuchen die mittlere Dichtigkeit der Erde mindestens 5,624 und höchstens 5,760 wäre. Der von Jolly erhaltene Wert ist dem von Baily erhaltenen fast gleich.

In ähnlicher Weise wie Jolly hat Poynting[1]) die Anziehung zweier Kugelmassen gemessen und daraus die Dichtigkeit der Erde abgeleitet. Poynting erhält in zwei Beobachtungsreihen das eine Mal den Wert 5,46, das andere Mal den Wert 5,52, im Mittel 5,4934, also einen Wert, der fast genau dem von Reich gefundenen entspricht.

---

1) *Poynting*, Proceedings of Royal Society 28 1878. Philosophical Transactions for the year 1891. *Graetz*, Physikalische Revue. 1 p. 457, 561, 700.

Die gleiche Methode wandten Richarz und Krigar-Menzel[1]) an mit dem Unterschiede, daß sie an jeden Arm der Wage eine Bleikugel hingen, deren eine über, deren andere unter einem nahezu würfelförmigen Bleiklotze von fast 100000^{kg} sich befand; die Anziehung des Bleis kam dadurch doppelt zur Wirkung, indem die Kugel am einen Ende des Wagebalkens nach oben, am andern Ende nach unten gezogen wurde. Wegen der Anordnung des Apparates im einzelnen müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen. Als Resultat der Beobachtungen ergab sich $d = 5{,}505$.

Wilsing[2]) vertauschte die Wage mit einem Pendel, einem hohlen Messingrohr von etwa 1^{m} Länge, das oben und unten, wie es Fig. 41 (S. 141) angedeutet ist, eine Kugel trug. Die Schneide, mit welcher das Pendel auflag und um welche es schwingen konnte, befand sich nahe der Mitte, so daß der Schwerpunkt des Pendels nahe unter der Achse war. Zwei Eisenzylinder an den Enden eines Drahtseiles, das über eine Rolle lief, je 350^{kg} schwer, konnten so gestellt werden, daß der eine oben rechts und der andere unten links von der betreffenden Pendelkugel hing, oder so, daß der letztere oben links, der erstere unten rechts sich befand. Es wurde die Ablenkung des Pendels aus der Gleichgewichtslage beobachtet, aus der sich das Drehungsmoment ergab, das die anziehenden Massen dem Pendel erteilten, welches dann mit dem von der Erde dem Pendel erteilten verglichen wurde. Als schließliches Resultat erhielt Wilsing $d = 5{,}579$.

Auf zwei Dezimalen abgerundet ergibt sich aus den besprochenen Messungen, indem wir allen gleiches Gewicht beilegen $d = 5{,}53$.

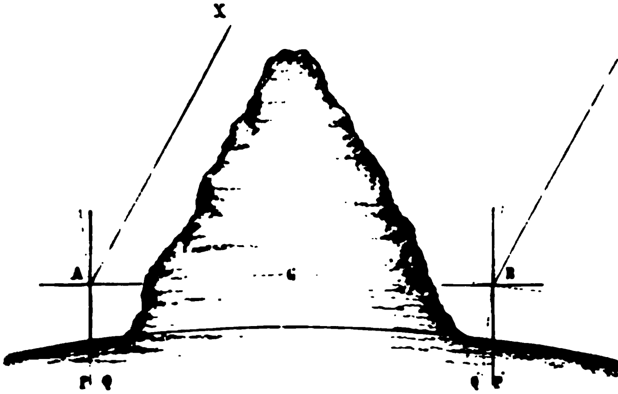
§ 43.

Versuche von Maskelyne. Die ersten Versuche zur Messung der Dichtigkeit der Erde rühren von Maskelyne her; die von ihm angewandte Methode benutzt die Beobachtung der Ablenkung des Lotes durch große Gebirgsmassen. Die Beobachtungen Maskelynes wurden an der Bergkette Shehallien in Portshire in Schottland ausgeführt. Der Shehallien ist ein isolierter von West nach Ost sich erstreckender Gebirgszug, dessen geognostische Zusammensetzung bekannt ist, und der eine einfache Form hat. Man konnte daher sein Volumen, sein Gewicht und die Lage seines Schwerpunktes berechnen. Maskelyne wählte zwei Stationen A und B (Fig. 53), die nördlich und südlich von dem Berge in einer durch den Schwerpunkt desselben gehenden Ebene und auf demselben Meridiane lagen. Zunächst wurde die Polhöhe beider Orte bestimmt. Wenn der Gebirgszug nicht vorhanden gewesen wäre, so hätten die beiden Lote AP und BP einen Winkel miteinander gebildet, der gleich der Breitendifferenz der beiden Orte ist. Die Anziehung der zwischen beiden Orten liegenden Gebirgsmassen bewirkt, daß die Richtung der Lote AQ und BQ' wird, oder daß die Richtung der Horizontalen gegen den Berg hin sich erhebt und die Polhöhe in B vermehrt, in A vermindert ist. Man mißt daher die

1) *Richarz* und *Krigar-Menzel,* Wiedem. Ann. **64**. p. 177. 1898.
2) *Wilsing,* Publik. d. astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. **6**. p und 129.

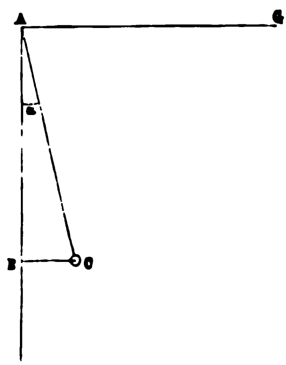
Polhöhe und leitet daraus für jede Station die Ablenkung des Lotes her, indem man von dem Unterschiede der Polhöhen die vorher bestimmte Breitendifferenz abzieht.

Fig. 53.



Wirkt an einer der Stationen (Fig. 54) z. B. A die Anziehung der Erde nach AO auf das Lot vom Gewichte p mit einer Kraft gleich $A\frac{Pp}{R^2}$, so wirkt daneben die Anziehung des Berges in der Richtung AG, die wir als horizontal voraussetzen, mit einer Kraft gleich $A\frac{P'p}{D^2}$, wenn wir mit P' das Gewicht des Berges und mit D den Abstand seines Schwerpunktes vom Orte A bezeichnen. Das Lot ist demnach von zwei aufeinander senkrechten Kräften angegriffen, es wird sich in die Richtung der Resultierenden AC stellen und mit OA einen Winkel α bilden, der gleich ist der beobachteten Ablenkung des Lotes. Man hat daher

Fig. 54



$$A\frac{Pp}{R^2} : A\frac{P'p}{D^2} = AB : CB, \quad \frac{CB}{AB} = \operatorname{tang}\alpha$$

und daher

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\frac{P'}{D^2}}{\frac{P}{R^2}} = \frac{P'R^2}{PD^2}.$$

Setzen wir wieder

$$P = \tfrac{4}{3}R^3\pi d,$$

so wird

$$d = \frac{0{,}75\,P'}{\pi R\cdot D^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Maskelyne erhielt aus dem von Hutton bestimmten Gewicht P' des Berges und dem Abstande D des Schwerpunktes vom Pendel für d eine Zahl, die nahe gleich 5 war, ein Resultat, welches mit den im vorigen Paragraph besprochenen Versuchen hinreichend übereinstimmt, da auf diese Weise nicht die Genauigkeit erreicht werden kann, wie nach der vorigen Methode.

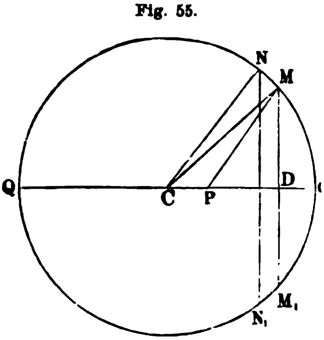
§ 44.

Methode von Airy. Eine interessante Anordnung traf Airy, um den Nachweis der Massenanziehung an den einzelnen Teilen der Erde zu liefern und die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Dieselbe beruht darauf, daß der Wert der Beschleunigung ein anderer wird, wenn man unter die Erdoberfläche hinabsteigt. Um zu übersehen, in welcher Weise diese Veränderung von g stattfindet, denken wir uns die Erde zerlegt in eine Kugelschale von der Dicke x, der Tiefe der durchsunkenen Schicht, und eine Kugel vom Radius $R_1 = R - x$.

Auf einen an der Oberfläche befindlichen Körper wirkt sowohl die Anziehung der innern Kugel als auch der Kugelschale gerade so, als wäre die Masse beider im Mittelpunkte vereinigt, also so, als befände sich die Masse M_1 der innern Kugel und die Masse M_2 der Schale im Abstande R von dem angezogenen Körper.

Anders jedoch, wenn wir uns auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R_1 begeben, also die Schicht x hinabsteigen. Die Kugel mit dem Radius R_1 wirkt nach dem Anziehungsgesetz, da der Körper sich außerhalb derselben befindet, so, als wäre ihre ganze Masse M_1 im Mittelpunkte, also in der Entfernung R_1 vom angezogenen Körper vereinigt. Die Anziehung der Kugelschale x muß aber eine andere sein, da der Körper sich im Innern derselben befindet. Wir können leicht nachweisen, daß eine Hohlkugel auf einen in ihrem Innern befindlichen Körper gar keine Anziehung ausübt, wenn die Schale aus homogenen konzentrischen Schichten besteht; und daraus folgt dann, daß in der Tiefe x unter der Erdoberfläche auf den Körper nur die Masse der innern Kugel aus der ihrem Radius gleichen Entfernung R_1 einwirkt.

Fig. 55.



Stelle, um diesen Nachweis zu führen, der Kreis (Fig. 55) einen Durchschnitt durch eine dünne Schicht der Kugelschale vor, und der Punkt P liege im Innern derselben, im Abstande a vom Mittelpunkte. Legen wir gerade wie in § 40 durch die Kugelschale zwei zu CP senkrechte unendlich nahe Schnitte MM_1 und NN_1, so erhalten wir für die Anziehung dieser Kugelzone auf den Punkt P, indem wir genau dieselbe Entwicklung wie in § 40 anwenden, auch identisch denselben Ausdruck, nämlich unter Benutzung derselben Zeichen,

$$A \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2} \cdot \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale zu erhalten, müssen wir auch in diesem Ausdrucke für e alle möglichen Werte einsetzen und die Summe aller einzelnen Ausdrücke bilden. Die äußersten Werte, welche e annehmen kann, sind aber hier nicht $a - r$ und $a + r$, sondern $PO = r - a$

und $PQ = r + a$. Summieren wir nun genau so wie im § 40, so wird damit die Summe jetzt

$$\int_{r-a}^{r+a}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de = (r + a) - (r - a) + \left(\frac{a^2 - r^2}{r - a} - \frac{a^2 - r^2}{r + a}\right) = 0.$$

Da diese Summe gleich Null ist, so folgt also, daß eine solche Schicht auf einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar keine Anziehung ausübt, und damit, daß überhaupt eine aus konzentrischen homogenen Schichten bestehende Kugelschale einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar nicht anzieht.

Es folgt somit, daß der in der Tiefe x unter der Erdoberfläche befindliche Körper nur von der innern Kugel, deren Radius $R_1 = R - x$ ist, angezogen wird. Suchen wir zunächst, wie sich die Beschleunigungen in der Tiefe und an der Erdoberfläche verhalten müssen.

Die Beschleunigung, welche die innere Kugel an ihrer Oberfläche erteilt, sei g_1. Die Beschleunigung an der Erdoberfläche ist dann gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die innere Kugel an der Erdoberfläche, also im Abstande R von dem anziehenden Mittelpunkte erteilt, und welche die Kugelschale von der Dicke $x = R - R_1$ an ihrer Oberfläche erteilt.

Die Beschleunigung g_1', welche die innere Kugel an der Erdoberfläche erteilt, ist nach dem Anziehungsgesetz

$$g_1' = g_1 \cdot \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Bezeichnen wir die Beschleunigung an der Erdoberfläche wie immer mit g, so gibt uns die Differenz

$$g - g_1'$$

die Anziehung, welche die äußere Schale allein auf einen an ihrer äußern Oberfläche befindlichen Körper ausübt.

Die Anziehungen der äußern Schale sowohl als des innern Kernes geschehen so, als wären die ganzen Massen in ihrem Mittelpunkt vereinigt; sie sind daher proportional diesen Massen selbst oder den Produkten aus ihren Volumen V und V_1 und ihren Dichtigkeiten D und D_1. Wir haben demnach

$$g - g_1' : g_1' = VD : V_1 D_1$$

und indem wir für g_1' seinen Wert einsetzen,

$$\frac{g - g_1 \dfrac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \dfrac{R_1^2}{R^2}} = \frac{VD}{V_1 D_1} = \frac{\frac{4}{3}(R^3 - R_1^3)\pi D}{\frac{4}{3} R_1^3 \pi D_1} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1}$$

$$\frac{g R^2 - g_1 R_1^2}{g_1 R_1^2} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1},$$

ein Ausdruck, den man leicht auf die Form

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^2}{R^2} + \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 R_1} \cdot \frac{D}{D_1} = \frac{R_1^2}{R^2}\left\{1 + \left(\frac{R^3}{R_1^3} - 1\right)\frac{D}{D_1}\right\}$$

bringen kann, und der zu erkennen gibt, daß das Verhältnis der Beschleunigung an der Oberfläche und in der Tiefe abhängig ist von dem Verhältnis der Dichten der äußeren Schale und in der Tiefe. Derselbe zeigt aber gleichzeitig, daß wenn man g_1, R_1 und D beobachtet, D_1 sich berechnen läßt.

Hierauf gestützt, stellte Airy zwei Pendel auf, eines an der Erdoberfläche, eines auf dem Boden des Bergwerkes von Harton in einer Tiefe von 383 Meter. Jedes war, wie bei den Bordaschen Versuchen, vor einer astronomischen Uhr aufgehängt. Man beobachtete die Oszillationen mittels der Methode der Koinzidenzen und bestimmte ihre Dauer durch die Angaben der Uhr. Wenn nun aber die Veränderung der Schwere die Dauer einer Oszillation des Pendels verändert, so ist klar, daß sie auch den Gang der Uhr ändert. Es war deshalb notwendig, den Gang der untern Uhr mit dem der obern zu vergleichen; das geschah mittels elektrischer Signale, welche sich in einer nicht meßbaren kleinen Zeit von der obern zur untern Station fortpflanzten, und durch die man die Zeitangabe der untern Uhr korrigierte.

Die Beobachtung ergab, daß die Beschleunigung durch die Schwere auf dem Boden des Bergwerkes $\frac{1}{19\,190}$ größer war, oder daß

$$\frac{g_1}{g} = 1{,}000052$$

war, ein Resultat, aus welchem sich ergibt, daß D_1 bedeutend größer sein muß als D. Denn wäre das nicht der Fall, so müßte die Schwere in der Tiefe kleiner werden, wäre etwa $D = D_1$, so ergibt sich

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R};$$

die Schwere müßte in demselben Verhältnisse abnehmen, als der Radius der innern Kugel kleiner ist wie der Radius der Erde.

Indem man den Inhalt des Bodens über dem Schachte untersucht, erhält man die mittlere Dichtigkeit der Schale in der Nähe des Ortes, wo die Versuche angestellt wurden. Dieselbe ergab sich zu 2,75. Airy setzte diese Dichtigkeit als die mittlere Dichtigkeit der Kugelschale ein, indem er davon ausging, daß, wenn auch die Kugelschale nicht vollständig homogen ist, doch die nähern Massen vorwiegend einwirken. Die Bestimmungen Airys ergaben ferner, daß, die Tiefe des Hartoner Schachtes gleich 1 gesetzt,

$$R = 16\,621{,}7 \text{ und deshalb } R_1 = 16\,620{,}7,$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für D_1 ein, so erhält man

$$D_1 = 6{,}566,$$

so daß also die Dichtigkeit des innern Kernes, oder da die Masse der obern Schale gegen die des innern Kernes verschwindend klein ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 6,5 mal so groß als die d[es] Wassers wäre.

Gegen die Berechnung Airys hat Haughton den Einwurf gema[cht], daß Airy die Dichtigkeit der Erdrinde erheblich zu hoch genom[men]

habe, da der größere Teil des Harton-Schachtes unter dem Niveau des Meeres liege, er leitet deshalb als mittlere zur Berechnung in betracht zu ziehende Dichtigkeit der Erdrinde die Zahl 2,059 ab. Mit dieser Zahl ergibt sich

$$D_1 = 5{,}480,$$

also dem mit der Drehwage und dem von Poynting gefundenen Werte sehr nahe gleich.

Nehmen wir für die Dichtigkeit der Erde das Mittel aus den gefundenen Zahlen oder rund 5,53, so sind wir dadurch schließlich imstande, die Anziehungen zu berechnen, welche zwei der Einheit gleiche Massen aufeinander aus der Einheit der Entfernung ausüben. Bezeichnen wir die Masse der Erde mit M, so gibt uns das Anziehungsgesetz für die Zahl g die Gleichung

$$g = A\,\frac{M}{R^2},$$

worin A wie früher die Anziehung der beiden Masseneinheiten aus der Entfernungseinheit bedeutet; demnach ist

$$A = g\,\frac{R^2}{M},$$

oder, indem wir für M seinen Wert setzen,

$$A = g \cdot \frac{R^2}{\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot d} = 0{,}75 \cdot g \cdot \frac{1}{R\pi d}.$$

Beziehen wir die hier vorkommenden Größen auf Gramm, Zentimeter, Sekunde, so ist d die Masse des Kubikzentimeters gleich 5,53, da wir 5,53 als das Mittel sämtlicher Beobachtungen für die mittlere Dichtigkeit der Erde einsetzen. $R\pi$ ist der halbe Umfang der Erde, also in Zentimetern 2000000000. Für g setzen wir den der Breite von 45° entsprechenden Wert, vermehrt um den Wert der Zentrifugalbeschleunigung, also $g = 982{,}236$. Mit diesen Werten wird A

$$A = \frac{0{,}75 \cdot 982{,}236}{5{,}53 \cdot 2000000000} = 6{,}661 \cdot 10^{-8}.$$

Zwei Massen, jede ein Gramm, ziehen sich also im Abstande ein Zentimeter mit einer solchen Kraft an, daß, wenn wir uns die eine festgelegt denken, die andere gegen die erste die Beschleunigung $6{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm erhält, oder die Anziehung ist $6{,}6 \cdot 10^{-8}$ unserer Krafteinheit, welche der Masse Gramm in der Sekunde die Beschleunigung 1 cm erteilt.

Die Dimension der als Gravitationskonstante bezeichneten Größe A ergibt sich aus der Gleichung für A, die dasselbe als Produkt einer Beschleunigung g, dem Quadrate einer Länge und dem reziproken Werte einer Masse erscheinen läßt, es ist

$$A = z\,[\mu^{-1}\,\lambda^3\,\tau^{-2}].$$

§ 45.

Ebbe und Flut. Eine wichtige Erscheinung an unserer Erdoberfläche, hervorgehend aus der allgemeinen Massenanziehung und zwar aus

der Anziehung des Mondes und der Sonne, ist das täglich zweimalige Steigen und Fallen des Wassers in den großen Meeren. Wir müssen uns hier begnügen, die Erscheinung in ihren Grundzügen zu erklären.

Die Anziehung, welche der Mond auf die verschiedenen Punkte der Erde ausübt, ist verschieden, da dieselben von dem Monde verschieden entfernt sind. Ziehen wir z. B. durch den Mittelpunkt der Erde eine gerade Linie gegen den Mond, so ist der Mittelpunkt der Erde von dem des Mondes um 60, der Punkt, in welchem die dem Monde zugewandte Erdhälfte von der Geraden getroffen wird, um 59, der entsprechende Punkt auf der abgewandten Erdhälfte 61 Erdradien entfernt. Nennen wir die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit in der Entfernungseinheit f, den Abstand des Erdmittelpunktes vom Monde d und den Radius der Erde R, so erhalten wir für die Anziehung auf jene drei Punkte respektive

$$\frac{f}{d^2} \cdot\cdot \frac{f}{(d-R)^2} \cdot\cdot\cdot \frac{f}{(d+R)^2}$$

und als die Differenzen zwischen den beiden letzten und der ersten Größe

$$\pm \frac{2f \cdot R}{d^3},$$

wenn wir die Glieder der Differenzen, in denen höhere Potenzen von d als die dritte vorkommen, vernachlässigen. Um diese Größe wird also der dem Monde zugewandte Punkt der Erdoberfläche stärker, der vom Monde abgewandte Punkt schwächer angezogen als der Mittelpunkt der Erde.

Wäre die ganze Erde fest, kein Punkt derselben gegen die anderen verschiebbar, so würden diese Differenzen durch die festen Verbindungen so übertragen werden, daß dadurch nur ein Zug auf den Mittelpunkt der Erde entstände. Nun ist aber ein großer Teil der Erde mit Wasser bedeckt, dessen einzelne Teile gegeneinander und gegen die festen Teile der Erde frei beweglich sind. Das Wasser wird daher infolge dieser verschiedenen Anziehungen eine Bewegung annehmen müssen, und zwar wird es, wenn jene Linie zum Beispiel die Erdoberfläche an beiden Punkten im Meere schneidet, sich an beiden Punkten erheben und dafür an den zwischenliegenden fallen müssen Da nämlich an der dem Monde zugewandten Seite das Wasser stärker, an der vom Monde abgewandten Seite schwächer angezogen wird als der Mittelpunkt der Erde, so ist das gerade so, als wenn an beiden Punkten eine der Schwere entgegengesetzte Kraft von der Größe jener Differenz angebracht wäre, wie sich leicht durch folgende Betrachtung anschaulich machen läßt.

Man habe drei Punkte A, C, B; die Punkte A und B werden jeder durch eine Kraft gleich 10, um ein Zahlenbeispiel zu wählen, gegen C hingezogen. Nun seien ferner an den drei Punkten nach gleicher Richtung, z. B. nach rechts hin, folgende Kräfte angebracht; an B die Kraft 3, an C die Kraft 2 und an A die Kraft 1. Diese Punkte befinden sich gewissermaßen in denselben Verhältnissen wie unsere vorhin betrachteten Punkte auf der Erde. In dem Verhältnis der drei Punkte zueinander wird nun nichts geändert, wenn wir von jedem derselben die nach rechts hin ziehende Kraft 2 fortnehmen. Dadurch ist der Punkt C wieder wie anfangs von keiner Kraft affiziert. Am Punkte B bleibt aber die Kraft nach rechts hin, also vom Punkte C fortziehend übrig. An A zog 1

änglich die Kraft 10 gegen C nach rechts, es trat dann noch die Kraft 1 zu, später aber nahmen wir die Kraft 2 wieder fort, es bleibt also nur Kraft 9 nach C hinziehend übrig, oder da wir uns statt der Kraft 9 Kraft 10 nach C hin und die Kraft 1 von C fortziehend denken, so gt, daß durch Anbringen jener Kräfte auch bei A gleichsam eine von fortziehende Kraft entsteht, welche gleich ist der Differenz der von C d A nach rechts hin wirkenden Kräfte.

So also auch bei der Erde. Durch Anziehung des Mondes entsteht den unter dem Monde und den ihm gegenüber an der andern Seite der de liegenden Punkten gleichsam eine das Wasser vom Mittelpunkte der de fortziehende Kraft.

Das Wasser muß also dort steigen und dafür an den mitten zwischen iden liegenden Punkten der Erde fallen. Dadurch müssen also zwei, an ametral gegenüberliegenden Stellen der Erde sich bildende Flutwellen itstehen, deren jede, da die Erde sich in 24 Stunden von Westen nach sten um ihre Achse dreht, die Erde in 24 Stunden von Osten nach Westen mkreisen muß.

In den Meeren muß also täglich zweimal Flut und Ebbe entstehen, a sie jeden Tag den Mond einmal im Zenith, einmal im Nadir haben. Wegen der Eigenbewegung des Mondes in seiner Bahn jedoch, wodurch er Durchgang durch einen bestimmten Meridian täglich um 50 Minuten erzögert wird, verzögert sich auch der Eintritt von Ebbe und Flut jeden Tag um ebensoviel.

Ebenso wie der Mond erzeugt auch die Sonne Ebbe und Flut, jedoch el schwächer, wie man sofort erkennt, wenn man in unsern Ausdruck $\frac{2fR}{d^3}$, er uns die von dem Mittelpunkte fortziehende Kraft angibt, die der Sonne ntsprechenden Größen einsetzt. Bezeichnet M die Masse der Sonne und die Masse des Mondes, so haben wir statt f der Anziehung des Mondes der Abstandseinheit $f \cdot \frac{M}{m}$ zu setzen, und anstatt d die Entfernung der onne von der Erde $d' = 400\,d$, da die Sonne 400mal weiter von uns entfernt ist als der Mond. Die Masse der Sonne M ist 355000mal größer als die der Erde und die der Erde gleich 88 m, also 88mal größer als die des Mondes. Wir haben demnach für die Differenz der Sonnenanziehung

$$\frac{2fR \cdot 355000 \cdot 88}{d^3 \cdot 400^3} = 0{,}488 \frac{2fR}{d^3},$$

so ungefähr die Hälfte des Unterschiedes der Mondanziehung auf die entsprechenden Punkte der Erde. Die Sonnenflut wird daher auch nur die halbe Höhe der Mondflut haben. Durch die vereinte Wirkung von Sonne und Mond wird nun die Fluthöhe entweder vergrößert oder verkleinert. Stehen Sonne und Mond an der gleichen Seite der Erde zur Zeit des Neumondes, oder an der entgegengesetzten, zur Zeit des Vollmondes, so bewirken sie die Fluten, es treten die sogenannten Springfluten ein. Zur Zeit der Quadraturen, also des ersten und letzten Viertels tritt Sonnenflut und Mondebbe an der gleichen Stelle auf und umgekehrt; die Fluten sind dann als Nippfluten die kleinsten.

Durch die verschiedenen Tiefen des Meeres und die Konfiguration des Landes wird der Verlauf der Fluten sowie das Gesetz ihrer Änderung

ein äußerst verwickeltes, welches jedoch La Place in großer Vollständigkeit gelöst hat. Wir müssen uns hier begnügen, darauf hingewiesen zu haben.

Literatur des ersten Abschnittes.

Die bisher vorgetragenen Lehren sind größtenteils so vielfach behandelt und in vortrefflichen Werken zusammengestellt, daß eine Angabe der Originalquellen teils zu weit führen würde, teils nur ein geschichtliches Interesse hat. Wir verweisen daher in betreff der genauern Kenntnis der einzelnen Lehren auf die vielen vorzüglichen Lehrbücher der Mechanik, von denen wir folgende namhaft machen.

1. *Brix, A. F.*, Lehrbuch der Statik fester Körper. Berlin 1849.
2. *Broch, O. J.*, Lehrbuch der Mechanik. Berlin und Christiania 1854.
3. *Burg, A.*, Kompendium der populären Mechanik und Maschinenlehre. 2. A. Wien 1849.
4. *Delaunay, Ch.*, Cours de Mécanique rationelle. 2. éd. Paris 1857.
5. *Duhamel*, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch von Dr. *O. Schlömilch*. 2. A. Leipzig 1858.
6. *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen üb. Dynamik. Herausg. v. *Clebsch*. Berlin 1866.
7. *Jolly, Ph.*, Prinzipien der Mechanik. Stuttgart 1852.
8. *Möbius, A. F.*, Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837.
9. *Poinsot, L.*, Eléments de statique. 9. éd. Paris 1848.
10. *Poisson, S. D.*, Traité de Mécanique. 2. éd. Paris 1833.
11. *Redtenbacher*, Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues. Mannheim 1852.
12. *Jullien, M.*, Problèmes de Mécanique rationelle. Paris 1855.
13. *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig 1870.
14. *Voigt, W.*, Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theoretischen Physik. Leipzig 1889.

Des geschichtlichen Interesses wegen sei es jedoch gestattet, die Autoren und Quellen vorzuführen, von denen die verschiedenen wichtigsten Lehren zuerst vorgetragen sind. Daran schließen wir dann eine Angabe der Literatur der neueren Gegenstände, besonders der Lehren über Erhaltung der Rotations- und Schwingungsebene, die in neuerer Zeit durch den *Foucault*schen Versuch die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sowie über die Bestimmungen von g und der Dichtigkeit der Erde.

Zum ersten Kapitel bemerken wir, daß die Fallgesetze von *Galilei* erkannt und in seinen:

„Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali. Leiden 1638"

vollständig vorgetragen sind.

Die allgemeinen Folgerungen aus diesen Gesetzen zog zuerst *Isaak Newton*. Er legte sie in seinem Werke:

„Philosophiae naturalis principia mathematica. Lond. 1687"

der Behandlung der Lehre von den Bewegungen und Kräften zugrunde. Die drei Prinzipien, welche er anwandte, sind

1) das Prinzip der Trägheit, nur äußere Kräfte ändern den Bewegungszustand eines Körpers;

2) daß die Änderung der Bewegung proportional sei der wirkenden Kraft;

3) das von uns § 11 erläuterte Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Unsere im § 11 aus der Gleichung für die Bewegung einer konstant wirkenden Kraft abgeleiteten Gleichungen $Mv = Pt$ und $\frac{1}{2} Mv^2 = Ps$, wurden die erstere von *Cartesius* in seinen Principiis philosophiae abgeleitet und dabei das Produkt Mv als das Maß der bewegenden Kraft aufgestellt; die zweite entwickelte *Leibnitz* und glaubte seinerseits das Produkt Mv^2 als Maß der bewegenden Kraft dem *Cartesi*schen gegenüberstellen zu müssen:

„Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum. Acta eruditorum. Leipzig 1686, März."

Daran knüpfte sich ein langer Streit, der vorzugsweise in den Actis erudi-um geführt wurde.

D'Alembert wies dann 1743 in seinem Traité de dynamique nach, wie der se Streit nur ein Wortstreit sei und durch eine präzisere Begriffsfassung er-igt werde.

Die im zweiten Kapitel vorgetragenen Sätze über die statischen Momente l den Schwerpunkt rühren ursprünglich schon von Archimedes her:

„Archimedes von Syracus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen versehen von *Ernst Nizze* Stralsund 1824."

Theoretische Beweise für das Hebelgesetz gaben zuerst *Cartesius* und *New-*, ersterer im Tractatus de mechanica in den opusculis postumis Amstellod.)1. Letzterer in den Principiis liber I. Leges motus, lex III.

Die Gesetze der Zentripetalkraft entwickelte zuerst *Huyghens* in seinem erke: Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato monstrationes geometricae. Paris 1673; ausführlicher finden sie sich mit Be-isen in der opusculis postumis. Leiden 1703 in der Abhandlung de vi centri-ga p. 401 u. f.

Die Theorie der Wage wurde zuerst vollständig entwickelt von *Leonhard* uler in den Kommentarien der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu etersburg. Tom. X.

Die Pendelgesetze wurden zum Teil schon von *Galilei* entwickelt, nämlich, aß Pendel von gleicher Länge in gleichen Zeiten ihre Schwingungen voll-ren, auch wenn die Gewichte ungleich sind, und daß bei ungleich langen Pendellängen sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen ver-alten.

Huyghens baute dann in seinem soeben genannten Werke die Theorie weiter us und fügte die Sätze hinzu, daß nur unendlich kleine Schwingungen genau sochron sind, und daß die Dauer eines Hin- und Herganges des Pendels sich ur Dauer des freien Falles durch die doppelte Pendellänge verhalte wie die 'eripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser, also

$$t : 2\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi : 1,$$

woraus dann die Zeitdauer einer Schwingung, wie wir sie gefaßt haben, die ein-malige Zurücklegung des Bogens hervorgeht.

Von *Huyghens* rührt die Unterscheidung des einfachen und zusammengesetz-ten Pendels und die Zurückführung des letztern auf das erstere her, wie wir sie orgetragen haben.

Die erste Bestimmung von g mittels des Pendels machte *Huyghens*, er fand g = 15 Fuß und 1 Zoll.

Die von uns mitgeteilte Methode von *Borda* befindet sich in

„Base du Système Métrique etc., redigée par M. Delambre. Tome III. p. 337. Paris 1810"

und mit Berücksichtigung des Gewichtes des Fadens

„Biot et Arago: Recueil d'observations géodésiques astronomiques et physiques executées par Ordre du Bureau des Longitudes. Paris 1821."

Die zweite Methode wurde vorgeschlagen von *Bohnenberger* in seiner Astro-nomie. Tübingen 1811.

Die Ausführung von Kapt. *Kater* ist beschrieben

„Philosophical transactions of the Royal Society of London for the year 1818, p 33 ff"

Auf die Erhaltung der Rotationsebene machte *Bohnenberger* bei Bekannt-machung seines Apparates aufmerksam. *Gilbert*, Annalen 60, p. 60. 1818.

In neuerer Zeit ist die Literatur über diesen Gegenstand sehr bedeutend angeschwollen, seit *Foucault* diese Eigenschaft der rotierenden Körper zum Be-weise der Achsendrehung der Erde vorschlug. Man sehe unter andern außer in en Werken über Mechanik, über die freien Achsen

Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouville Journal de mathé-matiques 1851 (*Poinsot*, Neue Theorie der Drehung der Körper, übersetzt von *Schellbach* Berlin 1851.)

L. Foucault, Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixeté du plan de rotation. Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. **35**. p. 421. Paris 1852. Ferner C. R. **35**. p. 424, p. 602.

Person, L'appareil de *Bohnenberger* peut servir à constater la rotation de la terre. C. R. **35**. p. 417, 549 und 753. 1852.

J. Plücker, Über die Fesselsche Rotationsmaschine, Poggend. Ann. **90**. 1853.

J. C. Poggendorff, Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine. Poggend. Ann. **90**. p. 348. 1853. (Die von uns mitgeteilte Erklärung.)

G. Magnus, Verbesserte Konstruktion eines Apparates zur Erläuterung verschiedener Erscheinungen bei rotierenden Körpern. Poggend. Ann. **91**. 1854.

Der Foucaultsche Pendelversuch wurde zuerst mitgeteilt in der Abhandlung von *Foucault:*

L. Foucault, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. C. R. **32**. p. 135. 1851, auch Poggend. Ann. **82**. 1851.

Seitdem sind eine Menge von Mitteilungen erschienen, welche teils Wiederholungen des Versuches darstellen, teils dazu dienen, das Gesetz, nach welchem sich die Dauer der Drehung unter verschiedenen Breiten ändert, zu bestimmen.

Eine vollständige Zusammenstellung der Literatur über diesen und den vorigen Gegenstand findet sich in den Berichten über die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin in den Jahren 1850, 1851, Berlin 1855; 1852, Berlin 1855; 1853, Berlin 1856 usf., in dem Abschnitt über Mechanik, Foucaultsche Versuche.

Die im dritten Kapitel vorgetragenen Lehren über die allgemeine Attraktion hat *Newton* in dem bereits erwähnten Werke Principia etc. entwickelt.

Die drei *Kepplerschen* Gesetze, auf welche *Newton* seine Entwicklungen stützte, teilte *Keppler* mit, die beiden ersten 1609 in seiner Astronomia nova *αἰτιολογητός*, sive physica coelestis tradita commentariis de motu stellae Martis, Pragae 1609; das dritte, welches er am 15. Mai 1618 auffand, in Epitome astronomiae Copernicanae, Lincii 1618.

Die Verschiedenheit von g an verschiedenen Orten der Erde behauptete *Newton* zuerst, und der französische Astronom *Richer* zeigte 1670, daß das Sekundenpendel in Cayenne unter 5° n. Br. 1,25 Linien kürzer sei als in Paris.

Die ältern Messungen von g sind zusammengestellt in *Gehlers* physikalischem Wörterbuch, 2. Aufl. von *Brandes, Munk, Pfaff, Littrow, Gmelin, Horner.* Bd. **3**. Artikel Erde p. 891 ff. Neuere Messungen unter andern von *Peters* findet man in den astronomischen Nachrichten Jahrg. 1880, von *Bruhns* in den Publikationen des königl. preußischen geodätischen Instituts, Arbeiten im Jahre 1870. Leipzig bei Engelmann 1871. Man sehe auch die Besprechung der neuern Pendelmessungen von *Helmert* in der Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft **11**, Heft 1 und ebenso die schon zitierte Abhandlung von *Helmert* in den Berichten der Berliner Akademie 1901. Nr. 14.

Cavendish, Versuche über die Dichtigkeit der Erde sind mitgeteilt in den Philosophical Transactions **88**, auch Gilbert Annalen **2**. 1799.

Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mit der Drehwage. Freiberg 1838.

Baily, Experiments with the Torsion Rod for determining the mean density of the Earth. Vol. XIV. of the Mem. of the Royal Astron. Society. London 1843. Unter demselben Titel auch besonders erschienen.

Reich, Abhandlungen der mathematisch-physik. Klasse der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. **1**. 1852.

Cornu und *Baille,* C. R. **76**. p. 954. 1897.

Maskelyne und *Hutton,* Philosoph. Transact. 1775 und 1778.

Airy, Philosoph. Transact. **146**. 1856.

Die Zitate betreffs der neuern Versuche sind schon bei der Besprechung der Versuche mitgeteilt.

Die Erklärung von Ebbe und Flut gab zuerst *Newton* in seinen Principiis phil. nat. lib. I. prop. 66 und lib. III. prop. 24. 36. 37.

Vollständig ausgeführt ist sie von *Laplace,* Mécanique céléste livre IV u. XIII. Man sehe *Gehlers* Physik. Wörterbuch. 2. Aufl. **3**. Artikel „Ebbe und Flut".

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

§ 46.

Beschaffenheit der Materie. Bei unsern bisherigen Untersuchungen über die Wirkung von Kräften auf die Körper haben wir die letztern als absolut starr angesehen, indem wir nur die Bewegungen ins Auge gefaßt haben, welche die Körper als solche unter der Wirkung der Kräfte annehmen. Untersuchen wir die Einwirkung der Kräfte auf die Körper aber genauer, so finden wir auch dann, wenn die Körper keine Bewegung annehmen, daß dieselben durch die auf sie einwirkenden Kräfte Veränderungen erfahren. Wir sehen, daß die festen Körper verlängert oder verkürzt und gebogen werden können, wir sehen Bewegungen in einer Flüssigkeitsmasse eintreten, kurz wir sehen, daß die einzelnen Teile eines Körpers gegeneinander verschiebbar sind.

Die Erscheinungen dieser Art, das übersieht man unmittelbar, werden außer von den äußern wirksamen Kräften wesentlich bedingt sein von der innern Struktur der Körper, oder was dasselbe ist, von der innern Struktur dessen, was die Körper bildet, der Materie. Ehe wir deshalb zur Untersuchung dieser Erscheinungen übergehen, wird es vorteilhaft sein zu untersuchen, ob wir nicht schon von anderer Seite her über diese Struktur der Materie einigen Aufschluß erhalten können, der uns die Untersuchung der an den Körpern beobachteten physikalischen Erscheinungen erleichtert.

Die erste Erfahrung, welche wir in betreff der Struktur der Körper machen, ist die Teilbarkeit derselben; es gibt keinen Körper, der nicht in Teile zerlegt, der nicht zerstückt werden kann. Diese Teilbarkeit geht so weit, daß es nicht möglich ist, eine Grenze derselben zu erreichen oder zu bestimmen. Um sich davon zu überzeugen, genügt es an ein Beispiel zu erinnern: ein wenig Moschus verbreitet in dem Raume, in dem es aufbewahrt wird, einen sehr starken Geruch, weil es fortdauernd in demselben einen Teil seiner Substanz zerstreut; dennoch kann es lange Zeit in dem Raume gelassen werden, ohne daß sich sein Gewicht an einer selbst sehr

empfindlichen Wage meßbar vermindert. Erst Salvioni[1]) ist es gelungen, den Gewichtsverlust des Moschus nachzuweisen, indem er als Wage einen feinen Glasfaden verwandte, der an seinem einen Ende eingeklemmt war, so daß der Faden horizontal war. Wird das andere Ende des Fadens belastet, so biegt sich der Faden, das belastete Ende sinkt herab, umsomehr, je größer die Belastung ist und je feiner der Glasfaden ist, wie wir bei Besprechung der Biegung sehen werden. Wie Salvioni angibt, kann man an solchen Glasfäden von hinreichender Feinheit noch Gewichte von $0{,}001^{\mathrm{mg}}$ erkennen. Mit Hilfe eines solchen als Wage dienenden Glasfadens konnte Salvioni erkennen, daß ein Stückchen Moschus stetig, und zwar der Zeit proportional an Gewicht abnahm.

Bei dieser großen Teilbarkeit kann man zwei Annahmen über die Konstitution der Materie machen; man kann entweder annehmen, die Materie sei bis ins Unendliche teilbar, oder man komme bei fortgesetzter Teilung schließlich auf Teilchen, welche nicht weiter geteilt werden können, auf Atome. Macht man die letztere Annahme, so muß die Materie aus diesen kleinsten Teilchen aufgebaut sein, die im Innern als solche existieren, sie muß ein Aggregat dieser einzelnen Teile, dieser Atome sein, die in mehr oder weniger großen Abständen nebeneinander gelagert sind, ohne sich zu berühren, die sich anziehen oder abstoßen können, welche sich einander festhalten, wie in den festen Körpern, oder gegen einander beweglich bleiben, wie in den flüssigen oder gasförmigen Körpern.

Macht man dagegen die erstere Annahme, ist die Materie, wenn auch nur ideell, bis ins Unendliche teilbar, so können in der Materie keine diskreten Teilchen als solche existieren, sondern jedes Teilchen ist nur ein Teil des Ganzen. Daraus folgt dann, daß nach dieser Anschauungsweise die Materie den Raum eines Körpers kontinuierlich erfüllen muß, natürlich Spalten und Poren in demselben ausgenommen. Denn sobald man innerhalb der Materie eine Diskontinuität zugibt, hat eben das für sich bestehende Teilchen eine selbständige Existenz, es ist der Baustein, aus welchem die Materie zusammengesetzt ist.

Schon die hierin gegebene Fragestellung beweist, daß es sich hier um die Wahl einer von zwei möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie handelt, somit auch, daß wir bei der Entscheidung der Frage mit aller der Vorsicht verfahren müssen, welche bei der Bildung von Hypothesen angewandt werden muß. Wir haben nach den in der Einleitung aufgestellten Prinzipien die Hypothese zu wählen, welche die von der Struktur der Materie abhängigen Erscheinungen am einfachsten und ohne weitere Hilfshypothesen verständlich macht; die Erfahrungen der Chemie sind es, welche wir zunächst ins Auge zu fassen haben.

Wir können diese Erfahrungen in folgenden wenigen Sätzen zusammenfassen:

1. Zwei verschiedene Materien können sich zu einer dritten neuen, deren Eigenschaften von denen ihrer Bestandteile wesentlich verschieden sind, verbinden; so der brennbare Wasserstoff und der die Verbrennung unterhaltende Sauerstoff zu dem nicht brennbaren Wasser; das magnetische

1) Salvioni, Journal de phys. théor. et appliquée **10**. (3.) p. 761. 1901.

Metall Eisen und der brennbare Schwefel zu dem nicht magnetischen, nicht metallischen Schwefeleisen.

Bei dem Übergange des Gemenges zweier Materien in die Verbindung findet stets eine Änderung des Wärmezustandes, in den meisten Fällen eine Wärmeentwicklung statt. Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in passenden Verhältnissen gemischt unter heftiger Explosion, und die Flamme des so mit Sauerstoff gemischten Wasserstoffs, des Knallgases, erzeugt eine der höchsten erreichbaren Temperaturen. Bei der Herstellung des Schwefeleisens kommt die ganze Masse in ein lebhaftes Glühen.

Die Mengenverhältnisse der einzelnen Materien, welche in eine Verbindung eingehen, sind immer dieselben. Wasserstoff und Sauerstoff treten zu Wasser immer nur in dem Verhältnis zusammen, daß auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff kommen, Schwefel und Eisen zu Schwefeleisen nur so, daß zu je einem Gewichtsteil Schwefel 1,75 Gewichtsteil Eisen treten, und so in allen Fällen.

4. Zwei Materien können sich in verschiedenen Verhältnissen zu neuen Materien verbinden; so kann Wasserstoff mit Sauerstoff außer zu Wasser noch zu einem zweiten Körper zusammentreten, zu Wasserstoffdioxyd; die Menge des Sauerstoffs, die dann zum Wasserstoff tritt, ist gerade die doppelte der im Wasser vorhandenen, auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff kommen 16 Gewichtsteile Sauerstoff. Eine zahlreiche Reihe von Verbindungen bildet z. B. der Stickstoff mit dem Sauerstoff, die Verbindungen sind Stickoxydul, Stickoxyd, Salpetrigsäureanhydrid, Stickstofftetroxyd und Salpetersäureanhydrid. Die Gewichtsmengen Sauerstoff, welche zu je einem Gewicht Stickstoff getreten, verhalten sich in diesen Verbindungen der Reihe nach wie $1:2:3:4:5$. Im Stickoxydul tritt zur Gewichtseinheit Stickstoff $\frac{8}{14}$ Gewicht Sauerstoff, in den folgenden das Doppelte, Dreifache und so fort. Ähnlich ist es bei anderen Körpern: so liefert das Metall Mangan eine Reihe von Verbindungen, dieselben enthalten:

1	Manganoxydul . . .	auf	1 Gewichtsteil	Mangan	$\frac{8}{27,5}$	Sauerstoff
2	Mangansuperoxyd .	„	1 „	„	$2 \cdot \frac{8}{27,5}$	„
3	Mangansesquioxyd	„	2 Gewichtsteile	„	$3 \cdot \frac{8}{27,5}$	„
4	Übermangansäure .	„	2 „	„	$7 \cdot \frac{8}{27,5}$	„
5	Manganoxyduloxyd	„	3 „	„	$4 \cdot \frac{8}{27,5}$	„

Diese und eine Menge ähnlicher Erfahrungen faßt die Chemie unter dem Gesetze der multiplen Proportionen zusammen, wonach verschiedene Verbindungen je zweier Materien dadurch entstehen, daß die einzelnen Bestandteile nach bestimmten Gewichtsmengen oder nach einfachen Vielfachen dieser Gewichtsmengen zusammentreten.

Bezeichnen wir, um die Sauerstoffmengen und die Manganmengen, welche in den verschiedenen Verbindungen zusammentreten, durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken, 55 Gewichtseinheiten Mangan mit Mn, und 16 Gewichtseinheiten Sauerstoff mit O, so können wir die sämtlichen Manganverbindungen darstellen durch

$$MnO,\ MnO_2,\ Mn_2O_3,\ Mn_2O_7,\ Mn_3O_4.$$

Ebenso können wir auch die Verbindungen des Stickstoffs mit dem Sauerstoff darstellen; bezeichnen wir die Gewichtsmenge 14 des Stickstoffs mit N, so sind die fünf Stickstoffverbindungen

$$N_2O,\ NO,\ N_2O_3,\ NO_2,\ N_2O_5,$$

worin auch hier das Zeichen O die Gewichtsmenge 16 Sauerstoff bezeichnet. Schließlich lassen sich ebenso die Wasserstoffverbindungen als H_2O und H_2O_2 bezeichnen, wenn die Gewichtsmenge 1 Wasserstoff mit H bezeichnet wird.

Bezeichnen wir ganz allgemein jene Gewichtsmenge irgend einer Materie, welche selbst oder von der ein Vielfaches mit 16 Gewichtsteilen Sauerstoff oder mit einem Vielfachen derselben zusammentritt, mit A, so können wir jede Sauerstoffverbindung darstellen durch die Formel

$$mA + n \cdot O,$$

worin m und n stets ganze und zwar nicht große Zahlen sind.

Diese Gewichtsmengen A sind die Mischungsgewichte der einzelnen Materien in bezug auf Sauerstoff; die Chemie bezeichnet dieselben durch die Anfangsbuchstaben der lateinischen Namen der Elemente.

5. Die so bestimmten Mischungsgewichte haben aber noch eine weitere Bedeutung. Die verschiedenen Materien verbinden sich nicht nur mit dem Sauerstoff, sondern auch untereinander nach den beiden angegebenen Gesetzen, dem Gesetze der festen Verhältnisse und dem der multiplen Proportionen. Die Untersuchung der Gewichtsmengen, nach welchen die verschiedenen Materien zusammentreten, zeigt dann, daß dieselben Zahlen, welche die Mischungsgewichte für die Sauerstoffverbindungen angeben, auch gelten für die Verbindung der Körper untereinander. Bedeutet S die Gewichtsmenge 32 Schwefel, so sind die Verbindungen des Schwefels mit Sauerstoff wieder $mS + nO$. Die Verbindungen des Schwefels mit Wasserstoff sind dann $mS + nH$, mit Mangan $mS + nMn$. Bedeutet das Zeichen Cl die Gewichtsmenge 35,5 Chlor, so sind die Sauerstoffverbindungen des Chlors gegeben durch $mCl + nO$. Die Verbindung des Chlors mit dem Wasserstoff ist dann HCl, die Verbindungen des Chlors mit Schwefel wieder $mCl + nS$, die des Chlors mit Mangan $mCl + nMn$, wo immer m und n ganze nicht große Zahlen sind. Kurz, sind A und B die Mischungsgewichte irgend zweier Materien für die Sauerstoffverbindungen, so sind immer mit derselben Bedeutung von m und n, $mA + nB$ die Verbindungen dieser beiden Körper. Auch dann, wenn 3, 4 und mehr Elemente zusammentreten, bleibt immer dieselbe Beziehung bestehen; sind A, B, C, D die Mischungsgewichte von vier Materien, so sind alle ihre Verbindungen dargestellt durch

$$mA + nB + pC + qD,$$

worin m, n, p, q ganze nicht große Zahlen sind.

Gehen wir dazu über, diese Erfahrungen der Chemie mit den beiden gliehen Hypothesen über die Struktur der Materie zusammenzustellen. se derselben haben wir als die für uns wahrscheinliche zu wählen, welche oben experimentell gefundenen Gesetze am ungezwungensten aus sich twickeln läßt, welche, einmal aufgestellt, dieselben als notwendige Folrungen erkennen läßt.

Die Wahl kann uns in diesem Falle nicht schwer fallen. Ist die aterie etwas den Raum stetig Erfüllendes und nicht ein Aggregat selbstndig existierender in gewissen Abständen nebeneinander gelagerter Atome, ist der Vorgang der Verbindung selbst ein höchst dunkler. Die einzige öglichkeit ist dann, daß die Materien sich gegenseitig durchdringen; hmen wir das aber an, warum durchdringen sich die Materien nur in nz bestimmten unveränderlichen Verhältnissen? Wir sehen z. B., daß die ewichtsmenge 14 Stickstoff mit 8, 16, 24 · · · Sauerstoff sich verbinden ann, daß also diese Menge Stickstoff mehr wie 8 Sauerstoff aufnehmen ann, warum nun gerade nur die doppelte, dreifache usw. Menge? Besonders aber warum durchdringen sich die verschiedenen Materien gerade : dem Verhältnis, in welchem sie mit dem Sauerstoff zusammentreten? lle diese Gesetze folgen aus dieser Hypothese über die Konstitution der laterie nicht, jedes derselben verlangt, um mit derselben in Einklang gemacht zu werden, eine neue der Materie beizulegende Eigenschaft; so die Eigenschaft, daß eine Materie in die andere eindringen kann, die Eigenschaft durch eine ganz bestimmte Menge eingedrungener Materie, aber ch durch die doppelte, dreifache Menge gesättigt zu werden usf.; kurz man sieht, jede dieser Tatsachen bedarf zu ihrem Verständnis eine besondere Eigenschaft der Materie, die wir ihr aber lediglich infolge der beobachteten Tatsache beilegen. Das ist aber gerade das Charakteristische ner schlechten Hypothese, daß sie allein nicht hinreicht, die mit ihr in erbindung stehenden Tatsachen zu erklären, daß jede neue Tatsache eine eue Hilfshypothese verlangt.

Wie anders zeigt sich dagegen die zweite Hypothese: nehmen wir an, aß die Materie aus Atomen bestehe, so ergeben sich die beobachteten Tatsachen und die aus ihnen abgeleiteten Sätze als so unmittelbare Folgen, aß man sofort diese Erscheinungen als im Wesen der Materie begründet rkennt.

Zunächst ergibt sich unmittelbar, worin die Verbindung zweier Körper esteht und worin sie sich von dem Gemenge unterscheidet. In dem Gemenge sind die einzelnen Materien ungeändert, jede mit ihren charakteristischen Eigenschaften enthalten, die atomistische Hypothese sagt uns, daß der Grund der ist, daß in einem solchen Gemenge die Atome der einzelnen Materien nebeneinander, jedes für sich existierend, bestehen. Verwandelt ch das Gemenge in eine Verbindung, so treten die Atome der einzelnen Materien zusammen, sie lagern sich fest aneinander und existieren nur mehr ls verbundene Moleküle. Im Wasser existiert nicht mehr das Wasserstoffatom oder das Sauerstoffatom, sondern jedes Sauerstoffatom ist mit zwei Wasserstoffatomen unauflöslich verbunden, und die Verbindung dieser Atome ildet das Molekül Wasser.

1) Im Augenblicke, wo diese Atome zusammentreten, muß jedenfalls eine sehr lebhafte Bewegung derselben eintreten, indem Atom an Atom anprallt und nun die Atome als Atomgruppen oder Moleküle weiter existieren; wir sehen die lebhafte Bewegung in den Wärmeerscheinungen, welche jede chemische Verbindung begleitet.

2) Da in der Verbindung die Atome der einzelnen Materien nicht mehr als solche existieren, so müssen die Eigenschaften der Verbindungen ganz andere sein als diejenigen der Materien, aus welchen sie sich bilden. Denn da die Materie aus den Atomen aufgebaut ist, sind auch die Atome die Träger der Eigenschaften, die wir an der Materie wahrnehmen; die Moleküle der Verbindung sind aber ganz andere als jene der getrennten Materien, es müssen deshalb auch ihre Eigenschaften und somit auch die der Verbindung ganz andere sein als die der Bestandteile.

3) Die Atome der einzelnen Materien haben eine unveränderliche Größe und ein festbestimmtes Gewicht, welches für die verschiedenen Materien verschieden ist. Wenn nun in einer Verbindung je ein Atom der einen Materie sich an je ein Atom der andern anlegt, oder wenn sich je m Atome der einen an je n Atome der andern anlegen, so ist damit auch das Verhältnis der Gewichte, in welchem die Materien in eine Verbindung eingehen, ein ganz festes und bestimmtes; es muß entweder das Verhältnis der Gewichte der einzelnen Atome selbst, oder das Verhältnis der Gewichte von m Atomen der einen zu n Atomen der andern Materie sein. Das experimentell bewiesene Gesetz der Verbindung nach festen Verhältnissen ist der tatsächliche Ausdruck dieser aus der Struktur der Materie gezogenen Folgerungen.

4) Ebenso folgt unmittelbar das Gesetz der multiplen Proportionen. In einer Verbindung können die Materien Atom für Atom zusammentreten, es können aber auch mit je einem Atome der einen $2, 3, 4 \cdots n$ Atome der andern zusammentreten oder auch $2, 3 \cdots m$ Atome der einen mit n Atomen der andern, wo aber m und n, da die Atome nicht teilbar sind, immer ganze Zahlen sein müssen. Das ist aber das Gesetz der multiplen Proportionen, nach dem jede Verbindung zweier Materien nach Vielfachen der Mischungsgewichte derselben erfolgt.

5) Sind aber die Mengenverhältnisse, in welchen die Materien zusammentreten, die Gewichtsverhältnisse ihrer Atome, so folgt schließlich auch, daß dieselben Verhältniszahlen, die für die Verbindungen einer Gruppe maßgebend sind, es für alle sein müssen. Denn sind A und B die Gewichtsmengen zweier Materien, welche sich mit der Menge C einer dritten zu den Verbindungen AC und BC verbinden, so können, da A und B uns die Gewichte der Atome dieser beiden Materien repräsentieren, sie selbst auch nur in den Verhältnissen mA und nB zusammentreten. Das fünfte der vorhin abgeleiteten Gesetze zeigt, daß es in der Tat sich so verhält.

Schon diese Erfahrungen zeigen also die bedeutende Überlegenheit der atomistischen Hypothese; sie zeigen, daß dieselbe jene Eigenschaften besitzt, welche wir von einer Hypothese fordern, wenn wir sie in den Naturwissenschaften zulassen, nämlich daß sie einen einfachen obersten Grundsatz bilde, aus welchem die mit ihr verknüpften Tatsachen unmittelbar folgen.

Die Erscheinungen der chemischen Verbindung sind indes immer noch einseitiges Gebiet, und es genügt nicht, um eine Hypothese zuzulassen, lche eine so allgemeine Bedeutung hat, daß sie sich auf einem solchen rühre, sie muß sich auch auf anderen Gebieten, die von der Beschaffent der Materie bedingt sind, als ebenso stichhaltig bewähren. Wenden uns zu solchen, und zwar zunächst zu den Erscheinungen der chechen Zersetzung.

Wenn wir einen zusammengesetzten Körper, z. B. Wasser, chemisch legen, so erhalten wir aus ihm immer die Bestandteile, welche wir zu ner Zusammensetzung verwandten, also immer Sauerstoff und Wasserstoff nan in den zur Zusammensetzung des Wassers erforderlichen Gewichtsrhältnissen, immer auf einen Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile uerstoff. Diese Tatsache ist nur verständlich, wenn wir das Wasser cht als einen Körper betrachten, aus welchem unter gewissen Umständen asserstoff und Sauerstoff entstehen kann, sondern wenn wir annehmen, aß diese Bestandteile wirklich als solche und zwar in den angegebenen ewichtsverhältnissen im Wasser vorhanden sind. Dann aber müssen diese eiden Stoffe, wenn auch noch so innig verbunden, so doch räumlich geennt sein. Wenn wir nun die Teilung des Wassers immer weiter fortesetzt denken, so müssen wir schließlich auf Wasserteilchen kommen, eren nochmalige Teilung die Bestandteile des Wassers voneinander trennt, eren nochmalige Zerlegung also bewirkt, daß die geteilte Substanz aufört, als solche, wie sie war, zu existieren. Diese letzten Teilchen sind s, die wir Atome nennen.

Man sieht, daß wir den Gesetzen der chemischen Zerlegung zufolge uf das Dasein der Atome geführt wurden, durch den aus jenen Gesetzen ezogenen Schluß, daß in den Verbindungen die Bestandteile, wenn auch icht mehr isoliert, so doch noch als solche existieren. Dieser Schluß, der elleicht auf den ersten Blick nicht ganz exakt erscheinen mag, wird durch nige andere chemische Tatsachen zur unabweisbaren Notwendigkeit.

Die organische Chemie lehrt uns verschiedene Körper kennen, welche ei genau gleicher Zusammensetzung sich doch ganz verschieden verhalten, s sind die sogenannten isomeren Körper im weitesten Sinne des Wortes. Unter diesen isomeren Körpern gibt es eine Gruppe, die metameren, welche bei ganz identischer elementarer Zusammensetzung unter ganz gleicher Behandlungsweise dennoch ganz verschiedene Zersetzungsprodukte liefern.

So gibt es z. B. zwei Verbindungen, welche nach der Formel $C_6H_{12}O_2$ zusammengesetzt sind, das valeriansaure Methyl, welches aus der Einwirkung von Valeriansäure auf Holzgeist entsteht, und das buttersaure Äthyl, entstanden aus der Einwirkung von Buttersäure auf Weingeist; in beiden sind mit 72 Gewichtsteilen Kohlenstoff 12 Gewichtsteile Wasserstoff und 32 Gewichtsteile Sauerstoff verbunden. Beim Einwirken von Kali auf diese beiden, genau aus den gleichen Elementen bestehenden Substanzen ist das Resultat aber sehr verschieden; die eine liefert nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} C_5H_9O \\ CH_3 \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} K \\ H \end{matrix}\right\} O = \left.\begin{matrix} C_5H_9O \\ K \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} CH_3 \\ H \end{matrix}\right\} O$$

valeriansaures Kali und Methylalkohol, die andere nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} C_4H_7O \\ C_2H_5 \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} K \\ H \end{matrix}\right\} O = \left.\begin{matrix} C_4H_7O \\ K \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} C_2H_5 \\ H \end{matrix}\right\} O$$

buttersaures Kali und Äthylalkohol.

Aus einem Körper von genau gleicher Zusammensetzung treten also bei genau gleicher Behandlung ganz verschiedene Körper hervor. Diese Tatsache ist unbegreiflich, wenn wir nicht annehmen, daß in der auf verschiedenen Wegen dargestellten Verbindung $C_6H_{12}O_2$ bereits die Bestandteile der Körper, in die sie zerfallen können, also einmal die Atomgruppen C_5H_9O und CH_3, das andere Mal die Atomgruppen C_4H_7O und C_2H_5 wirklich als solche vorhanden sind. Dann aber müssen sie räumlich getrennt sein; und eine fortgesetzte Teilung muß auf Elemente führen, deren weitere Zerteilung die Substanz in ihre Bestandteile auflöst, auf Atome.

Diese Deduktion[1]) aus den Gesetzen der Zerlegung der Körper bezieht sich allerdings zunächst nur auf die zusammengesetzten Körper, wir werden sie aber auf die sogenannten einfachen Körper ausdehnen müssen. Denn zunächst sind wir nicht berechtigt, diese Körper, welche uns zu zerlegen noch nicht gelungen ist, wirklich als einfache Körper zu betrachten, dann aber besteht zwischen ihnen und den nachweisbar zusammengesetzten Substanzen nicht ein solcher Unterschied, daß wir annehmen dürfen, sie seien von wesentlich verschiedener Natur. Zudem aber lehrt uns auch über diese die Chemie Tatsachen kennen, welche nicht zu verstehen sind ohne die Annahme von Atomen.

Die Chemie zeigt uns nämlich eine Reihe von einfachen Körpern in verschiedenen, den sogenannten allotropen Modifikationen, in denen dieselben Körper ganz verschiedene Eigenschaften haben, ohne daß zu ihnen etwas hinzugetreten oder etwas von ihnen fortgenommen wäre. So kommt die Kohle kristallinisch in zwei ganz verschiedenen Formen vor, als Diamant und als Graphit; beide Formen sind reiner Kohlenstoff, denn die Verbrennung gleicher Gewichtsmengen beider liefert genau die gleiche Menge Kohlensäure. Trotzdem sind die beiden Körper ganz und gar verschieden. Der Diamant ist ein klarer durchsichtiger Körper, härter wie irgend ein anderer, der Graphit schwarz undurchsichtig und so weich, daß er auf dem Papiere abfärbt; er ist das Material unserer Bleistifte. Der Schwefel ist in einer ganzen Reihe verschiedener Formen bekannt[2]), er kommt vor als Rhombenoktaeder kristallisiert, und in klinorhombischen Prismen, bald ist er hart, bald weich wie Kautschuk, bald ist er in Schwefelkohlenstoff löslich, bald unlöslich, der eine ist hellgelb, der andere durchsichtig und braun. Es ist in allen Formen nichts als Schwefel, denn verbrennen wir ihn, in welcher Form es sei, wir bekommen aus allen Formen nichts als schweflige Säure, und bei Verbrennung gleicher Gewichte immer dieselbe Menge.

Ähnliches gilt vom Selen, welches als metallisches und als glasartiges, vom Arsen, welches als metallisches und graphitartiges vorkommt, vom Phosphor usf.

---

1) *Kopp*, Lehrbuch der physikalischen und theoretischen Chemie, als 1. B des Lehrb. d. Chemie v. *Graham-Otto*. 2. Aufl.

2) Man sehe über diese verschiedenen Modifikationen: *Graham-Otto*, Leh der Chemie. 2.

In der Natur findet sich der Schwefel in Rhombenoktaedern kristalli- und in diese Form lassen sich alle übrigen durch gewisse Manipula- n zurückführen. Bei dieser Überführung zeigt sich aber dann im nblicke der Verwandlung eine plötzliche spontane Erwärmung, wie nault gezeigt hat[1]). Aus dem metallischen Selen erhält man das phe glasartige, indem man es schmilzt und dann tropfenweise in kaltes er fallen läßt oder auf einem kalten Bleche ausgießt, überhaupt es erkaltet. Erwärmt man dann das amorphe Selen auf 94° C., so es plötzlich in metallisches über. Dabei zeigt es dann eine sehr chtliche Wärmeentwicklung, die, wie Hittorf[2]) zuerst gezeigt hat, Selen auf eine Temperatur von über 200° erwärmt. Gleichzeitig tritt i eine ganz beträchtliche Verdichtung ein, indem das spezifische Ge- t von 4,28 auf 4,80 steigt[3]).

Diese Tatsachen führen uns unabweislich darauf, auch für die ein- n Körper die atomistische Hypothese zu wählen; denn ist die Materie Kontinuum, so können wir es absolut nicht verstehen, wie ein und dieselbe rie sich verschieden verhalten kann; besteht sie aber aus Atomen, ind die verschiedenen Zustände leicht erklärlich. Die Atome müssen en Körpern eine gewisse Gruppierung haben, und die physikalischen nschaften, Durchsichtigkeit, Härte, Dichtigkeit werden nicht nur von Beschaffenheit, sondern auch von der Gruppierung der Atome ab- ren. Die allotropen Zustände sind dann nichts als verschiedene Lage- ; der Atome.

Werden die Substanzen aus einer Modifikation in die andere über- ihrt, so muß eine Bewegung der Atome eintreten, wir haben sie wahr- mmen in den Wärmeerscheinungen, welche bei dieser Überführung zeigen.

Wir erhalten somit von der Chemie eine ganze Reihe von Tatsachen, e von den beiden möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie ine als durchaus unzulässig erkennen lassen. Wir sind dadurch jeden- berechtigt, unseren Untersuchungen über die an der Materie beob- eten physikalischen Erscheinungen die atomistische Hypothese zugrunde legen. Dabei wird die Fruchtbarkeit dieser Hypothese erst recht her- treten, wenn wir sehen, daß die verwickeltsten Erscheinungen im Lichte er Hypothese sich einfach und ungezwungen erklären lassen. Ja wir den eine ganze Reihe von Erscheinungen finden, die sich ebenso wie Isomerie und die Allotropie überhaupt nur verstehen lassen unter der nahme, daß die Materie ein Aggregat diskreter Teilchen ist, welche n Abständen voneinander befinden, die mit gewissen genau meßbaren & r. der Länge der Lichtwellen vergleichbar sind.

Ehe wir nun zur Besprechung der einzelnen Erscheinungen übergehen, den wir noch die Frage zu beantworten haben, wie wir uns die Atome

1) *Regnault*. Annales de chim. et de phys. I. 3. 1841.

2) *Hittorf*, Poggend. Ann. 84. 1851.

3) Lehmann hat auch für eine große Anzahl zusammengesetzter Körper ..t, daß sie ohne ihren chemischen Charakter zu ändern in verschiedenen ..kationen vorkommen können. Die von Lehmann und andern zum Teil .. früher gemachten Beobachtungen sehe man *Lehmann*, Molekularphysik 2 .. 239. Leipzig 1888.

denn eigentlich zu denken haben. Die Erfahrung gibt uns darüber direkt nichts an; bei der Besprechung dieser Frage begeben wir uns ganz auf das Gebiet der Spekulation, welche nur den Zweck haben kann, den scheinbaren Widerspruch, daß eine gegebene Menge Materie, das Atom unteilbar sein soll, zurückzuweisen.

Für die zusammengesetzten Körper konnten wir vorhin bereits den Begriff des Atomes feststellen, wir nannten die Atome solcher Körper jene Teilchen, welche als die letzten dieser Substanz anzusehen sind, deren weitere Teilung die Substanz in ihre Elemente zerfallen läßt. Für diese ist somit das Atom nicht etwas absolut Unteilbares, sondern nur etwas relativ Unteilbares, es ist also noch ein Teilchen, das eine, wenn auch äußerst kleine, so doch immerhin noch ideell meßbare Ausdehnung hat, da in demselben die Atome der Bestandteile räumlich getrennt sind.

Für die einfachen Körper, für jene, die wir chemisch nicht zerlegen können, liegt der Begriff des Atoms nicht so unmittelbar vor; indes dürfen wir aufgrund der Erfahrungen über Isomerie und Allotropie ihn doch wohl ähnlich fassen. Wir werden nämlich vermuten dürfen, daß die chemisch verschiedenen Elemente in der Tat nicht ebenso viele verschiedene Materien sind, daß es vielmehr überhaupt nur eine Materie gibt, und daß die verschiedenen Stoffe nur Modifikationen dieser Materie sind. Das physische Atom, mit dem wir es überhaupt zu tun haben, ist dann auch für die einfachen Körper nicht etwas absolut Unteilbares, sondern es ist auch noch der Teilung fähig, es ist indes das letzte Teilchen, auf welches wir bei der Teilung eines Stoffes gelangen, dessen weitere Teilung diesen Stoff nicht mehr existieren läßt. Aus solchen einzelnen Teilchen müssen wir die unserer Untersuchung unterworfenen Stoffe aufgebaut annehmen, zwischen diesen sind die Kräfte tätig, deren Wirkungen wir beobachten. Das hiernach definierte kleinste Teilchen der Materie ist also das letzte, welchem wir eine selbständige Existenz zuschreiben; die Chemie bezeichnet dasselbe als Molekül, um anzudeuten, daß sie diese Teilchen noch wohl für teilbar hält. Eine solche Teilung nimmt die Chemie für die Moleküle der einfachen Stoffe noch an, wenn dieselben mit anderen Stoffen in Verbindung treten. So besteht nach den jetzigen Anschauungen das Molekül freien Wasserstoffs aus zwei Atomen, ebenso das Molekül Chlor. Verbinden sich die beiden, so spalten sich ihre Moleküle, und die Elemente treten Atom für Atom aneinander. Treten wir dieser Auffassung des Atoms bei, so gilt natürlich auch für dieses unsere vorige Definition des Atoms ganz ebenso, nur daß damit dem einzelnen Atom als solchem nicht immer mehr eine selbständige Existenz zukommt, daß auch bei einfachen Stoffen dieselben ebenso zu zwei oder mehr verbunden sein können, wie bei zusammengesetzten.

Von den so definierten Atomen und chemischen Molekülen können wir noch das physikalische Molekül unterscheiden, welches aus einer Zusammenlagerung mehrerer chemischer Moleküle bestehen kann, welches sich also zum chemischen Molekül verhält, wie dieses zum Atom. Diese physikalischen Moleküle würden dann die näheren Bestandteile der einzelnen Körper bilden. Zu dieser Annahme führen uns hauptsächlich die allotropen Modifikationen der einfachen Körper; denn auf diese Weise können wir uns am besten die vorhin erwähnte verschiedene Lagerung der Atome denken,

lche die Verschiedenheit in den Eigenschaften der allotropen Modifi-tionen bedingt. Das Atom und das chemische Molekül des Graphits ß dasselbe sein wie des Diamants, da wir in beiden chemisch denselben rper haben: das physikalische Molekül des Graphits unterscheidet sich r von dem des Diamants, indem bei der einen dieser Formen der Kohle e größere oder geringere Zahl von Atomen zu einem Molekül vereinigt d in diesem Molekül dann verschieden gelagert sind.

Physikalisch sind wir hiermit an der Grenze angelangt, zu der wir rch induktorische Schlüsse kommen können, philosophisch ist der Begriff s Atoms und somit derjenige der Materie noch nicht erfaßt. Denn dazu äre die Frage noch zu erledigen: Wie ist denn nun das physikalische tom weiter beschaffen, was entsteht, wenn wir es weiter zerlegen? Daß s Atom nach dem Vorigen selbst wieder, wenn ich so sagen darf, ato-stisch gefaßt werden muß, leuchtet ein; denn nur dann ist die Ver-hiedenheit der physikalischen Atome faßbar, wenn wir sie als Modifikation ner Materie ansehen. Ob aber dann die Grundlage der physikalischen tome, das philosophische Atom, als etwas Ausgedehntes, oder ob es als nfacher, materieller Punkt aufzufassen ist, das ist eine Frage, welche glich der Spekulation angehört, die zu besprechen deshalb hier nicht r Ort ist[1].

Wir können indes die Frage nach der Beschaffenheit der Atome nicht rlassen ohne darauf aufmerksam zu machen, daß man in neuester Zeit dem Bestreben die Naturerscheinungen zu erklären, ohne eine unmittel-re Wirkung in die Ferne zwischen getrennten Teilen der Materie, also ch zwischen den Molekülen annehmen zu müssen, den Versuch gemacht t, die atomistische Auffassung mit der Annahme einer stetig den Raum füllenden Materie zu vereinigen. Diese Auffassung, welche besonders lliam Thomson (jetzt Lord Kelvin) mehrfach durchzuführen ver-cht hat[2], nimmt an, daß der ganze Weltenraum mit einer feinen Materie tig erfüllt sei: das, was wir als körperliches Molekül, als Molekül der barer Materie bezeichnen, ist ein abgegrenzter, durch einen ganz be-mmten Bewegungszustand charakterisierter Teil dieser Materie, ein Helm-ltzscher Wirbelring.

Allen Rauchern und auch den Nichtrauchern sind die Rauchringe kannt, ringförmige Gebilde von Tabakrauch, welche manche Raucher mit oßer Geschicklichkeit durch eine passende Form der Mundöffnung und ftes Ausstoßen des Rauches erzeugen können. Wer nicht imstande ist lche Rauchringe mit dem Munde hervorzubringen, kann sie leicht erhalten.

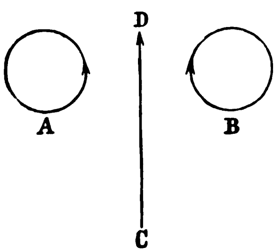
1 Man sehe über die Frage nach der Beschaffenheit der Atome: *Fechner*, omenlehre 2. Aufl. Leipzig 1864. Fechner entscheidet sich dort für die Ein-heit des philosophischen Atoms: seine Deduktion scheint mir indes nicht n allen Widerspruch sicher zu sein. Außerdem sehe man die philosophische leitung in die Enzyklopädie der Physik (herausgegeben von *G. Karsten*) von rme, in welcher man die verschiedenen Anschauungen von dem Wesen der tome zusammengestellt findet. So interessant es auch wäre, so verbieten doch Grenzen dieses Werkes, auf die verschiedenen Theorien einzugehen; ich habe halb oben die dynamische Anschauung nicht einmal erwähnt.

2 *W. Thomson*, Phil. mag 34. (4. 1867 u. 37. 4. 1869; Nature 30 p. 417. 4 *Exner*, Repert d. Phys. 21. 1885. Lectures in Molecular dynamics. Lon-1885

indem er sich einen Hohlwürfel von ganz dünnem Karton, etwa Spi karten, herstellt, und eine Seite mit einem kreisförmigen Loche von et 1^{cm} Durchmesser versieht, wie das Reusch[1]) zuerst gezeigt hat. M füllt durch diese Öffnung den Hohlwürfel mit Tabakrauch; wenn man da auf eine der andern Seitenflächen des Würfels sanft mit dem Finger kr klopft, so entweicht bei jedem Schlage mit dem Finger aus der Öffnu ein schöner Rauchring. Anstatt des Tabakrauches kann man auch, w Rogers[2]) gezeigt hat, Chlorammoniumdämpfe verwenden, die man erhä indem man auf den Boden eines Glasgefäßes Salzsäure gießt und da in das Gefäß Baumwollfäden hängt, welche mit Ammoniak getränkt sin Bringt man an einer Seitenwand des Gefäßes in passender Höhe über da Niveau der Salzsäure eine kreisförmige Öffnung an und bedeckt das Ge fäß mit einer dasselbe dicht schließenden elastischen Membran, so liefe jeder leichte Schlag auf die Membran einen Rauchring.

Wie ebenfalls schon Reusch gezeigt hat, kann man solche Ring auch im Wasser hervorbringen. In die Endwand eines ziemlich lange nicht zu breiten Gefäßes, dessen Seitenwände passend durch Glasplatte gebildet werden, bringt man eine kreisförmige Öffnung an, welche durc einen Schieber verschlossen werden kann. Vor diese Endwand, und zwa so, daß dieselbe die eine Seite desselben bildet, bringt man einen Kaste an, der, wenn das lange Gefäß etwa 1^{m} lang, 2^{dcm} breit und vielleich 3^{dcm} hoch ist, bei gleichem Querschnitt etwa 1^{dcm} tief ist, und dessen de Öffnung gegenüberliegende Wand aus einer elastischen Metallplatte besteh Man füllt, während die Öffnung durch den Schieber geschlossen ist, in da lange Gefäß reines, in den Kasten etwa mit Lakmus gefärbtes Wasser bi zu gleicher Höhe, so daß bei Aufziehen des Schiebers keine Strömun vom Kasten in das Gefäß oder umgekehrt stattfindet. Schlägt man n kräftig mit kurzem Schlage gegen die Metallwand des Kastens, so fäh bei jedem Schlage aus der Öffnung ein de Rauchringen ganz entsprechender Ring gefärbt Wassers in das lange Gefäß hinein.

Fig. 56.



Diese Ringe sind eigentümliche dynami Gebilde; sie bestehen aus einzelnen um die kr förmige Achse des Ringkörpers rotierenden T chen, während der Ring als ganzes in einer Ringebene senkrechten Richtung fortschreitet. Richtung, in welcher der Ring als ganzes f schreitet, ist jene, nach welcher sich die kr den Teilchen auf der innern Seite des R körpers bewegen. Ist also A und B (Fig. 56) Durchschnitt des Ringes, parallel einem Durchmesser desselben, und rot die Teilchen von einem Punkte vor der Ebene der Zeichnung angesehen i Richtung der Pfeilstriche, also in A entgegengesetzt, in B im Sinne wi Bewegung des Uhrzeigers, so schreitet der Ring in der Richtung von C D vor. Die Ringe bestehen nur so lange, wie die wirbelnde Bew

1) *Reusch,* Poggend. Ann. **110**. p. 209. 1860.
2) *Rogers,* American Journal of science (Silliman Journal). **26**. (2). 1857.

er Teilchen und die fortschreitende Bewegung des Ringes dauert. Beide Bewegungen eines Rauch- oder Wasserringes werden wegen der Reibung, welche die bewegten Teile in der Umgebung erfahren, allmählich langsamer; mit der Verlangsamung wird der Durchmesser des Ringes größer, und ist der Ring zur Ruhe gekommen, so zerfließt er, wobei der Rauch in oft eigentümlich geformten Wolken auseinander geht. Eben weil der Ring nur besteht, so lange die Bewegungen dauern, nannten wir ihn ein dynamisches Gebilde.

v. Helmholtz[1]) hat gezeigt, daß in einer unbegrenzten Flüssigkeit, in welcher die Bewegungen ohne jegliche Reibung stattfinden, derartige Wirbelringe von molekularen Dimensionen vorhanden sein können; sind sie vorhanden, so können sie niemals zerstört werden, ebenso müssen sie entweder von jeher vorhanden gewesen, oder durch einen Schöpfungsakt erzeugt sein. Eine Zerstörung der Wirbelringe würde nur durch eine von außen her auf die Flüssigkeit wirkende Gewalt möglich sein, es müßte, wie der schottische Physiker Tait irgendwo sagt, ein Schnitt durch die ganze flüssige Masse geführt werden, die von diesem Schnitte betroffenen Wirbelringe würden zerstört. Die Rechnungen von Helmholtz ergeben aber, daß Flüssigkeitsteilchen, welche nicht einem Wirbel angehören, niemals in eine solche Wirbelbewegung geraten können. Bilden Flüssigkeitsteilchen einen solchen Wirbelring, so bilden sie denselben in einer reibungslosen Flüssigkeit immer, so daß also auch ein und derselbe Wirbel immer aus genau denselben Teilchen besteht.

Diese Wirbelringe müssen nicht kreisförmig sein, sie können vielmehr die mannigfaltigsten Gestalten haben, es müssen nur in sich geschlossene Kurven sein.

Nehmen wir also an, daß unsere Welt von einer äußerst feinen Flüssigkeit ausgefüllt ist, daß etwa der Äther, auf dessen Existenz im Weltraume uns die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme und Elektrizität führen, diese Flüssigkeit sei, so bilden derartige Wirbelringe in ihm für sich bestehende unzerstörbare Individuen, wie es die in der atomistischen Auffassung angenommenen Atome oder Moleküle sind, und insoweit hat es etwas sehr verführerisches, unsere Atome durch diese Wirbelringe zu ersetzen. Die Mannigfachheit der Form könnte die chemische oder physikalische Verschiedenheit der uns bekannten Materie bedingen. Indes könnte man diese Auffassung der Atome nur dann als einen Fortschritt gegenüber der vorhin gegebenen Darlegung ansehen, wenn sich aus dieser Auffassung die Gesetze der chemischen Verbindungen und die Wechselwirkung zwischen den Atomen ableiten ließen. In welcher Weise sich zwei oder mehrere Wirbelringe zu einem neuen, also zu einer chemischen Verbindung zusammensetzen sollen, läßt sich noch gar nicht erkennen; das naheliegendste, eine kettenartige Verknüpfung verschiedener Wirbelringe, ist ausgeschlossen, da die [illegible] eines Wirbelringes um einen andern nach Art eines Kettenringes [illegible] unmöglich ist, und wenn sie möglich wäre, sofort die Zerstörung des Wirbelringes zur Folge haben würde. Ob überhaupt mehrere

1) von *Helmholtz*, Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen. *Crelle*, Journal. 55 p. 25 1858. Mehr elementare Darstellungen sehe man von *Lang*, Einleitung in die theoretische Physik. [illegible] Braunschweig 1891. *Voigt*, Mechanik p. 371

Wirbelringe zu einem stabilen Komplexe zusammentreten können, ist durc aus fraglich.

Ebenso läßt sich noch gar nicht erkennen, wie Wechselwirkung zwischen zwei Wirbelringen durch Vermittelung der zwischen ihnen befin lichen Flüssigkeit zustande kommen sollen, da ausdrückliche Voraussetzu ihres Bestehens ist, daß die Flüssigkeit reibungslos sei, daß also ei Wirbelring nichts von seiner Bewegung an die Umgebung abgebe.

Wir werden deshalb diese Auffassung der Atome nicht weiter ve folgen.

Da das physikalische Atom eine bestimmte Quantität Materie enthält so besitzt es ein bestimmtes Gewicht; es ist nicht möglich, das Gewic desselben für die verschiedenen Stoffe in Grammen anzugeben, sein relativ Gewicht, das heißt das Verhältnis zwischen den Gewichten der einzeln Atome läßt sich bestimmen. Nennen wir das Gewicht des Atoms Wasser stoff eins, so werden wir nach dieser Einheit das des Chlors, das des Stick stoffs usw. messen können. Eine Verbindung des Chlors und Wasserstoff wird sich dann, wenn wir das Gewicht der beiden Atome mit cl und h bezeichnen, darstellen lassen durch $m \cdot h + n \cdot cl$ oder, wenn wir h gleich 1 setzen durch $m + n \cdot cl$, wo m und n ganze Zahlen sind und die Anzah der Atome geben, die bei dieser Verbindung zusammentreten. Das Verhältni der Atomgewichte des Wasserstoffs und Chlors wird dann sein $m : n\,cl$ ode $1 : \frac{n}{m} \cdot cl$. Die chemische Analyse, welche uns das Mischungsgewicht de Chlors, jene Menge, welche sich mit einem Gewichtsteil Wasserstoff ve bindet, liefert, bestimmt somit die Größe $\frac{n}{m} \cdot cl$ oder das Atomgewich multipliziert mit dem Quotienten $\frac{n}{m}$.

Wären uns daher die Zahlen m und n bekannt, so lieferte uns die selbe Analyse, welche das Mischungsgewicht des Chlors ergibt, auch das Atomgewicht desselben. Man hat aber kein direktes Mittel, diese Zahlen zu bestimmen; denn man weiß niemals, wieviel Atome bei einer Ver bindung zu einem zusammentreten. In welcher Weise die Chemie, durch gewisse Erscheinungen geführt, die Atomgewichte aus den Äquivalent ableitet, das zu besprechen würde hier zuviel Raum einnehmen; wir ve weisen deshalb auf die Lehrbücher der Chemie[1]) und begnügen uns hi die von der Chemie jetzt angenommenen Atomgewichte bezogen auf Sauer stoff gleich 16 mitzuteilen, da wir die Zahlen an mehreren Stellen benutzen müssen.

Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper,[2])
bezogen auf $O = 16$.

Aluminium	Al	= 27,1	Baryum	Ba	= 1[illegible]
Antimon	Sb	= 120,2	Beryllium	Be	= [illegible]
Argon	A	= 39,9	Blei	Pb	= [illegible]
Arsen	As	= 75,5	Bor	B	= [illegible]

1) Man sehe: *Lothar Meyer,* Die modernen Theorien der Chemie. Br 1864. *Kekulé,* Lehrbuch der Chemie. 1. 1859.

2) Chem. Ber. 39. p. 6. 1906. Bericht des internationalen Atomge ausschusses.

. . . . . . *Br*	=	79,96	Platin . . . . *Pt*	=	194,8
. . . . . . *Cd*	=	112,4	Praseodym . . . . . *Pr*	=	140,5
. . . . . . *Cs*	=	132,9	Quecksilber . . . . . *Hg*	=	200,0
. . . . . . *Ca*	=	40,1	Radium . . . . *Ra*	=	225
. . . . . . *Ce*	=	140,25	Rhodium. . . . . . . *Rh*	=	103,0
. . . . . . *Cl*	=	35,45	Rubidium . . . . . . *Rb*	=	85,5
. . . . . . *Fe*	=	55,9	Ruthenium . . . . . *Ru*	=	101,7
. . . . . . *Er*	=	166	Samarium . . . . . . *Sa*	=	150,3
. . . . . . *F*	=	19	Sauerstoff . . . . . . *O*	=	16,00
a . . . . . . *Gd*	=	156	Scandium . . . . . . *Sc*	=	44,1
. . . . . . *Ga*	=	70	Schwefel. . . . . . . *S*	=	32,06
n . . . . . . *Ge*	=	72,5	Selen. . . . . *Se*	=	79,2
. . . . . . *Au*	=	197,2	Silber . . . . *Ag*	=	107,93
. . . . . . *He*	=	4	Silizium . . . . *Si*	=	28,40
. . . . . . *In*	=	115	Stickstoff . . . . . . *N*	=	14,04
. . . . . . *Ir*	=	193,0	Strontium . . . . . . *Sr*	=	87,6
. . . . . . *J*	=	126,97	Tantal. . . . . *Ta*	=	183
. . . . . . *K*	=	39,15	Tellur . . . . *Te*	=	127,6
. . . . . . *Co*	=	59,0	Terbium. . . . . *Tb*	=	160
. . . . . . *C*	=	12,00	Thallium . . . . *Tl*	=	204,1
. . . . . . *Kr*	=	81,8	Thorium. . . . . *Th*	=	232,5
. . . . . . *Cu*	=	63,6	Thulium. . . . . *Tu*	=	171
. . . . . . *La*	=	138,9	Titan . . . . *Ti*	=	48,1
. . . . . . *Li*	=	7,03	Uran. . . . . *U*	=	238,5
. . . . . *Mg*	=	24,36	Vanadium . . . . . . *V*	=	51,2
. . . . . . *Mn*	=	55,0	Wasserstoff . . . . . *H*	=	1,008
. . . . . . *Mo*	=	96,0	Wismuth. . . . . . . *Bi*	=	208,5
. . . . . . *Na*	=	23,05	Wolfram. . . . . . . *W*	=	184,0
. . . . . . *Nd*	=	143,6	Xenon . . . . *X*	=	128
. . . . . *Ne*	=	20	Ytterbium . . . . . . *Yb*	=	173,0
. . . . . . *Ni*	=	58,7	Yttrium . . . . *Y*	=	89,0
. . . . . . *Nb*	=	94	Zink . . . . *Zn*	=	65,4
. . . . . *Os*	=	191	Zinn . . . . *Sn*	=	119,0
. . . . . *Pd*	=	106,5	Zirkonium . . . . . . *Zr*	=	90,6
. . . . *P*	=	31,0			

§ 47.

ggregatzustände. Die in dem letzten Paragraphen mitgeteilten n berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat nebeneinander olekülе zu betrachten, welche einen äußerst kleinen Raum ein- daß wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend an- n. In welcher Weise diese Moleküle gruppiert sind, das wissen das aber mußten wir annehmen, daß sich die einzelnen Mole- berühren, daß sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber andern in der Physik vorkommenden Größen vergleichbaren en voneinander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des rgrößern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern sucht, wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen wir annehmen, daß auch die Moleküle einer jeden Substanz mit einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegeneinander getrieben werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle sehr groß sein muß. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der Moleküle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern tätigen Kräfte als eine Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft muß das Bestreben haben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um so mehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber folgen, daß die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein könnten, wenn die einzelnen Teile sich berühren, daß also die Körper einer Verminderung des von ihnen eingenommenen Raumes nicht fähig sein könnten. Dem widerspricht die Erfahrung, da alle Körper durch Zusammenpressen oder durch Abkühlung auf einen kleinern Raum gebracht werden können. Es muß deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft tätig sein, welche verhindert, daß sie sich bis zur Berührung annähern, welche wir also als eine die Moleküle gegenseitig abstoßende bezeichnen müssen, und welche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Teile abnimmt, so zwar, daß unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte die Moleküle bereits in einem gewissen Abstande voneinander in den Zustand des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schluß gezogen, daß die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Zusammendrückbarkeit, daß zwischen denselben auch abstoßende Kräfte tätig sein müssen. Würden wir die letztern analog den ersteren betrachten, so müßten wir schließen, daß die Größe dieser abstoßenden wie die der anziehenden nur von dem Abstande der Moleküle und ihrer Masse, nicht von der Natur derselben abhängig sei. Dieser Ansicht von der Natur der zwischen den Molekülen tätigen Kräfte widerspricht aber eine Reihe bekannter Erfahrungen. Die Masse eines Körpers ist nämlich seinem Gewichte gleich, diejenige eines gegebenen Volumens demnach um so größer, je größer das Gewicht desselben ist. Da die Körper nun aus Molekülen bestehen, so müssen in einem gegebenen Volumen um so mehr Moleküle oder Moleküle von um so größerer Masse sein, je dichter der Körper ist. Unter beiden Annahmen müßte aber der dichtere Körper zugleich der festere sein, das heißt, es müßten seine Moleküle um so stärker zusammenhalten, da sowohl mit der größeren Annäherung der Moleküle als auch mit ihrer größeren Masse die anziehenden Kräfte größer werden. Man weiß aber, daß das nicht der Fall ist; die Teile aller flüssigen Körper stellen einem Versuche, sie zu trennen, einen weit geringern Widerstand entgegen als die der festen Körper; viele feste Körper sind aber weniger dicht als flüssige, wie z. B. das Wasser dichter ist als die meisten Holzarten, das Quecksilber dichter als die meisten Metalle. Man könnte dagegen behaupten, daß mit der größeren Annäherung der Moleküle auch die abstoßenden Kräfte wachsen müssen, daß somit je nach dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte sich mit der Entfernung oder der Masse ändern, die dichteren Körper nicht gerade die festeren sein müßten. Würde aber die Größe der Molekül

on der Entfernung und Masse der Moleküle abhängig sein, so Körper gleicher Dichtigkeit auch dieselbe Festigkeit zeigen, die einzelnen Moleküle wenigstens nicht sehr verschiedene bstände haben können. Aber auch dem widerspricht die Er wir feste Körper herstellen können, welche genau dieselbe aben wie Flüssigkeiten.

assen deshalb schließen, daß die zwischen den Molekülen te nicht lediglich von der Masse und den Abständen der ndern auch von der Natur derselben abhängig sind. Ob diese von der Beschaffenheit der Moleküle den anziehenden Kräften dann nicht mit denen der allgemeinen Gravitation zusammen n, oder den abstoßenden Kräften, oder beiden, das läßt sich iden. Indem man das unentschieden läßt, spricht man nur atur sich zeigenden Tatsachen aus, wenn man den einzelnen örper je nach ihrer Natur eine verschiedene Kohäsion beilegt, ganz unbestimmt jene Kräfte, welche den Zusammenhalt der gen, unter dem Namen der Kohäsion oder der Kohäsions menfaßt.

der verschiedenen Kohäsion der einzelnen Körperteilchen unter drei Aggregatzustände und zwar

festen Körper. Dieselben haben ein selbständiges Volumen und dige Gestalt; ihre einzelnen Teilchen verschieben sich nicht einander, sondern es bedarf einer mehr oder weniger bedeu diese zu verschieben oder zu trennen; einmal getrennt, lassen t wieder durch Zusammenlegen vereinigen.

flüssigen Körper. Sie haben ein selbständiges Volumen ohne Gestalt. Die geringste äußere auf sie einwirkende Kraft Verschiebung und selbst eine Trennung derselben bewirken. ennung fügt sie aber ein einfaches Zusammenbringen wieder

gasförmigen Körper haben weder eine selbständige Gestalt ständiges Volumen, sie verbreiten sich durch jeden ihnen dar um, bis sich ein äußeres Hindernis ihnen entgegenstellt. chäftigen uns in diesem Kapitel mit den festen Körpern.

§ 18.

tät. Unter Wirkung der Kohäsion, unter der wir die sämt zelnen Teile des Körpers zusammenhaltenden Kräfte, anziehende de, zusammenfassen, sind die einzelnen Teile der Körper im ichgewicht, wenn sie in ihrem natürlichen Zustande sich selbst nd Wirken äußere Kräfte auf den Körper ein, so muß der szustand der Moleküle gestört werden.

en wir z. B. einen auf einer unveränderlich festen horizontalen henden Zylinder (Fig. 57). Wir können ihn als zusammen hen aus einer Reihe übereinander lagernder horizontaler B, $A'B'$ von Molekülen, die durch sehr kleine Zwischenräume . Legen wir auf AB ein Gewicht, so wird dieses die Schicht $A'B'$ treiben, den Abstand der Schichten verändern und da-

durch notwendig das Gleichgewicht stören. Die abstoßende Kraft wi dann die anziehende der Schichten übersteigen und zunehmen, bis d Differenz beider gleich ist dem Drucke des Gewichtes P. Diese zwisch den Schichten AB und $A'B'$ von unten nach oben, um dem Gewichte das Gleichgewicht zu halten, und von oben nach unten auf die Schic $A'B'$, welche sich dadurch in denselben Um ständen befindet, als stände das Gewicht unmit telbar auf ihr. Die Schicht $A'B'$ nähert sic dadurch der folgenden Schicht und übt an diese einen ebensolchen Druck aus wie AB au $A'B'$; gleiches gilt für alle folgenden Schichten und die letzte drückt dadurch auf die Unterlag ebenso, als wenn das Gewicht unmittelbar au ihr stände.

Fig. 57.

Es hat demnach eine gleiche Annäherung aller einzelnen Schichten stattgefunden und folg lich eine Verkürzung des Zylinders, die propor tional ist der Anzahl der Schichten, d. h. der Länge des Zylinders; diese Annäherung hat aber gleichzeitig zwischen je zwei Schichten CD, $C'D'$ eine abstoßende Kraft hervorgerufen, welche gleich ist dem Drucke des Gewichts.

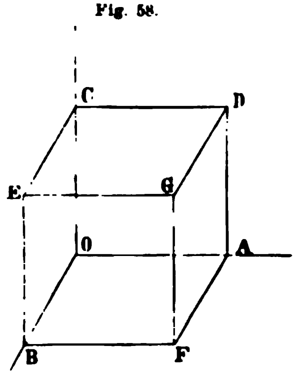
Hätte man, anstatt auf den Zylinder einen Druck auszuüben, denselben an seinem obern Ende befestigt und an seinem untern ein Gewicht wirken lassen, so würden sich die einzelnen Schichten voneinander entfernt, gleichzeitig aber auch infolge der größern Entfernung einander angezogen haben; das Gleichgewicht tritt in dem Falle ein, wenn der Überschuß der anziehenden über die abstoßenden Kräfte gleich dem am untern Ende des Zylinders wirkenden Zuge geworden ist.

Daß in der Tat in den beiden eben besprochenen Fällen zwischen den genäherten oder entfernten Molekülschichten abstoßende oder anziehende Kräfte wirksam sind, das läßt sich erkennen, wenn wir die äußern Kräfte aufhören lassen zu wirken, denn wir nehmen sofort eine Bewegung der Molekülschichten gegen ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage hin wahr, der komprimierte Zylinder dehnt sich wieder aus, der ausgedehnte zieht sich wieder zusammen. Diese Eigenschaft der Körper, das Bestreben ihre ursprüngliche Gestalt und das ursprüngliche Volumen wieder anzunehmen, wenn die Kraft, welche kleine Formänderungen an ihnen hervorgebracht hat, aufhört zu wirken, bezeichnet man mit dem Namen der Elastizität.

Die Existenz dieser Eigenschaft gibt uns einen weitern Aufschluß über die Natur der zwischen den Molekülen tätigen Kräfte; sie zeigt, daß die abstoßenden Kräfte mit zunehmender Entfernung der Moleküle weit rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte. Denn wenn die Moleküle in der Gleichgewichtslage sind, sind die anziehenden und abstoßenden Kräfte einander gleich. Mit Änderung der Abstände müssen sich nun sowohl die anziehenden als auch die abstoßenden Kräfte in demselben Sinne ändern. Da nun aber eine größere Annäherung Abstoßung, eine größere Entfernung Anziehung hervortreten läßt, so folgt, daß bei Verringerung des Abstandes die abstoßenden Kräfte rascher wachsen, bei Vergrößerung des Abstandes rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte.

Die im Innern eines Körpers durch Annäherung oder Entfernung der Moleküle geweckten Kräfte können je nach der Richtung, in welcher die Moleküle verschoben werden, verschieden sein. Denken wir uns aus einem ausgedehnten Körper einen Würfel (Fig. 58) herausgeschnitten. Üben wir auf die Fläche $CEGD$ einen Druck aus, indem wir etwa ein die ganze Fläche bedeckendes Gewicht P auf dieselbe setzen, so tritt in der eben betrachteten Weise eine Annäherung der Molekülschichten ein, bis der elastische Gegendruck dem äußern Drucke P gleich geworden ist. Die Summe der Annäherungen der Molekülschichten liefert eine gewisse Verkürzung des Würfels in der Richtung OC.

Fig. 58.



Drehen wir den Würfel so, daß die Seite $OBEC$ oben ist und wiederholen den Versuch, so nähern sich auch dann die Molekülschichten so weit, bis der elastische Gegendruck dem Drucke des Gewichtes P gleich geworden ist; es kann indes hierzu die Annäherung der Molekülschichten, also auch die Summe derselben, die Verkürzung der Seite OA jetzt eine andere sein als vorher, oder auch dieselbe.

Ebenso wird durch den Druck des Gewichtes P auf die Seite $OADC$ der Würfel parallel OB soweit verkürzt, bis der elastische Gegendruck gleich P geworden ist, und es kann die zur Erzeugung dieses elastischen Gegendrucks erforderliche Verkürzung ebenfalls den beiden andern gleich oder auch verschieden sein.

Sind die zur Hervorrufung desselben Gegendruckes P erforderlichen Verkürzungen nach den drei und damit nach allen Richtungen im Innern eines Körpers die gleichen, was den einfachsten elastischen Verhältnissen entspricht, so nennt man den Körper einen isotropen, ist das nicht der Fall, sind die zur Erweckung des gleichen Gegendruckes erforderlichen Verkürzungen nach den verschiedenen Richtungen verschieden, so nennt man die Körper anisotrop oder in neuerer Zeit aeolotrop.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen setzen wir die den Versuchen unterworfenen Körper als isotrop voraus; diejenigen Körper, welche nicht wie die Kristalle eine bestimmte Struktur haben, Metalle, Glas, können wir als isotrop ansehen.

Die besprochenen beiden Fälle sind nicht die einzigen, bei denen sich die Elastizität der festen Körper zeigt, sie zeigt sich ebenso, wenn wir einen Stab biegen oder ihn um eine in ihm befindliche Achse zu drehen suchen, während sein eines Ende festgehalten wird, wenn wir ihn tordieren. Wir werden indes sehen, daß wir die elastischen Kräfte in diesen Fällen auf die zuerst besprochenen zurückführen können.

Die Untersuchung der Elastizität fester Körper ist eine der schwierigsten auf dem ganzen Gebiete der Physik; um die Gesetze derselben vollständig zu übersehen, bedarf es der kompliziertesten mathematischen Entwicklungen und der feinsten Versuche. Wir müssen uns deshalb hier darauf beschränken, die Resultate der Untersuchungen vorzuführen, indem wir

gleichzeitig, so weit es möglich ist, den innern Zusammenhang derselben darlegen[1]).

§ 49.

Elastizität beim Zuge. Der einfachste Fall aller Probleme über Elastizität ist der, daß man einen dünnen soliden Stab, der an seinem einen Ende befestigt ist, durch einen Zug oder Druck in seiner Längsrichtung ausdehnt oder zusammendrückt. So lange die Veränderungen, welche die wirksame Kraft hervorbringt, klein genug sind, muß die durch ein gegebenes Gewicht beim Zusammendrücken hervorgebrachte Verkürzung gleich sein der durch die Ausdehnung bewirkten Verlängerung; es genügt daher, den Fall der Ausdehnung zu betrachten und die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen der Belastung und der eintretenden Verlängerung stattfinden. Die einfachste Methode der Untersuchung ist die von Wertheim angewandte. Derselbe befestigte an einer festen Mauer ein Kniestück von sehr starkem Eisen B (Fig. 59). Dasselbe endigt in einer ebenen vertikalen Fläche von gehärtetem Stahl, gestreift wie eine Feile, gegen welche eine Platte ebenfalls von Stahl und an der einen Seite ebenso gestreift, paßt und mittels Schrauben C angedrückt werden kann. Diese beiden Stücke dienen als Backen eines starken Schraubstocks, und zwischen ihnen wird der Draht, dessen Elastizität man untersuchen will, durch einen sehr starken Druck befestigt.

An dem untern Ende des Drahtes wird mittels einer gleichen schraubstockartigen Vorrichtung ein Haken befestigt und an diesen eine Wagschale E angehängt, welche die ziehenden Gewichte aufnimmt. Sind die Gewichte hinreichend schwer, so dehnt sich der Draht merklich aus, verkürzt sich aber wieder zu seiner früheren Länge, wenn man die Gewichte fortnimmt. Zur Messung der Verlängerung bedarf es gewisser Vorsichtsmaßregeln.

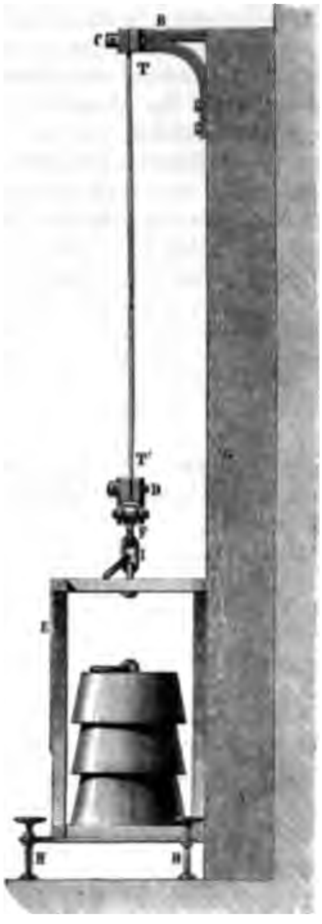
Wenn man die Gewichte in die Wagschale sehr rasch einsetzt, so erteilt man dem Apparat Stöße, durch welche man den Draht zerreißen kann. Um dieses zu vermeiden ist die Wagschale mit drei langen Fußstellschrauben HH versehen, welche man vor Beginn des Versuches so weit hinabschraubt, daß sie den Boden berühren und somit die Wagschale tragen; dann wird die Schale belastet, und dann erst hebt man die Schrauben sehr langsam, um allmählich das Gewicht seine ziehende Wirkung

---

1) Die wichtigsten allgemeinen Untersuchungen über Elastizität finden sich in
Poisson, Mémoire sur les mouvements des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris. 8. 1828.
Cauchy, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide. Exercices des Mathématiques 2 und 3.
Lamé, außer einer Reihe von Abhandlungen besonders in seinen Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. II. édit. Paris 18..
Kirchhoff, Abhandlungen über Elastizität. Crelles Journal. 40. 1850 und 56. 1859; Vorlesungen über mathematische Physik (Mechanik). Leipzig 1876.
Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862.
Beer, Einleitung in die Theorie d. Elastizität und Kapillarität. Leipzig 18..
F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität usw., herausgegeben von O. E. Meyer. Leipzig 1885.
Voigt, Elementare Mechanik. Leipzig 1889.

zu lassen Dabei hat man keine Stöße zu befürchten. Bei der ung hat man sich dann noch vor einem leicht zu begehenden zu schützen. Wählt man nämlich feine Drähte, so sind diese vielen Stellen gebogen und gekrümmt. Ein Anhängen der Ge- wirkt nun zunächst ein Gerade- und dadurch scheinbar ein Verlän- Drahtes. Um diese Täuschungen den, ist es notwendig, anfänglich s Gewicht in die Schale zu legen, hinreicht, den Draht gerade zu nd dann erst allmählich die Schale n belasten. Von da an zählt man n erst die Gewichte.

Fig. 59.



Verlängerungen des Drahtes, wel- sehr klein sind, mißt man mit dem eter; man stellt dasselbe dem Drahte allemal fest gegenüber und visiert Fernrohr desselben auf zwei feine Enden des Drahtes angebrachte T und T'. Der Unterschied der tellungen des Kathetometers liefert Fällen die Länge des Drahtes, so- als nach der Belastung; die Diffe- hen den beobachteten Längen vor der Belastung gibt dann die infolge ung eintretende Verlängerung. Mit r Methode hat Wertheim[1]) zu- schon früher von Hooke[2]), sande[3]), Th. Young[4]) u. a. auf- Gesetze der Elastizität bestätigt. sind:

Die Verlängerungen eines Drahtes demselben angehängten Gewicht der Drahtes proportional. Um das Ge- uweisen, hat man auf dem Drahte ere Marken in gleicher Distanz zu an findet dann nach der Belastung, Abstand der verschiedenen Marken n viel vergrößert hat. Da nun die ung des ganzen Drahtes gleich der Summe der Ausdehnungen ze'nen Teile ist, so folgt, daß dieselbe der Länge des Drahtes rtional ist

Die Verlängerung eines gegebenen Drahtes ist der Größe des span- ewichtes direkt proportional. Aus diesem Satze folgt, daß die

[1]) Wertheim, Annales de chim et de phys. 12 3 1844 Poggend Ann ergänzungsband 2 1848

[2]) Hooke, Philosophical tracts and Collections. London 1679

[3]) 's Gravesande, Physicae elementa mathematica. 1

[4]) Young Course of lectures on natural Philosophy. London 1807

durch kleine Verschiebungen der Moleküle hervorgerufenen elastischen Kräf den Verschiebungen selbst proportional sind. Denn wenn unter Wirku des spannenden Gewichtes Gleichgewicht eingetreten ist, so beweist d daß die voneinander entfernten Molekülschichten sich mit der dem spa nenden Gewichte gleichen Kraft anziehen. Da nun die Verschiebungen d Moleküle dem spannenden Gewichte proportional sind, so folgt auch, da die elastischen Kräfte den Verschiebungen proportional sind.

3) Die Verlängerung verschieden dicker Drähte ist bei gleichen spa nenden Gewichten dem Querschnitt der Drähte umgekehrt proportional, vo der Gestalt des Querschnittes aber unabhängig. Dieser Satz folgt auc schon unmittelbar aus der Überlegung, daß wir einen Stab *n* facher Dick als aus *n* Stäben einfacher Dicke bestehend ansehen können; damit desha ein solcher Stab dieselbe Verlängerung erhalte, bedarf er ein *n* mal so groß Gewicht als der einfache Stab.

4) Schließlich ist die Verlängerung abhängig von der Natur de Drahtes, den wir belasten.

Fassen wir diese vier Sätze in einen Ausdruck zusammen, so könne wir die Verlängerung v, welche ein Draht von der Länge l und dem Quer schnitte q durch ein Gewicht p erhält, darstellen durch die Gleichung

$$v = C \cdot \frac{p \cdot l}{q},$$

worin C eine für jede Substanz besondere Konstante ist, welche die Ve längerung bedeutet, welche ein aus ihr gefertigter Stab durch die Zuge heit erhält, wenn seine Länge und sein Querschnitt der Einheit gleich i Dividieren wir beide Seiten unserer Gleichung durch l, so wird

$$\frac{v}{l} = \delta = C \frac{p}{q},$$

so daß wir die Konstante C auch definieren können als die in Bruchtei der ursprünglichen Länge ausgedrückte Verlängerung, welche ein Stab o Draht erhält, wenn auf die Flächeneinheit des Querschnittes die Einh des Zuges wirkt. Die Größe C heißt der lineare Verlängerungskoeffizi der betreffenden Substanz, aus welcher der Stab oder Draht besteht.

Die Größe p, welche die Verlängerung δ hervorgebracht hat, gibt nach 2) gleichzeitig die durch diese Verlängerung δ zwischen den Mole schichten geweckte elastische Kraft; dieselbe ist

$$p = \frac{1}{C} \cdot \delta \cdot q.$$

Die geweckte elastische Kraft ist der Verlängerung des Stabes, die gemessen in Bruchteilen der ursprünglichen Länge proportional; da Verlängerung gleich der Summe der Vergrößerung der Abstände der zelnen Molekülschichten, die ursprüngliche Länge gleich der Summe Abstände der Molekülschichten im ungedehnten Zustande ist, so folgt, die zwischen zwei Molekülschichten geweckte elastische Kraft proporti ist der Vergrößerung des Molekülarabstandes, dieselbe gemessen nach ursprünglichen im ungedehnten Zustande vorhandenen Abstand.

Die für die Flächeneinheit des Querschnittes geweckte elastische I p_0 ist

$$p_0 = \frac{p}{q} = \frac{1}{C}\,\delta = E\delta,$$

wenn wir den reziproken Wert des Koeffizienten C mit E bezeichnen. Diesen Koeffizienten E nennt man den Elastizitätskoeffizienten oder Elastizitätsmodulus, zuweilen auch, da er von Thomas Young zuerst eingeführt wurde, den Youngschen Modul. Wir erhalten somit die durch Längsdehnung in einem Stabe pro Querschnittseinheit geweckte elastische Kraft, indem wir die Verlängerung δ mit dem Elastizitätskoeffizienten multiplizieren.

Der Elastizitätsmodul einer Substanz ist der reziproke Wert des linearen Verlängerungskoeffizienten, und in dieser Weise wird er auch in der Regel bestimmt, man beobachtet die Verlängerung eines Stabes von bekannter Länge und bekanntem Querschnitt durch ein bestimmtes Gewicht p und erhält E durch Ausrechnung der Gleichung

$$E = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{p}{q}.$$

Man kann den Elastizitätskoeffizienten auch anders definieren; das Produkt $E\delta$ gibt die pro Flächeneinheit geweckte elastische Kraft oder auch den pro Flächeneinheit erforderlichen Zug, damit δ gleich eins wird, damit also der Stab auf die doppelte Länge gebracht, bezw. der Abstand der Molekülschichten voneinander verdoppelt würde, unter Voraussetzung, daß das für kleine Änderungen gültige Gesetz auch noch für solche Werte der Ausdehnung Geltung hätte. Deshalb wird der Elastizitätskoeffizient auch gewöhnlich in Zugeinheiten angegeben. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß der Elastizitätskoeffizient selbst nicht ein Zug oder eine Kraft ist, daß er vielmehr der Quotient aus einer Kraft und einer Fläche ist. Seine Dimensionen sind daher nicht die einer Kraft, sondern, da die Fläche das Quadrat einer Länge ist,

$$E = z[\mu\lambda\tau^{-2} \cdot \lambda^{-2}] = z[\mu\lambda^{-1}\tau^{-2}],$$

also nach der Masse von der ersten, nach der Länge von der minus ersten, nach der Zeit von der minus zweiten Potenz. Man bezeichnet vielfach jeden dieser Dimensionen als diejenige eines Druckes, indem man dann ohne weiteres den Druck als jenen pro Flächeneinheit nimmt; in diesem Sinne wird die Bezeichnung Druck stets bei flüssigen und gasförmigen Körpern benutzt.

Der Vollständigkeit wegen sei hinzugefügt, daß zuweilen auch der Elastizitätsmodul als eine Länge definiert wird. Man geht von der Gleichung

$$p_0 = E\,\frac{e}{l}$$

aus, setzt man in dieser Gleichung $p_0 = 1$ und setzt die Länge l des Stabes gleich L, so daß der pro Flächeneinheit wirkende Zug die Längenzunahme gleich der Längeneinheit macht, also $e = 1$, so wird

$$E = L,$$

der Elastizitätsmodul ist demnach jene Länge eines Drahtes, welche durch die pro Flächeneinheit wirkende Einheit des Zuges die der Längeneinheit gleiche Längenzunahme erhält.

Da indes der Elastizitätskoeffizient multipliziert mit dem Quotie zweier Längen, also mit einer reinen Zahl, uns einen Druck pro Fläc einheit liefert, so ist seine Definition als die eines Druckes vorzuziehe

Die Einheiten, welche bei den experimentellen Untersuchungen in Regel der Messung der Elastizitätskoeffizienten zugrunde gelegt wu sind ganz willkürliche, man nahm als Querschnittseinheit das Quadratn meter und als Zugeinheit das Kilogramm. Da durch Einführung des Qua millimeters als Flächeneinheit das Millimeter hierbei als Längeneinheit tritt, müssen wir um den Zug nach unserer Definition als Masse Beschleunigung festzuhalten und die Elastizitätskoeffizienten in den l ventionellen Zahlen auszudrücken, jene Masse als Einheit setzen, we durch den Zug eines Kilogramm die Beschleunigung 1^{mm} erhält. Da Größe g gleich 9810^{mm} ist, ist das eine Masse von 9810^{kg}; in den k ventionellen Einheiten ausgedrückt ist also

$$E = z\left[(9810^{\mathrm{kg}})\ \mathrm{mm}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}\right].$$

Im Gramm-, Zentimeter-, Sekundensystem ist demnach

$$E = z\left[9810 \cdot 1000 \cdot \mathrm{gr}\left(\frac{\mathrm{cm}}{10}\right)^{-1}\mathrm{sec}^{-2}\right] = 981 \cdot 10^5 z\left[\mathrm{gr\,cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}\right].$$

Um die im konventionellen System angegebenen Elastizitätskoeffizienten das von uns angenommene absolute Maßsystem zu übersetzen, haben wir so die Zahlen des konventionellen Systems mit $981 \cdot 10^5$ zu multiplizie

In der nachfolgenden Tabelle geben wir eine Anzahl von Elastizit koeffizienten, welche von Wertheim[1]) nach der oben beschriebenen Meth erhalten sind; wir behalten dabei die von Wertheim benutzten konv tionellen Einheiten bei.

Tabelle der Elastizitätskoeffizienten verschiedener Metalle bei verschiedenen Temperaturen.

Metalle	Koeffizienten bei 15°—20° C.	Koeffizienten bei 100° C.	Koeffizienten bei 200° C.	Koeffizienten aus d. Longitudinaltönen bestimmt
Blei gezogen	1803			2278
„ angelassen	1727	1630	—	2146
Gold gezogen	8131			8599
„ angelassen	5584	5408	5482	6372
Silber gezogen	7357			7576
„ angelassen	7140	7274	6374	7242
Zink gezogen	8734			9555
Kupfer gezogen	12449			12536
„ angelassen	10519	9827	7862	12540
Platin gezogen	17044			17165
„ angelassen	15518	14178	12964	15611
Eisen gezogen	20869			19903
„ angelassen	20794	21877	17700	19925
Gußstahl gezogen	19549			19823
„ angelassen	19561	19014	17926	19828
Engl. Stahl gezogen	18809			19445
„ „ angelassen	17278	21292	19278	19200

1) *Wertheim*, Poggend. Ann. Ergänzungsband 2. 1848.

Die Zahlen der letzten Kolumne gelten ebenfalls für die Temperatur 15—20° C., die Methode, nach welcher sie erhalten wurden, werden wir später besprechen.

Obige Zahlen zeigen, daß die Elastizitätskoeffizienten nicht nur für verschiedene Metalle, sondern auch für ein und dasselbe Metall verschieden sein können, je nachdem dasselbe als gezogener Draht oder nach vorhergegangenem Erhitzen untersucht wird.

Die Richtigkeit der durch diese und die frühern Versuche gegebenen Gesetze der Zugelastizität wurde einige Zeit nachher von **Hodgkinson**[1]) bezweifelt, der aus seinen Versuchen schloß, daß eine elastische Ausdehnung in dem vorhin angegebenen Sinn, die also nach dem Aufhören des Zuges wieder vollständig rückgängig wird, niemals vorhanden wäre, sondern daß immer gleichzeitig eine bleibende Dehnung einträte. Er gelangte weiterhin zu dem Schlusse, daß die geweckte elastische Kraft nicht der Verlängerung δ proportional sei, daß dieselbe vielmehr dargestellt werde durch

$$p_0 = a\delta - b\delta^2,$$

daß also die elastische Kraft langsamer zunehme als die Verlängerung. Dagegenüber kam **Morin**[2]) zu dem Resultate, daß bei kleinen Verlängerungen die von **Hodgkinson** beobachtete bleibende Verlängerung nur eine scheinbare sei. **Morin** wandte zu seinen Versuchen 22—24^{m} lange Drähte an, auf denen in einer Entfernung von 20^{m} zwei Marken angebracht waren. Da die Drähte vor dem Versuche auf Rollen von 60—70^{cm} Durchmesser aufgerollt waren, wurden sie zunächst möglichst vollkommen gerade gerichtet; indes blieben immer einige schwache Krümmungen zurück, als deren Folge sich bei längerer Belastung eine scheinbare kleine Verlängerung ergab, welche **Morin** dem durch das längere Aushängen des Drahtes bewirkten mehr und mehr Geradewerden des Drahtes zuschrieb. Diese seine Ansicht begründete er dadurch, daß bei einer zweiten und dritten Belastung mit demselben Gewichte ganz erheblich kleinere Verlängerungen sich zeigten. Die Messungen der elastischen Verlängerungen führten ihn zu dem Resultate, daß die Verlängerungen den spannenden Gewichten proportional seien. Für Eisen erhielt **Morin** den Elastizitätskoeffizienten 19643, also einen dem von **Wertheim** gefundenen sehr nahen Wert; an zwei Kupferdrähten gleich 6850 und 7339, also erheblich kleinere Werte als **Wertheim**. Morin fand für seine Kupferdrähte ein kleineres spezifisches Gewicht als Wertheim und schreibt diesem Umstande es zu, daß er den Elastizitätskoeffizienten so erheblich kleiner findet.

Auch **Pisati**[3]) und **Miller**[4]) finden keine Abweichung von der Proportionalität zwischen Dehnung und Zug. **Pisati** erhielt für Eisen bei [illegible] den Elastizitätskoeffizienten 21441, **Miller** bei derselben Temperatur 20969.

Zu von den frühern ganz abweichenden Resultaten gelangte vor kurzem

1) *Hodgkinson*, Fortschritte der Physik, darg. von der Physikal. Gesellschaft zu Berlin 9 p. 120. 1853.
2) *Morin*, Comptes Rendus 54. p. 235. 1862.
3) *Pisati*, Beiblätter zu Poggendorffs Annalen. 1. p. 305. 1877.
4) *Miller*, Berichte der Münchener Akademie. Jahrg. 1882 p. 377.

bei einer erneuerten Untersuchung der Verlängerung von Drähten Thompson[1]), er fand, daß die elastische Dehnung von den kleinsten Gewichten an rascher zunimmt als die spannenden Gewichte. Thompson beobachtete wie Morin die Verlängerung an Drähten von etwa 23^m Länge, welche in einem Turme des physikalischen Laboratoriums zu Straßburg aufgehängt waren. Die Drähte hatten zwei Marken; die obere Marke wurde mit einem Mikroskope beobachtet, um zu konstatieren, daß sie bei der Belastung nicht hinabsank oder um eine etwa eintretende kleine Senkung zu messen. Die untere Marke wurde mit einem Kathetometer beobachtet, an welchem die Senkung derselben gemessen wurde. Die Temperatur in dem Beobachtungsraume war eine sehr konstante; um etwaige Änderungen derselben in Rechnung ziehen zu können, war neben dem zur Beobachtung der elastischen Ausdehnung dienenden Drahte ein ebenso langer Messingdraht mit konstanter Belastung aufgehängt; eine Verlängerung oder Verkürzung dieses Drahtes ließ die Temperaturänderungen desselben und damit auch die des Versuchsdrahtes genau bestimmen. Vor den Dehnungsmessungen waren die Drähte so weit belastet, daß sie gerade gerichtet waren; die untersuchten Drähte hatten eine Dicke von 0,1 bis $0,15^{mm}$. Die nach dem einzelnen Versuche etwa bleibende Verlängerung wurde von der beobachteten Gesamtverlängerung abgezogen und die Differenz als die elastische Dehnung genommen.

Indem wegen der Details der Methode auf die Arbeit von Thompson verwiesen werden mag, geben wir in folgender Tabelle acht Beobachtungsreihen an einem Kupferdraht, dessen Querschnitt $0,0641\ mm^2$ und auf welchem der Abstand der Marken $22,69^m$ war. Die Dichtigkeit des Drahtes war 8,99 und die dem Drahte zur Geraderichtung gegebene konstante Belastung, welche in den acht Beobachtungsreihen die in den folgenden Spalten beobachteten Verlängerungen des Drahtes, dieselben in Millimeter gemessen, hervorbrachten:

p kg								
0,2	5,535	5,535	5,54	5,53	5,53	5,53	5,53	5,53
0,4	11,085	11,08	11,10	11,085	11,09	11,09	11,09	11,09
0,6	16,675	16,675	16,685	16,685	16,68	16,68	16,67	16,68
0,8	22,31	22,305	22,31	22,31	22,30	22,31	22,31	22,31
1,0	27,97	27,94	27,98	27,985	27,95	27,97	27,94	27,94
1,2	33,665	33,65	33,685	33,685	33,67	33,66	33,64	[illegible]

Diese in der Tat auffallend übereinstimmenden Zahlen zeigen von der kleinsten Dehnung aus eine raschere Zunahme der Länge, als der Zunahme der Belastung entspricht. Die von Thompson an diesem Kupferdrahte beobachteten Zahlen lassen sich darstellen durch die Gleichung

$$x = 27,578\,p + 0,3193\,p^2 + 0,0538\,p^3,$$

wenn x die beobachtete Verlängerung in Millimeter und p das ziehende Gewicht in Kilogrammen angibt, welches zu dem Anfangsgewicht 0,192 hinzugefügt wurde.

1) *Thompson*, Wiedemanns Ann. **44**. p. 555. 1891.

Der Ausgangspunkt dieser Beobachtungen war der durch das Gewicht 0,192 bereits verlängerte Draht; um die Längenzunahme des Drahtes vom unbelasteten Zustande aus durch ein Gewicht P berechnen zu können, verfährt Thompson folgendermaßen. Sei X die Längenzunahme des Drahtes durch das Gewicht vom unbelasteten Zustande aus gegeben durch den Ausdruck

$$X = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3,$$

so ist die Verlängerung X_0 durch das Gewicht P_0, von welcher bei den Versuchen ausgegangen war,

$$X_0 = \alpha P_0 + \beta P_0^2 + \gamma P_0^3.$$

Die beobachtete Verlängerung x ist $X - X_0$ durch das Gewicht $p = P - P_0$; nennen wir die Konstanten der empirischen Gleichung für x jetzt a, b, c, so haben wir für x folgende zwei Gleichungen

$$x = X - X_0 = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3 - \alpha P_0 - \beta P_0^2 - \gamma P_0^3$$

und

$$x = a(P - P_0) + b(P - P_0)^2 + c(P - P_0)^3.$$

Entwickeln wir die Potenzen der letzten Gleichung, so wird

$$x = (a - 2bP_0 + 3cP_0^2)P + (b - 3cP_0)P^2 + cP^3 - aP_0 + bP_0^2 - cP_0^3.$$

Setzen wir

$$\alpha = a - 2bP_0 + 3cP_0^2; \quad \beta = b - 3cP_0; \quad \gamma = c$$

und drücken in den drei letzten Gliedern der letzten Gleichung für x die Werte a, b, c durch α, β, γ aus, so werden die beiden Gleichungen für x identisch, so daß wir die Konstanten der Gleichung für X durch die empirischen Konstanten a, b, c und den Zug P_0 in dieser Weise berechnen können.

Für Kupfer erhielt Thompson

$$X = 27{,}461\, P + 0{,}2883\, P^2 + 0{,}0538\, P^3.$$

In gleicher Weise fand Thompson für einen Silberdraht von 22,69 m Länge und 0,0687 mm^2 Querschnitt

$$X = 38{,}907\, P + 0{,}4462\, P^2 - 0{,}0313\, P^3.$$

Messingdraht 22,70 m lang, 0,0627 mm^2 Querschnitt

$$X = 34{,}924\, P - 0{,}2386\, P^2 + 0{,}1487\, P^3.$$

Stahldraht 22,70 m lang, 0,03263 mm^2 Querschnitt

$$X = 34{,}672\, P + 0{,}6498\, P^2 - 0{,}0525\, P^3.$$

Als linearen Verlängerungskoeffizienten bezeichneten wir vorher nach der Gleichung

$$\frac{\lambda}{l} = C\frac{P}{q}, \quad C = \frac{q}{l}\frac{\lambda}{P}$$

den Koeffizienten, mit welchem der pro Flächeneinheit wirkende Zug zu multiplizieren ist, um in Bruchteilen der ursprünglichen Länge die Verlängerung des gezogenen Drahtes zu erhalten. Führen wir in die Gleichungen

von Thompson den auf die Flächeneinheit wirkenden Zug ein, und setzen die Länge der Drähte gleich L, so können wir die Gleichungen schreiben:

$$\frac{X}{L} = \left\{\frac{\alpha q}{L} + \frac{\beta q P}{L} + \frac{\gamma q P^2}{L}\right\} \frac{P}{q}$$

und

$$C = \frac{q}{L}\frac{X}{P} = \frac{\alpha q}{L} + \frac{\beta q P}{L} + \frac{\gamma q P^2}{L},$$

so daß also der lineare Verlängerungskoeffizient von der Größe des Zuges abhängig ist, er wächst mit wachsendem Zuge. Wenn so der lineare Verlängerungskoeffizient von der Größe des Zuges abhängig ist, so folgt, daß er bei gleichem Zuge auch von der Größe des Querschnittes des gezogenen Drahtes abhängig ist, daß wir für Drähte verschiedenen Querschnittes nur gleiche Koeffizienten bekommen, wenn die Züge sich verhalten wie die Querschnitte, also die Züge pro Flächeneinheit gleich sind.

Diese letztere Folgerung ergibt sich aus der einfachen Überlegung, daß bei dem doppelten Querschnitt die doppelte Kraft wirken muß, um die gleiche Verlängerung wie bei dem einfachen Querschnitt zu erhalten. Da nun die Verlängerung rascher wächst als der Zug, folgt, daß bei doppeltem Querschnitte und einfachem Zuge die Verlängerung weniger beträgt als die Hälfte derjenigen bei doppeltem Zuge, also auch weniger als die Hälfte der Verlängerung, welche der Draht mit dem Querschnitte eins durch den einfachen Zug erfährt. Man muß also bei Anwendung gleicher Züge um so kleinere lineare Verlängerungskoeffizienten finden, je größer der Querschnitt des Drahtes ist, an welchem der Zug wirkt.

Da der Elastizitätskoeffizient der reziproke Wert des Verlängerungskoeffizienten ist, folgt, daß auch dieser von der Größe des Zuges und der Größe des Querschnittes abhängig ist, und zwar nimmt er ab, wenn die Größe des Zuges wächst und wenn bei gleichem Zuge der Querschnitt abnimmt.

Thompson definiert deshalb als Elastizitätskoeffizient denjenigen Wert, den man aus einer durch einen verschwindend kleinen Zug bewirkten verschwindend kleinen Verlängerung erhält. Es ist das der reziproke Wert von C, wenn man in den dafür gefundenen Gleichungen $P = 0$ setzt, also

$$C = \frac{q}{L} \cdot \alpha, \quad E = \frac{L}{q} \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Hiernach werden die Elastizitätskoeffizienten für die von Thompson untersuchten Metalle

Stahl . .	20050,	Messing .	10370,
Kupfer .	12890,	Silber . .	8490.

Der Wert für Messing gilt für die Temperatur 9⁰, für die übrigen Metalle für 13⁰—14⁰ C.

Für Aluminium kam G. S. Meyer[1]) zu dem gleichen Resultate wie Thompson, er erhielt für die Längenzunahme eines Drahtes von 18315$^{\mathrm{mm}}$ Länge

$$\Delta L = 62{,}863\, P + 14{,}312\, P^2$$

und berechnet als Elastizitätskoeffizient $\frac{7462 \text{ Kilo}}{\text{mm}^2}$.

1) *G. S. Meyer,* Wiedem. Ann. **59**. p. 668. **1896**.

Für Nickel, Gold, Platin fand Meyer keine merkliche Abweichung n der Proportionalität zwischen Zug und Verlängerung. Als Elastizitäts- effizienten erhielt er für

Nickel 21700, Gold 8630, Platin 16020

i Temperaturen nahe an 12° C.

Auf den Einfluß der Temperatur kommen wir später noch zurück.

Wie schon oben erwähnt gelten die für kleine Verlängerungen gültigen setze auch für kleine Verkürzungen durch Druck, und soweit man die Ver- ngerungen und Verkürzungen der Größe des Zuges oder Druckes propor- nal setzen kann, gelten für die Verkürzungen die gleichen Konstanten.

C. Bach[1]) gelangte zu ähnlichen Resultaten bei der Untersuchung er Anzahl von Materialien, Gußeisen, Flußeisen, Kupfer, Bronze, Messing; r wandte Züge von solcher Größe an, daß im allgemeinen die Elastizitäts- renze (§ 57) schon überschritten war, das heißt, daß nach dem Zuge eine bleibende Verlängerung eintrat. Er maß deshalb die während des Zuges eintretende gesamte Verlängerung und zog von dieser die bleibende Aus- dehnung ab. Die Differenz dieser beiden Ausdehnungen, die er als die federnde Ausdehnung bezeichnet, sieht Bach als die elastischen Dehnungen an, für welche man früher annahm, daß sie der Größe des Zuges propor- tional seien. Für die Abhängigkeit der federnden Verlängerung δ, aus- gedrückt in Bruchteilen der ursprünglichen Länge, fand er, wenn σ den Zug für die Flächeneinheit und α und m zwei Konstanten bedeuten, daß eine Gleichung von der Form

$$\delta = \alpha \sigma^m$$

die beobachteten durch die Spannung σ hervorgerufenen Verlängerungen sehr gut darstellen. Die Konstanten α und m hängen von der Natur des Ma- terials ab.

Diese Gleichung enthält auch den speziellen Fall, daß die Dehnungen den Spannungen proportional sind, denn setzen wir $m = 1$, so wird

$$\delta = \alpha \sigma .$$

Diese Beziehung fand Bach für Flußeisen und Flußstahl bestätigt, er fand Proportionalität zwischen Verlängerung und Spannung bis zu Spannungen, welche bei Flußeisen bis $\frac{18{,}98 \text{ Kilo}}{\text{mm}^2}$, für Flußstahl sogar bis $\frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$ gingen. Für diese Metalle ist somit α der lineare Verlängerungs- koeffizient, $\frac{1}{\alpha}$ der Elastizitätskoeffizient. Für zwei Rundstäbe von Flußeisen fand Bach $E = 20940$ und 21097, für Flußstahl ergab sich $E = 21330$. Auch für Bronze und Messing war die Dehnung dem Zuge proportional, aber diese allerdings erst, nachdem sie vorher einem starken Zuge aus- gesetzt waren.

Für die übrigen von ihm untersuchten Substanzen fand Bach die Größe m von 1 verschieden. Für zwei Gußkörper von Gußeisen fand er das eine Mal $m = 1{,}083$, das andere Mal $m = 1{,}1$, für zwei Kupferstäbe

[1]) C. Bach, Elastizität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin bei Springer 1898.

$m = 1{,}098$ und $m = 1{,}093$. Für den ersten dieser Stäbe gab eine Wiederholung der Messungen $m = 1{,}074$.

Auch in diesen Fällen darf man die Konstante α entsprechend der Dehnung für $\sigma = 1$ als den linearen Dehnungskoeffizienten, also dessen reziproken Wert als den Elastizitätskoeffizienten bezeichnen. Für Gußeisen erhielt Bach so an zwei Gußkörpern $E = 13380$ und 11550, also Werte, die ganz erheblich kleiner sind als die für Flußeisen oder geschmiedetes Eisen; für Kupfer dagegen fand er ungewöhnlich große Werte, nämlich $E = 21950$ bezw. bei einer zweiten Beobachtungsreihe an demselben Stab 18650 und an dem zweiten Stabe $E = 20840$.

Bach hat weiter an den von ihm benutzten Gußeisenkörpern die Verkürzungen durch Druck gemessen. Er fand die Werte von m in der Gleichung für δ erheblich näher an 1; auch die aus den Verkürzungen berechneten Elastizitätskoeffizienten waren nicht gleich denen, die aus den Verlängerungen sich ergaben. Für einen vorher nicht durch Zug beanspruchten Gußkörper ergab sich $E = 13380$ aus den beobachteten Verlängerungen, dagegen für denselben Körper, wenn er vorher nicht durch Druck beansprucht war, aus den Verkürzungen $E = 10430$. Die Werte aus Verlängerung und Verkürzung berechnet rückten sich näher, wenn die Stäbe vorher schon in demselben Sinne durch große Kräfte beansprucht waren. So wurde der Elastizitätskoeffizient bei einem Gußkörper aus den Verlängerungen berechnet $E = 11500$, aus den Verkürzungen $E = 11240$.

Inwieweit die Verschiedenheit der Konstanten bei Zug und Druck allgemeiner gilt, läßt Bach dahingestellt; man pflegt sonst anzunehmen, daß bei kleinen Verlängerungen und Verkürzungen die gleichen Werte der Konstanten E in Anwendung kommen.

Die Gleichung von Bach für die Abhängigkeit der elastischen Dehnung vom Zuge können wir nur als eine innerhalb der Versuchsgrenzen gültige empirische Formel ansehen, die besonders für sehr kleine Züge nicht zu gebrauchen ist. Denn für sehr kleine Züge muß, wie wir in der Lehre von den schwingenden Bewegungen und in der Akustik nachweisen werden, der Wert von $\frac{\delta}{\sigma}$ sich mit abnehmendem σ einem konstanten endlichen Werte nähern.

Würden wir δ in seiner Abhängigkeit von σ durch eine Interpolationsformel darstellen, so muß dieselbe jedenfalls ein der Spannung proportionales Glied enthalten, so daß $\frac{\delta}{\sigma}$ sich für $\sigma = 0$ auf eine endliche Konstante reduziert. Das ist bei der Bachschen Formel nicht der Fall; ist $m > 1$, so nähert sich der Quotient $\frac{\delta}{\sigma}$ dem Werte null, ist $m < 1$, so nähert sich der Wert des Quotienten mit abnehmendem σ dem Werte unendlich.

Kohlrausch und Grüneisen[1]) haben bei ihrer Besprechung der Bachschen Formel an eigenen Versuchen mit Gußeisen und an den Versuchen von Bach gezeigt, daß sich die Beobachtungen sehr gut durch eine Gleichung von der Form

1) *Kohlrausch* und *Grüneisen*, Sitzungsberichte d. Berl. Akad. 1901. p. 1086. Man sehe dazu auch die Bemerkung von *Bach* in der Zeitschrift d. Vereins deutscher Ingenieure 46. p. 25. 1902.

$$\frac{\delta}{\sigma} = A + B\sqrt{\sigma}$$

sen.

miedeeisen, Messing und Schiefer fanden dieselben δ propor-

§ 50.

änderung bei dem Zuge. Wird ein Stab seiner Länge nach zusammengedrückt, so tritt gleichzeitig eine Änderung des ein. Bei Verlängerung eines Stabes tritt eine Verkleinerung ittes ein, wie man durch einen von Wertheim[1]) angestellten kt sichtbar machen kann. Derselbe benutzte dazu eifen (Fig. 60) von ungefähr 300mm Länge. Die- die Gestalt von Prismen mit quadratischer Grund- Länge einer Seite war zwischen 9 und 47mm. An Enden versah er sie mit eisernen Ansätzen A und B, Kautschukstreifen fest angebracht waren. Die An- Haken, mittels des einen wurde der Kautschukstreifen ehängt; an dem andern, B, wurde das ziehende Ge- ebracht. Da der Kautschuk sich äußerst leicht aus- längerte sich der Streifen sehr bedeutend; die Ver- urde gemessen. Da der Querschnitt des Streifens groß war, so konnte man ihn mittels eines Zirkels so die Veränderungen des Querschnittes bestimmen, die Verlängerung der Streifen entstanden. Man be- s vorauszusehen war, daß der Querschnitt des Kaut- kleiner wurde.

Fig. 60.

en wir die ursprüngliche Länge eines Drahtes mit L, die Einwirkung irgend eines Gewichtes diese Länge übergehen, wo δ wieder die Verlängerung der Längen- ellt und gleich $\frac{P_e}{E}$ ist. Der Querschnitt des Stabes, B, dessen Dicke D war, wird nach der Belastung $D(1 - \mu\delta)^2$, wenn wir die Verkürzung des Quer- des Stabes, die jedenfalls der Verlängerung des rtional sein muß, mit $\mu\delta$ bezeichnen. Entwickeln wir den den Querschnitt nach der Belastung, so können wir, da δ ehr klein ist, $\mu^2\delta^2$ vernachlässigen und erhalten dann für den les Stabes

$$BD(1 - 2\mu\delta)$$

Volumen desselben nach dem Zuge

$$LBD(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta),$$

enn wir das sehr kleine Glied $2\mu\delta^2$ wieder außer acht lassen

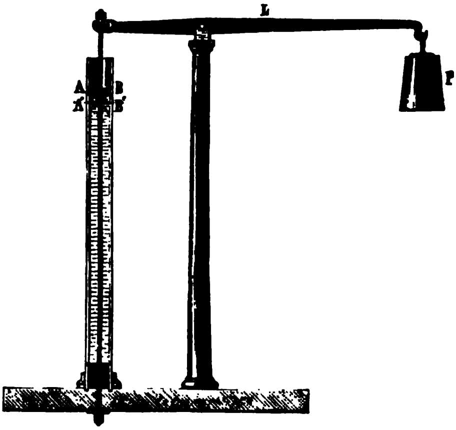
$$LBD(1 + \delta - 2\mu\delta).$$

heim, Annales de chim et de phys. 32. (3.) 1851. Poggend. Ann. n sehe auch *Röntgen*, Poggend. Ann 159. 1876.

Je nach dem Werte von μ kann deshalb eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Volumens eintreten. Es hat sich nun aus sämtlichen in der Richtung angestellten Versuchen ergeben, daß in der Tat eine Vergrößerung des Volumens eintritt, somit daß $2\mu\delta < \delta$ oder daß $\mu < 0{,}5$, aber größer als Null ist.

Welches indes der wirkliche Wert von μ innerhalb dieser Grenzen ist, darüber herrscht wegen der großen Schwierigkeit, diese Größe zu bestimmen, noch einige Unsicherheit. Navier[1]), Poisson[2]), Lamé und Clapeyron[3]) gelangen in ihren theoretischen Untersuchungen über Elastizität zu dem Resultate, daß $\mu = \frac{1}{4}$ sei, ein Resultat, welches Poisson[4]) durch Versuche von Cagniard Latour bestätigt fand. Derselbe befestigte auf einem festen Fußbrett (Fig. 61) einen Metalldraht, so daß derselbe senkrecht aufstieg; das obere Ende des Drahtes wurde an einem Arme eines ungleicharmigen Hebels L befestigt, dessen anderer Arm mit einem Gewichte P beschwert wurde. Die Länge des unbelasteten Drahtes, sie betrug 2^{m}, war genau bestimmt, und es wurde dann die Verlängerung beobachtet, welche durch die Belastung des Hebels eintrat. Die letztere wurde so weit gesteigert, daß die Verlängerung des Drahtes 6^{mm} betrug. Der Draht war, wie die Figur zeigt, von einer engen, unten geschlossenen und mit Wasser gefüllten Röhre umgeben, der Durchmesser der Röhre und des Drahtes waren genau gemessen. Im Augenblicke nun, in dem sich der Draht durch den Zug zu verlängern begann, sah man das Niveau des Wassers in der Röhre von AB bis $A'B'$ sinken; ein Beweis, daß in der Tat bei der Verlängerung des Drahtes eine Verminderung des Querschnittes eintritt. Die Niveaudifferenz vor und nach dem Zuge wurde genau gemessen. Darauf wurde der Draht unten am Fußbrett gelöst, in die mit Wasser gefüllte Röhre eingesetzt, so daß sein unteres Ende den Boden der Röhre gerade berührte, und das Niveau des Wassers wieder beobachtet. Darauf wurde der Draht so weit emporgezogen, daß das obere Ende 6^{mm} aus dem Wasser emporragte, daß also ein ebenso großes Stück des Drahtes aus dem Wasser emporragte als bei dem vorigen Versuche. Da dann das Volumen des in das Wasser tauchenden Drahtes um das herausgezogene Stück kleiner war, so mußte das Niveau des Wassers wieder sinken, und es ergab sich, daß es jetzt doppelt so tief sank als bei dem vorigen Versuch, somit daß

Fig. 61.



1) *Navier,* Mémoires de l'Académie des sciences. 7. 1827.

2) *Poisson,* Mémoires de l'Académie des sciences. 8. 1829.

3) *Lamé* und *Clapeyron,* Crelles Journal für Mathematik. 7. 1831.

4) *Poisson* teilt diesen Versuch mit in Annales de chim. et de phys. 1827. Poggend. Ann. 12. 1828.

lumverminderung des jetzt noch in das Wasser tauchenden Drahtes ppelt so groß war als bei der Verlängerung des Drahtes. Der Wert μ ergibt sich daraus auf folgende Weise: bezeichnen wir den Radius zylindrischen Drahtes mit r, so nimmt, wenn wir die Verlängerung Längeneinheit mit δ bezeichnen, bei der Ausdehnung des Drahtes das ch in das Wasser tauchende Stück des Drahtes das Volumen

$$l r^2 \pi (1 - 2 \mu \delta)$$

, da wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, voraussetzen dürfen, ß die Länge des eintauchenden Stückes nicht geändert ist. Das olumen des Stückes ist dann nur kleiner geworden, weil der Querschnitt s Drahtes im Verhältnis $1 : 1 - 2\mu\delta$ verkleinert ist.

Das Volumen des in das Wasser eintauchenden Drahtes ist nach dem eiten Versuch dasselbe, wenn der Draht ohne Dehnung um die Hälfte er Verlängerung aus dem Wasser hervorgezogen wird. Das Volumen des an noch im Wasser befindlichen Drahtstückes ist $l r^2 \pi (1 - \frac{1}{2} \delta)$; so- mit ist

$$l r^2 \pi (1 - 2 \mu \delta) = l r^2 \pi (1 - \tfrac{1}{2} \delta)$$

der

$$2 \mu = \tfrac{1}{2}; \quad \mu = \tfrac{1}{4}.$$

Man kann indes dem Versuche von Cagniard Latour nicht eine hin- eichende Beweiskraft beilegen, daß der Querkontraktionskoeffizient diesen er Poissonschen Theorie entsprechenden Wert hat, da die Methode ehrere Fehlerquellen enthält, welche dem Resultate eine große Unsicher- eit geben, ganz abgesehen davon, daß wegen der Kleinheit der zu messen- en Größen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler allein schon das esultat unsicher machen. Die Benetzung der Röhrenwand ist nie eine anz gleichmäßige, bei dem Herabsinken des Wasserniveaus bleibt an r Röhrenwand Wasser haften, ebenso haftet Wasser an dem heraus- zogenen Drahte, alles Fehlerquellen, welche man nicht sicher in Rechnung eben kann.

Cardani[1]) hat dann auch nach der gleichen Methode ganz andere erte erhalten wie Cagniard Latour, er erhielt bei Eisen 0,325, bei tahl 0,372, Aluminium 0,233.

Daß die theoretischen Schlußfolgerungen Poissons nicht strenge sind, t zuerst wohl Stokes gezeigt[2]), sie beruhen auf speziellen, nicht not- endigen Voraussetzungen; die Untersuchungen von Cauchy[3]), Lamé[4]), irchhoff[5]), W. Thomson[6]) und anderen haben vielmehr ergeben, daß Theorie der Elastizität nur zu dem bereits vorhin angegebenen Resul- e führt, daß der Wert von μ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt, daß der Versuch in dem Falle über den Wert von μ innerhalb dieser Grenzen entscheiden muß

1) *Cardani*, Physik. Zeitschr. 4. p. 144. 449. 1902.

2) *Stokes*. Man sehe *Thomson* und *Tait*, Theoretische Physik. § 684 (Übersetzung von *Wertheim* 2. Teil. Braunschweig 1874.)

3) *Cauchy*, Exercices de Mathématiques. 3. p. 182 u. p. 205 ff.

4) *Lamé*, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps soli- 2 p. ..5 ff.

5) *Kirchhoff*, Crelles Journal 40. 1855. 56. 1857.

6) *W. Thomson*. Theoretische Physik von *Thomson* und *Tait*. § 684 ff.

Um den Zusammenhang der Querkontraktion mit den durch den Zug oder Druck geweckten elastischen Kräften zu erkennen, denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den drei Seitenpaaren a, b, c. Auf das Seitenpaar a wirke ein solcher Zug, daß derselbe pro Flächeneinheit gleich p_1 sei, ebenso sei der Zug pro Flächeneinheit des Seitenpaares b gleich p_2, des Seitenpaares c gleich p_3.

Durch den Zug p_1 erfährt das Parallelepiped in der Richtung dieses Zuges, wir wollen sie als Längsrichtung bezeichnen, die Verlängerung $\delta_1 = Cp_1$; der Zug senkrecht zu b, er sei als Zug nach der Breite bezeichnet, bewirkt in der Längsrichtung eine Verkürzung infolge der Querkontraktion. Ist die Zunahme der Breite als Bruchteil der ursprünglichen Breite $\delta_2 = Cp_2$, so ist die infolge derselben eintretende Verkürzung der Länge gleich $\mu\delta_2 = \mu Cp_2$. Der nach der dritten, der Dickenrichtung wirkende Zug p_3 bewirkt nach der Dickenrichtung die Vergrößerung $\delta_3 = Cp_3$ nach der Richtung der Länge die Verkürzung $\mu\delta_3 = \mu Cp_3$. Wirken alle Drucke gleichzeitig, so wird die Verlängerung des Parallelepipedes gleich $\delta_1 - \mu\delta_2 - \mu\delta_3 = \varepsilon_1$, da dann die oben betrachteten Änderungen der Länge gleichzeitig eintreten. Es ist demnach

$$\varepsilon_1 = C(p_1 - \mu(p_2 + p_3)).$$

In ganz gleicher Weise erhalten wir für die Änderung der Breitendimension ε_2 und der Dickendimension ε_3 durch die drei gleichzeitigen Züge

$$\varepsilon_2 = C(p_2 - \mu(p_1 + p_3))$$
$$\varepsilon_3 = C(p_3 - \mu(p_1 + p_2)).$$

Ist die Länge des Parallelepipedes vor dem Zuge L, die Breite B, die Dicke D, so ist das Volumen V vor dem Zuge gleich LBD; nach dem Zuge ist dasselbe

$$V_1 = L(1 + \varepsilon_1)\,B(1 + \varepsilon_2)\,D(1 + \varepsilon_3) = V(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3).$$

Wegen der Kleinheit der Änderungen ε können wir dasselbe setzen

$$V_1 = V(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

und erhalten daraus für die Volumänderung

$$v = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Beachten wir dies und gleichzeitig, daß der lineare Verlängerungskoeffizient C der reziproke Wert des Elastizitätskoeffizienten E ist, so erhalten wir leicht für die durch die Deformation geweckten, diesen Zügen gleichen elastischen Kräfte, dieselben ausgedrückt durch die Deformation

$$p_1 = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_1 + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot v.$$

Setzen wir

$$\frac{E}{1+\mu} = 2k \quad \text{und} \quad \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = K,$$

so wird

$$p_1 = 2k\varepsilon_1 + Kv$$

und ganz ebenso

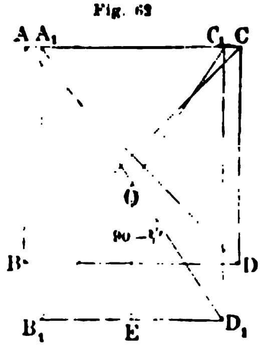
$$p_2 = 2k\varepsilon_2 + Kv; \quad p_3 = 2k\varepsilon_3 + Kv.$$

Diese Gleichungen gelten ganz allgemein, welches auch die Züge p_1, p_3 sind; sie gelten auch für den Fall, daß zwei der Züge, etwa p_2 [illegible] p_3 gleich Null sind, also für den einfachen Longitudinalzug. Denn [illegible] $p_2 = 0$ und $p_3 = 0$, so wird $\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1$ und ebenso $\varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1$; [illegible]ird dann ε_1 $(1 - 2\mu)$. Setzen wir diese Werte in die beiden letzten [illegible]ichungen ein, indem wir für k und K ihre in E und μ gegebenen Werte [illegible]etzen, so werden $p_2 = 0$ und $p_3 = 0$.

Die in einem Parallelepipede geweckte elastische Kraft besteht also [illegible] zwei Teilen, der eine ist der durch die stattgehabten Einwirkungen [illegible]getretenen Volumänderung proportional, man nennt deshalb auch wohl den Koeffizienten der Volumelastizität; der andere ist der Änderung [illegible] Dimension parallel der Richtung, nach welcher die elastische Kraft [illegible]rkt, proportional. Den Koeffizienten k dieses Gliedes nennt man wohl [illegible] Koeffizienten der Formelastizität oder auch den Starrheitskoeffizienten. [illegible]selbe gibt uns nämlich die lediglich durch eine Verschiebung der [illegible]olekülschichten gegeneinander geweckte elastische Kraft, wie man aus [illegible]gender von Clebsch[1]) herrührenden Betrachtungsweise erkennt.

Wir betrachten einen Würfel aus isotropem Material, dessen Durchschnitt mit der Ebene der Zeichnung $ABCD$ sei. Derselbe sei mit der [illegible]ern Fläche befestigt und erhalte an der gegenüberliegenden Seite BD [illegible] parallel AB gerichteten Zug, der für die [illegible]ächeneinheit gleich P sei. Durch den Zug geht [illegible] Würfel in ein Parallelepiped über $A_1 B_1 D_1 C_1$, [illegible]dem die der Zugrichtung parallele Kante a in [illegible] $(1 + \delta)$, oder wenn wir den Elastizitätskoeffizienten E in dem Ausdrucke benutzen in [illegible] $\left(1 + \frac{P}{E}\right)$ übergeht, die beiden andern Kanten [illegible] aber zu $a(1 - \mu\delta) = a\left(1 - \mu\frac{P}{E}\right)$ verkür[illegible]. Die der Zugrichtung parallelen Seiten[illegible] des Würfels $ABCD$ werden dadurch [illegible]ecke $A_1 B_1 C_1 D_1$; während die Diagonalen des [illegible]drates vorher zueinander senkrecht waren, [illegible] die Diagonalen der Rechtecke $A_1 D_1$ und $C_1 B_1$ jetzt einen Winkel [illegible] miteinander.

Fig. 62



Aus dieser Neigung der Diagonalen gegeneinander folgt, daß die [illegible]olekülschichten durch den Zug nicht nur voneinander entfernt, sondern [illegible] gegeneinander verschoben sind. Vor dem Zuge liegen die Mittel[illegible] aller zur Diagonale BC parallelen Schichten auf einer durch den [illegible]punkt des Würfels gehenden, der Diagonale AD parallelen Geraden; [illegible] Gerade ist normal zur Ebenenschar. Nach dem Zuge ist die Lage [illegible] Schar von Ebenen parallel der Diagonale des Rechteckes $B_1 C_1$ [illegible]: die Mittelpunkte aller dieser Ebenen liegen auch jetzt auf der [illegible] den Mittelpunkt des Parallelepipeds gehenden, zur Diagonale $A_1 D_1$ [illegible]en Linie. Bedeutet unsere Figur einen Schnitt durch den Mittel[illegible] des Würfels bezw. Parallelepipeds, so daß O der Mittelpunkt des-

1) Clebsch, Theorie der Elastizität p. 8. Leipzig 1862.

selben ist, so liegen alle Mittelpunkte der zu B_1C_1 parallelen Schnitte auf A_1D_1, und man sieht sofort, daß der Winkel den die Richtung A_1D_1 mit der zu der Ebenenschar senkrechten Richtung bildet, jener Winkel ist, welcher den Winkel $90^0 - \psi$ zu 90^0 ergänzt, also der Winkel ψ ist. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier benachbarter Schichten, welche vor dem Zuge zu den Schichten senkrecht war, hat sich also durch die Verschiebung der Schichten gegeneinander um den Winkel ψ gedreht. Dasselbe gilt für irgend zwei entsprechend liegende Punkte zweier benachbarter Schichten. Denn legen wir irgendwo durch den Würfel eine Linie senkrecht zu BC, also parallel AD, so liegen alle von dieser Linie getroffenen Moleküle nach dem Zuge auf einer zu A_1D_1 parallelen Linie. Solche durch eine zur Verschiebungsebene normale Richtung bestimmte Punkte benachbarter Schichten nennen wir entsprechende Punkte, die Verbindungslinien aller entsprechenden Punkte zweier benachbarter Schichten haben sich somit um denselben Winkel gedreht.

Diesen Winkel nennt Clebsch den Verschiebungswinkel und setzt denselben als Maß der Verschiebung zweier gegeneinander verschobener Schichten. Die durch diese Verschiebung geweckte Elastizität bedingt die Starrheit des Körpers, denn sie gibt den Widerstand, den der Körper einer Verschiebung der Molekülschichten entgegensetzt, welche nicht mit einer Entfernung derselben voneinander verbunden ist. Das Maß der Starrheit ist jener Koeffizient, mit welchem wir die Größe der Verschiebung, also den Verschiebungswinkel zu multiplizieren haben, um die in der Flächeneinheit geweckte elastische Kraft zu erhalten. Wir setzen hierbei, wie bei allen elastischen Änderungen, die wir betrachten, voraus, daß die durch die Verschiebung geweckte elastische Kraft der Verschiebung proportional ist, sehen also von den etwa aus Thompsons Versuchen sich ergebenden Abweichungen ab. Ist demnach die durch einen Verschiebungswinkel ψ pro Flächeneinheit geweckte elastische Kraft gleich R, so setzen wir

$$R = k\psi,$$

so daß k das Maß der Starrheit ist. Daß dieser Koeffizient k den vorhin angegebenen Wert hat, ergibt sich, indem wir in dem durch den Zug P gezogenen Parallelepiped den Winkel ψ und die elastische Kraft R bestimmen.

Ziehen wir von dem Punkte O (Fig. 62), in dem die Diagonalen sich schneiden, eine Senkrechte OE auf die zur Zugrichtung senkrechte Seite B_1D_1, so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel $EOD_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ ist. Die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete ist gleich $\frac{1}{2}\, a\, (1 - \mu\delta)$, die anliegende Kathete ist $\frac{1}{2}\, a\, (1 + \delta)$. Demnach haben wir zur Bestimmung von ψ

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}a\left(1 - \mu\frac{P}{E}\right)}{\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{P}{E}\right)}$$

und da $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1$ und ψ immer ein kleiner Winkel ist

$$\frac{1 - \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \mu \frac{P}{E}}{1 + \frac{P}{E}}$$

ießlich mit Vernachlässigung selbst gegen ψ sehr kleiner Größen

$$\psi = \frac{P}{E}(1 + \mu).$$

Größe R ergibt sich aus der Überlegung, daß die durch die ung in der ganzen Diagonalfläche des Parallelepipeds geweckte Kraft nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes der der läche parallelen Komponente des auf die Endfläche BD wirken- s gleich sein muß. Ist F die Größe der diagonalen Fläche, f die r Grundfläche $B_1 D_1$ und der Winkel $C_1 B_1 D_1 = \alpha$, so muß

$$RF = Pf \cos \alpha$$

n ist $f = F \cos \alpha$, somit $RF = PF \cos^2 \alpha$ und da der Winkel α ine verschwindende Größe von 45^0 abweicht

$$R = \frac{P}{2}.$$

rd

$$R = k\psi = \frac{P}{2} = k\frac{P}{E}(1 + \mu)$$

is

$$k = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

s vorhin eingesetzt haben.

beiden Konstanten, der Koeffizient der Starrheit und der Volum- sind es, welche das ganze elastische Verhalten isotroper Körper n.

haben vorhin die beiden Koeffizienten k und K durch E und μ kt, wir können aber ebenso E und μ durch diese Konstanten en. Es wird, wie man leicht erhält

$$\mu = \frac{K}{2k + K} \qquad E = \frac{3K + 2k}{\frac{K}{k} + 1}.$$

der Gleichung für μ erkennt man, daß der Schluß von Poisson, hem μ für alle Körper denselben Wert und zwar den Wert $\frac{1}{4}$ in führt, daß für alle Körper der Koeffizient der Starrheit und elastizität einander stets gleich sind. Denn $\mu = 0{,}25$ führt auf ung $k = K$. Gerade darauf machte Stokes aufmerksam, daß luß der Erfahrung durchaus widerspreche, daß wir Körper der sten Grade der Starrheit haben, deren Kompressibilität aber einander verschieden ist. So ist für Kautschuk die Starrheit fel sehr klein, während sein Koeffizient der Volumelastizität, wie reisen werden, erheblich ist.

Der gleiche Einwurf ist gegen den von Wertheim[1]) aus seinen Versuchen gezogenen Schluß zu erheben, daß μ zwar nicht gleich $\frac{1}{4}$ aber doch für alle Körper denselben Wert nämlich $\frac{1}{3}$ habe. Wertheim schloß dieses Resultat daraus, daß er für Kautschuk und Glas und ebenso annähernd für Messing diesen Wert fand. Die Methode, welche Wertheim für Kautschuk anwandte, haben wir im Anfange dieses Paragraphen angegeben, aber schon Röntgen[2]) hat nach einer erheblich verbesserten, im Prinzip gleichen Methode gezeigt, daß für Kautschuk der Wert von μ nahe gleich 0,5 ist, so lange man den Kautschukstreifen nicht mehr als 0,05 seiner Länge ausdehne. Röntgen zeichnete auf die Seitenflächen des Kautschukstabes, wenn derselbe durch ein angehängtes Gewicht verlängert war, einen Kreis, indem er ein kreisförmiges Messingrohr als Stempel benutzte, dadurch, daß der kreisförmige Rand der einen Endfläche geschwärzt und darauf vorsichtig gegen die Seitenfläche des gedehnten Kautschuks gedrückt wurde. Wurde der Stab entlastet, so verwandelte sich infolge der stärkern Zusammenziehung des der Länge parallelen Durchmessers der Kreis in eine Ellipse. Ist d der Durchmesser des Kreises, so wird der der Längsrichtung des Stabes parallele Durchmesser nach der Entlastung $d\,(1-\delta)$, der der Breite parallele Durchmesser wird aber $d\,(1+\mu\delta)$, man sieht, wie sich daraus unmittelbar μ ergibt.

Röntgen macht bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam, daß der Wert von μ nur so lange konstant sein könne, als die Verlängerung einen so kleinen Wert habe, daß man δ^2 gegen δ vernachlässigen dürfe. Man erkennt das leicht als richtig an. Für die einer Verlängerung δ entsprechende Volumänderung erhielten wir strenge $V\,(1+\delta)\,(1-\mu\delta)^2 - V$. Soll etwa μ eine solche Größe haben, daß keine Volumänderung eintritt, so wird die Gleichung zwischen μ und δ

$$(1+\delta)\,(1-\mu\delta)^2 = 1; \quad 1-\mu\delta = \sqrt{\frac{1}{1+\delta}}$$

und dieselbe wird nach μ aufgelöst

$$\mu = \frac{1}{\delta}\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+\delta}}\right).$$

Danach würde für

$\delta = 0{,}001$	0,01	0,1	0,5
$\mu = 0{,}4998$	0,4953	0,4654	0,367,

also schon, wenn der Kautschukstab um seine halbe Länge gedehnt wird, würde der Querkontraktionskoeffizient 0,367 werden, im Falle im Kautschuk durch longitudinalen Zug überhaupt gar keine Änderung des Volumens einträte.

Wertheim hat bei seinen Versuchen Dehnungen des Kautschuk gewandt, bei welchen $\delta = \frac{1}{2}$ und mehr wurde. Da er bei diesem Wert $\mu = \frac{1}{3}$ fand, würde auch aus Wertheims Versuchen folgen, daß für kleine Verlängerungen für Kautschuk μ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ ist.

1) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. **23.** (3.) 1848. Poggend. Ann. 78. p. 386. 1848

2) *Röntgen*, Poggend. Ann. **159.** p. 601. 1876.

a nächsten Paragraphen zu besprechenden Versuche Amagats
ı auch mit aller Schärfe gezeigt, daß bei Kautschuk μ nur
$\frac{1}{4}$ verschieden ist.

Wertheim bei Kautschuk, so hat Gray[1]) für Stahl und einige
ı direkt die Verlängerungen δ und die Querkontraktionen $\mu\delta$
Er findet für Stahl $\mu = 0{,}288$ bis $0{,}295$.

› hat Morrow[2]) die Verlängerung von Stäben und deren Quer-
mit Fühlhebeln direkt gemessen; er erhielt für weichen
.271 bis 0,281, Schmiedeeisen 0,270 bis 0,289, Gußeisen
,270, Kupfer 0,310 bis 0,340, Messing 0,320 bis 0,351.
ıeyer[3]) und Benton[4]) maßen die Verlängerung δ und
die Querkontraktion $\mu\delta$ durch Verschiebung von Inter-
n. Wir werden diese von Fizeau zuerst zur Mes-
Ausdehnungskoeffizienten benutzten Methode in der
› besprechen. Beide Beobachter erhielten für verschie-
lle und Legierungen erheblich verschiedene Werte
›nton erhielt für einige Metalle folgende Werte für
tätskoeffizienten E und für μ; die Drähte waren ge-

	Stahl	Eisen	Kupfer	Nickel
=	22235	20700	11940	21320
=	0,2755	0,288	0,341	0,375

dickern Nickeldraht erhielt Benton denselben Wert
egen für μ den Wert 0,271.

dern Versuchen wandte Wertheim auf einen Vor-
Regnault ohne Naht gezogene Röhren von Messing
hren A (Fig. 63) an, welche mit ihren Enden an
re, im lichten gleich weite aber sehr dickwandige
B' befestigt waren. Die untere der letztern war unten
, die obere an beiden Enden offen und an ihrem obern
iner Fassung versehen, durch welche eine sehr enge
' in B eingeführt war. Diese so vorgerichtete Röhre
' mit Wasser gefüllt, so daß dasselbe in der engen
ur Marke F reichte. Die Röhre B wurde an ihrem
fest aufgehängt, so daß der Apparat vertikal herab-
der Haken der untern Röhre B' mit einem Gewichte p
Die Röhre A dehnte sich dann gerade so aus, wie ein
tab

man die Verlängerung der Röhre A, indem man auf
wei den Enden der Röhre A möglichst nahe Marken
nd die Abstandszunahme der Marken beobachtet, so hat
m Quotienten der Abstandszunahme und des ursprüng-
tandes die Verlängerung δ; infolge der durch den Zug
n Volumvergrößerung sinkt das Wasser in dem kapillaren Rohre

Fig. 63.

[1]) Fortschritte der Physik im Jahre 1902. Teil I p. 361
[2]) Morrow, Phil mag (6) 6 p. 417 1903
[3]) Meyer, Proc. of Royal Soc 55 p. 373. 1894
[4]) Benton, Ann der Physik. 3 p. 482. 1900

und die Senkung s des Wasserniveaus multipliziert mit dem Querschnitt q des Rohres F gibt die Vermehrung des Volumens des gezogenen Teiles. Geht die Länge L durch den Zug in $L + \Delta L$ über, so ist

$$\delta = \frac{\Delta L}{L}.$$

Geht das Volumen V in $V + \Delta V$ über, so ist

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu)\,\delta = (1 - 2\mu)\,\frac{\Delta L}{L}$$

somit

$$1 - 2\mu = \frac{L \cdot \Delta V}{\Delta L \cdot V},$$

woraus sich μ unmittelbar ergibt.

Für drei Messingröhren erhielt Wertheim so für μ die Werte 0,338, 0,346, 0,342, Mittel 0,342, für vier Glasröhren die Werte 0,320, 0,351, 0,313, 0,337, Mittel 0,330. Die Werte sind also in der Tat nahe $\frac{1}{3}$.

Der von Wertheim für Glas gefundene Wert von μ ist durch spätere Bestimmungen nicht bestätigt worden. Cornu[1]) fand nach einer im § 54 zu besprechenden Methode an sechs verschiedenen Glasstreifen für μ Werte zwischen 0,224 und 0,257; er schließt, daß für Glas der Wert gleich 0,2[illegible] also gleich dem von der Poissonschen Theorie verlangten Werte [illegible] Indem Cornu glaubt, daß Glas am nächsten ein wirklich isotroper Körper sei, schließt er weiter, daß für wirklich isotrope Körper μ in der Tat [illegible] von Poisson verlangten Wert habe. Straubel[2]) hat nach der Methode von Cornu 30 Gläser des Jenaer Glaswerks untersucht und erhielt Werte von μ, die zwischen 0,297 und 0,316 lagen, ein Beweis, daß auch [illegible] Gläser die Werte von μ erheblich verschieden sein können. Voigt [illegible] fand nach einer ebenfalls im § 54 zu besprechenden Methode für G[illegible] dessen Isotropie er direkt prüfte, erheblich kleinere Werte als 0,25. [illegible] ließ Stäbchen aus verschiedenen Spiegelglasplatten herstellen. Die [illegible] neun Stäbchen waren aus einer grünlich gefärbten Platte von 50 mm D[illegible] an verschiedenen Stellen und in verschiedener Tiefe herausgeschnitten; [illegible] Länge der Stäbchen betrug zwischen 60 und 70 mm, die Breite war zwi[illegible] etwa 2 und 5 mm und die Dicke etwa 0,5 bis 2 mm. Bei einigen St[illegible] war die Breitendimension den ursprünglichen Begrenzungsflächen der P[illegible] parallel, bei anderen zu denselben senkrecht. Für jede Platte wurde [illegible] der Elastizitätskoeffizient und der Koeffizient der Starrheit gemessen. [illegible] den Elastizitätskoeffizienten von sieben Stäbchen, welche in [illegible] Entfernung von den ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platte [illegible] nommen waren, erhielt er in Kilogramm pro Quadratmillimeter 6480 [illegible] für den Starrheitskoeffizienten [illegible] = [illegible]. Aus beiden Werten folgt

[illegible]

1) Cornu, Comptes Rendus [illegible]
2) Straubel, Wiedem. Ann. [illegible]
3) Voigt, Wiedem. Ann. [illegible]

Für das Glas einer zweiten Spiegelglasplatte erhielt Voigt

$$E = 7358; \quad k = 3044; \quad \mu = 0,208.$$

Für beide Glassorten, deren Isotropie nicht zu bezweifeln ist, ergibt sich somit μ erheblich kleiner als $\frac{1}{4}$.

Nach im Prinzip gleicher Methode hat Voigt[1]) auch für eine große Anzahl Metalle und einige Legierungen die Werte E und μ bestimmt. Wir geben hierunter die gefundenen Werte; die Metalle sind mit ihren chemischen Zeichen bezeichnet.

Metalle	E	μ	Metalle	E	μ
Al	6570	0,274	Ni	20300	0,300
Cd	7070	0,447	Ag	7790	0,317
Fe	12800	0,228	Stahl	20400	0,264
Au	7580	0,330	Bi	3190	0,288
Cu	10850	0,133	Zn	10300	0,329
Mg	4206	0,246	Sn	5400	0,568

Auffallend ist der kleine Wert von E für Eisen, von μ für Kupfer, vom Zinn nimmt Voigt an, daß es krystallinisch gewesen sei.

Einen nicht viel von dem Voigtschen verschiedenen Wert, nämlich $\mu = 0,226$, fand später für Glas nach der gleichen Methode Kowalski[2]). Cantone[3]) und später Amagat[4]) fanden nach im nächsten Paragraphen zu besprechenden Methoden für Glas wieder nahezu 0,25. Cantone untersuchte vier Glasröhren und erhielt Werte zwischen 0,246 und 0,264, im Mittel 0,257. Amagat untersuchte Röhren aus gewöhnlichem Glas und Kristallglas und erhielt für ersteres $\mu = 0,2451$ und für letzteres 0,2499.

Kirchhoff[5]) maß, wie es später Voigt getan hat, für einige Metalle den Elastizitätskoeffizienten und den Starrheitskoeffizienten; für drei Stäbe aus glashartem Stahl fand er als Werte von μ

$$0,293, \quad 0,295, \quad 0,294, \quad \text{Mittel } 0,294.$$

Für einen hartgezogenen Messingstab erhielt er den Wert $\mu = 0,387$, man sieht zwei Werte, die erheblich voneinander verschieden sind, daß sie zu dem Schlusse führen, daß für die verschiedenen Metalle der Wert von μ ebenfalls verschieden ist.

Später nach der Kirchhoffschen Methode von Okatow[6]) an verschiedenen Stahlstäben durchgeführte Versuche ergaben, daß der Wert des Querkontraktionskoeffizienten sowohl für verschiedene Stahlsorten in gleichem Zustande der Härtung als für dieselbe Stahlsorte in verschiedenem Zustande der Härtung verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werte von

1) *Voigt*, Wiedem. Ann. **48**. p. 674. 1893.
2) *von Kowalski*, Wiedem. Ann. **36**. 1889.
3) *Cantone*, Rendic. della Reale Accad. dei Lincei **4**. p. 220 u. 292. 1888.
4) *Amagat*, Ann. de chim. et de phys. **22**. 6. p. 95. 1889.
5) *Kirchhoff*, Poggend. Ann. **108**. p. 369. 1859.
6) *Okatow*, Poggend. Ann. **119**. 1863.

	Stricknadelstäbchen.	Glatter runder eng Stahl.
a) ursprünglicher Zustand	$\mu = 0{,}2750$	$\mu = 0{,}2989$
b) in Öl gehärtet	0,2969	0,3280
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt.	0,3037	0,3281

Die für den glatten runden englischen Stahl angegebenen Wert wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimension gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6^{mm}. Okatow glaubt, da der vollkommen weiche Stahl ein nahezu vollkommen isotroper Körper sei da sich auch in diesem Zustande für verschiedene Stahlsorten verschieden Werte von μ finden, so muß man schließen, daß der Querkontraktions koeffizient in der Tat für verschiedene Körper auch bei voller Isotropie verschieden ist.

Fast gleiche Werte wie Okatow erhielt Schneebeli[1]) für eine Anzahl von Stäben aus glattem runden Stahl, deren Länge bis zu 1^{m}, deren Durchmesser bis zu 2^{cm} betrug; auch Schneebeli maß die beiden Koeffizienten der Elastizität und Starrheit nach einer im dritten Abschnitt zu besprechenden Methode. Er erhielt für die Stäbe im federharten Zustande $\mu = 0{,}296$ und im ganz weichen Zustande $\mu = 0{,}303$.

Amagat[2]) hat für eine Reihe von Metallen die Querkontraktion einmal nach der indes in den Einzelheiten der Durchführung erheblich verbesserten Methode von Wertheim und dann durch dieselbe Methode wie für Glas gemessen. Er bestimmte also an denselben Metallröhren die Elastizitätskoeffizienten und die Volumenänderungen mit der größten Sorgfalt. Die von ihm erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Werte von μ		Elastizitätskoeffizienten	
	I. Methode	II. Methode	I. Methode	II. Methode
Stahl	0,2694	0,2679	20 333	20 457
Kupfer	0,3288	0,3252	11 979	12 312
Messing.........	0,3305	0,3236	10 680	11 022
Deltametall	0,3330	0,3468	12 054	11 334
Blei	0,4252	0,4313	1626	1493

Nach allen diesen Untersuchungen kommen wir zu dem Resultate, daß der Koeffizient der Querkontraktion, also auch das Verhältnis zwischen dem Koeffizienten der Starrheit und dem der Volumelastizität für verschiedenen Substanzen, auch bei voller Isotropie erheblich verschieden ist; die Versuche von Voigt führen zu dem Schlusse, daß der Wert auch nicht ein Grenzwert ist, wie manche anzunehmen geneigt sind, die Querkontraktion für absolut isotrope und elastische Körper sich nähert, denn Voigt fand für ganz isotrope Gläser nahezu 0,2.

1) *Schneebeli,* Poggend. Ann. **140**. 1870.
2) *Amagat,* Ann. de chim. et de phys. **22.** (6.) 1891.

§ 51.

Kubischer Kompressionskoeffizient. Die im vorigen Paragraphen angeführten beiden elastischen Konstanten der Starrheit und Volumelastizität bezw. die experimentell zu bestimmenden Elastizitätskoeffizienten und Querkontraktionskoeffizienten bestimmen bei isotropen Körpern alle Äußerungen der Elastizität. Je zwei verschiedene elastische Erscheinungen miteinander kombiniert, gestatten uns deshalb diese Konstanten abzuleiten. Die Übereinstimmung der aus den verschiedenen so kombinierten Erscheinungen sich ergebenden Werte der Konstanten ist infolgedessen eine gute Prüfung für die Theorie. Wir wollen die Hauptformen der elastischen Erscheinungen im folgenden betrachten. Wir beginnen mit der Kompression eines durch allseitig gleichen Druck deformierten massiven oder Hohlkörpers.

Sind die Drucke p_1, p_2, p_3, welche wir auf die Seitenflächen eines Parallelepipeds ausüben, einander gleich, so werden auch die Verkürzungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, welche die Seiten des Parallelepipeds erfahren, einander gleich und die dem Drucke p entsprechende Volumverminderung v wird gleich 3ε. Die im vorigen Paragraphen für die Drucke p gefundenen Ausdrücke gehen dann in den einzigen über, da $\varepsilon = \frac{1}{3} v$ ist

$$p = \tfrac{2}{3} kv + Kv = (\tfrac{2}{3} k + K) v.$$

Der Koeffizient der kubischen Kompression ist jene Zahl, mit welcher der pro Flächeneinheit wirkende Druck zu multiplizieren ist, um die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung zu erhalten. Da die letztere Gleichung nach v aufgelöst uns diese Volumverminderung gibt

$$v = \frac{3}{2k + 3K} \cdot p,$$

so folgt, daß der Koeffizient von p der kubische Kompressionskoeffizient ist. Drücken wir k und K durch den Elastizitätskoeffizienten E und den Querkontraktionskoeffizienten μ aus

$$k = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad K = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

so wird der kubische Kompressionskoeffizient C_k

$$C_k = \frac{3}{E}(1 - 2\mu) = 3C(1 - 2\mu),$$

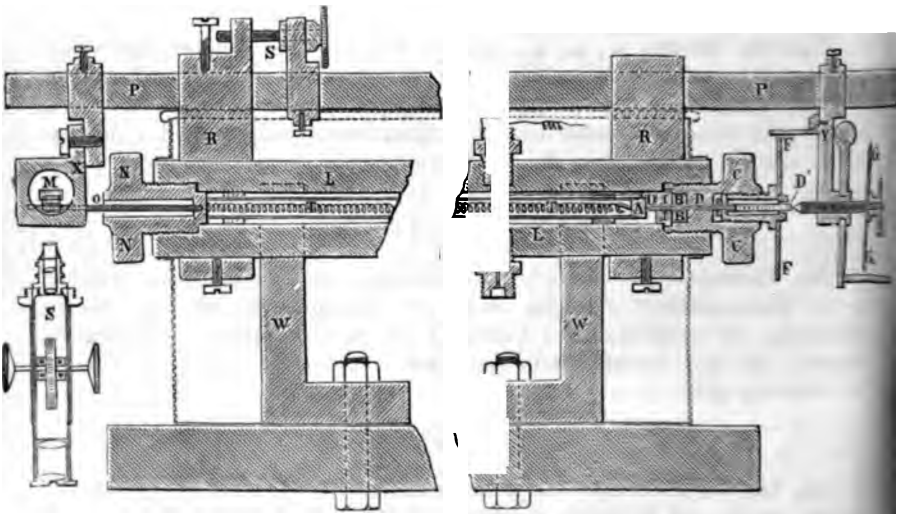
wenn wir wie vorhin die linearen Verlängerungs- beziehungsweise Verkürzungskoeffizienten mit C bezeichnen. Das Verhältnis zwischen den beiden Koeffizienten hängt demnach, wie es ja auch nicht anders sein kann, wesentlich von dem Werte von μ ab.

Die direkte Messung der kubischen Kompression ist wegen ihrer geringen Größe mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft, sie ist von Amagat[1] für zwei verschiedene Glassorten durchgeführt. Amagat kompri-

1 *Amagat*, Ann. de chim. et de phys. 22. (6.) p. 121. 1889.

mierte in einem hohlen sehr dickwandigen Stahlzylinder Glasröhren und maß deren Verkürzung, welche, da die Änderung der Dimensionen bei gleichmäßiger Kompression nach allen Richtungen die gleiche ist, gleich einem Drittel der kubischen Kompression ist. Die von Amagat getroffene Anordnung zeigt Fig. 64. Die zu untersuchende Glasröhre von 1 m Länge befindet sich in dem dickwandigen Stahlzylinder *LL* und wird durch eine im Innern der Röhre befindliche lange Feder *TT* mit ihrem einen Ende gegen den Verschluß *NN* des Stahlzylinders gedrückt; zu dem Zwecke ist die Feder mit ihrem einen Ende an den Boden *NN* des Zylinders angelötet, während das andere Ende der Feder an einem kleineren in die Stahlplatte *A* eingeschraubten Haken befestigt wird. Durch die Feder wird

Fig. 64.



die Stahlplatte *A* gegen das andere Ende der Glasröhre gezogen und dieser Zug bewirkt gleichzeitig, daß das untere Ende der Glasröhre fest gegen den Boden des Stahlzylinders gestemmt wird. Die Feder ist an einer Stelle zerschnitten und die Stücke sind durch ein den elektrischen Strom nicht leitendes Zwischenstück wieder verbunden.

Mit der Platte *A* kann ein kleiner Stahlkolben *DD* zur Berührung gebracht werden, der in der Achse des obern Verschlusses *CC* des Stahlzylinders sich hin und her bewegt und durch eine Stopfbüchse *BB* geführt ist, welche das Innere des Stahlzylinders vollständig abdichtet. Der Kolben ist durch zwei Nasen an eine hohle Schraubenspindel befestigt, durch deren Durchbohrung die Verlängerung des kleinen Kolbens hindurchgeht, so daß dessen Ende in der Ebene *D'* aus der Schraube hervorsieht. Die Schraubenspindel hat ihre Mutter in dem Verschlußstück *CC* und kann durch die geränderte und mit einer Teilung versehene Trommel *I* gedreht werden.

Mit der Ebene *D'* kann die Spitze einer Mikrometerschraube in Berührung gebracht werden, deren Mutter durch das Stück *Y* an den m

siven Stahlzylinder PP befestigt ist, welcher selbst durch die Stücke R fest mit dem Zylinder LL verbunden ist. Die an der Mikrometerschraube befestigte Kreisscheibe GG ist an ihrem Rande geteilt, und mit Hilfe dieser Teilung kann man die Verschiebung der Mikrometerschraube, deren Rand an der unter GG angedeuteten Skala vorübergeht, in tausendsteln eines Millimeters messen.

Um die in das Rohr LL gebrachten Röhren dem gewünschten Drucke auszusetzen, wird durch die Durchbohrung des seitlichen Ansatzstückes K Wasser in das Innere des Rohres LL gepumpt. Um die Verkürzung der Röhren zu erkennen und zu messen, wird der elektrische Strom benutzt. Zu dem Zwecke ist der eine Pol einer Batterie durch einen Draht, der isoliert durch das dem Ansatzstück K gegenüber angebrachte Stück H hindurchgeführt und in demselben eingekittet ist, mit der gegen das Röhrenende gedrückten Stahlplatte A verbunden; andererseits ist die Metallmasse des Apparates, also auch der die Stahlstange DD' tragende metallische Verschlußkolben, mit dem andern Pole der Batterie verbunden. Der Strom ist demnach geschlossen, wenn die Stahlstange D die Platte A berührt. Zur Erkennung des Stromes ist in den Stromkreis ein empfindliches Galvanometer eingeschaltet.

Zum Beginne des Versuches wird dieser Strom geschlossen, also die Stange D durch Drehung der Trommel F mit der Platte A zur Berührung gebracht. Gleichzeitig wird die Mikrometerschraube durch Drehung der Scheibe GG mit der Fläche D' der Stahlstange zur Berührung gebracht, was ebenfalls dadurch erkannt wird, daß durch diese Berührung ein zweiter ein empfindliches Galvanometer enthaltender Stromkreis geschlossen wird. Die Stellung der Mikrometerschraube wird beobachtet.

Wird jetzt durch Einpumpen von Wasser im Innern des Rohres LL der Druck verstärkt, so wird die Röhre verkürzt, und da die Platte A stets durch die Feder gegen das Ende der Röhre gedrückt wird, diese Platte von der Stange D entfernt und damit der erste Strom unterbrochen. Durch Drehung der Trommel FF wird die Stange D dann soweit vorgeschoben, bis wieder die Berührung von D und A hergestellt und damit der Strom geschlossen wird. Das Wiederentstehen des Stromes beweist somit, daß die Berührung von D und A wiederhergestellt ist.

Durch das Verschieben der Ebene D' ist aber auch der durch die Berührung der Spitze der Mikrometerschraube mit D' geschlossene Strom unterbrochen, und die Mikrometerschraube muß um genau die Strecke verschraubt werden, um welche D' und somit das Röhrenende infolge des Druckes sich verschoben hat. Die zur Wiederherstellung des durch den Kontakt der Mikrometerschraube hergestellten Stromschlusses erforderliche Verschraubung der Mikrometerschraube ist also genau gleich der Strecke, um welche das Röhrenende durch den Druck zurückgegangen ist.

Diese an der Mikrometerschraube gemessene Strecke würde somit gleich der Verkürzung der Röhre durch den Druck sein, wenn nicht noch eine andere Ursache des Rückganges des Röhrenendes vorhanden wäre. Diese Ursache ist die Verlängerung der Röhre LL infolge des im Innern derselben vorhandenen Druckes. Denn da die Glasröhre durch die Feder stets gegen die Verschlußplatte der Röhre LL gedrückt wird, muß die Röhre einer Verschiebung der Bodenplatte folgen. Die Verkürzung der

Der gleiche Einwurf ist gegen den von Wertheim[1]) aus seinen Versuchen gezogenen Schluß zu erheben, daß μ zwar nicht gleich $\frac{1}{4}$ aber doch für alle Körper denselben Wert nämlich $\frac{1}{3}$ habe. Wertheim schloß dieses Resultat daraus, daß er für Kautschuk und Glas und ebenso annähernd für Messing diesen Wert fand. Die Methode, welche Wertheim für Kautschuk anwandte, haben wir im Anfange dieses Paragraphen angegeben, aber schon Röntgen[2]) hat nach einer erheblich verbesserten, im Prinzip gleichen Methode gezeigt, daß für Kautschuk der Wert von μ nahe gleich 0,5 ist, so lange man den Kautschukstreifen nicht mehr als 0,05 seiner Länge ausdehne. Röntgen zeichnete auf die Seitenflächen des Kautschukstabes, wenn derselbe durch ein angehängtes Gewicht verlängert war, einen Kreis, indem er ein kreisförmiges Messingrohr als Stempel benutzte, dadurch, daß der kreisförmige Rand der einen Endfläche geschwärzt und darauf vorsichtig gegen die Seitenfläche des gedehnten Kautschuks gedrückt wurde. Wurde der Stab entlastet, so verwandelte sich infolge der stärkern Zusammenziehung des der Länge parallelen Durchmessers der Kreis in eine Ellipse. Ist d der Durchmesser des Kreises, so wird der der Längsrichtung des Stabes parallele Durchmesser nach der Entlastung $d\,(1-\delta)$, der der Breite parallele Durchmesser wird aber $d\,(1+\mu\delta)$, man sieht, wie sich daraus unmittelbar μ ergibt.

Röntgen macht bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam, daß der Wert von μ nur so lange konstant sein könne, als die Verlängerung einen so kleinen Wert habe, daß man δ^2 gegen δ vernachlässigen dürfe. Man erkennt das leicht als richtig an. Für die einer Verlängerung δ entsprechende Volumänderung erhielten wir strenge $V\,(1+\delta)\,(1-\mu\delta)^2 - V$. Soll etwa μ eine solche Größe haben, daß keine Volumänderung eintritt, so wird die Gleichung zwischen μ und δ

$$(1+\delta)\,(1-\mu\delta)^2 = 1; \quad 1-\mu\delta = \sqrt{\frac{1}{1+\delta}}$$

und dieselbe wird nach μ aufgelöst

$$\mu = \frac{1}{\delta}\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+\delta}}\right).$$

Danach würde für

$\delta = 0{,}001$	0,01	0,1	0,5
$\mu = 0{,}4998$	0,4953	0,4654	0,367,

also schon, wenn der Kautschukstab um seine halbe Länge gedehnt wird, würde der Querkontraktionskoeffizient 0,367 werden, im Falle im Kautschuk durch longitudinalen Zug überhaupt gar keine Änderung des Volumens einträte.

Wertheim hat bei seinen Versuchen Dehnungen des Kautschuk angewandt, bei welchen $\delta = \frac{1}{2}$ und mehr wurde. Da er bei diesen den Wert $\mu = \frac{1}{3}$ fand, würde auch aus Wertheims Versuchen folgen, daß für kleine Verlängerungen für Kautschuk μ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ ist.

1) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. 23. (3.) 1848. Poggend. Ann. 78. p. 386. 1848.

2) *Röntgen*, Poggend. Ann. 159. p. 601. 1876.

a nächsten Paragraphen zu besprechenden Versuche Amagats
a auch mit aller Schärfe gezeigt, daß bei Kautschuk μ nur
$\frac{1}{2}$ verschieden ist.
Vertheim bei Kautschuk, so hat Gray[1]) für Stahl und einige
a direkt die Verlängerungen δ und die Querkontraktionen $\mu\,\delta$
Er findet für Stahl $\mu = 0{,}288$ bis $0{,}295$.
) hat Morrow[2]) die Verlängerung von Stäben und deren Quer-
mit Fühlhebeln direkt gemessen; er erhielt für weichen
,271 bis 0,281, Schmiedeeisen 0,270 bis 0,289, Gußeisen
,270, Kupfer 0,310 bis 0,340, Messing 0,320 bis 0,351.
ıeyer[3]) und Benton[4]) maßen die Verlängerung δ und
die Querkontraktion $\mu\,\delta$ durch Verschiebung von Inter-
n. Wir werden diese von Fizeau zuerst zur Mes-
Ausdehnungskoeffizienten benutzten Methode in der
besprechen. Beide Beobachter erhielten für verschie-
le und Legierungen erheblich verschiedene Werte
nton erhielt für einige Metalle folgende Werte für
tätskoeffizienten E und für μ; die Drähte waren ge-

	Stahl	Eisen	Kupfer	Nickel
=	22235	20700	11940	21320
=	0,2755	0,288	0,341	0,375

dickern Nickeldraht erhielt Benton denselben Wert
egen für μ den Wert 0,271.
dern Versuchen wandte Wertheim auf einen Vor-
Regnault ohne Naht gezogene Röhren von Messing
hren A (Fig. 63) an, welche mit ihren Enden an
re, im lichten gleich weite aber sehr dickwandige
B' befestigt waren. Die untere der letztern war unten
, die obere an beiden Enden offen und an ihrem obern
iner Fassung versehen, durch welche eine sehr enge
in B eingeführt war. Diese so vorgerichtete Röhre
mit Wasser gefüllt, so daß dasselbe in der engen
ur Marke F reichte. Die Röhre B wurde an ihrem
fest aufgehängt, so daß der Apparat vertikal herab-
ler Haken der untern Röhre B' mit einem Gewichte p
ie Röhre A dehnte sich dann gerade so aus, wie ein
ab
man die Verlängerung der Röhre A, indem man auf
wei den Enden der Röhre A möglichst nahe Marken
d die Abstandszunahme der Marken beobachtet, so hat
n Quotienten der Abstandszunahme und des ursprüng-
andes die Verlängerung δ; infolge der durch den Zug
Volumvergrößerung sinkt das Wasser in dem kapillaren Rohre

Fig. 63.

y. Fortschritte der Physik im Jahre 1902. Teil I p. 361
row, Phil mag. (6) 6. p. 417. 1903
meyer, Proc. of Royal Soc 55. p. 373. 1894
ton, Ann der Physik. 3 p. 182. 1900.

und die Senkung s des Wasserniveaus multipliziert mit dem Querschnitt q des Rohres F gibt die Vermehrung des Volumens des gezogenen Teiles. Geht die Länge L durch den Zug in $L + \Delta L$ über, so ist

$$\delta = \frac{\Delta L}{L}.$$

Geht das Volumen V in $V + \Delta V$ über, so ist

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu)\,\delta = (1 - 2\mu)\,\frac{\Delta L}{L}$$

somit

$$1 - 2\mu = \frac{L \cdot \Delta V}{\Delta L \cdot V},$$

woraus sich μ unmittelbar ergibt.

Für drei Messingröhren erhielt Wertheim so für μ die Werte 0,338, 0,346, 0,342, Mittel 0,342, für vier Glasröhren die Werte 0,320, 0,351, 0,313, 0,337, Mittel 0,330. Die Werte sind also in der Tat nahe $\frac{1}{3}$.

Der von Wertheim für Glas gefundene Wert von μ ist durch spätere Bestimmungen nicht bestätigt worden. Cornu[1]) fand nach einer im § 54 zu besprechenden Methode an sechs verschiedenen Glasstreifen für μ Werte zwischen 0,224 und 0,257; er schließt, daß für Glas der Wert gleich 0,25, also gleich dem von der Poissonschen Theorie verlangten Werte sei. Indem Cornu glaubt, daß Glas am nächsten ein wirklich isotroper Körper sei, schließt er weiter, daß für wirklich isotrope Körper μ in der Tat den von Poisson verlangten Wert habe. Straubel[2]) hat nach der Methode von Cornu 30 Gläser des Jenaer Glaswerks untersucht und erhielt Werte von μ, die zwischen 0,297 und 0,316 lagen, ein Beweis, daß auch für Gläser die Werte von μ erheblich verschieden sein können. Voigt[3]) fand nach einer ebenfalls im § 54 zu besprechenden Methode für Glas, dessen Isotropie er direkt prüfte, erheblich kleinere Werte als 0,25. Er ließ Stäbchen aus verschiedenen Spiegelglasplatten herstellen. Die ersten neun Stäbchen waren aus einer grünlich gefärbten Platte von 50^{mm} Dicke an verschiedenen Stellen und in verschiedener Tiefe herausgeschnitten; die Länge der Stäbchen betrug zwischen 60 und 70^{mm}, die Breite war zwischen etwa 2 und 5^{mm} und die Dicke etwa 0,5 bis 2^{mm}. Bei einigen Stäbchen war die Breitendimension den ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platte parallel, bei andern zu denselben senkrecht. Für jede Platte wurde direkt der Elastizitätskoeffizient und der Koeffizient der Starrheit gemessen. Für den Elastizitätskoeffizienten von sieben Stäbchen, welche in hinreichender Entfernung von den ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platten genommen waren, erhielt er in Kilogramm pro Quadratmillimeter 6480 und für den Starrheitskoeffizienten $k = 2671$. Aus beiden Werten folgt

$$1 + \mu = \frac{6480}{2 \cdot 2671} = 1{,}213; \quad \mu = 0{,}213.$$

1) *Cornu*, Comptes Rendus. **69**. p. 333. 1869.
2) *Straubel*, Wiedem. Ann. **68**. p. 369. 1899.
3) *Voigt*, Wiedem. Ann. **15**. p. 497. 1882.

Für das Glas einer zweiten Spiegelglasplatte erhielt Voigt

$$E = 7358; \quad k = 3044; \quad \mu = 0{,}208.$$

Für beide Glassorten, deren Isotropie nicht zu bezweifeln ist, ergibt sich somit μ erheblich kleiner als $\frac{1}{4}$.

Nach im Prinzip gleicher Methode hat Voigt[1]) auch für eine große Anzahl Metalle und einige Legierungen die Werte E und μ bestimmt. Wir geben hierunter die gefundenen Werte; die Metalle sind mit ihren chemischen Zeichen bezeichnet.

Metalle	E	μ	Metalle	E	μ
Al	6570	0,274	Ni	20300	0,300
Cd	7070	0,447	Ag	7790	0,317
Fe	12800	0,228	Stahl	20400	0,264
Au	7580	0,330	Bi	3190	0,288
Cu	10850	0,133	Zn	10300	0,329
Mg	4206	0,246	Sn	5400	0,568

Auffallend ist der kleine Wert von E für Eisen, von μ für Kupfer, vom Zinn nimmt Voigt an, daß es krystallinisch gewesen sei.

Einen nicht viel von dem Voigtschen verschiedenen Wert, nämlich $\mu = 0{,}226$, fand später für Glas nach der gleichen Methode Kowalski[2]). Cantone[3]) und später Amagat[4]) fanden nach im nächsten Paragraphen zu besprechenden Methoden für Glas wieder nahezu 0,25. Cantone untersuchte vier Glasröhren und erhielt Werte zwischen 0,246 und 0,264, im Mittel 0,257, Amagat untersuchte Röhren aus gewöhnlichem Glas und Kristallglas und erhielt für ersteres $\mu = 0{,}2451$ und für letzteres 0,2499.

Kirchhoff[5]) maß, wie es später Voigt getan hat, für einige Metalle den Elastizitätskoeffizienten und den Starrheitskoeffizienten; für drei Stäbe von glashartem Stahl fand er als Werte von μ

$$0{,}293, \quad 0{,}295, \quad 0{,}294, \quad \text{Mittel } 0{,}294.$$

Für einen hartgezogenen Messingstab erhielt er den Wert $\mu = 0{,}387$, man sieht zwei Werte, die erheblich voneinander verschieden sind, daß sie zu dem Schlusse führen, daß für die verschiedenen Metalle der Wert von μ ebenfalls verschieden ist.

Später nach der Kirchhoffschen Methode von Okatow[6]) an verschiedenen Stahlstäben durchgeführte Versuche ergaben, daß der Wert des Querkontraktionskoeffizienten sowohl für verschiedene Stahlsorten in gleichem Zustande der Härtung als für dieselbe Stahlsorte in verschiedenem Zustande der Härtung verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werte von μ

1) *Voigt*, Wiedem. Ann. 48. p. 674. 1893.
2) *von Kowalski*, Wiedem. Ann. 36. 1889.
3) *Cantone*, Rendic. della Reale Accad. dei Lincei 4. p. 220 u. 292. 1888.
4) *Amagat*, Ann. de chim. et de phys. 22. 6. p. 95. 1889.
5) *Kirchhoff*, Poggend. Ann. 108. p. 369. 1859.
6) *Okatow*, Poggend. Ann. 119. 1863.

	Stricknadelstäbchen.	Glatter runder engl Stahl.
a) ursprünglicher Zustand	$\mu = 0,2750$	$\mu = 0,2989$
b) in Öl gehärtet	0,2969	0,3280
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt.	0,3037	0,3281

Die für den glatten runden englischen Stahl angegebenen Werte wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimensionen gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6^{mm}. Okatow glaubt, daß der vollkommen weiche Stahl ein nahezu vollkommen isotroper Körper sei; da sich auch in diesem Zustande für verschiedene Stahlsorten verschiedene Werte von μ finden, so muß man schließen, daß der Querkontraktionskoeffizient in der Tat für verschiedene Körper auch bei voller Isotropie verschieden ist.

Fast gleiche Werte wie Okatow erhielt Schneebeli[1]) für eine Anzahl von Stäben aus glattem runden Stahl, deren Länge bis zu 1^{m}, deren Durchmesser bis zu 2^{cm} betrug; auch Schneebeli maß die beiden Koeffizienten der Elastizität und Starrheit nach einer im dritten Abschnitt zu besprechenden Methode. Er erhielt für die Stäbe im federharten Zustande $\mu = 0,296$ und im ganz weichen Zustande $\mu = 0,303$.

Amagat[2]) hat für eine Reihe von Metallen die Querkontraktion einmal nach der indes in den Einzelheiten der Durchführung erheblich verbesserten Methode von Wertheim und dann durch dieselbe Methode wie für Glas gemessen. Er bestimmte also an denselben Metallröhren die Elastizitätskoeffizienten und die Volumenänderungen mit der größten Sorgfalt. Die von ihm erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Werte von μ		Elastizitätskoeffizienten	
	I. Methode	II. Methode	I. Methode	II. Methode
Stahl	0,2694	0,2679	20 333	20 457
Kupfer	0,3288	0,3252	11 979	12 312
Messing	0,3305	0,3236	10 680	11 022
Deltametall	0,3330	0,3468	12 054	11 334
Blei	0,4252	0,4313	1626	1493

Nach allen diesen Untersuchungen kommen wir zu dem Resultate, daß der Koeffizient der Querkontraktion, also auch das Verhältnis zwischen dem Koeffizienten der Starrheit und dem der Volumelastizität für verschiedenen Substanzen, auch bei voller Isotropie erheblich verschieden ist; die Versuche von Voigt führen zu dem Schlusse, daß der Wert 0,25 auch nicht ein Grenzwert ist, wie manche anzunehmen geneigt sind, dem die Querkontraktion für absolut isotrope und elastische Körper sich nähert, denn Voigt fand für ganz isotrope Gläser nahezu 0,2.

1) *Schneebeli*, Poggend. Ann. **140**. 1870.
2) *Amagat*, Ann. de chim. et de phys. **22**. (6.) 1891.

§ 51.

scher Kompressionskoeffizient. Die im vorigen Paragraphen n beiden elastischen Konstanten der Starrheit und Volumelasti- die experimentell zu bestimmenden Elastizitätskoeffizienten und ktionskoeffizienten bestimmen bei isotropen Körpern alle Äuße- r Elastizität. Je zwei verschiedene elastische Erscheinungen mit- ombiniert, gestatten uns deshalb diese Konstanten abzuleiten. instimmung der aus den verschiedenen so kombinierten Erschei- h ergebenden Werte der Konstanten ist infolgedessen eine gute r die Theorie. Wir wollen die Hauptformen der elastischen gen im folgenden betrachten. Wir beginnen mit der Kompression h allseitig gleichen Druck deformierten massiven oder Hohl-

die Drucke p_1, p_2, p_3, welche wir auf die Seitenflächen eines peds ausüben, einander gleich, so werden auch die Verkürzungen welche die Seiten des Parallelepipeds erfahren, einander gleich m Drucke p entsprechende Volumverminderung v wird gleich 3ε. rigen Paragraphen für die Drucke p gefundenen Ausdrücke gehen en einzigen über, da $\varepsilon = \frac{1}{3} v$ ist

$$p = \tfrac{2}{3} kv + Kv = (\tfrac{2}{3} k + K) v.$$

Koeffizient der kubischen Kompression ist jene Zahl, mit welcher ächeneinheit wirkende Druck zu multiplizieren ist, um die in des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung zu Da die letztere Gleichung nach v aufgelöst uns diese Volum- ung gibt

$$v = \frac{3}{2k + 3K} \cdot p,$$

aß der Koeffizient von p der kubische Kompressionskoeffizient ist. ir k und K durch den Elastizitätskoeffizienten E und den Quer- skoeffizienten μ aus

$$k = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad K = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

r kubische Kompressionskoeffizient C_k

$$C_k = \frac{3}{E}(1 - 2\mu) = 3C(1 - 2\mu),$$

wie vorhin die linearen Verlängerungs- beziehungsweise Verkür- zienten mit C bezeichnen. Das Verhältnis zwischen den beiden n hängt demnach, wie es ja auch nicht anders sein kann, wesent- m Werte von μ ab.

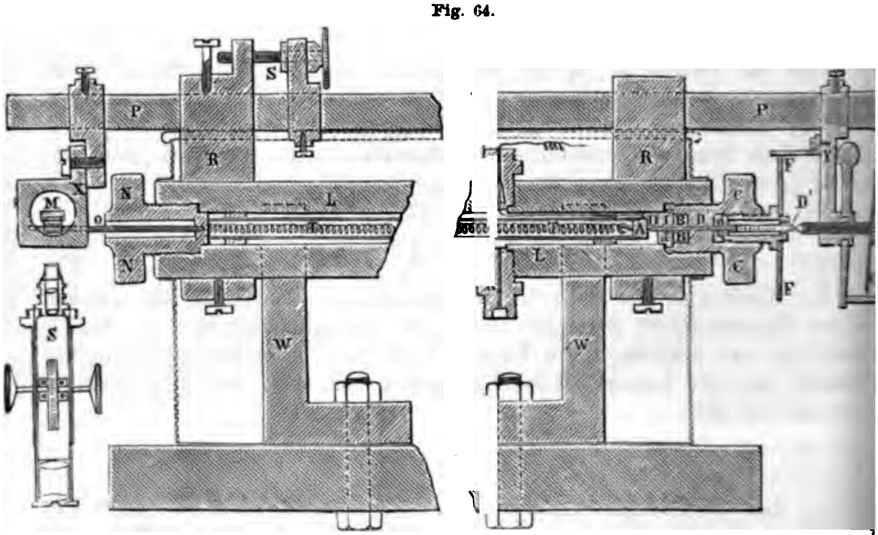
rekte Messung der kubischen Kompression ist wegen ihrer ge- e mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft, sie ist von Ama- zwei verschiedene Glassorten durchgeführt. Amagat kompri-

—

agat, Ann. de chim et de phys 22 (6). p. 121. 1889.

mierte in einem hohlen sehr dickwandigen Stahlzylinder Glasröhren un maß deren Verkürzung, welche, da die Änderung der Dimensionen be gleichmäßiger Kompression nach allen Richtungen die gleiche ist, gleic einem Drittel der kubischen Kompression ist. Die von Amagat getroffen Anordnung zeigt Fig. 64. Die zu untersuchende Glasröhre von 1^m Läng befindet sich in dem dickwandigen Stahlzylinder LL und wird durch ein im Innern der Röhre befindliche lange Feder TT mit ihrem einen End gegen den Verschluß NN des Stahlzylinders gedrückt; zu dem Zwecke is die Feder mit ihrem einen Ende an den Boden NN des Zylinders an gelötet, während das andere Ende der Feder an einem kleineren in di Stahlplatte A eingeschraubten Haken befestigt wird. Durch die Feder wir

Fig. 64.



die Stahlplatte A gegen das andere Ende der Glasröhre gezogen und dieser Zug bewirkt gleichzeitig, daß das untere Ende der Glasröhre fest gegen den Boden des Stahlzylinders gestemmt wird. Die Feder ist an einer Stelle zerschnitten und die Stücke sind durch ein den elektrischen Strom nicht leitendes Zwischenstück wieder verbunden.

Mit der Platte A kann ein kleiner Stahlkolben DD zur Berührung gebracht werden, der in der Achse des obern Verschlusses CC des Stahl-zylinders sich hin und her bewegt und durch eine Stopfbüchse BB ge-führt ist, welche das Innere des Stahlzylinders vollständig abdichtet. Der Kolben ist durch zwei Nasen an eine hohle Schraubenspindel befestigt, durch deren Durchbohrung die Verlängerung des kleinen Kolbens hindurch-geht, so daß dessen Ende in der Ebene D' aus der Schraube hervorsieht. Die Schraubenspindel hat ihre Mutter in dem Verschlußstück CC und kann durch die geränderte und mit einer Teilung versehene Trommel gedreht werden.

Mit der Ebene D' kann die Spitze einer Mikrometerschraube in rührung gebracht werden, deren Mutter durch das Stück Y an den

en Stahlzylinder PP befestigt ist, welcher selbst durch die Stücke R t mit dem Zylinder LL verbunden ist. Die an der Mikrometerschraube estigte Kreisscheibe GG ist an ihrem Rande geteilt, und mit Hilfe ser Teilung kann man die Verschiebung der Mikrometerschraube, deren nd an der unter GG angedeuteten Skala vorübergeht, in tausendsteln es Millimeters messen.

Um die in das Rohr LL gebrachten Röhren dem gewünschten Drucke auszusetzen, wird durch die Durchbohrung des seitlichen Ansatzstückes K asser in das Innere des Rohres LL gepumpt. Um die Verkürzung der öhren zu erkennen und zu messen, wird der elektrische Strom benutzt. u dem Zwecke ist der eine Pol einer Batterie durch einen Draht, der oliert durch das dem Ansatzstück K gegenüber angebrachte Stück H indurchgeführt und in demselben eingekittet ist, mit der gegen das Röhrende gedrückten Stahlplatte A verbunden; andererseits ist die Metallmasse es Apparates, also auch der die Stahlstange DD' tragende metallische Verschlußkolben, mit dem andern Pole der Batterie verbunden. Der Strom st demnach geschlossen, wenn die Stahlstange D die Platte A berührt. Zur Erkennung des Stromes ist in den Stromkreis ein empfindliches Galvanometer eingeschaltet.

Zum Beginne des Versuches wird dieser Strom geschlossen, also die Stange D durch Drehung der Trommel F mit der Platte A zur Berührung gebracht. Gleichzeitig wird die Mikrometerschraube durch Drehung der Scheibe GG mit der Fläche D' der Stahlstange zur Berührung gebracht, was ebenfalls dadurch erkannt wird, daß durch diese Berührung ein zweiter ein empfindliches Galvanometer enthaltender Stromkreis geschlossen wird. Die Stellung der Mikrometerschraube wird beobachtet.

Wird jetzt durch Einpumpen von Wasser im Innern des Rohres LL der Druck verstärkt, so wird die Röhre verkürzt, und da die Platte A stets durch die Feder gegen das Ende der Röhre gedrückt wird, diese Platte von der Stange D entfernt und damit der erste Strom unterbrochen. Durch Drehung der Trommel FF wird die Stange D dann soweit vorgeschoben, bis wieder die Berührung von D und A hergestellt und damit der Strom geschlossen wird. Das Wiederentstehen des Stromes beweist somit, daß die Berührung von D und A wiederhergestellt ist.

Durch das Verschieben der Ebene D' ist aber auch der durch die Berührung der Spitze der Mikrometerschraube mit D' geschlossene Strom unterbrochen, und die Mikrometerschraube muß um genau die Strecke verschraubt werden, um welche D' und somit das Röhrenende infolge des Druckes sich verschoben hat. Die zur Wiederherstellung des durch den Kontakt der Mikrometerschraube hergestellten Stromschlusses erforderliche Verschraubung der Mikrometerschraube ist also genau gleich der Strecke, um welche das Röhrenende durch den Druck zurückgegangen ist.

Diese an der Mikrometerschraube gemessene Strecke würde somit gleich der Verkürzung der Röhre durch den Druck sein, wenn nicht noch eine andere Ursache des Rückganges des Röhrenendes vorhanden wäre. Diese Ursache ist die Verlängerung der Röhre LL infolge des im Innern derselben vorhandenen Druckes. Denn da die Glasröhre durch die Feder stets gegen die Verschlußplatte der Röhre LL gedrückt wird, muß die Röhre einer Verschiebung der Bodenplatte folgen. Die Verkürzung der

Röhre ist somit gleich der an der Mikrometerschraube gemessenen Länge vermindert um die Strecke, um welche die ganze Röhre infolge der Verschiebung der Bodenplatte zurückgegangen ist.

Um diese letztere zu messen, ist an die den Verschluß der Röhre bildende Platte des Verschlußbolzens N eine Stahlstange O angeschraubt, welche an ihrem Ende einen auf Glas in $0{,}01^{\mathrm{mm}}$ geteilten kleinen Maßstab trägt, auf welchen das in der Figur eigens gezeichnete in dem Ringe X bei der Beobachtung befestigte Mikroskop S eingestellt ist. Das Mikroskop mißt die Verschiebung des Maßstabes und damit diejenige der Röhre infolge der Verlängerung des Rohres $L\,L$.

Betreffs der weiteren Einzelheiten der Versuche und der bei denselben angewandten Vorsichtsmaßregeln verweisen wir auf die Abhandlung von Amagat.

Die Drucke wurden von Amagat in Atmosphären gemessen, deren jede einem Drucke von $0{,}01033^{\mathrm{kg}}$ auf das Quadratmillimeter entspricht.

Nachfolgende Tabelle enthält die Beobachtungen an drei Röhren gewöhnlichen Glases und in der letzten Spalte die für Röhren von Kristallglas gefundenen kubischen Kompressionskoeffizienten für die Druckeinheit einer Atmosphäre.

Grenzen des Druckes in Atmosphären	Verkürzung der Röhren von 1^{m} Länge für den Druck einer Atmosphäre in $0{,}001^{\mathrm{mm}}$.				Kubischer Kompressionskoeffizient des	
	1. Reihe	2. Reihe	3. Reihe	Mittel	Glases	Kristallglases
1— 500	0,747	0,752	0,751	0,750	0,000 002 250	0,000 002 454
1—1000	0,743	0,751	0,746	0,747	0,000 002 241	0,000 002 424
1—1500	0,743	0,748	0,745	0,745	0,000 002 235	0,000 002 415
1—2000	0,741	0,748	0,743	0,744	0,000 002 232	0,000 002 406

Als kubischer Kompressionskoeffizient für den Druck von 1^{kg} pro Quadratmillimeter würde sich zwischen 1—500 Atmosphären daraus ergeben

$$\text{für Glas} \; . \; . \; \frac{0{,}000\,00225}{0{,}01033} = 0{,}000\,2177;$$

$$\text{für Kristall} \; \frac{0{,}000\,002\,454}{0{,}01033} = 0{,}000\,2375.$$

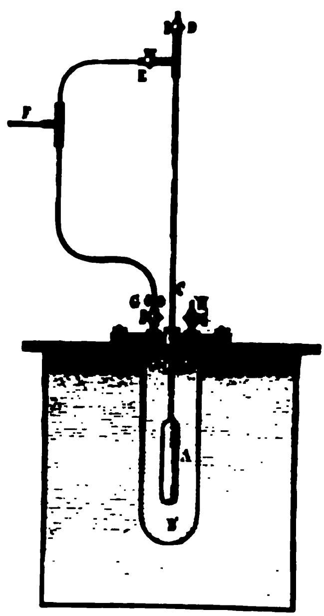
Die Zahlen deuten auf eine sehr geringe Abnahme des Kompressionskoeffizienten mit wachsendem Drucke hin, indes liegt die Abnahme doch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, wie sich aus der Vergleichung der einzelnen Beobachtungen der Verkürzungen ergibt. Außerdem werden wir gleich sehen, daß Amagat aus andern Beobachtungen für kleinere Drucke kleinere Werte findet als diejenigen, die hier den größten Drucken entsprechen. Für Glas gelangen wir daher zu dem Schlusse, daß eine Abnahme des Elastizitätskoeffizienten mit der Verlängerung bezw. eine Zunahme mit der Verkürzung, wie sie Thompson aus seinen Versuchen für Metalle folgert, nicht mit Sicherheit erkennbar ist.

ndere Versuche über die Kompression beziehen sich stets auf die inderung von Hohlräumen, wenn auf die Wandungen derselben von ein ganz gleichmäßiger Druck wirkt.

rartige Messungen hat zuerst Regnault bei Gelegenheit seiner schung über die Kompression der Flüssigkeiten angestellt[1]). Er e zu diesen Versuchen Gefäße, deren Form und Substanz genau nt waren, entweder Kugeln von Kupfer oder Messing, deren innerer ßerer Durchmesser mit größter Genauigkeit gemessen war, und mit Innern eine lange Glasröhre in Verbindung stand; oder er nahm sgefäß A (Fig. 65), dessen innere Kapazität und dessen äußeres m mit größter Sorgfalt bestimmt war.

fäße füllte er mit Wasser bis zu einer C, welche sich auf der Glasröhre CD alse des Gefäßes befindet. Darauf senkte Gefäß in einen ringsum fest geschlosseit Wasser gefüllten Behälter BB' und ıf das Wasser des Behälters einen Druck indem er aus einem Behälter durch hrenleitung FG bei geschlossenem Hahn die Oberfläche des Wassers in B komte Luft wirken ließ. Auf diese Weise er das Gefäß A von allen Seiten ganz äßig zusammen, das Volumen desselben lerte sich um eine dem Druck proporGröße, und man sah das Wasser in der über C heraufsteigen; die Steighöhe an an einer auf dem Rohre angebrachlung Man kann die durch den äußern ervorgebrachte Volumverminderung aus eighöhe des Wassers ableiten, wenn e Kapazität der Röhre im Verhältnis lumen des ganzen Gefäßes kennt. Dierhältnis wurde durch Wägung genau nt.

Fig. 65.



us den Beobachtungen der Volumverminderung von Hohlräumen ch nicht unmittelbar auf den kubischen Kompressionskoeffizienten terials schließen, aus welchem die Wandung des Hohlraumes gest, da die Volumverminderung des Hohlraumes eine andere sein le jene eines massiven Körpers, welche den Hohlraum ausfüllen Daß das der Fall sein muß, ergibt sich aus der einfachen Überdaß, wenn der Hohlraum mit demselben Material angefüllt ist, die Kompression im Innern desselben eine Spannung entstehen muß, den komprimierenden Kräften entgegenwirkt, welche Spannung , wenn der innere Raum leer ist oder eine Flüssigkeit enthält, wie bei den Versuchen von Regnault aus dem Hohlraum infolge rminderung des Volumens austritt. Die Theorie der Elastizität ge-

[1]) Regnault, Mémoires de l'Acad des sciences de l'Institut de France. 21.

stattet aber auch in diesem Falle, die durch die Kompression eintretende Volumverminderung zu berechnen.

Durch den auf die äußere Kugelfläche wirkenden Druck werden die Radien der Kugel verkleinert; bezeichnen wir den Radius der innern Kugelfläche vor der Kompression mit R_0, so wird derselbe nach der Kompression $R_0(1-\varphi_0)$, wenn wir mit φ_0 einen sehr kleinen gleich zu bestimmenden Bruch bezeichnen. Der Hohlraum der Kugel, welcher vor der Kompression $\frac{4}{3}R_0^3\pi$ war, wird deshalb nach der Kompression $\frac{4}{3}R_0^3(1-\varphi_0)^3\pi$ oder, da φ_0 nur sehr klein ist, $\frac{4}{3}R_0^3(1-3\varphi_0)\pi$. Die stattgefundene Volumverminderung ist deshalb

$$\varDelta V = \tfrac{4}{3}R_0^3\pi - \tfrac{4}{3}R_0^3\pi(1-3\varphi_0) = \tfrac{4}{3}R_0^3\pi\cdot 3\varphi_0$$

oder in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens V

$$\frac{\varDelta V}{V} = 3\varphi_0.$$

Die Theorie der Elastizität ergibt nun[1]), daß bei einer Hohlkugel, welche auf ihrer äußern Fläche gleichmäßig zusammengepreßt wird, die Verkürzung φ der Radien einer in der Kugelschale liegenden Kugelfläche vom Radius r gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = c + \frac{b}{r^3},$$

worin c und b zwei Größen sind, welche nicht von r, sondern von dem Drucke abhängig sind, den die Kugel auf ihrer äußern und innern Fläche erfährt und von den Radien der äußern und innern Fläche der Hohlkugel. Sind diese beiden Radien R_1 und R_0 und ist der Druck, der auf die Flächeneinheit der äußeren Fläche wirksam ist, gleich P_1, der auf die Flächeneinheit der innern Fläche wirkende gleich P_0, so erhält man für diese beiden Größen die Werte

$$c = \frac{1}{3K+2k}\cdot\frac{P_1R_1^3 - P_0R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}; \qquad b = \frac{1}{4k}\,\frac{R_0^3R_1^3(P_1-P_0)}{R_1^3-R_0^3}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\varDelta V}{V} = 3\varphi = 3\left\{\frac{1}{3K+2k}\cdot\frac{P_1R_1^3-P_0R_0^3}{R_1^3-R_0^3} + \frac{1}{4k}\,\frac{R_0^3R_1^3(P_1-P_0)}{r^3(R_1^3-R_0^3)}\right\} \quad \ldots (A)$$

Die Volumverminderung des innern Hohlraums erhalten wir hieraus, wenn wir $r = R_0$ setzen.

Ist nun bei dem vorhin beschriebenen Versuche von **Regnault** $P_0 = 0$ gemacht, so wird die Verminderung dieses Hohlraumes

$$\frac{\varDelta V_0}{V_0} = 3\left\{\frac{1}{3K+2k} + \frac{1}{4k}\right\}\frac{R_1^3}{R_1^3-R_0^3}\cdot P_1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Drücken wir hier K und k durch E und μ aus, so wird

$$\frac{\varDelta V_0}{V_0} = \frac{9}{2}\,\frac{1-\mu}{E}\,\frac{R_1^3}{R_1^3-R_0^3}\cdot P_1.$$

Die Gleichungen gestatten uns auch die Volumvergrößerung der äußern Kugelfläche zu bestimmen, wenn man auf das Gefäß im Innern einen Dru

1) Man sehe *Lamé*, Théorie mathématique de l'élasticité des corps solid p. 211 ff. — *Clebsch*, Theorie der Elastizität der festen Körper. § 18.

ißt, wie es bei der Anordnung von Regnault möglich ist, indem Hähne G und D schließt, die Hähne E und H öffnet. Nimmt Volumen des Gefäßes B sehr klein, setzt statt des Hahnes H kalibrierte Glasröhre ein und sorgt gleichzeitig, daß das Gefäß B frei ist, und daß das Wasser bis in die enge Röhre reicht, so diese Volumvergrößerung auch messen. Unsere Gleichung liefert indem wir $r = R_1$ und $P_1 = 0$ setzen,

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = -3\left\{\frac{1}{3K+2k} + \frac{1}{4k}\right\}\frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} P_0 \quad \ldots\ldots (2)$$

die Volumverminderung als positive Größe eingeführt haben, so die Volumvergrößerung als negative Größe erscheinen. Für ältnis der Volumänderungen ergibt sich

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} : \frac{\Delta V_1}{V_1} = R_1^3 P_1 : R_0^3 P_0.$$

vir $P_1 = P_0$, so wird

$$\frac{\Delta V_0}{\Delta V_1} \cdot \frac{V_1}{V_0} = \frac{R_1^3}{R_0^3}.$$

$$V_1 : V_0 = R_1^3 : R_0^3,$$

$$\Delta V_0 = \Delta V_1.$$

mänderungen sind ihrem absoluten Werte nach gleich.
Kompression einer massiven Kugel erhalten wir, indem wir in der en Gleichung $R_0 = 0$ setzen, es wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{3K+2k} P_1 = 3\,\frac{1-2\mu}{E}\, P_1;$$

sich somit, daß wir die Kompression der massiven Kugel gleich ukte aus dem kubischen Kompressionskoeffizienten und dem pro heit wirkenden Druck finden, daß indes die Volumänderungen lgefäßes andere sind. Um aus der Kompression einer Hohlkugel chen Kompressionskoeffizienten abzuleiten, bedarf es demnach der von E oder μ, oder noch einer Beobachtung, welche uns eine ziehung zwischen E und μ liefert, so daß wir aus den beiden ngen E und μ ableiten können.
hes gilt für einen Hohlzylinder mit ebenen oder halbkugelförmigen).
Volumänderungen eines hohlen Zylinders mit ebenen Endflächen wir in folgender Weise. Es sei H die Höhe des Zylinders, R_1 der r Außenfläche, R_0 der Radius der Innenfläche, ferner sei r ein essen Wert zwischen R_1 und R_0 liegt. Vor der Kompression ist nen des Zylinders vom Radius r

$$V = r^2 \pi H$$

e auf der äußern Oberfläche der Druck P_1, auf der innern Fläche ächeneinheit ausgeübt. Durch diesen Druck gehe die Höhe über - δ), der Radius in $r(1-\varphi)$, somit das Volumen in

$$V - \varDelta V = \pi r^2 (1 - \varphi)^2 H (1 - \delta) = \pi r^2 H (1 - \delta - 2\varphi)$$

und daraus

$$\frac{\varDelta V}{V} = \delta + 2\varphi.$$

Für die Verkürzung des Zylinders liefert die Theorie der Elastizität

$$\delta = \frac{1}{3K + 2k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Für die Verkürzung des Zylinderradius φ erhält man ganz analog wie der Kugel

$$\varphi = c + \frac{b}{r^2},$$

worin die beiden Größen c und b die Werte haben

$$c = \frac{1}{3K + 2k} \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2}; \quad b = \frac{1}{2k} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_1 - P_0)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\varDelta V}{V} = \frac{3}{3K + 2k} \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1}{k} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_1 - P_0)}{r^2 (R_1^2 - R_0^2)}.$$

Die Volumveränderung des innern Hohlraums für den Fall, daß P_0 ist, erhalten wir, wenn wir $r = R_0$ setzen,

$$\frac{\varDelta V_0}{V_0} = \left\{ \frac{3}{3K + 2k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Die Vergrößerung des äußern Volumens wird, wenn $P_1 = 0$ und auf Innere des Hohlzylinders pro Flächeneinheit der Druck P_0 wirkt, in wir $r = R_1$ setzen,

$$\frac{\varDelta V_1}{V_1} = - \left\{ \frac{3}{3K + 2k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_0$$

und man erkennt, daß auch jetzt wieder $\varDelta V_0 = \varDelta V_1$ ist, wenn die Dr P_1 bei Ausübung des Druckes von außen, und P_0 bei Ausübung Druckes von innen gleich sind.

Durch den Elastizitätskoeffizienten E und den Querkontraktions zienten μ ausgedrückt wird

$$\frac{\varDelta V_0}{V_0} = \frac{5 - 4\mu}{E} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

ist der Zylinder nicht mit ebenen, sondern mit halbkugelförmigen flächen versehen, deren innerer Radius R_0, deren äußerer R_1 ist, so sich die Kompression dieses Gefäßes, indem wir dasselbe in zwei Teile denken, in den Zylinder mit ebenen Endflächen und die aus den Halbkugeln zusammengesetzte Kugel. Wird jeder dieser Teile unter selben Umständen für sich einem Drucke unterworfen, so ist die der sich so ergebenden Volumänderungen gleich der Volumänderung Zylinders mit halbkugelförmigen Endflächen. Es folgt das aus der legung, daß der Druck auf die zur Längsachse des Zylinders senkrecht Endflächen desselben durch Vermittlung der Halbkugeln gerade so

wie wenn er direkt auf die Endflächen wirken würde, da diese Endflächen größte Kreise der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel sind.

Für die Verminderung des Hohlraumes V' der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel fanden wir, wenn $P_0 = 0$

$$\frac{\Delta V'}{V'} = \frac{9}{2}\,\frac{1-\mu}{E}\,\frac{R_1^{\,3}}{R_1^{\,3} - R_0^{\,3}} \cdot P_1$$

Die Volumverminderung des ganzen Hohlraumes ist $\Delta V_0 + \Delta V'$, sie wird

$$\Delta V_0 + \Delta V' = \left\{ \frac{5-4\mu}{E}\,\frac{R_1^{\,3}}{R_1^{\,3} - R_0^{\,3}}\,V_0 + \frac{9}{2}\,\frac{1-\mu}{E}\,\frac{R_1^{\,3}}{R_1^{\,3} - R_0^{\,3}} \cdot V' \right\} P_1 .$$

Es bedarf demnach stets außer der Beobachtung der Volumänderung eines Hohlraumes entweder der Kenntnis von E oder μ oder noch einer andern Beobachtung um die kubischen Kompressionskoeffizienten zu erhalten.

Die Versuche von Regnault sind deshalb zu dieser Bestimmung nicht ausreichend. Regnault glaubte nämlich aufgrund älterer Formeln von Lamé, in welche die obigen Formeln übergehen, wenn man $\mu = 0{,}25$ setzt, irrtümlich, daß man direkt aus der Kompression eines solchen Hohlraumes den kubischen Kompressionskoeffizienten erhalten könne, er hat es deshalb unterlassen, für die Metalle und Gläser, welche er bei seinen Messungen benutzte, noch eine zweite Beobachtung zu machen. Die Verwendung etwa der von Wertheim bei seinen Untersuchungen erhaltenen Elastizitätskoeffizienten bietet aber eine zu große Unsicherheit, da wir ja fanden, daß diese Größe sehr von dem physikalischen Zustande des Materials, bei dem Glase auch von dessen Zusammensetzung abhängig ist; man kann also nicht wissen, ob die von Wertheim gefundenen Werte für das Material der Regnaultschen Gefäße Gültigkeit haben.

Neuerdings haben Cantone[1]) und besonders Amagat[2]) Beobachtungen über Volumänderung durch Druck gemacht, deren Resultate wir zum Teil schon im vorigen Paragraphen mitgeteilt haben.

Amagat benutzte zu allen seinen Versuchen lange Hohlzylinder mit ebenen Endflächen; der von ihm verwandte Kompressionsapparat war der Regnaultsche mit geringen Änderungen, deren wesentlichste die ist, daß er auch die Änderung des äußern Volumens der von ihm verwandten Zylinder scharf messen konnte, wenn dieselben einem innern Drucke ausgesetzt wurden.

Zur Prüfung der von der Theorie der Elastizität gelieferten Gleichungen ließ Amagat eine Anzahl Stahlzylinder und ebenso ein paar Bronzezylinder anfertigen, welche gleichen innern aber verschiedenen äußern Durchmesser hatten und verglich bei denselben die Volumänderung des innern Hohlraumes durch äußern und die Änderung des äußern Volumens durch innern Druck; er zeigte, daß stets bei Gleichheit der Drucke die Volumzunahme des innern Hohlraums gleich der Zunahme des äußern Volumens usw. und ebenso, daß die Volumänderungen der Zylinder verschiedener Dimensionen in dem von der Theorie verlangten Verhältnisse stehen.

Eine weitere Prüfung der Theorie gab ihm die Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten und der Querkontraktion von gewöhnlichem Glase

1) *Cantone*, Beiblätter zu den Annalen der Physik. 12. p. 559. 1888.
2) *Amagat*, Ann de chim. et de physique. 22. (6.) 1889.

und von Kristallglas durch Messung der Volumänderung des innern Hohlraums bei Kompression und bei einfachem longitudinalen Zuge und Vergleichung der aus diesen Messungen sich ergebenden Werte der kubischen Kompression mit den vorhin angegebenen direkt gemessenen Werten derselben. In folgender Tabelle geben wir die von Amagat an drei Röhren von gewöhnlichem Glase und vier Röhren von Kristallglas gefundenen Werte des Querkontraktionskoeffizienten μ, des linearen Verlängerungskoeffizienten C und des kubischen Kompressionskoeffizienten C_k für den Druck einer Atmosphäre.

Röhren	μ	C	C_k
Glas Nr. 1.	0,2476	0,000 001 434	0,000 002 202
„ Nr. 2.	0,2450	0,000 001 437	0,000 002 200
„ Nr. 3.	0,2428	0,000 001 419	0,000 002 190
Mittel	0,2451	0,000 001 430	0,000 002 197
Kristallglas Nr. 1. .	0,2538	0,000,001 604	0,000 002 370
„ Nr. 2.	0,2481	0,000,001 603	0,000 002 423
„ Nr. 3.	0,2534	0,000 001 624	0,000 002 403
„ Nr. 4.	0,2443	0,000 001 580	0,000 002 424
Mittel	0,2499	0,000 001 602	0,000 002 405

Der Druck, den Amagat bei diesen Versuchen anwandte, war 64 Atmosphären; das hier sich ergebende Mittel für C_k ist bei gewöhnlichem Glase noch etwas kleiner, bei Kristallglas gleich dem durch die direkte Messung unter 2000 Atmosphären gefundenen Werte.

Die im vorigen Paragraphen als nach der zweiten Methode gefunden angegebenen Werte von μ für die Metalle sind nach derselben Methode wie die soeben für Glas gegebenen erhalten, es wurde die Volumvergrößerung des Hohlraumes durch innern Druck auf die Zylinderwand und die Volumänderung bei longitudinalem Zuge gemessen.

Der im vorigen Paragraphen erwähnte Versuch, durch welchen Amagat den sicheren Nachweis führte, daß für Kautschuk der Wert von μ sehr nahe gleich 0,5 ist, bestand in der Vergleichung der Kompression zweier in ihren Abmessungen ganz gleicher Hohlkugeln, deren eine aus Bronze, die andere aus Kautschuk hergestellt war. Die Kugeln wurden einem gleichen innern und äußern Druck ausgesetzt, und die Veränderung des innern Hohlraumes gemessen. Die Änderung des Hohlraumes in diesem Falle erhalten wir aus der Gleichung A, Seite 246, welche allgemein für die Hohlkugel gilt, indem wir $P_0 = P_1$ setzen; es wird

$$\Delta V = \frac{3}{3K + 2k} V P_1 = 3\,\frac{1 - 2\mu}{E}\, V P_1 .$$

Die Volumverminderung des innern Hohlraumes ist bei dieser Anordnung also genau dieselbe wie wenn derselbe mit dem gleichen Material ausgefüllt wäre, aus welchem die Wandung besteht, beziehungsweise der Hohlraum wird genau so komprimiert wie der gleiche Raum in einer massiven Kugel.

un E_1 der Elastizitätskoeffizient der Bronze, E_2 der des Kautd sind μ_1 und μ_2 die Querkontraktionskoeffizienten der beiden ı, so müssen sich die Volumänderungen der beiden Hohlräume $\varDelta V_2$ bei gleichem Drucke P_1, und da für beide V denselben verhalten

$$\varDelta V_1 : \varDelta V_2 = \frac{1-2\mu_1}{E_1} : \frac{1-2\mu_2}{E_2} = \frac{1-2\mu_1}{1-2\mu_2} \cdot \frac{E_2}{E_1} .$$

Elastizitätskoeffizient E_2 des Kautschuks ist ganz erheblich kleiner ge der Bronze, es muß deshalb $\varDelta V_2$ erheblich größer sein als n nicht μ_2 nahezu gleich 0,5 ist

Volumverminderung wird durch das Aufsteigen der Flüssigkeit apillaren Rohre C, Fig. 65, beobachtet. Die hier beobachtete rung ist in der Tat nicht die gesuchte $\varDelta V_1$ oder $\varDelta V_2$, sondern ner, da durch den innern Druck, wie wir im nächsten Kapitel rden, die Flüssigkeit komprimiert wird. Da indes in beiden nau das gleiche Volumen derselben Flüssigkeit ist, ist die Komerselben die gleiche, sie ist, wenn wir mit k den Kompressionsn der Flüssigkeit bezeichnen, gleich kVP_1. Ist $\varDelta V'$ die an ekugel, $\varDelta V''$ die an der Kautschukkugel beobachtete Volumıng, so ist

$$\varDelta V_1 = \varDelta V' + kVP_1; \quad \varDelta V_2 = \varDelta V'' + kVP_1,$$

l

$$\frac{\varDelta V' + kVP_1}{\varDelta V'' + kVP_1} = \frac{E_2(1-2\mu_1)}{E_1(1-2\mu_2)} .$$

Versuch ergab, daß die beobachteten Volumänderungen $\varDelta V'$ bei dem von Amagat angewandten Kautschuk nur sehr wenig r verschieden waren, woraus folgt, daß auch $\varDelta V_1$ sehr nahe $_2$, oder daß die kubische Kompressibilität des Kautschuks nur r verschieden von derjenigen der Bronze ist. Daraus folgt, daß itnis $1-2\mu_2$ zu $1-2\mu_1$ außerordentlich klein sein muß, und aß entsprechend den Versuchen von Röntgen μ_2 sehr nahe

zu auf das Verhältnis des Wertes des kubischen Kompressionsn C_k zu dem linearen Verlängerungskoeffizienten C, bemerken lich, daß dasselbe nach der Gleichung

$$C_k = 3(1-2\mu)\,C$$

em Werte von μ ein sehr verschiedenes sein kann. Für all., für welche $\mu < \frac{1}{3}$ ist, ist $C_k > C$, für jene, für welche μ größer jedoch kleiner als C. So ist nach den Versuchen von Amagat $= 0{,}0006$ dagegen $C_k = 0{,}00027$, während für Glas der kumpressionskoeffizient gleich dem 1,5 fachen linearen ist.

§ 52.

onselastizität. Bei den bisher betrachteten elastischen Änler Körper ließen wir die Kräfte stets normal zu den Ober-

flächen wirken, derartig, daß sie nur einen Zug oder Druck auf den Körper ausübten, durch welche eine Dimensionsänderung in der Zugrichtung, also eine Veränderung des Abstandes der Molekülschichten bewirkt wird. Bei Betrachtung der Querkontraktion kamen wir schon zu dem Resultate, daß elastische Kräfte auch lediglich durch eine Verschiebung der Molekülschichten gegeneinander, welche ohne Vergrößerung ihres Abstandes eintritt, geweckt werden. Eine solche Verschiebung der Schichten erhalten wir, wenn wir auf einen Körper zu seiner Oberfläche tangentiale Kräfte wirken lassen; wodurch wir den einzelnen Schichten eine Drehung gegeneinander erteilen. Die so in dem Körper hervorgebrachte Deformation bezeichnet man als Torsion oder Drillung.

Bei der Untersuchung der durch die Drillung geweckten Elastizität beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, jene von Drähten oder Stäben mit kreisförmigem Querschnitt und begnügen uns wesentlich mit der experimentellen Untersuchung, indem wir nur soweit auf die Theorie eingehen, daß wir den Zusammenhang der verschiedenen elastischen Änderungen erkennen können.

Die Torsion eines Stabes erhalten wir auf die einfachste Weise, wenn wir einen Stab oder einen Draht an seinem einen Ende befestigen, an seinem andern Ende einen zur Längsrichtung des Stabes senkrechten Hebelarm anbringen und an dem Hebel eine Kraft wirken lassen, welche den Stab um seine Längsachse dreht. Es entwickelt sich dann in dem Stabe, durch die Verschiebung der dem untern Ende näher liegenden Schichten gegen die entfernteren eine der Drehung entgegenwirkende Kraft, welche wächst mit dem Winkel, um welchen man das untere Ende des Stabes gedreht hat.

Nennen wir das Drehungsmoment des Gewichtes P, welches wir angebracht haben, p, so dreht sich der Stab so lange, bis zu einem solchen Winkel ω, daß das Drehungsmoment, welches die Gegenwirkung des Stabes ausübt, um ihn zurückzudrehen, gleich ist dem Drehungsmoment p. Es treten demnach bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes immer zwei Drehungsmomente auf, welche, unter sich gleich, sich das Gleichgewicht halten. Das rückwirkende Drehungsmoment des Drahtes bezeichnet man mit dem Namen der Torsionskraft; es ist unsere Aufgabe, zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dieser und dem Drehungswinkel besteht.

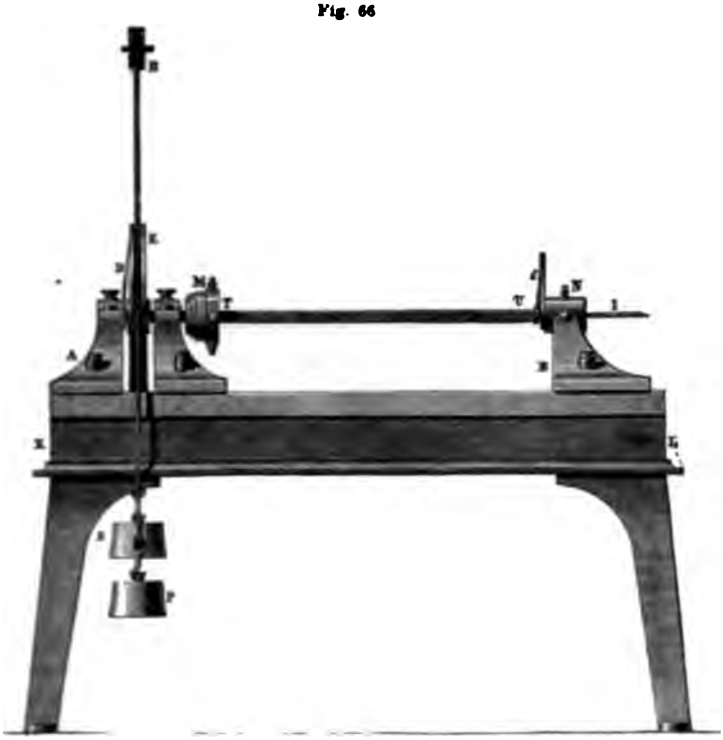
Sehr ausgedehnte Versuche zur Beantwortung dieser Frage hat Wertheim[1]) angestellt; er bediente sich dazu des Apparates Fig. 66. Derselbe besteht aus einer schweren eisernen Bank, auf welcher sich zwei Aufsätze befinden, ähnlich denen einer Drehbank. Der erstere, B ist beweglich, er dient dazu, das eine Ende des Stabes U, den man untersuchen will, festzuhalten. Zu dem Ende trägt er ein durchbohrtes Stück, durch welches der Stab hindurchgesteckt wird, und in welchem er mittels einer Druckschraube N festgeklemmt wird.

Es ist notwendig, daß dieses Ende U des Stabes während der Versuche ganz fest ist; um sich davon zu überzeugen, ist an ihm ein Zeiger C angebracht, dessen Ende immerfort auf eine am Apparat angebrachte Marke hinzeigen muß.

1) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. **50**. (3.) p. **202 ff. 1857**.

Das vordere Ende T des Stabes ist in gleicher Weise in die hohle se M eingesteckt und dort festgeklemmt. Diese Achse kann sich in horizontalen Lagern drehen; sie trägt eine Rolle E, um welche zwei üre gelegt sind. Die erste ist an dem Haken bei E befestigt und t das Gewicht P, die zweite ist an der andern Seite der Rolle begt, steigt von dort zur Rolle R auf, ist um diese herumgelegt und t an ihrem andern Ende ein Gewicht S, welches gleich P ist. Beide ichte suchen die Rolle D in gleichem Sinne zu drehen und somit dem se eine Torsion zu erteilen.

Fig. 66



Um die erteilte Drehung zu messen, ist die eine Seite der Rolle E einem geteilten Kreise versehen, auf den ein unbeweglicher Zeiger D gestellt ist. Man bemerkt die Stellung des Kreises vor der Drehung. gleichfalls, wenn die Gewichte wirken; die gemessene Drehung des es ist gleich dem Torsionswinkel ω. Wir haben zu untersuchen, die Beziehung zwischen dem Winkel ω und der Wirkung der beiden ichte P besteht.

Das Drehungsmoment der beiden Gewichte, $2P\varrho$, wenn wir den Radius Rolle gleich ϱ setzen, sei gleich F.

I. Untersucht man zunächst die Abhängigkeit des Torsionswinkels von Größe des Drehungsmomentes F, so zeigt sich, daß, wenn wir F im hältnis von 1, 2, 3, 4 ... ändern, die Torsionswinkel in demselben

Verhältnis ω, 2ω, 3ω, 4ω . . . werden. Da, wie wir sahen, die gegenwirkende Torsionskraft gleich dem drehenden Momente F ist, so folgt der wichtige Satz, daß die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

II. Wenden wir Stäbe derselben Substanz, aber verschiedener Länge an, so daß die Längen im Verhältnis 1, 2, 3, 4 . . . stehen, so findet man bei Anwendung derselben Kraft, daß die Torsionswinkel ω, 2ω, 3ω, 4ω sind. Die Torsionswinkel sind demnach bei gleicher tordierender Kraft der Länge der tordierten Stäbe direkt proportional.

III. Wendet man zylindrische Stäbe an, deren Radien sich verhalten wie 1, 2, 3, 4, so werden bei Anwendung derselben Kraft die Torsionswinkel bei zunehmendem Radius kleiner, und zwar findet man sie $\omega\ \frac{\omega}{16}, \frac{\omega}{81}, \frac{\omega}{256}$. Es sind also, da 1, 16, 81, 256 gleich sind 1^4. 2^4, 3^4, 4^4, bei Anwendung derselben drehenden Kraft die Torsionswinkel umgekehrt proportional den vierten Potenzen der Radien der Stäbe.

IV. Wenn man bei gleichen Dimensionen und gleichen Kräften verschiedene Substanzen anwendet, so findet man die Torsionswinkel verschieden. Um deshalb aus den beobachteten Dimensionen des Stabes und den drehenden Kräften die Torsionswinkel zu erhalten, bedarf es eines gewissen für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koeffizienten $\frac{1}{D}$.

Wir erhalten demnach für den Torsionswinkel den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{D} \cdot \frac{Fl}{r^4} \cdot$$

Die Torsionskraft des Stabes ist gleich der Kraft, welche dem Stabe die Torsion erteilt, denn der Stab dreht sich so lange, bis die gegenwirkende Kraft desselben gleich ist der drehenden Kraft. Wir erhalten daher die Torsionskraft, welche der Stab bei einer Drehung um den Winkel ω entwickelt, wenn wir die soeben erhaltene Gleichung nach F auflösen. Wir erhalten

$$F = \omega D \frac{r^4}{l},$$

oder die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der vierten Potenz des Radius des tordierten Stabes und umgekehrt proportional der Länge desselben, außerdem für jede Substanz noch proportional einem besondern Koeffizienten. Die physikalische Bedeutung dieses Koeffizienten ist leicht zu erhalten, Setzen wir $r = 1$ und $l = 1$, so wird für einen Draht von der Einheit des Radius, 1^{mm}, und der Einheit der Länge, für welche wir, um im Zähler und Nenner des Ausdruckes für F die gleichen Längeneinheiten zu haben, auch 1^{mm} einsetzen,

$$F = \omega D.$$

Nun wird der Torsionskraft das Gleichgewicht gehalten durch eine am Hebelarm ϱ angreifende Kraft P, so daß wir setzen können

$$F = P\varrho = \omega D,$$

woraus

$$P \frac{\varrho}{\omega} = D.$$

d machen wir schließlich $\varrho = \omega$, so wird

$$P = D.$$

r Koeffizient D gibt uns also die Kraft an, welche am Ende eines a Stabe von der Länge 1^{mm} und dem Radius 1^{mm} verbundenen nes von der Länge ϱ wirken muß, um der Torsionskraft das Gleich- zu halten, wenn wir den untersten Querschnitt um einen Winkel ω haben, so daß der von dem Ende des Hebelarms durchlaufene lie Länge des Radius erreicht hat; oder er ist, wenn wir ϱ gleich dius des Stabes, gleich 1^{mm} setzen, gleich jener Kraft, welche, an ıfange des Stabss wirkend, den Stab so stark tordiert, daß der kt des Radius im untersten Querschnitt ogen von 1^{mm} zurücklegt.

Fig. 67.

Dimension des Koeffizienten D ist er des Elastizitätskoeffizienten der Quo- ıs einer Kraft und einer Fläche. Man das sofort, wenn wir die Gleichung für D auflösen

$$D = \frac{F}{r^3} \cdot \frac{l}{\omega r}.$$

l eine Länge ist und ebenso ωr, so Quotient beider eine reine Zahl. F ist hungsmoment, Kraft mal Länge und ırch die dritte Potenz einer Länge divi- der Quotient einer Kraft und des Qua- ıner Länge.

soeben beschriebene Methode von ım eignet sich besonders zur Unter- der Torsion an Stäben von großen nen. Um die wegen ihrer vielen An- en weit wichtigern Gesetze der Torsion n Fäden oder Drähten zu untersuchen, Coulomb eine andere Methode an[1], nannte Methode der Oszillationen. Wir n einen Faden mit seinem obern Ende n festen Haken A (Fig. 67) und hän- sein unteres Ende einen schweren Körper, z. B. eine Metallkugel. ie Kugel vertikal herab, so dreht man dieselbe um die vertikale m einen beliebigen Winkel und überläßt sie dann sich selbst. In- r durch die Drehung entstandenen Torsionskraft wird der Faden ier aufdrehen und dabei die Kugel um die vertikale Achse mit r Geschwindigkeit rotieren machen, da die Torsionskraft konti- wirkt. Nach einiger Zeit wird sich der Faden in der Lage welche er einnahm, bevor er tordiert war. Aber in diesem ke ist auch die Rotationsgeschwindigkeit am größten geworden, wird wegen der erlangten Geschwindigkeit fortdauern und

[1] Coulomb, Mémoires de l'Acad des Sciences. Paris 1784.

der Faden eine entgegengesetzte Torsion erhalten. Dadurch wird n und nach die Bewegung verzögert, und sie wird gleich Null, wenn Winkel der entgegengesetzten Torsion gleich dem ursprünglichen Torsio winkel geworden ist. Dann wird sich die Bewegung umkehren, wie über die Gleichgewichtslage hinausgehen usf., so daß sie dieselben Än rungen zeigt wie das Pendel; es wird eine hin- und herdrehende wegung eintreten mit abnehmender Amplitude, weil Reibung, Widerst der Luft und die unvollkommene Elastizität des Drahtes eine ungehem Fortdauer verhindern.

Wenn die Torsionskraft des Fadens wirklich proportional ist d Torsionswinkel, so müssen die Oszillationen dieselbe Zeit dauern, welc auch ihre Ausdehnung sei, ob sie mehrere ganze Umdrehungen umfas oder nur wenige Bruchteile eines Grades. Denn dann wird in demselb Verhältnisse, als die Drehung aus der Gleichgewichtslage größer wird, a die Drehungsgeschwindigkeit größer, welche die Torsionskraft dem Fad erteilt; wenn aber die Geschwindigkeit immer der Drehung porportio ist, der doppelten Drehung die doppelte, der dreifachen die dreifache G schwindigkeit entspricht, so müssen alle Drehungen, alle Oszillatione i gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Ebenso folgt aber, daß, wenn dieser Isochronismus der Oszillatio stattfindet, daß dann auch die Proportionalität zwischen Torsionskraft u Torsionswinkel besteht. Es genügt daher, um das erste der aufgestellt Gesetze für diesen Fall zu beweisen, zu zeigen, daß die Oszillatio isochron sind.

Um diese Beobachtung mit der notwendigen Genauigkeit zu mach verfährt man in ganz ähnlicher Weise wie bei Pendelbeobachtungen. M hängt den Faden an einem Widerhalt A auf (Fig. 67), befestigt a der Kugel B einen möglichst leichten Zeiger C und stellt zur Messung d Oszillationsweiten einen geteilten Kreis darunter, so daß dessen Mitt punkt von dem verlängerten Faden getroffen wird. Der Beobachter st sich in einer gewissen Entfernung mit einem Fernrohr so auf, daß er d Zeiger visieren und eine Sekundenuhr beobachten kann, die er zu arretie und loszulassen imstande ist. Im Augenblick, in welchem der Zeiger d Gesichtsfeld des Fernrohrs passiert, setzt er die Uhr in Gang. Nach Zähl von n Oszillationen mit der Amplitude A bestimmt er die verflossene Ze Dieselbe Beobachtung wird mit kleineren oder größeren Oszillationswe gemacht; der Versuch zeigt die Gleichheit der Oszillationsdauer auch großen Oszillationen, welche bei Glasfäden selbst mehr als eine g Umdrehung betragen dürfen. Es folgt also, daß die Torsionskraft Torsionswinkel proportional ist. Bei einigen Metallen ist jedoch nach suchen von Warburg[1]) diese Proportionalität nur bei kleinen Dreh vorhanden; er fand nämlich, daß die Schwingungsdauer eines Kupferdr bei einer Amplitude von 7° schon im Verhältnis von 1,0023 : 1 gr als bei ganz kleinen Amplituden war.

Bezeichnet man nun mit f die Torsionskraft für die Einheit d Drehung, oder die Kraft, welche, an einem Hebelarme von der Länge

1) *Warburg,* Berichte der naturwissenschaftl. Gesellschaft zu Freib Breisgau. 7. 1880. Wied. Ann. **10**. 1880.

Millimeters angebracht, der Torsion des Fadens das Gleichgewicht hält, wenn die Drehung so groß war, daß das Ende des Hebels einen Bogen von 1^{mm} Länge zurücklegte — man könnte sie als den Torsionskoeffizienten dieses bestimmten Drahtes bezeichnen —, so hat man für die Kraft F, welche eine Drehung um einen Bogen ω bewirkt,

$$F = f \cdot \omega .$$

Da die Torsionskraft ihren Sitz nur in dem Faden selbst hat, so hängt sie nicht von der Natur und dem Gewicht der Kugel B ab. Indes, da es die Torsionskraft ist, welche die Kugel in Bewegung setzt, so wird die derselben erteilte Geschwindigkeit und die Oszillationsdauer von der Masse der Kugel abhängig sein. Es ist nicht schwierig, diese Abhängigkeit zu erhalten.

Der Torsionskraft hält bei der Drehung um einen Bogen ω die im Abstande 1 von der Fadenachse angebrachte Kraft $f\omega$ das Gleichgewicht, die Bewegung erfolgt also gerade so, als wenn der Faden keine Drehungskraft hätte, sondern im Abstande 1 von der Drehungsachse eine Kraft $f\omega$ dem System eine Drehung in demselben Sinne erteilen würde, wie es die Torsionskraft tut. Diese Kraft folgt ganz denselben Gesetzen, wie jene, welche die Bewegung des Pendels veranlaßte. Denn beim Pendel hatten wir, wenn das Gewicht des schweren Punktes am Ende des Pendels m war, für einen Ausschlagswinkel α als bewegende Kraft den Wert $gml \sin \alpha$, oder da für die kleinen Schwingungen, für welche unser Ausdruck für die Schwingungsdauer galt, $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden kann, für die bewegende Kraft $gml\alpha$; also auch eine bewegende Kraft, welche dem Ausschlagswinkel proportional ist. Wie wir beim Pendel als Ausdruck für die Schwingungsdauer hatten,

$$t = \pi \sqrt{\frac{ml^2}{gml}},$$

so folgt, daß, wenn im Abstande 1 von unserem Faden ein schwerer Punkt vom Gewichte m wäre, der Ausdruck für die Schwingungsdauer sein würde

$$t = \pi \sqrt{\frac{m}{f}}$$

Anstatt des Punktes von der Masse m im Abstande 1 haben wir aber die um den Faden verteilte Masse M der schweren Kugel und des Zeigers. Bezeichnen wir mit Mk^2 das Trägheitsmoment der Masse M in bezug auf die vertikale Drehungsachse so ist dieses gleich der Masse m, welche im Abstande 1 von der Drehungsachse, die rings verteilt liegenden Massenteilchen ersetzt. Wir erhalten demnach für die Schwingungsdauer in unserem Falle

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{f}}.$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der schwingenden Masse kann man hier die § 34 besprochene Methode anwenden, bei welcher wir eine der jetzigen ähnliche Anordnung des Versuches vorausgesetzt haben. Man hätte nur als Zeiger an der Kugel der Fig. 67 einen leichten Stab zu

wählen, der in seiner Mitte unten an der Kugel befestigt ist, und diesen in der § 34 angegebenen Weise zu belasten. Am besten versieht man dazu den Stab in genau gemessenen und an beiden Seiten gleichen Abständen r_1, r_2 mit Spitzen, welche nach oben hervorstehen, und hängt auf diese an kleinen Ringen die Gewichte. Die Rechnungen sind dann genau so zu führen, wie es § 34 angegeben ist.

Ist aber die Masse des Drahtes gegenüber derjenigen der Kugel sehr klein, und benutzt man als Zeiger einfach eine auf der Kugel gezogene Marke, so kann für das Trägheitsmoment der schwingenden Masse einfach das der Kugel eingesetzt werden. Ist der Radius der Kugel gleich a, so ist das Trägheitsmoment derselben bezogen auf die mit einem vertikalen Durchmesser der Kugel zusammenfallende Rotationsachse nach § 19

$$Mk^2 = \tfrac{2}{5} \cdot Ma^2;$$

somit erhalten wir für die Dauer einer Oszillation unserer Kugel infolge der Torsionskraft des Fadens

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}.$$

Will man nun zwei Fäden verschiedener Länge, verschiedener Dicke und verschiedener Substanz miteinander vergleichen, so hängt man sie nacheinander an demselben Punkte A auf und befestigt an ihnen dieselbe Kugel. Ist ihre Oszillationsdauer verschieden, gleich t und t', so kann das nur daher rühren, daß ihre Torsionskräfte verschieden sind. Wären dieselben f und f' so hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}, \quad t' = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f'}},$$

und daraus

$$\frac{f}{f'} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Man sieht, daß die Werte für die Torsionskraft umgekehrt proportional sind den Quadraten der Schwingungsdauern. Mißt man[1]) nun diese Zeiten, so findet man unsere früheren Gesetze, nämlich 1) f ist direkt proportional der vierten Potenz des Radius des Drahtes, 2) f ist umgekehrt proportional der Länge des Drahtes, 3) f ist direkt proportional einem für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koeffizienten; es ist somit

$$f = D\frac{r^4}{l} \text{ oder } F = f\omega = D\frac{r^4}{l}\omega,$$

wie wir vorher ableiteten.

Wir haben vorher bemerkt, daß die Torsionskraft des Fadens unabhängig ist von dem Gewichte der Kugel; Coulomb hat das bei seinen Versuchen für Metalldrähte direkt nachgewiesen und Warburg[2]) hat es bestätigt. Für zusammengesetzte Seidenfäden gilt das nach den Beobach-

1) Man sehe die Prüfung dieser Sätze durch *Baumeister*, Wiedem. Ann. 18. 1883. Derselbe hat eine Anzahl Drähte verschiedenen Durchmessers von Eisen, Kupfer, Messing untersucht; die für verschiedene Drähte desselben Materials gefundenen Torsionskoeffizienten schwanken erheblich, lassen aber keine gesetzmäßige Änderung mit dem Durchmesser oder dem am Drahte hängenden Gewichte erkennen.

2) *Warburg* a. a. O., man sehe auch *Baumeister* a. a. O.

gen von Gauß[1]) indes nicht, für diese nimmt die Torsionskraft mit ...enendem Gewichte zu.

§ 53.

Beziehung zwischen dem Torsions- und Elastizitätskoeffizienten.

...e bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes auftretende elastische Kraft ...t nur abhängig von der Starrheit des Körpers, so daß wir in der Torsion, ...e ein näheres Eingehen auf die molekularen Vorgänge bei der Torsion ...igt, das Maß der Starrheit erhalten.

Denken wir uns einen vertikalen Zylinder, den wir durch eine an ...em untern Ende angebrachte Kraft tordieren, so wird dadurch jeder ...erschnitt des Zylinders um seinen Mittelpunkt gedreht, und zwar um so ...hr, je näher derselbe dem untern Ende des Zylinders liegt. Die Ver...indungslinie zweier Punkte in untereinander liegenden Querschnitten, ...elche vor der Torsion vertikal war, bildet daher jetzt mit ihrer frühern ...ichtung den Winkel φ, oder eine vor der Torsion mit der Achse parallele ...ser des Zylinders bildet nach der Torsion eine Schraubenlinie, welche ...erall um den Winkel φ gegen die Vertikale geneigt ist. Die Größe ...ses Winkels, der die Verschiebung der Moleküle gegeneinander mißt, ...d den wir schon im § 50 deshalb den Verschiebungswinkel nannten, ...ann man aus der Größe des Torsionswinkels ableiten. Ist nämlich der ...terste Querschnitt um den Winkel ω gedreht, so wird beim Abwickeln ...t dem Zylinder die erwähnte Schraubenlinie die Hypotenuse eines recht...nkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Länge l des Zylinders, dessen ...dere Kathete der von dem untern Ende der Schraubenlinie beschriebene ...gen, also, wenn wir den Abstand der Faser von der Achse des Zylinders ...it r bezeichnen, gleich $r\omega$ ist. Der Winkel φ ist der in diesem Drei...ke der Seite $r\omega$ gegenüberliegende Winkel. Zur Bestimmung von φ ...aben wir daher

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{r\omega}{l}\cdot$$

...er, da φ immer nur ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\varphi = \frac{r\omega}{l}\cdot$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der Größe der Torsion propor...tional; da nun die Torsionselastizität der Größe der Torsion proportional ...st, so ist sie auch diesem Verschiebungswinkel proportional. Nennen wir ...e an der Flächeneinheit des untersten Querschnittes durch einen der Ein...heit gleichen Verschiebungswinkel erzeugte Torsionskraft C, so können wir ...r an dem Flächenelement des untersten Querschnittes Δq, dessen Größe ...eich dem Querschnitte der betrachteten Faser ist, durch die Torsion er...zeugte Kraft deshalb setzen

$$P = C\varphi \Delta q;$$

...tz die einzelnen Punkte dieses Flächenelements sind gegen die Punkte

1) Gauß, Intensitas vis magneticae terrestris. Göttingen 1833. Poggend. ...n. 28 p. 241. 1833.

des darüber liegenden Querschnittes alle um denselben Winkel φ ver Die letzte Gleichung zeigt, daß die Konstante C nichts anderes ist Koeffizient, mit welchem wir den Verschiebungswinkel zu multi haben, um die durch diese Verschiebung pro Flächeneinheit erwec stische Kraft zu erhalten. Demnach ist C nichts anderes als der K der Starrheit, wie wir § 50 fanden,

$$C = k = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Diesen Wert von C haben wir in den Ausdruck für P ein derselbe wird damit

$$P = \frac{E}{2(1+\mu)}\varphi\Delta q = \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{r\omega}{l}\Delta q.$$

Um aus diesem Werte den Koeffizienten D abzuleiten, ha hieraus zunächst das Drehungsmoment zu berechnen, welches der Stab infolge der Torsion um ω erhält. Der Wert von P ist die T kraft in dem Flächenelemente Δq des untersten Querschnitts, wel Abstande r von der Achse liegt. Das daraus hervorgehende D moment ist

$$Pr = f = \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\omega}{l}rr\Delta q.$$

Um hieraus das Drehungsmoment des ganzen untersten Que zu erhalten, haben wir für alle Flächenelemente desselben das D moment f in der angegebenen Weise zu bilden und alle diese Drehungsmomente zu summieren. Zu dem Zwecke können wir für das Flächenelement Δq den unendlich schmalen Ring $2\pi r dr$ der sich im Abstande r von der Achse befindet, da für alle Elem Ringes das Drehungsmoment denselben Wert hat, und haben d Summe für alle Ringe zu bilden, deren Radius zwischen 0 und wenn ϱ der Radius des Zylinders ist. Damit wird

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\omega}{l}\int_0^{\varrho} 2\pi r^3 dr$$

und dieses Integral ist nach E 1 und E VIII:

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega\cdot\varrho^4}{l};$$

ein Ausdruck, der sich von dem im vorigen Paragraphen experim geleiteten nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle des dort b Koeffizienten D hier der Wert desselben durch den Elastizitätsko ten E und durch den Kontraktionskoeffizienten μ gegeben ist; Koeffizienten D erhalten wir somit

$$D = \frac{E}{2(1+\mu)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Diese Berechnung des Koeffizienten D, darauf möge noch drücklich hingewiesen werden, gilt nur für zylindrische Stäbe, nicht nur weil wir hier das Drehungsmoment für den Krei berechnet haben, sondern weil nur für kreisförmige Querschnitt

ichung zugrunde liegende Satz gilt, daß lediglich eine Verschiebung der ereinander liegenden Querschnitte stattgefunden habe. Bei nicht zylindrischen Querschnitten werden auch die einzelnen Moleküle eines und desselben Querschnittes gegeneinander verschoben, und die vor der Torsion ebenen Schichten bleiben nicht eben. De Saint Venant hat die Torsion lers geformter Stäbe ausführlich untersucht[1]); wir begnügen uns hier f die Arbeit hinzuweisen.

Einen angenäherten Ausdruck für das Torsionsmoment erhalten wir, wenn wir beachten, daß

$$\int_{0}^{\varrho} r^2 \Delta q = M$$

s Trägheitsmoment des Stabquerschnittes inbezug auf die Achse des tabes ist, denn der Ausdruck bedeutet die Summe aller Flächenelemente Δq des untersten Querschnittes jedes multipliziert mit dem Quadrate des bstandes von der Achse des Stabes. Wird demnach die Veränderung der inzelnen Querschnitte außer acht gelassen, so erhält man

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{M}{l} \omega .$$

Für sehr kleine Torsionen kann man diese Gleichung ohne merklichen Fehler erwenden.

Den nur von dem Material abhängigen Koeffizienten

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

zeichnet man als den Torsionskoeffizienten des betreffenden Materials.

Hiernach erhalten wir aus der Beobachtung der Torsion und noch er andern Äußerung der elastischen Kraft ebenfalls ein Mittel, um E d μ abzuleiten, wie man andererseits aus den bekannten Werten von und μ den Torsionskoeffizienten berechnen kann. Die im § 50 be-hebenen Werte von μ sind meist auf diese Weise bestimmt worden.

Kohlrausch und Loomis[2]) fanden bei ihren Versuchen, welche den eck hatten, die Abhängigkeit des Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur zu bestimmen, und bei denen sie nach der Coulombschen Methode die Schwingungsdauer dünner Drähte bei verschiedenen Temperaturen obachteten, die Werte von $\frac{E}{2(1+\mu)}$

für Eisen	gleich	6940
„ Kupfer	„	3900
„ Messing	„	3200

Die Werte von E erhielten sie aus Bestimmungen der Schwingungsder Longitudinaltöne

für Eisen	$E = 20310$
„ Kupfer	„ = 12140
„ Messing	„ = 9810.

1) De Saint Venant, Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires des savants étrangers 14. p. 233–560. Paris 1856.
2) Kohlrausch und Loomis, Poggend. Ann. 141. 1870.

Daraus würden sich für μ die Werte ergeben, für Eisen 0,45, für Kupfer 0,55, für Messing 0,53, im Mittel also fast genau 0,5, eine Zahl, welche bedeuten würde, daß bei einfachem Zuge gar keine Änderung des Volumens einträte, die indes gegenüber allen sonstigen Beobachtungen zu groß ist. Worin diese Abweichung von den sonstigen Resultaten ihren Grund hat, haben Kohlrausch und Loomis nicht weiter untersucht. Das benutzte Material waren hartgezogene Drähte, der Eisendraht von $0{,}1106^{mm}$, der Kupferdraht von 0,152 und der Messingdraht von $0{,}123^{mm}$ Radius; es ist wahrscheinlich, daß bei so feinen Drähten das Material nicht mehr isotrop ist, und daß demnach die für dieselben unter Voraussetzung der Isotropie abgeleiteten Sätze keine Gültigkeit mehr haben.

Bei ganz ähnlich durchgeführten Versuchen findet Baumeister[1]) für Drähte gleichen Materials aber verschiedenen Durchmessers sehr schwankende Werte. So erhält er für ein und dasselbe in Drähte verschiedener Dicke ausgezogene Eisen folgende Werte:

Durchmesser mm	E	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	μ
1,23	19 800	7420	0,33
1,01	19 400	7880	0,23
0,72	20 800	8280	0,23
0,50	20 400	8220	0,23
0,20	20 100	7540	0,33

Für ein zweites Eisen, aus welchem Drähte zwischen 0,3 und $0{,}09^{mm}$ Durchmesser gezogen worden, ergab sich für μ der Wert 0,31; 0,32; 0,42 und 0,32. Auch hier zeigt sich keine Ahängigkeit von der Dicke, für den feinsten Draht 0,9 fand sich für μ derselbe Wert wie für den Draht von $1{,}28^{mm}$ Durchmesser.

Für Messing fand Baumeister für μ Werte zwischen 0,34 und 0,50, letztern für den feinsten von ihm untersuchten Draht von $0{,}1^{mm}$ Durchmesser.

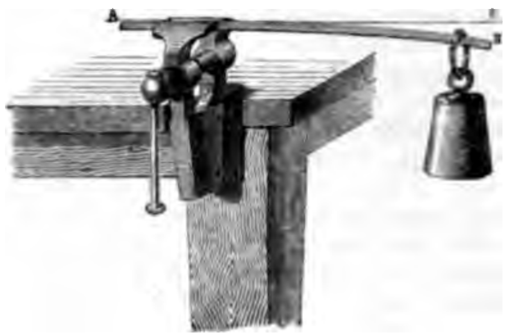
§ 54.

Biegungselastizität. Außer durch Ausdehnung und Torsion kann die elastische Kraft fester Körper noch auf eine dritte Art geweckt werden, nämlich durch Biegung. Wenn ein Stab AB (Fig. 68) mit dem einen Ende in einem Schraubstock festgeklemmt ist, und man hängt an sein anderes freies Ende B ein Gewicht P, so biegt er sich und nimmt die Gestalt einer Kurve an, bis er im Gleichgewicht ist. Dann hält die elastische Kraft des Stabes dem Gewichte P das Gleichgewicht. Man sieht, daß bei dieser Bewegung die obere horizontale Fläche des Stabes sich ausdehnt, während die untere Seite des Stabes zusammengedrückt wird, und daß durch diese Verschiebung der Moleküle sich Kräfte entwickeln müssen, welche den Stab in seine frühere Lage zurückführen, sobald das Gewicht abgenommen ist.

1) *Baumeister,* Wiedem. Ann. 18. p. 578. 1883.

Um diese Erscheinung zu untersuchen, kann man die Enden A und oder vielmehr auf diesen gezogene Marken mit dem Kathetometer ieren; man legt die zu untersuchenden Stäbe anfänglich horizontal, betet sie an ihrem Ende C mit einem Gewichte P und mißt dann die age α, um welche die rke C nach B herabsinkt. eser Länge α, welche man n Pfeil der Biegung nennt, d die immer sehr klein ist, nnen wir den von der arke beschriebenen Bogen eich setzen. Eine ähnliche ethode wandte Gerstner n seinen Versuchen an [1].

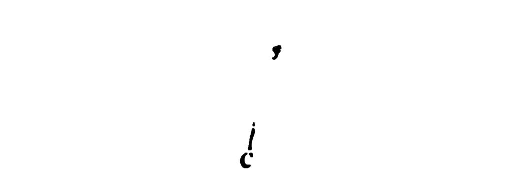
Fig. 68.



Bei einer Durchführung eser Versuche findet man nn zunächst, daß der Pfeil er Biegung der Größe des egenden Gewichtes proportonal, somit auch, daß die bei der Biegung auftretende Elastizität der iegung proportional ist, wie sie bei der Ausdehnung der Verlängerung oportional ist. Die Größe des Biegungspfeiles hängt aber außerdem on den Dimensionen des Stabes, der Gestalt seines Querschnittes und em Elastizitätskoeffizienten ab.

Für den einfachsten Fall, den eines rechteckigen Stabes, dessen horintale Seite gleich b, ssen vertikale gleich e nd dessen Länge von em Punkte der Einklemung bis zur Stelle, wo s Gewicht hängt, gleich l , können wir diese Abngigkeit aus einer genen Betrachtung des organges der Biegung folgender Weise abten. Die Biegung kommt durch zustande, daß an r obern Seite des Stabs eine Längsfasern ausdehnt, an der untern ite dagegen zusammengedrückt werden; im Innern des Stabes muß es ber eine Faserschicht geben, welche weder ausgedehnt noch zusammendrückt wird, und wenn der Stab ganz homogen ist, muß diese Schicht rade die mittlere Schicht des Stabes sein. Stelle (Fig. 69) AB einen ngsdurchschnitt durch den gebogenen Stab dar, A sei der Punkt der nklemmung, B der Aufhängepunkt des Gewichtes P und MN der

Fig. 69



1 Gerstner, Handbuch der Mechanik. 1.

Durchschnitt durch die nicht verlängerte Faserschicht. Nun sei pq ei Querschnitt des Stabes, der von dem Anfange des Stabes um x en fernt sei, und rs ein zweiter von dem ersten um die unendlich klei Strecke dx entfernter Querschnitt. Während in der Gleichgewichtsla die beiden Schnitte parallel sind, ist nach der Biegung durch die Ve längerung der über mn und die Verkürzung der unter mn liegenden Fase der zweite Querschnitt gegen den ersten um einen Winkel φ gedreht. Lege wir durch den Punkt n, in welchem rs die nicht verlängerte Faser schneide $p'q' \| pq$, so können wir die Biegung an dieser Stelle als eine Drehung des Que schnittes rs um die durch n gelegte Horizontale als Drehungsachse auffasse deren Größe jenem Winkel φ gleich ist. Damit sind wir auch sofort imstand die Geichgewichtsbedingung für den gebogenen Stab aufzustellen; die Be dingung ist, daß dem gedrehten Querschnitt durch die elastischen Kräf ein ebenso großes Drehungsmoment nach rückwärts erteilt wird, als ih durch das Gewicht P nach entgegengesetzter Richtung gegeben wird. Wi können nun das System rsN als einen Winkelhebel ansehen, an desse einem Arm nN im Punkte N das Gewicht P angreift, dessen ande Arm durch den Querschnitt rs gegeben ist, an dessen sämtlichen Punkte Kräfte angreifen, welche ihn in seine frühere Lage zurückziehen. Das au den letztern resultierende Drehungsmoment erhalten wir folgendermaße Es sei v der Durchschnitt durch ein Element des Schnittes rs, welche um y von n entfernt sei, und dessen Höhe dy sei, so daß sein Que schnitt $b \cdot dy$ ist. Die dieses Element mit pq verbindenden Fasern tv sind um $tv - mn = y \cdot \varphi$ verlängert. Die Kraft, mit der dieses Eleme gegen t infolgedessen gezogen wird, ist, wenn wir mit E den Elastizität koeffizienten des Stabes bezeichnen, und beachten, daß $mn = dx$ ist,

$$E \frac{y\varphi}{dx} b\,dy,$$

und das infolgedessen dem Schnitte erteilte Drehungsmoment

$$yE \frac{b\varphi}{dx} y\,dy = E \frac{b\varphi}{dx} y^2 dy.$$

Ein ebensolches Drehungsmoment enthält der Schnitt für jedes Eleme $b\,dy$; die Summe derselben ist das ganze Drehungsmoment des Schnitt Wir erhalten diese Summe, indem wir in jenem Ausdrucke für y nach un nach alle Werte setzen für y von 0 bis $\frac{e}{2}$ und von 0 bis $-\frac{e}{2}$ oder ku von $-\frac{e}{2}$ bis $+\frac{e}{2}$. Die gesuchte Summe ist demnach das bestimm Integral

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \frac{b\varphi}{dx} y^2 dy = E \frac{b\varphi}{dx} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} y^2 dy.$$

Dasselbe ergibt sich nach E 1 und E VIII

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \frac{b\varphi}{dx} y^2 dy = \frac{E}{12} \frac{b \cdot e^3}{dx} \varphi.$$

Diesem Drehungsmomente hält das der Zugkraft P des Gewichtes, oder $N \cdot P$ das Gleichgewicht. Für nN können wir setzen $n_1 B_1 = l - (x + dx)$ oder, da dx gegen x verschwindend klein ist, gleich $l - x$. Damit wird die Gleichgewichtsbedingung des Schnittes

$$\frac{E}{12}\,\frac{be^3}{dx}\,\varphi = P(l-x)$$

$$\frac{E}{12}\,b\,e^3\varphi = P(l-x)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Den in diesem Ausdrucke auftretenden Winkel φ können wir durch das Element des Biegungspfeiles $B_1 B$ ausdrücken; legen wir durch r eine Tangente an den Stab und ziehen durch r ebenfalls eine Linie parallel der Tangente des Stabes bei p, so bilden diese beiden Linien den Winkel φ miteinander. Aus dem Biegungspfeil schneiden dieselben dann das Element uw, und indem wir das als den zu φ gehörigen mit $n_1 B_1$ oder $(l - x)$ beschriebenen Bogen ansehen, können wir schreiben

$$\varphi(l-x) = uw; \quad \varphi = \frac{uw}{l-x}.$$

Damit wird die Gleichgewichtsbedingung, wenn wir schließlich das Element uw des Biegungspfeiles, entsprechend der dem letztern gegebenen Bezeichnung α mit $d\alpha$ bezeichnen,

$$\frac{E}{12}\cdot b\cdot e^3 d\alpha = P(l-x)^2 dx.$$

Dieselbe Bedingung gilt für jeden Schnitt, den wir ebenso wie den betrachteten durch den Stab legen; die Gleichgewichtsbedingung des ganzen Stabes erhalten wir demnach, indem wir auf beiden Seiten die Summe der für jeden einzelnen Querschnitt geltenden Ausdrücke bilden. Auf der linken Seite geschieht das, indem wir die Summe aller Elemente des Biegungspfeiles bilden, also einfach statt $d\alpha$ schreiben α, auf der rechten, indem wir nach und nach für x alle Werte von 0 bis l einsetzen und wie oben summieren. Diese Summation gibt dann

$$\frac{E}{12}\cdot b\cdot e^3\alpha = \tfrac{1}{3} P\cdot l^3$$

oder

$$\alpha = \frac{4P}{E}\cdot\frac{l^3}{be^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die durch den Pfeil der Biegung gemessene Biegung ist der dritten Potenz der Länge direkt, jener der Höhe und der ersten Potenz der Breite und dem Elastizitätskoeffizienten umgekehrt proportional.

Ebenso wie den Biegungspfeil α können wir aus der Gleichung (1) auch den Winkel Φ berechnen, um welchen sich der Querschnitt des Stabes, an welchem das Gewicht P angreift, gedreht hat. Dieser Winkel Φ ist die Summe aller Winkel φ, wenn x von 0 bis l wächst. Wir erhalten dann ohne weiteres

$$\frac{E}{12}\,b\cdot e^3\,\Phi = \int_0^l P(l-x)dx = \tfrac{1}{2} Pl^2$$

$$\Phi = \frac{6P}{E}\cdot\frac{l^2}{be^3}.$$

Aus dem hier abgeleiteten Satze über die Biegung eines an seinem einen Ende festen, an seinem andern Ende einem biegenden Zuge ausgesetzten Stabes können wir durch eine einfache Überlegung auch die Biegung eines an seinen beiden Enden auf Schneiden gelegten und in seiner Mitte einem biegenden Zuge ausgesetzten Stabes ableiten. Nehmen wir an der Stab liege horizontal und er werde in seiner Mitte durch einen Druck P vertikal nach unten gedrückt. Jede der beiden Schneiden hat dann den halben Druck zu tragen. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung übt demnach auch jede der beiden Schneiden den Druck $\frac{1}{2}P$ nach oben hin aus. Man erkennt daraus, daß die Biegung des Stabes ganz die gleiche ist, wie wenn der Stab in der Mitte befestigt ist, und an jedem seiner Enden der Zug $\frac{1}{2}P$ nach oben wirkt. Das heißt der Biegungspfeil eines an seinen Enden aufgelegten und in der Mitte durch einen Zug P gebogenen Stabes von der Länge l ist gleich dem Biegungspfeile eines an seinem einen Ende festen Stabes von der Länge $\frac{l}{2}$, welcher durch eine Kraft $\frac{1}{2}P$ gebogen wird. Für den Biegungspfeil, die in der Mitte des Stabes beobachtete Senkung, eines solchen Stabes von der Länge l, der Breite b, der Dicke e erhalten wir demnach

$$\alpha_1 = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}P}{E} \frac{(\frac{1}{2}l)^3}{b e^3} = \frac{P}{4E} \frac{l^3}{be^3}$$

und für den Winkel Φ, um welchen der auf den Schneiden ruhende Querschnitt infolge der Durchbiegung des Stabes gedreht ist

$$\Phi_1 = \frac{3P}{4E} \cdot \frac{l^2}{be^3}.$$

Es möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß das Produkt be^3 das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in bezug auf eine durch seinen Mittelpunkt gehende zur Biegungsebene senkrechte, also der Breite parallele Achse multipliziert mit 12 ist, wie man leicht findet, also

$$be^3 = 12M.$$

Führen wir dieses Trägheitsmoment ein, so wird

$$\alpha = \frac{P}{3E} \cdot \frac{l^3}{M}; \qquad \alpha_1 = \frac{P}{48E} \cdot \frac{l^3}{M}$$

$$\Phi = \frac{P}{2E} \cdot \frac{l^2}{M}; \qquad \Phi_1 = \frac{P}{16E} \cdot \frac{l^2}{M}.$$

Wir bemerken, daß diese Ausdrücke ihre Gültigkeit behalten, wenn die Stäbe andere als einfach rechteckige Querschnitte haben, wenn M das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Fläche gehende, in der Fläche liegende, zur Biegungsebene senkrechte Achse bedeutet.[1])

Die Biegung ist in den betrachteten Fällen und so in allen Fällen der biegenden Kraft proportional, woraus folgt, daß die im Innern gebogenen Stabes geweckte elastische Kraft der Größe der Biegung

1) Man sehe *Clebsch,* Theorie der Elastizität der festen Körper p. 87 ff. p. 363 ff.

portional ist. Es folgt daraus nach den Gesetzen der Pendelschwingungen, daß der gebogene und dann sich selbst überlassene Stab ebenso isochrone Schwingungen um seine Gleichgewichtslage macht, wie wir es bei der Torsion gefunden haben.

Da man zu Untersuchungen über die Biegung von Körpern mit kleinern Stäben ausreicht, ist in den letzten Jahren vorzugsweise die Biegung zu Messungen des Elastizitätskoeffizienten benutzt worden. Man wendet dazu jetzt meistens die Durchbiegung von Stäbchen an, welche an ihren Enden auf Schneiden gelegt und in der Mitte zwischen den Schneiden belastet werden, indem man auf die Mitte des Stabes eine Schneide setzt, welche auf dem Stabe aufsteht, wie die Kante des Prismas eines Wagebalkens.

Zur Bestimmung der Biegung mißt man entweder den Biegungspfeil, also die Senkung der belasteten Stelle, oder den Winkel Φ, um welchen der auf den Schneiden ruhende Querschnitt sich gedreht hat. Die Messung des Biegungspfeiles geschieht entweder so, daß man durch ein neben den gebogenen Stab gestelltes Mikroskop das Herabsinken eines Punktes des gebogenen Stabes beobachtet, wie es Baumgarten[1]) und in einer größern Zahl von Untersuchungen Voigt[2]) getan haben, oder man wendet nach dem Vorgange von Koch[3]) eine von Fizeau angegebene, in der Lehre von der Wärme zu besprechende Methode an, durch welche man die Verschiebung von Flächen in Wellenlängen des Natriumlichtes, deren Länge gleich 0,000589^{mm} ist, mißt.

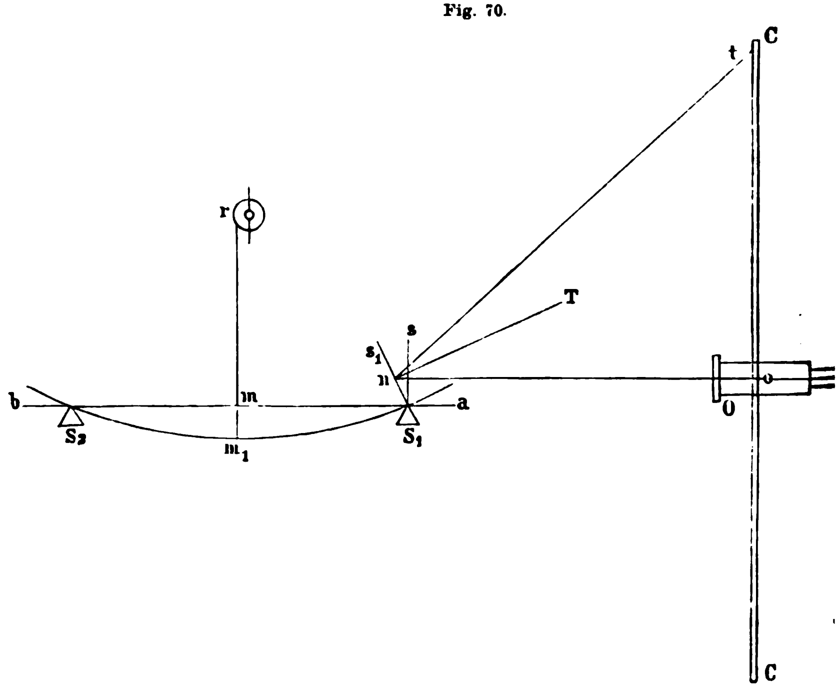
Den Winkel Φ mißt man am besten nach der Gauß-Poggendorffschen Methode der Spiegelablesung, durch welche man die Drehung eines Spiegels bezw. eines mit dem Spiegel unabänderlich fest verbundenen Körpers oder Körperteiles sehr scharf und genau messen kann. Wegen der vielfachen Verwendung dieser Methode möge sie hier sofort erläutert werden. Es stelle Fig. 70 *ab* den auf den Schneiden $S_1 S_2$ liegenden Stab dar, der durch einen in der Mitte *m* auszuübenden Zug gebogen werden soll. Oberhalb der Schneide S_1 versieht man den Stab mit einem Spiegel, der fest senkrecht zur Längsachse des Stabes, so daß also die Spiegelebene vertikal ist, aufgestellt ist. In einiger Entfernung von dem Spiegel ist ein Fernrohr *AO* aufgestellt, unter, über oder neben welchem ein Maßstab *CC'* angebracht ist, so daß derselbe der Spiegelebene, wenn der Spiegel sich in seiner Ruhelage befindet und gleichzeitig der Drehungsebene des Spiegels parallel ist. Bei der oben angedeuteten Anordnung würde somit der Maßstab vertikal neben dem Fernrohr aufgestellt, und zwar in solcher Höhe, daß man, wenn der Spiegel *s* seine ungedrehte Lage hat, am Fadenkreuz des Fernrohrs den Nullpunkt der Teilung sieht. Der Nullpunkt der Teilung liegt demnach in diesem Falle mit der Achse des Fernrohrs in derselben Horizontalebene. Dreht sich der Spiegel um einen Winkel α, geht dieser aus der Lage *s*, wenn der Stab gebogen wurde, in die Lage s_1 über, so sieht man im Fernrohr einen andern Teilstrich *t* der Skala am Fadenkreuz. Kennt man den Abstand *os* des Spiegels von der Skala, so erhält

1) Baumgarten, Poggend. Ann. 152. 1874.
2) Voigt, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. 1876. Wiedem. Ann. 15. 1882.
3) K. R. Koch, Wiedem. Ann. 5. 1878.

man aus dem Abstande des beobachteten Skalenteils t vom Mittelpun den Winkel α, um welchen sich der Spiegel gedreht hat, folgendern

Da man in der Ruhelage des Spiegels den am Fernrohr befind Nullpunkt der Teilung erblickt, so folgt, daß die Achse des Fernrohrs recht zur Ebene des Spiegels ist, wenn derselbe in der Ruhelage ist Richtung noA ist somit senkrecht zur Spiegelebene in der ungedr Lage. Sieht man nach der Drehung des Spiegels in dem Fernroh Teilstrich t, so beweist das, daß der von t ausgehende Lichtstra am Spiegel nach der Richtung noA reflektiert wird. Nach dem Refle gesetze wird ein einfallender Strahl tn stets so reflektiert, daß de

Fig. 70.



flektierte Strahl mit der zum Spiegel senkrechten Richtung nT, Einfallslot, denselben Winkel bildet wie der einfallende Strahl. Ha die Spiegelnormale, das Einfallslot, aus der Lage noA in die Lag um den Winkel α gedreht, so muß demnach der Strahl tn, der nach Reflexion in das Fernrohr kommt, mit nT ebenfalls den Winkel α b oder tno ist gleich dem Winkel 2α. Da in dem rechtwinkligen D ton die Kathete tO dem Winkel 2α gegenübersteht, so ist

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{to}{on}.$$

Da in dieser Weise immer nur kleine Winkel gemessen wer man setzen

$$\operatorname{tang} \alpha = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} 2\alpha = \tfrac{1}{2} \frac{to}{on}.$$

Eben wegen der Kleinheit des zu messenden Winkels kann man für Tangente auch sofort den Bogen einsetzen, so daß uns bei der Bechtung der Biegung durch die Bestimmung der Ablenkung *to* sofort Winkel Φ' gegeben wird.

Die Beobachtungen sind einer großen Genauigkeit fähig, da man den stand *on* recht groß wählen kann. Nehmen wir den Abstand *on* ich 5^m und nehmen als Genauigkeitsgrenze in der Ablesung von *to* nur vierten Teil eines Millimeters, so würde die Ablesung die Tangente auf 0,000025 geben, was einer Unsicherheit von 5″ entsprechen würde. man bei guten Fernrohren den Abstand *on* noch erheblich größer men und der Ablesung eine größere Schärfe geben kann, so ist es ht möglich, die Unsicherheitsgrenze noch erheblich kleiner zu machen.

Bei den im § 50 erwähnten Messungen hat Kirchhoff[1]) in dieser se die Biegung und gleichzeitig die Torsion der von ihm untersuchten allstäbe gemessen.

Bei der Messung des Winkels Φ ist es nicht gerade erforderlich den gel unmittelbar über der Schneide anzubringen, man darf ihn an einer igen Stelle zwischen der Schneide und dem freien Ende *a* des Stabes ngen; da das Stück des Stabes außerhalb der Schneide geradlinig t, erhält der Spiegel genau die gleiche Drehung, auch wenn man ihn a vor dem Ende des Stabes befestigt.

Auch zur Bestimmung des Biegungspfeiles hat Voigt[2]) bei seinen en Messungen die Poggendorff-Gaußsche Spiegelablesung angeit. Die zu dem Zwecke getroffene Anordnung ist ebenfalls Fig. 70 deutet. An der auf die Mitte des Stabes aufgesetzten, die biegenden ichte tragenden Schneide wurde ein feiner Platindraht befestigt, der er Rolle *r* führte und an dieser so angebracht war, daß die Rolle den geringsten an dem Drahte wirkenden Zug gedreht wurde. An se der Rolle war ein Spiegel angebracht, dessen Ebene der Rollenparallel war. Senkte infolge des biegenden Gewichtes der Stab wurde die Rolle und mit ihr der Spiegel gedreht. Die Drehung mit Fernrohr und Skala beobachtet; wie sich aus ihr und dem be Durchmesser der Rolle die Senkung m_1 ergibt, sieht man unmittel-

Betreffs der genauern Anordnung verweisen wir auf die unten an Stelle zitierte Arbeit von Voigt.

Indem man neben der Biegung die Torsion ebenfalls mit Spiegel und ißt, erhält man neben dem Elastizitätskoeffizienten auch den der straktion; die im § 50 erwähnten Versuche von Kirchhoff, w. Voigt sind in dieser Weise durchgeführt.

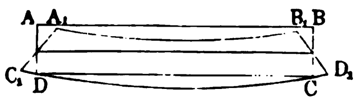
Z den Messungen der Elastizitätskonstanten E und μ, die wir § 50 . hat Voigt Biegungs- und Torsionsschwingungen benutzt, aus man wie wir bei Besprechung der Coulombschen Methode zur der Torsionselastizität ableiteten, die die Schwingungen bedingenschen Kräfte ebenfalls direkt berechnen kann.

1) *Kirchhoff*. Poggend. Ann. 108. 1859. Eine kleine Modifikation unter Anung von zwei Spiegeln gibt *A. König*. Wiedem. Ann. 28. 1886.

2) *Voigt*. Wiedem. Ann. 31. 1887; 34. 1888; 35. 1888; 39. 1890; 41. 1890; de und *Voigt*. Wied. Ann. 52. 1894.

Man kann an einem gebogenen Stabe auch direkt den Elastizitätskoeffizienten und Querkontraktionskoeffizienten beobachten. Die Biegung eines Stabes nach der Längsachse muß nämlich auch eine Biegung nach der Breitendimension zur Folge haben, so daß, wenn wir voraussetzen, daß der Stab nach unten gebogen ist, die untere Fläche, wie Fig. 71 andeutet, in ihrer Breitendimension nach außen konvex die obere Fläche des Stabes, welche der Längsrichtung nach konvex gebogen ist, nach der Breitendimension konkav werden muß. Ist $ABCD$ der Querschnitt des ungebogenen Stabes, so wird $A_1B_1C_1D_1$ der Querschnitt des gebogenen Stabes. Es ergibt sich das aus folgender Überlegung. Wie wir sahen hat die Biegung eine Verlängerung der oberhalb der ungeänderten Faserschicht, eine Verkürzung der unterhalb derselben liegenden Fasern zur Folge. Diese Verlängerung der obern Fasern muß eine Kontraktion nach der Breite zur Folge haben, so daß, wenn die Verlängerung gleich δ ist, die Kontraktion gleich $\mu\delta$ wird. Die Verkürzung der untern Faser hat eine Ausdehnung nach der Breite zur Folge, welche ebenso groß ist, als die Kontraktion oben. Zu diesen Ausdehnungen und Verkürzungen parallel der Breite treten auch solche parallel der Dicke AD. Oberhalb der ungeänderten Faserschicht wird die Dicke vermindert, unterhalb derselben wird die Dicke ebenso viel vergrößert. Man sieht leicht, daß die vorher ebenen Flächen, welche den Stab oben und unten begrenzen, infolge dieser Kontraktion der obern Stabhälfte und der Ausdehnung der untern Hälfte des Stabes sich krümmen müssen, und zwar so, daß der Stab parallel AB auf seiner obern Fläche nach außen konkav, auf seiner untern nach außen konvex wird[1]).

Fig. 71.



Legen wir einen Stab, dessen Länge gegen seinen Querschnitt, besonders gegen seine Dicke beträchtlich ist, auf zwei gleichweit von der Mitte und gleichweit von den Enden entfernte Stützen, und biegen ihn dadurch, daß wir seine beiden über die Stützen herausragenden Enden mit gleichen Gewichten belasten, so ist der der Längsrichtung des gebogenen Stabes parallele Schnitt der obern konvexen Fläche ein Kreisbogen; ein zur Längsrichtung senkrechter, also parallel $ABCD$ durch die obere Fläche geführter Schnitt ist ebenfalls ein Kreisbogen; die Radien dieser beiden Kreisbogen verhalten sich umgekehrt wie die Längendilatation zur Querkontraktion. Setzen wir also den Radius des der primären Biegungsebene parallelen Kreisbogens gleich 1, so wird der Radius des Bogens A_1B_1 gleich $\frac{1}{\mu}$. Eine Vergleichung der beiden Krümmungsradien führt also direkt zur Bestimmung des Querkontraktionskoeffizienten μ.

Die im § 50 angeführten Versuche von Cornu[2]) beruhen auf diesem Satze. Er maß nach der schon erwähnten Methode von Fizeau, die wir in der Lehre vom Lichte, bei Besprechung der Interferenz des Lichtes mit großem Gangunterschiede kennen lernen werden, die beiden Krümmungen

1) *De Saint Venant*, Mémoire sur la flexion des prismes etc. Journal de mathématiques pures et appliquées par Liouville. 1. (2.) 1856.
2) *Cornu*, Comptes Rendus. 69. p. 333. 1869.

n Flächen an verschiedenen Glasstreifen und erhielt im Mittel den
$= 0{,}25$.

Verwendung der Biegung zur Untersuchung der Elastizitäts-
nten bietet den großen Vorzug, daß man auf diesem Wege unter-
kann, ob ein Körper wirklich isotrop ist oder nicht. Man schneidet
aus dem zu untersuchenden Material nach verschiedenen Rich-
ist das Material isotrop, so erhält man für alle Stäbchen den-
lastizitätskoeffizienten; ist es nicht isotrop, so wird der Elastizitäts-
nt für die verschiedenen Stäbchen verschieden. Die Untersuchung
stizitätsverhältnisse der nicht isotropen Kristalle wird deshalb am
durch Biegung bewirkt; die oben erwähnten Versuche von Baum-
und Voigt sind vorwiegend der Untersuchung der Elastizitäts-
isse der Kristalle gewidmet. Wir müssen uns hier begnügen
hinzuweisen.

§ 55.

hängigkeit der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur.

n schon Wertheim[1]) und Kupfer[2]) erkannt hatten, daß die Tem-
die elastischen Eigenschaften der Körper beeinflußt, haben zuerst
usch und Loomis[3]) für Kupfer, Eisen und Messing gezeigt, daß
stizitätskoeffizient zwischen der gewöhnlichen Temperatur und der-
des siedenden Wassers stetig abnimmt. Kohlrausch und Loomis
teten die Zunahme der Schwingungsdauer der Torsionsschwingungen,
ie einen Draht in der Achse eines doppelwandigen Zylinders
en ließen, der durch zwischen die beiden Wände des Zylinders
enden Wasserdampf erhitzt wurde. Der von außen durch dichte
ungen sehr gegen Wärmeabgabe geschützte Zylinder und mit ihm
ner Achse hängende Draht kühlte sich dann sehr langsam ab, und
en die Schwingungsdauern der sich langsam abkühlenden Drähte
Die Torsionskoeffizienten sind dem Quadrate der Schwingungs-
mgekehrt proportional.

Versuche ergaben, daß sich der Torsionskoeffizient, somit auch
an annimmt, daß der Koeffizient der Querkontraktion von der
tur unabhängig ist, auch der Elastizitätskoeffizient in seiner Ab-
it von der Temperatur darstellen läßt durch eine Gleichung von
n

$$E = E_0\,(1 - \alpha t - \beta t^2).$$

rd die Temperatur nach Graden der hundertteiligen Skala oder der
ach Celsius gemessen, so wird für

Eisen . . .	$\alpha = 0{,}000483$	$\beta = 0{,}00000012$
Kupfer . . .	$0{,}000572$	$0{,}00000028$
Messing . .	$0{,}000485$	$0{,}00000136$.

1) Wertheim, Poggend. Ann. Erg.-Bd. 2. 1848.
2) Kupfer, Göttinger Nachrichten 1855. p. 219. Mémoires de l'Acad. de Petersbourg 6 Reihe. 6.
3) Kohlrausch und Loomis, Poggend. Ann. 141 1870.

Es nehmen demnach die Elastizitätskoeffizienten von 0° der Tempe des gefrierenden Wassers, bis 100° der Temperatur des bei dem norn Barometerstande von 760^mm siedenden Wassers um 5—6 Prozent al

Den gleichen Gang für den Torsionskoeffizienten fand Tomlins jedoch ist die von ihm gefundene Abnahme für Eisen und Kupfer trächtlich kleiner als bei Kohlrausch. Er fand für

	α	β
Silber	0,0003769	0,000000169
Platin	0,00004456	0,000000299
Aluminium . . .	0,0003555	0,000000547
Zink	0,001080	0,000004947
Nickel	0,0002267	0,000000347
Eisen	0,0002442	0,000000251
Kupfer.	0,0002472	0,000000449.

Einen erheblich geringern Wert für die Abnahme des Elastizit koeffizienten von Eisen und Stahl fand Pisati[2]), welcher direkt die li Verlängerung von Eisen- und Stahldrähten bei verschiedenen Temperat maß. Pisati hing seine Drähte ebenfalls in die Achse eines dop wandigen Zylinders; der den innern Zylinder umgebende ringförm Zylinder war mit Öl gefüllt, das durch eine Heizvorrichtung bis auf 3 erwärmt und auf jeder zwischen der gewöhnlichen und jener hohen lie den Temperatur gehalten werden konnte. Für die Elastizitätskoeffizie erhielt Pisati nachfolgende Werte in Kilogramm pro Quadratmillim bei den über den Zahlen angegebenen Temperaturen.

$t =$	20	50	100	150	200	300
Eisen	21441	21364	21212	20895	20458	19171
Stahl	18481	18416	18232	18052	17820	17371

Die Drähte waren vor den Versuchen bis auf schwache Rotglut hitzt und langsam abgekühlt und mehrfach vor den Messungen auf 3 erwärmt, so daß sie in einem konstanten normalen Zustande waren.

Bei der Erwärmung von 20° auf 100° nimmt der Elastizitätskoeffi des Eisens ziemlich gleichmäßig um etwa 2,7 für den Grad ab, so er bei 100° nahe 1% kleiner ist als bei 20°; sehr viel schneller ist Abnahme in höhern Temperaturen, von 100°—200° ist sie 3,6 und 200°—300° gar 6,2%. Ähnlich ist der Gang bei dem Stahl.

Ebenso wie Pisati hat Miller[3]) direkt die Änderung des Elastizi koeffizienten durch Messung der Verlängerung von Drähten bei verschied Temperaturen untersucht; er fand abweichend von Kohlrausch, daß Abnahme der Elastizitätskoeffizienten sich durch eine Gleichung

$$E_t = E_0\,(1 - \alpha t)$$

darstellen läßt, daß es also eines quadratischen Gliedes der Tempera

---

1) *Tomlinson,* Proceedings of the Royal Society of London. **40**. p. 343.
2) *Pisati,* Gazetta chim. ital. **6**. u. 7. Beiblätter zu den Annalen d. Ph 1. p. 305. 1877.
3) *A. Miller,* Sitzungsberichte der Münchner Akad. 1882; Denkschr Münchner Akademie 1886. p. 707.

cht bedarf. Regelmäßige Werte, die auf einen bestimmten Wert von α hrten, ergaben sich aber erst, als die Drähte auf den sogenannten Normalstand gebracht waren, der entweder durch mehrfaches Erwärmen und rauf folgendes langsames Abkühlen, oder dadurch erreicht wurde, daß e Drähte mehrfach gespannt und wieder abgespannt wurden.

Bei seinen ersten Versuchen, die sich nur auf Eisen bezogen, erhielt Miller

$$E_t = 21150\,(1 - 0{,}0004277\,t).$$

In seiner zweiten Abhandlung gibt Miller folgende Werte von E_0 und α

	E_0	α		E_0	α
Platin	19668	0,0003636	Zink	10551	0,0033
Eisen	18813	0,0003760	Blei	2553	0,0047
Silber	7359	0,0007776	Messing . . .	10670	0,0004728
Kupfer	13035	0,0009983	Neusilber . .	13945	0,0006536

Für Eisen liegt der Wert von Miller zwischen dem von Kohlrausch und Pisati, für Kupfer und Messing sind Millers Werte erheblich größer; von den von Tomlinson gefundenen Werten weichen sie ebenfalls und zwar zum Teil erheblich ab.

Kiewit[1]) hat die Biegung von Stäbchen nach der Methode von Voigt benutzt, um die Änderung der Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur für Kupfer, Zink, Zinn und eine große Zahl deren Legierungen, sowie für ein Glasstäbchen zu untersuchen. Das Kupfer wurde in drei Sorten untersucht, aus deren jedem mehrere Stäbchen hergestellt waren; die erste Sorte war reines gegossenes Kupfer, die zweite ein dickes gewalztes Kupferblech, die dritte war eine dicke galvanoplastisch niedergeschlagene Kupferplatte. Kiewit fand, daß für Zink, Kupfer und Glas, sowie für die meisten Legierungen sich die Abhängigkeit der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur, wie es auch Miller fand, durch eine lineare Funktion der Temperatur darstellen lasse, für Zinn und einige Legierungen war die Darstellung genauer, wenn noch ein quadratisches Glied hinzugenommen wurde.

Die für die reinen Metalle und das Glas gefundenen Werte von E_0 und α sind folgende; für die Metalle setzen wir auch die von Kiewit bei dieser Gelegenheit durch Hinzunahme von Torsionsbeobachtungen bei 21,5° C. bestimmten Werte des Querkontraktionskoeffizienten μ hinzu.

	E_0	μ	α	β
Zink . .	10477	0,331	0,001471	
Cu I . .	10847	0,200	0,000372	---
Cu II .	12298	0,312	0,00038	---
Cu III .	12306	—	0,000752	—
Zinn . .	4768	0,421	0,00011	0,0000042
Glas . .	7692	--	0,000321	--

Amagat[2]) hat für Glas die Änderung der Kompression eines und des-

1) *Kiewit*, Wiedem. Ann. **29**. 1886.
2) *Amagat*, Annales de chim. et de phys. **22**. (6.) 1891.

selben Glasgefäßes bei verschiedener Temperatur beobachtet, wenn dasselbe nur einem äußern Drucke ausgesetzt wird. Da die Verhältnisse der innern und äußern Radien sich bei einem solchen zylindrischen Gefäße nicht ändern, verhalten sich die Kompressionen nach § 50 umgekehrt wie die Elastizitätskoeffizienten, vorausgesetzt, daß der Querkontraktionskoeffizient μ konstant ist. Amagat fand, daß die Kompression bei Glas von 0^0—100^0 um 2,95 und 2,71 %, für Kristallglas um 4,1 % zunahm, für die Zunahme der Temperatur von 100^0—200^0 waren die Zunahmen der Kompression 3,25; 2,99 für das gewöhnliche, 6,68 % für das Kristallglas.

Winkelmann[1]) hat durch Anwendung der Biegung die Elastizitätskoeffizienten einer großen Anzahl von Gläsern und des Platins zwischen 20^0 und etwa 400^0 C. verfolgt. Er findet, daß die Abnahme derselben mit der Temperatur sich im allgemeinen nicht durch eine lineare Funktion der Temperatur darstellen läßt und gelangt zu Gleichungen von der Form

$$E_t = E_{20}\left(1 - \alpha\,(t - 20)^{\beta}\right),$$

wenn E_t der Elastizitätskoeffizient bei t^0, E_{20} jener bei 20^0 ist. Für Platin ergab sich

$$\log \beta = 0{,}00851; \quad \log \alpha = 0{,}36685-4; \quad E_{20} = 18380.$$

Für die verschiedenen Gläser sind, ebenso wie ihre Elastizitätskoeffizienten[2]) die Werte von α und β sehr verschieden. Für manche Gläser ist $\log \beta$ gleich null, für andere hat β einen großen Wert; für ein Glas fand sich $\log \beta = 0{,}94544$, β also fast gleich 9; für dieses Glas ist $\log \alpha = 0{,}49244-24$.

Bei diesen Versuchen ergab sich, daß man die Gläser und das Platin erst mehrfach erwärmen und abkühlen mußte, ehe dieselben einen stationären Zustand annahmen, d. h. daß nach einer Erwärmung und darauf stattfindender Abkühlung der Elastizitätskoeffizient denselben Wert annahm, wie vor der Erwärmung. Es war aber dieser Wert des Elastizitätskoeffizienten größer als der vor aller Erwärmung gefundene. So fand sich für ein Glas vor der ersten Erwärmung $E = 7540$, nach mehrfachem Erwärmen 7673, für ein anderes Glas 7971 und 8340, für Platin 16926 und 18380.

Diese Zunahme des Elastizitätskoeffizienten ging bei längerem Erhalten der betreffenden Stäbe auf gewöhnlicher Temperatur wieder zurück, so daß bei den Gläsern nach 11 bis 15 Monaten der Elastizitätskoeffizient wieder der gleiche wurde, der er vor der ersten Erwärmung gewesen war. Bei Platin ging er in 13 Monaten, während deren dasselbe nicht erwärmt war, auf 17508 zurück.

Ähnliche Werte wie Kiewiet erhielt Shakespear[3]), der die Änderung der Verlängerung bei gleicher Belastung mit der Fizeauschen Interferenzmethode beobachtete. Bei einer Temperaturerhöhung von 13^0 auf 100^0 fand er eine Abnahme von E für Kupfer von 3,6 %, Eisen 1,6 %, Stahl 3,2 % und hartes Messing 3 %.

---

1) *Winkelmann,* Wiedem. Ann. **61**. p. 105. 1897; **63**. p. 117. 1897.
2) *Winkelmann* und *Schott,* Wiedem. Ann. **50**. p. 697. 1894. Man sehe a *Wüllner* und *M. Wien,* Ann. d. Phys. **9**. p. 1253. 1902.
3) *Shakespear,* Phil. Mag. **47**. (5.) p. 539. 1899.

die bisher besprochenen Untersuchungen sich nur auf die ler Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur bezogen, haben 'ntersuchungen sich auch auf die Frage erstreckt, ob auch tische Konstante, die Querkontraktion μ von der Temperatur Zur Beantwortung der Frage muß neben der Änderung des ffizienten mit der Temperatur diejenige des Torsionskoeffizien- 'emperatur beobachtet werden.

lsohn[1]) maß an einer Anzahl von Drähten die Verlängerung de Gewichte und ebenso die Torsionskoeffizienten bei einer schiedenen zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur Wassers liegenden Temperaturen. Die Anordnung war wesent- Kohlrausch und Loomis angewandte, nur wurde bei jeder ich die Verlängerung des Drahtes mit Spiegel und Skala s ergab sich, daß der Torsionskoeffizient mit steigender Tem- ich rascher abnahm als der Elastizitätskoeffizient, ein Beweis, kontraktion mit steigender Temperatur wächst. Folgende t die Resultate Katzenelsohns, unter E die Elastizitäts- ei 0°, unter $-\Delta E$ die Abnahme derselben in Prozenten bis die Torsionskoeffizienten bei 0°, unter $-\Delta T$ die Abnahme 'rozenten bis 100°, unter μ den nach der Gleichung

$$\mu = \frac{E}{2T} - 1$$

uerkontraktionskoeffizienten bei 0°, unter $\Delta\mu$ die Zunahme 'rozenten bis 100°.

	E	$-\Delta E$	T	$-\Delta T$	μ	$\Delta\mu$
. .	17 187	0,89	6518	1,64	0,319	3,07
	19 024	2,33	7505	3,10	0,270	3,805
	9800	2,92	3681	3,29	0,330	1,51
. . .	11 449	3,24	4320	4,10	0,325	3,33
. .	8941	4,21	3150	5,35	0,420	3,835
: .	7010	3,97	2551	7,10	0,394	12,00

hat somit μ für eine Temperaturänderung von 100° auf 0,441, ' würde der Wert von μ gleich 0,5 werden, also das Silber Kompression mehr erhalten.

walski[2]) beobachtete an zwei Glasstäbchen die Biegung nd 100° C. und gleichzeitig die Torsion bei Zimmertempera- nd bei 100°. Er konnte die beobachteten Koeffizienten durch ingen darstellen, nämlich

$$E = 6770\,(1 - 0{,}000106\,t)$$

$$T = 2792\,(1 - 0{,}000151\,t).$$

1) ...lsohn, Inauguraldissertation. Berlin 1887. Beiblätter zu den Ann. p. 307 In den Beiblättern ist der Torsionskoeffizient des Platin ildes zu 4211 angegeben; die Zahlen sind zweifelsohne falsch, da andern Wert von μ geben. Ich habe die Zahlen dafür eingesetzt, benen Wert von μ liefern.

2) ...walski, Wiedem. Ann. 39. p. 155. 1890.

Die Temperaturkoeffizienten sind auffallend hoch, der für E ist et dreimal so groß als der von Kiewiet, und mehr als doppelt so groß der größte der von Winkelmann gefundenen Werte.

A. Bock[1]) hat nach der Anordnung von Kirchhoff die Biegung u Torsion bis 120° bezw. 150° für Stäbe von Stahl, Kupfer, Silber u Nickel verfolgt. Die Stäbe befanden sich in einem Heizkasten, der dur regulierbare Gasflammen auf jeder Temperatur zwischen etwa 20° und 15 gehalten werden konnte. Für einen Stahlstab, wie er im Handel zu hab war, fand Bock μ unabhängig von der Temperatur; auch als ein solch Stab durch mehrfaches Erhitzen bis zu schwacher Rotglut auf den Norma zustand gebracht wurde, erhielt Bock bis 150° Werte von μ, die ich no als unabhängig von der Temperatur ansehen kann. Für Kupfer fand e für $\Delta\mu$ etwa 4% Zunahme, während Katzenelsohn für Messing 3,8% gefunden hatte. Für Silber zeigte sich $\Delta\mu$ gleich 10%, gegen 12% be Katzenelsohn. Für Nickel erhielt Bock $\Delta\mu = 2{,}4\%$.

Schäfer[2]) hat die Änderung des Elastizitätskoeffizienten und Torsionskoeffizienten mit Hilfe eines Gemisches von fester Kohlensäure und Äther, dessen Temperatur zwischen $-60°$ und $-80°$ C. liegt und flüssiger Luft, deren Temperatur gleich $-186°$ ist, bis zu diesen niedrigen Temperaturen verfolgt. Zur Bestimmung der Elastizitätskoeffizienten wurde die Verlängerung von Drähten, deren Länge etwa 15 cm war, durch spannende Gewichte gemessen, die Torsionskoeffizienten nach der Coulombschen Methode oder auch durch die Beobachtung der Drillung durch ein bekanntes Drehungsmoment bestimmt.

Die Drähte hingen in einer im zweiten Bande zu beschreibenden Dewarschen Flasche, welche für die niedrigen Temperaturen mit der betreffenden Kühlungsflüssigkeit gefüllt war. Wegen der Einzelheiten der Anordnung müssen wir auf die erste der unten genannten Abhandlungen verweisen.

Wie die beiden Koeffizienten mit steigender Temperatur abnehmen, so wachsen sie mit sinkender Temperatur; die Änderung beider Koeffizienten konnte Schäfer durch Gleichungen von der Form

$$E = E_{20}\left(1 - \alpha\,(t - 20)\right)$$
$$T = T_{20}\left(1 - \beta\,(t - 20)\right),$$

wenn E und T die Koeffizienten bei der Temperatur t bedeuten.

Schäfer findet, wie Katzenelsohn, für sämtliche von ihm untersuchten Metalle β größer wie α, so daß der Querkontraktionskoeffizient für alle mit steigender Temperatur steigt. Zur Vergleichung der von Schäfer und Katzenelsohn gefundenen Werte geben wir die betreffenden Zahlen von Schäfer für diejenigen Metalle, welche beide Beobachter untersucht haben; ΔE und ΔT geben die Änderung in Prozenten für 100° C.

---

1) *A. Bock,* Wiedem. Ann. **52**. p. 609. 1894.

2) *Schäfer,* Annalen der Phys. **5**. p. 220. 1901; **9**. p. 665. 1902. Man sehe auch die Bemerkungen von *Sutherland,* Ann. d. Phys. **8**. p. 474 und *Schäfers* Erwiderung. **9**. p. 674. 1902.

Name	E_{20}	$-\Delta E$	T_{20}	$-\Delta T$	μ
Platin	16 029	0,732	6594	1,78	0,215
Eisen	18 347	2,250	7337	3,035	0,247
Gold	—	—	—	3,014	—
Silber	5897	7,65	2467	8,209	0,195

Abweichend von Schäfer findet Benton[1]) die Zunahme des Elastizitätskoeffizienten bei Abkühlung auf — 186° für Kupfer und Eisen größer als die des Torsionskoeffizienten, es ist

für hartgezogenes Kupfer $E_{-186} = E_{24} \cdot 1{,}180$; $T_{-186} = T_{24} \cdot 1{,}073$,
„ Eisen . . . . $E_{-186} = E_{21} \cdot 1{,}087$; $T_{-186} = T_{20} \cdot 1{,}079$.

Qualitativ stimmen die von den verschiedenen Experimentatoren gefundenen Resultate mit wenigen Ausnahmen recht gut überein, in den Werten der Temperaturkoeffizienten ist dagegen nur eine geringe Übereinstimmung, aus welcher zu folgern ist, daß geringe chemische oder physikalische Verschiedenheiten der untersuchten Körper den Wert des Temperaturkoeffizienten erheblich beeinflussen.

§ 56.

Elastische Nachwirkung. Bei der bisherigen Besprechung der elastischen Eigenschaften der festen Körper haben wir vorausgesetzt, daß die durch Wirkung äußerer Kräfte hervorgebrachten Änderungen der Körper momentan oder doch in einer für uns unmeßbar kleinen Zeit erfolgen, das heißt also, daß etwa bei einer Dehnung durch Zug die Verlängerung sofort eintritt, wenn das ziehende Gewicht an dem Körper angebracht ist und wir zur Vermeidung von Schwingungen den Körper allmählich in die neue Gleichgewichtslage übergehen lassen. Wir haben dann die so eintretende Verlängerung gemessen und aus dieser den Elastizitätskoeffizienten oder den linearen Dehnungskoeffizienten abgeleitet.

Die eintretenden Änderungen beschränken sich indes nicht immer auf diese momentanen Änderungen, ja in der Regel treten im Laufe der Zeit bei fortdauernd wirkenden äußeren Kräften noch mehr oder weniger große Änderungen in demselben Sinne ein, wie die momentanen. Die erste Beobachtung dieser Art wurde von W. Weber an Seidenfäden gemacht und von demselben als elastische Nachwirkung bezeichnet[2]). Ein horizontal ausgespannter Seidenfaden wurde durch ein passend angebrachtes Gewicht gedehnt und seine sofort eingetretene Verlängerung gemessen. Bei fortdauerndem Wirken des dehnenden Gewichtes ergab sich dann, daß die Länge des Fadens noch stetig zunahm, und zwar wurde eine mit wachsender Zeit für gleiche Zeitintervalle abnehmende Zunahme bis 2168,79 Minuten, also länger als 36 Stunden nach Vornahme der ersten Dehnung beobachtet.

Ebenso ergab sich, daß ein Faden, der längere Zeit gedehnt gewesen

1) *Benton*, Fortschritte der Physik im Jahre 1903. Abt. I. p. 157.
2) *W. Weber*, Poggend. Ann. 34. 1835; 54. 1841.

war, nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes nicht sofort wieder die dem ungedehnten Zustande entsprechende Länge annahm, daß vielmehr ein großer Teil der Verkürzung erst nach und nach eintrat, die Verkürzung wurde 1233 Minuten, also 20,5 Stunden nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes beobachtet.

Diese von M. Weber an Seidenfäden beobachtete elastische Nachwirkung fand dann F. Kohlrausch auch an Metalldrähten und Glasfäden; er zeigte gleichzeitig in einer Reihe von Experimentaluntersuchungen[1]), daß bei allen diesen Substanzen die elastische Nachwirkung wesentlich denselben Gesetzen folgt. Kohlrausch benutzte bei seinen Beobachtungen vorwiegend die Torsion.

Entsprechend der Beobachtung Webers, daß bei konstantem spannenden Gewichte die Verlängerung stetig noch lange Zeit zunimmt, zeigte Kohlrausch bei Glasfäden zunächst, daß das zu einer konstanten Torsion erforderliche Drehungsmoment mit wachsender Zeit abnimmt. Zur Messung des Drehungsmomentes wurde ein Magnet benutzt. An einen sehr feinen etwa 35^{mm} langen, in einem drehbaren Gehäuse hängenden Glasfaden wurde ein kleiner Magnet befestigt, so daß derselbe horizontal schwebte. Ein solcher Magnet hat, wie wir im dritten Bande kennen lernen werden, das Bestreben, in einer bestimmten horizontalen Richtung, der Richtung des sogenannten magnetischen Meridians zu verharren. Bringt man ihn um einen Winkel α aus dieser Lage heraus, so wirkt auf ihn ein Drehungsmoment

$$d = D \cdot \sin \alpha,$$

welches ihn in den Meridian zurückzubringen sucht. Es wurde nun durch eine Drehung des Gehäuses dem Faden eine Torsion erteilt; der Magnet folgt dann der Torsion so weit, bis das ihn von der Richtung des Meridians fortdrehende Drehungsmoment der Torsion gleich ist dem magnetischen Drehungsmoment, welches ihn in den Meridian zurückzuführen strebt. Durch eine Torsion von drei ganzen Umdrehungen wurde so die Nadel nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt. Es zeigte sich dann, daß die Nadel nicht in dieser Lage verharrte, daß sie vielmehr stetig dem Meridiane sich näherte. Daraus folgt, daß das dem Faden durch drei Umdrehungen erteilte Torsionsmoment nicht mehr ausreicht, um die Magnetnadel in der ihr zunächst gegebenen Lage zu halten, daß das magnetische Drehungsmoment größer war. Es wurde nun durch Zurückdrehen des Gehäuses die durch Annäherung des Magnets an den Meridian eintretende Zunahme der Torsion aufgehoben und so der Faden stets um genau drei Umdrehungen tordiert gehalten. Dabei wurde zunächst von Minute zu Minute, später in größeren Zeitintervallen der Stand der Magnetnadel, also der Winkel α beobachtet. Dem Sinus des so beobachteten Winkels war dann jedesmal das Drehungsmoment proportional, welches zu der betreffenden Zeit dem durch drei Umdrehungen des Fadens bewirkten Torsionsdrehungsmoment das Gleichgewicht hielt. Die so zur Zeit t Minuten nach Herstellung der Torsion beobachteten Drehungsmomente x ließen sich durch eine Gleichung folgendermaßen darstellen

1) *F. Kohlrausch*, Poggend. Ann. **119**. 1863; **128**. 1866; **158**. 1876; **160**. 1877

$$x = x_0 + c e^{-a t^m},$$

rin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, x_0, c, a und m r aus den Versuchen zu berechnende Konstanten sind,

In folgender Tabelle sind einige der von Kohlrausch in dieser eise beobachteten und nach jener Gleichung mit den Konstanten

$$x_0 = 0{,}8970; \quad c = 0{,}04054; \quad a = 0{,}35272; \quad m = 0{,}25$$

rechneten Werte von x zusammengestellt. Die Drehungsmomente x sind ifach durch den Sinus der beobachteten Ablenkungswinkel α gegeben.

Zeit Minuten	x Beobachtet	x Berechnet	Zeit Minuten	x Beobachtet	x Berechnet
1,25	0,9247	0,9249	35	0,9145	0,9142
1,92	0,9238	0,9238	50	0,9138	0,9129
2,50	0,9231	0,9230	110	0,9120	0,9099
3,32	0,9218	0,9217	160	0,9079	0,9086
5,25	0,9211	0,9208	206	0,9071	0,9077
7,58	0,9197	0,9196	300	0,9054	0,9063
9,67	0,9188	0,9188	452	0,9051	0,9050
12	0,9181	0,9180	1310	0,9042	0,9019
18	0,9168	0,9166	1780	0,8995	0,9011
25	0,9154	0,9154	2760	0,8995	0,9001

Die Zahlen zeigen, wie gut sich die allmähliche Abnahme des Torsionsdrehungsmomentes durch jene Gleichung darstellen läßt. Nach der ichung würde x_0 den Wert des Torsionsdrehungsmomentes bedeuten, chem sich dasselbe bei konstant erhaltener Torsion von drei Umdrehungen mit wachsender Zeit immer mehr annähert, denn setzt man in er Gleichung die Zeit t unendlich groß, so wird $x = x_0$.

Entsprechend der zweiten Beobachtung Webers zeigte Kohlrausch, aß ein tordierter Draht nicht sofort nach Aufheben der Torsion in seine üre Gleichgewichtslage zurückkehrt, sondern daß er eine nur sehr allählich sich verlierende Torsion beibehält. Ja, er fand, daß es keineswegs einer lange dauernden Torsion bedarf, damit sich diese Nachwirkung ige, daß schon eine Torsion von wenigen Sekunden ausreicht, um eine erkliche Nachwirkung hervorzurufen. Bezeichnet man den Winkel, um lchen der Draht zur Zeit t Minuten nach Aufheben der ihm ursprünglich teilten Torsion noch aus seiner Gleichgewichtslage gedreht bleibt, mit x, läßt sich derselbe allgemein darstellen durch die Gleichung

$$x = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{1-n} \cdot t^{1-n}},$$

rin e wie immer die Basis des natürlichen Logarithmensystems, C, α d n Konstanten bedeuten. Die Konstanten hängen bei gegebener Temperatur von der Größe und Dauer der ursprünglich dem Drahte erteilten sion ab. Sind die anfänglich dem Drahte erteilten Torsionen nicht zu oß und übersteigt die Dauer derselben nicht 3 Minuten, so lassen sich Winkel x durch die einfachere Gleichung

$$x = c \frac{1}{t^{\alpha}}$$

darstellen, worin c von der Größe und Dauer der ursprünglichen Torsio sowie von dem Material und der Temperatur des Drahtes, α dageg bis zu Temperaturen von 22° C. nur von dem Material des Drahtes a hängig ist[1]).

Für einen Silberdraht fand Kohlrausch für die Größe c, wenn d Draht T Minuten um den Winkel φ^0 tordiert war und die Temperat des Drahtes τ^0 C. betrug

$$c = (0{,}0000219\,\varphi + 0{,}0000000187\,\varphi^2)\,T^{0{,}59}\,(\tau + 21{,}5).$$

Man sieht, die Nachwirkung ändert sich mit der Temperatur se stark. Die Konstante α war für Silber gleich 0,3875. Für einen Messin draht fand sich $\alpha = 0{,}1643$, für einen Glasfaden berechnete Kohlrausch[2] aus Versuchen Boltzmanns[3]), wenn die Torsion 180° betrug und nich länger als $\frac{1}{3}$ Minute dauerte $\alpha = 0{,}968$ und 0,923. Für einen Kautschu faden ergab sich dagegen α schon bei kleinen nur $\frac{1}{3}$ Minute dauernde Torsionen wesentlich von der Größe φ der ursprünglichen Torsion ab hängig.

Um ein Bild von der Größe und dem Gange der elastischen Nach wirkung zu geben, sind in folgender Tabelle einige Beobachtungen vo Kohlrausch an dem Silberdrahte, an dem obige Konstanten erhalten sind mitgeteilt. Der Silberdraht hatte eine Länge von 125mm. Die Torsion wurden mit Spiegel und Skala beobachtet. Die Ablenkungen x sind i Skalenteilen angegeben, man erhält den Wert derselben in Bogenminut durch Multiplikation mit 0,706.

Zeit nach der Torsion t in Minuten	I x		II x		III x	
	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.
0,166	38	41,5	—	—	74	74,8
0,33	33,6	34,0	53,5	54,6	65,9	66,7
1,0	24,3	24,2	41,3	40,6	53,4	53,0
2,0	19,3	19,3	33,6	32,8	44,8	44,4
5	13,9	14,0	23,8	23,8	33,7	33,7
10	11,0	10,9	17,9	18,1	26,0	26,2
20	7,9	8,3	13,4	13,4	19,6	19,7
50	—	—	8,9	8,5	12,6	12,5
80	—	—	7,2	6,6	10,5	2,5

Die Größe der bei diesen Beobachtungsreihen stets angewand primären Torsion betrug 180°, die Dauer bei der ersten Reihe 2, bei d zweiten 5, bei der dritten 10 Minuten.

Die Zahlen zeigen, daß schon bei kurz dauernder Torsion die Na

1) *F. Kohlrausch,* Poggend. Ann. 138. p. 418. 1869.
2) *F. Kohlrausch,* Poggend. Ann. 158. 1876. Man sehe auch *Kl* Wiener Berichte. 78. Juli 1878.
3) *Boltzmann,* Wiener Berichte 70. 1874. Poggend. Ann. Erg.-Bd. V

rkung merklich ist, und wie die Nachwirkung mit der Dauer der Torsion chst; bei der Torsionsdauer 10 Minuten ist die Nachwirkung nach einer hstel Minute schon fast 1°. Bei einer Torsionsdauer von 9 Stunden d einer Torsion von 585° betrug die Nachwirkung gleich nach Aufben der primären Torsion 30°, also fast ein Zwanzigstel des ursprünghen Torsionswinkels.

Kohlrausch hat ebenfalls die elastische Nachwirkung bei der Dehnung d Biegung näher untersucht; mit Metall- oder Glasstreifen war in den llen die Nachwirkung zu gering, um genau verfolgt werden zu können, r beobachtete daher die Nachwirkung bei der Dehnung an Kautschukden und die bei der Biegung an Stäben aus Hartkautschuk (Ebonit)[1]. Er fand in beiden Fällen, daß die Gesetze der elastischen Nachwirkung m wesentlichen dieselben waren wie bei der Torsion. Wir verweisen wegen des Spezielleren auf die Arbeit von Kohlrausch. Nur sei hier och des merkwürdigen Verhaltens der Körper Erwähnung getan, wenn an sie nacheinander verschiedenen Änderungen unterworfen hat. Wie wir ahen, nimmt die Nachwirkung bei der Torsion, und so ist es bei allen übrigen, mit der Größe und Dauer der primären Torsion sowohl an Größe als Dauer zu, immer aber ist die Annäherung an den Gleichgewichtsustand anfänglich eine erheblich raschere als später. Wenn man nun einem Körper zunächst eine starke länger dauernde Torsion in einem Sinne erteilt, und dann, während er nach Aufheben derselben sich allmählich der Gleichgewichtslage nähert, ihm eine kurz dauernde Torsion im entgegengesetzten Sinne gibt, so zeigt sich, daß die einzelnen Nachwirkungen sich superponieren, das heißt, man findet, daß nach der zweiten kürzern entgegengesetzten Torsion sich der Draht zunächst der Lage nähert, aus welcher man ihn tordiert hatte, dann einen Augenblick zur Ruhe kommt, und daß er dann wieder der Nachwirkung von der ersten Torsion folgend sich wieder seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage nähert. So wurde ein Kautschukfaden einen Tag lang um drei Umdrehungen tordiert. Losgelassen zeigte derselbe eine sehr starke Nachwirkung und in der ersten Zeit näherte er sich etwa 10° in der Sekunde seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage. Nach 10 Minuten hatte er sich um mehr als 180° derselben genähert, und er drehte sich in der Sekunde nur mehr etwa $\frac{1}{30}$° zurück. Nun drillte man den Draht während 40 Sekunden nach der entgegengesetzten Richtung; nach Aufheben dieser Torsion zeigte der Faden zunächst eine Nachwirkung im Sinne derselben. Der Faden ging nicht sofort in die Lage zurück, aus der man ihn das zweite Mal tordiert hatte, sondern näherte sich derselben stetig während 3,5 Minuten. Ehe er indes dieselbe erreicht hatte, kehrte sich der Sinn der Bewegung um, das heißt der Körper näherte sich wieder, wie wenn die zweite Torsion nicht stattgefunden hätte, der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Weidmann[2]) hat die quantitativen Verhältnisse der elastischen Nachwirkungen bei Biegung, kubischer Kompressibilität und Torsion für mehrere Körper untersucht.

1 F. *Kohlrausch*, Poggend. Ann. 158. 1876. Man sehe auch *Klemenčič*, Wiener Berichte. 78. Juli 1878.

2 *Weidmann*, Wiedem. Ann. 29. 1886.

Bei der Biegung wurden Glasstäbchen oder Glasröhren an dem einen Ende eingeklemmt und an dem andern Ende jedesmal 10 Minuten belastet und der Biegungspfeil gemessen; es wurde darauf die nach Fortnahme des spannenden Gewichtes zurückgebliebene Biegung zu bestimmten Zeiten nach dieser Fortnahme ebenfalls gemessen. Zum Zwecke der Messung war an das belastete Ende der gebogenen Stäbchen eine feine Skala angebracht, welche durch ein mit einem Fadenkreuz versehenes Mikroskop beobachtet wurde.

Schon die Versuche von F. Kohlrausch führten zu dem Resultate, daß die bei gleicher Dauer der ursprünglichen Deformationen zu gleichen Zeiten nach Aufhören der letztern gebliebenen Deformationen der ursprünglich gegebenen Deformation proportional sind, vorausgesetzt, daß die ursprüngliche Deformation nicht zu groß ist. Weidmann fand diesen Satz bestätigt; er setzt deshalb als Maß der elastischen Nachwirkung zu einer bestimmten Zeit den Quotienten aus der zu dieser Zeit noch vorhandenen Deformation und der ursprünglichen.

Für die so gemessene Nachwirkung der Biegung gelangt Weidmann zu dem Resultate, daß dieselbe für ein gegebenes Glas unabhängig ist von den Dimensionen des gebogenen Glases. So erhielt Weidmann für eine Röhre aus Jenenser als XVI‴ bezeichneten Glase, deren lichte Weite 5,85^{mm}, deren Wandstärke 1,64^{mm} war, und für eine Kapillare, deren lichte Weite so gering war, daß man sie als Glasstab von 3,1^{mm} Dicke ansehen konnte, nach einer 10 Minuten dauernden Biegung die in folgender Tabelle angegebenen Nachwirkungen; die Temperatur bei diesen Versuchen war 11^0.

Zeit	Nachwirkung		Zeit	Nachwirkung	
	Röhre	Kapillare		Röhre	Kapillare
10 Sek.	0,0081	—	1 Min.	0,0028	0,0032
20 „	0,0054	0,0058	1,5 „	0,0024	0,0025
30 „	0,0042	0,0047	2 „	0,0019	0,0019
40 „	0,0034	0,0040	3 „	0,0013	0,0013

Ebenso fand er die Nachwirkung für einen gegebenen Stab unabhängig von der Länge des gebogenen Teiles.

Für die von ihm benutzten Gläser fand Weidmann mit steigender Temperatur eine Abnahme der elastischen Nachwirkung, während bei den Metallen nach den Beobachtungen von Kohlrausch und Schröder[1]) die elastische Nachwirkung mit steigender Temperatur erheblich zunimmt.

Mit den bei der Biegung erhaltenen Nachwirkungen verglich Weidmann zunächst die durch Kompression eines Gefäßes entstehenden. Aus zwei auch für die Biegungsversuche benutzten Gläsern, dem oben bereits erwähnten und einem thüringer Glase verfertigte er thermometerartige

1) *Kohlrausch* a. a. O. *Schröder*, Wiedem. Ann. 28. p. 369. 1886. Schröder teilt ebenfalls sehr interessante Beobachtungen über den Einfluß mehrfach wiederholter Erwärmungen und Abkühlungen auf die elastische Nachwirkung mit.

Hohlkugeln von 30—56mm Durchmesser an sehr engen Kapillar- angeschmolzen; dieselben wurden mit Quecksilber gefüllt und bei tig konstant erhaltener Temperatur wurden auf das Innere der Ther- r 10 Minuten lang Drucke zwischen 1 und 10 Atmosphären aus- Indem man die Kompressibilität des Quecksilbers vernachlässigte, die durch das Niedersinken des Quecksilberfadens in dem Kapillar- obachtete scheinbare Volumvergrößerung als die durch den innern hervorgebrachte Volumvergrößerung angesehen. Nach Fortnehmen uckes wurde das Wiederansteigen des Quecksilbers im kapillaren verfolgt.

hließlich stellte Weidmann aus einigen der von ihm benutzten Glasfäden her, an denen er ganz in der Weise wie Kohlrausch chwirkung bei der Torsion maß. In folgender Tabelle sind die für g, Kompression und Torsion an dem Glase Nr. XVI''', die für Bie- nd Kompression an einem thüringer Glase gefundenen Werte zu- ngestellt.

t	Elastische Nachwirkung bei Glas XVI'''			Elastische Nachwirkung bei thüringer Glas	
	Biegung	Kompression	Torsion	Biegung	Kompression
k.	0,0065	0,0069	—	0,0106	0,0107
„	45	56	0,0055	95	92
in	33	45	45	84	85
„	25	36	36	75	76
„	19	29	34	66	66
„	13	20	24	57	57
er	7'	0°	0°	1°	0°

enfalls darf aus den Versuchen von Weidmann geschlossen werden, r Gang der elastischen Nachwirkung für eine und dieselbe Substanz tliche Formen derselben der gleiche ist.

a dem gleichen Resultate gelangte Austin[1], der die Nachwirkung rsion und Verlängerung bei Messing-, Kupfer- und Silber-Drähten chte; ebenso wie bei Torsion ließen sich die Nachwirkungen bei g durch die Gleichung von Kohlrausch darstellen, die Biegungs- rkung ergab sich, wie es schon Klemenčič bei Glas gefunden stets kleiner als die Torsionsnachwirkung.

urch Beobachtung der Volumänderung von Kautschukschläuchen durch h der Methode von Wertheim hat Pulfrich[2]) den Nachweis ge- daß die Querkontraktion bei der elastischen Nachwirkung genau n Verlauf hat wie die Nachwirkung bei der Verlängerung des hes. Am deutlichsten ergibt sich das aus folgender Art der Be- g des Querkontraktionskoeffizienten. Ist r_0 der Radius der zylin- n Höhlung des Kautschukschlauches im ungespannten Zustande, und dem der Schlauch eine zeitlang gedehnt und dann sich selbst über-

1) Austin, Wiedem Ann 50. p. 659. 1893
2) Pulfrich, Wiedem. Ann. 28. 1886.

lassen war, zur Zeit t_1 die Verkürzung des Radius gleich ϱ_1, dagegen zu einer spätern Zeit t_2 gleich ϱ_2, so hat sich der Radius in dieser Zeit um $\varrho_1 - \varrho_2$ ausgedehnt; somit in Bruchteilen des Radius, der zur Zeit t_1 vorhanden war, um

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{r_0 - \varrho_1} = \varrho.$$

Ist die ursprüngliche Länge des Schlauches L_0, die zur Zeit t_1 infolge der elastischen Nachwirkung noch vorhandene Verlängerung gleich l_1, die zur Zeit t_2 noch vorhandene Verlängerung l_2, so hat sich der Schlauch um die Länge $l_1 - l_2$ verkürzt, somit in Bruchteilen seiner Länge zur Zeit t_1

$$\frac{l_1 - l_2}{L_0 + l_1} = \delta.$$

Das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenänderung, welche innerhalb der Zeit von t_1 bis t_2 infolge der Nachwirkung gleichzeitig stattfand, ist somit

$$\mu = \frac{\varrho}{\delta}.$$

Pulfrich erhielt für das so berechnete μ für jedes Stadium der elastischen Nachwirkung den gleichen Wert, und zwar den Wert 0,456; einen fast genau gleichen Wert, nämlich 0,45 etwa, fand Pulfrich auch für kurzdauernde Dehnungen, so daß also der Koeffizient der Querkontraktion nicht nur für alle Stadien der Nachwirkung der gleiche, sondern auch derselbe ist, wie für die kurz dauernden elastischen Dehnungen.

Die Tatsache, daß die elastischen Änderungen eines Körpers unter Wirkung äußerer Kräfte oder nach Aufhören dieser Wirkungen nicht vollständig sofort, ja daß sie zum Teil sehr langsam erfolgen, beweist, daß die der ganzen Elastizitätslehre zugrunde liegende Annahme, nach welcher die augenblickliche Lage der Moleküle im Innern eines Körpers durch die augenblicklich wirkenden Kräfte bestimmt wird, einer Modifikation bedarf. Es haben allerdings die Moleküle, sobald bestimmte äußere Kräfte auf einen Körper wirken, nur eine Gleichgewichtslage, indessen kann das Eintreten in diese Gleichgewichtslage eine sehr lange Zeit dauern. Wir müssen daraus schließen, daß der Bewegung der Moleküle, sobald sie den augenblicklich wirksamen Kräften folgend in die neue Gleichgewichtslage hinübergehen, ein Widerstand entgegensteht, der ihre Bewegung verlangsamt. Es muß das aber ein Widerstand ganz eigentümlicher Art sein, wie wir ihn sonst bei Bewegungen nicht finden. Bei allen sonstigen Bewegungen können wir den Widerstand in Rechnung ziehen, indem wir einfach von der bewegenden Kraft eine gewisse Größe abziehen, der Quotient aus der so berechneten bewegenden Kraft und der zu bewegenden Masse gibt uns die Beschleunigung. Da bei den elastischen Änderungen die Kraft, welche die Moleküle gegen die Gleichgewichtslage treibt, dem Abstande der Moleküle von der Gleichgewichtslage proportional ist, so ist bei gleicher Verschiebung die bewegende Kraft dieselbe; da nun bei gleicher Lagerung der Moleküle auch der Widerstand derselbe sein müßte, so müßte bei gleicher Verschiebung auch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle sich der Gleichgewichtslage nähern, stets dieselbe sein. Das ist aber, wie wir sahen,

neswegs der Fall. Die vorhin mitgeteilten Beobachtungen von F. Kohlusch zeigen, daß bei einer Torsion des Silberdrahtes von 180°, welche Minuten dauerte, nach 10 Sekunden die Drillung des Drahtes bis auf ′ verschwunden war und in weitern 20 Minuten auf 5′ zurückging. Als selbe Torsion 10 Minuten gedauert hatte, war in 10 Sekunden die Drilng erst bis auf 52′ verschwunden, es dauerte 5 Minuten, bis sie auf 27′ ückgegangen war und dann ging sie in 80 Minuten erst auf 8′ zurück. hat man stärkere ursprüngliche Torsionen angewandt und diese stundenng dauern lassen, so kann die langsame Rückkehr in die Gleichgewichtsge schon beginnen, wenn die Drillung noch viele Grade beträgt; wir erähnten den Versuch von F. Kohlrausch, bei welchem die Nachwirkung och 30° betrug, erst in 130 Tagen ging sie auf 27′ zurück.

Noch rätselhafter wird der Vorgang durch die erwähnte von Kohlrausch gezeigte Superposition der elastischen Nachwirkung und durch Beobachtungen von Braun[1]) über den Einfluß anderweitiger elastischer Änderungen auf eine vorhandene Nachwirkung. Hat man einen Faden tordiert, so daß er Nachwirkung zeigt, so werden nach F. Kohlrausch durch eine entgegengesetzte Torsion die Moleküle nicht in derselben Weise verschoben, wie wenn man dem ungedrillten Faden dieselbe Torsion erteilt, sondern nach Aufhören der neuen Torsion und der von ihr herrührenden Nachwirkung tritt die erstere wieder hervor. Man kann also die Nachwirkung nicht etwa aufheben, indem man durch eine äußere Kraft den Faden in die untordierte Lage bringt. Selbst wenn man ihn in dieser Lage nicht zu lange Zeit festhält, geht er aus derselben wieder heraus in die durch die frühere Torsion bedingte Lage, um dann ganz allmählich in die untordierte Lage zurückzukehren.

Nach den Beobachtungen von Braun sind die verschiedenen Formen der elastischen Änderungen, wenn man sie gleichzeitig eintreten läßt, von einander unabhängig, das heißt z. B. wird ein Stab gleichzeitig durch eine gegebene Kraft gebogen und durch ein gewisses Drehungsmoment tordiert, so ist die Biegung die gleiche, wie wenn die Torsion nicht vorhanden wäre, die Torsion die gleiche, wie wenn nicht gleichzeitig eine Biegung vorhanden wäre; ebenso wird die Torsion eines Drahtes nicht durch einen longitudinalen Zug und die Verlängerung durch einen longitudinalen Zug nicht durch die Torsion geändert[2]). Hat man dagegen einen Stab tordiert, so daß er nach Fortnahme des tordierenden Momentes elastische Nachwirkung zeigt, so ändert eine Biegung oder ein longitudinaler Zug den Gang der Nachwirkung beträchtlich, und zwar stets in dem Sinne, daß die Änderung beschleunigt wird. Dabei ist die Wirkung der Art nach die gleiche, wenn ein durch Zug gespannter Draht, während er Torsionsnachwirkung zeigt, entlastet wird oder wenn ein nicht durch Zug gespannter Draht einem Zuge ausgesetzt wird. Der Art nach ist die Wirkung ebenfalls die gleiche, ob der Draht unter Wirkung eines tordierenden Momentes die Nachwirkung als Zunahme der Torsion oder ob er nach Fort-

1) *Braun*, Poggend. Ann 159. p. 337. 1876.

2) Nach Versuchen von *Benton* (Ann. d. Physik. 3. p. 471 1900, ist der Torsionskoeffizient doch nicht ganz vom longitudinalen Zuge unabhängig; bei einigen Metallen wächst derselbe, wenn man einen Draht gleichzeitig einem longitudinalen Zug aussetzt, bei andern nimmt er ab.

nahme des tordierenden Momentes als Nachwirkung noch eine Abnahme der Torsion zeigt. Die Wirkung einer Änderung der longitudinalen Spannung ist stets eine Beschleunigung des Ganges der elastischen Änderung im Sinne der augenblicklichen Bewegung. Während also durch einen longitudinalen Zug keine Torsionsverschiebung und somit selbstverständlich auch keine Torsionsnachwirkung erzeugt wird, hat jede Änderung der longitudinalen Spannung auf eine vorhandene Torsionsnachwirkung einen Einfluß.

Die große Verwicklung der Nachwirkungserscheinungen hat es bisher noch unmöglich gemacht eine Theorie dieser elastischen Erscheinungen zu geben, das heißt sie auf die molekularen Vorgänge im Innern der Körper zurückzuführen. Braun gelangte zu dem Schlusse, daß die elastische Nachwirkung etwas wesentlich anderes ist, als das, was man gewöhnlich elastische Verschiebung nennt.[1])

Schon W. Weber[2]) machte die Annahme, daß die elastischen Nachwirkungen nicht den bei Betrachtung der elastischen Veränderungen besprochenen Verschiebungen der Moleküle gegeneinander zuzuschreiben seien, sondern daß dieselben als Folge einer Drehung der Moleküle um eine in denselben liegende Achse anzusehen seien. Auch F. Kohlrausch[3]) schließt sich dieser Ansicht an, ohne indes ebensowenig wie W. Weber den Versuch zu machen aus dieser Anschauung die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung abzuleiten. Einen Versuch nach dieser Richtung hat Warburg[4]) gemacht und später Michaelis[5]). Warburg macht darauf aufmerksam, daß die Erklärung der elastischen Nachwirkung aus einer Drehung der Moleküle zu einer wesentlichen Voraussetzung habe, daß die Moleküle nicht kugelförmig seien, daß sie etwa dreiachsige Ellipsoide seien, welche selbst in dem kleinsten meßbaren Volumen ganz unregelmäßig gelagert seien. Wenn auf einen so zusammengesetzten Körper eine äußere Kraft wirkt, so muß neben der Verschiebung der Moleküle eine Drehung derselben eintreten, da bei bestimmten wirksamen Kräften den Molekülen eine bestimmte stabile Gleichgewichtslage zukommt, der sie sich zu nähern suchen. Diese Verdrehung der Moleküle läßt Kräfte zwischen denselben tätig werden, welche die gegenseitige Lage derselben beeinflussen. So ergeben z. B. die Rechnungen, daß bei einem longitudinal gezogenen Stab die Dehnung nach der Länge eine Drehung der Moleküle derart zur Folge hat, daß parallel der Längsrichtung eine Abstoßung eintritt. Bleibt demnach der äußere Zug der gleiche, so muß die durch die Drehung bewirkte Abstoßung eine Verlängerung des Stabes zur Folge haben, welche als die elastische Nachwirkung erscheint. Gleichzeitig ergibt sich, daß nach der Querrichtung des Stabes eine weitere Kontraktion eintreten muß, wie es Pulfrich gefunden hat. Ähnlich in andern Fällen. Die eigentümlichen von F. Kohlrausch beobachteten Superpositionen der elastischen Nachwirkungen ver-

1) *Braun,* a. a. O. p. 390.
2) *W. Weber,* Poggend. Ann. **54**. p. 1. 1841.
3) *F. Kohlrausch,* Poggend. Ann. **128**. p. 1. 207. 399. 1866.
4) *Warburg,* Wiedem. Ann. **4**. p. 232. 1878.
5) *Michaelis,* Beiblätter zu den Annalen. **9**. p. 11. 1885. Die Arbeit, ich kenne sie nur aus den Beiblättern, scheint einen Ausbau der Warburgschen Theorie zu versuchen.

ener Art hat Warburg noch nicht abgeleitet, man erkennt aber weiteres, daß jener eigentümliche Widerstand, auf den wir vorhin rksam machten, in dieser Anschauung der Drehung der Moleküle, der Verschiebung derselben gegeneinander, entgegenwirken muß. Warselbst hält seine Theorie noch nicht für fertig, da sie noch nicht ide ist, den Erfolg eines bestimmten Versuchs rechnungsmäßig anen [1]).

Andere Versuche einer Theorie der Nachwirkung zu geben, haben Meyer [2]) und Neesen [3]) gemacht. Eine mathematische Theorie der wirkung hat weiter Wiechert [4]) gegeben; wir gehen darauf nicht ein egnügen uns kurz die Betrachtungen mitzuteilen, welche W. Weber [5]) F. Kohlrausch [6]) zur Ableitung der obigen die elastische Nachwirdarstellenden Gleichung geführt haben [7]).

Der Ausgangspunkt ist einfach die Annahme, daß bei jeder elastischen hiebung die Moleküle den wirksamen Kräften nicht frei folgen können, ich also ein Widerstand dem Eintritt in die neue durch die gerade amen Kräfte bedingte Gleichgewichtslage entgegenstellt. Wenn wir Abstand der Moleküle von dieser Gleichgewichtslage, mag er eine ung, mag er eine Verschiebung bedeuten, x nennen, so setzt W. Weber eschwindigkeit, mit welcher die Moleküle sich gegen dieselbe hin ben, irgend einer Potenz dieses Abstandes x proportional. F. Kohlch dagegen führt auch die Zeit t ein, welche seit dem Beginn des ens der die neue Gleichgewichtslage bedingenden Kräfte verstrichen iso z. B. die Zeit, welche seit dem Aufheben der primären Torsion chen ist. Er setzt die Geschwindigkeit, mit welcher die Moleküle Zeit t sich der Gleichgewichtslage nähern, dem Abstand x direkt und d einer Potenz der Zeit t umgekehrt proportional. Da wir, wie wir . diese Geschwindigkeit stets als den ersten Differentialquotienten des s nach der Zeit schreiben können, liefert die Annahme von Kohlh die Gleichung

$$-\frac{dx}{dt} = a\frac{x}{t^n},$$

ir links das negative Vorzeichen schreiben müssen, weil die Bewegung Abnahme der x hervorbringt, also der Richtung entgegengesetzt ist, welcher x als positiv gerechnet ist. Bei nicht großen kurz dauernimären Änderungen kann man n gleich 1 setzen, und erhält dann

$$-\frac{dx}{dt} = a\frac{x}{t}.$$

---

1) Man vergleiche hierzu die Bemerkung von *Voigt* am Schlusse seiner ber Reibung fester Körper, auf die wir im § 62 zurückkommen; Wiedem 47. p. 671. 1892.

2) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. **151**. 1873; **154**. 1874. Wiedem. Ann. **4**. 1878.

3) *Neesen*, Poggend. Ann. **157**. 1875.

4) *Wiechert*, Wiedem. Ann. **50**. p. 335 u. 546. 1893.

5) *W. Weber*, Poggend. Ann. **54**. 1841.

6) *F. Kohlrausch*, Poggend. Ann. **119**. 1863; **128**. 1866.

7) Eine andere und eingehendere Entwicklung, ohne auf die der Nachwirungrunde liegenden molekularen Vorgänge zurückzugehen, gibt *Boltzmann*, Ber. **70**. 1874; Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. 1876. Man sehe darüber auch *lrausch*, Poggend. Ann. **160**. 1877.

Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$-\frac{dx}{x} = \alpha\frac{dt}{t}.$$

Den zur Zeit t vorhandenen Abstand von der Gleichgewichtslage erhalten wir dann, wenn wir den zu einer bestimmten Zeit t_1 nach Aufhören der primären Änderung vorhandenen Abstand mit x_1 bezeichnen, durch Bildung der Summe aller Werte auf der linken Seite von x_1 bis x, auf der rechten Seite von t_1 bis t, oder durch Bildung der bestimmten Integrale

$$\int_{x_1}^{x} -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^{t} \alpha\frac{dt}{t}.$$

Nach E 2 und E VIII sind dieselben

$$-(\log\text{ nat } x - \log\text{ nat } x_1) = \log\text{ nat } t^{\alpha} - \log\text{ nat } t_1^{\,\alpha},$$

oder auch

$$\frac{x_1}{x} = \frac{t^{\alpha}}{t_1^{\,\alpha}}$$

$$x = \frac{x_1 t_1^{\,\alpha}}{t^{\alpha}} = c\,\frac{1}{t^{\alpha}},$$

wenn wir den aus den Beobachtungen zu bestimmenden Zähler der rechten Seite mit c bezeichnen. Wir gelangen somit zu der Gleichung, welche Kohlrausch bei allen kleinern und kurz dauernden Änderungen bestätigt fand, und erkennen gleichzeitig, daß α eine für das betreffende Material charakteristische Konstante ist, welche deshalb Kohlrausch auch als die Konstante der elastischen Nachwirkung bezeichnet.

Bei stärkern länger dauernden primären Änderungen ist n nicht gleich 1, dann erhalten wir für die Verschiebung x zur Zeit t

$$\int_{x_1}^{x} -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^{t} \alpha\frac{dt}{t^n} = \int_{t_1}^{t} \alpha t^{-n} dt,$$

und das wird mit Beachtung der Regel E 1 für die rechte Seite der Gleichung

$$\log\text{ nat } x_1 - \log\text{ nat } x = -\frac{\alpha}{n-1}t^{-(n-1)} + \frac{\alpha}{n-1}t_1^{\,-(n-1)},$$

oder, wenn wir $t_1 = 0$ setzen, also x_1 als die Verschiebung ansehen, die im Augenblick des Aufhörens der primären Änderung vorhanden ist,

$$\log\text{ nat }\frac{x}{x_1} = \frac{\alpha}{n-1}t^{1-n}$$

$$x = x_1 e^{-\frac{\alpha}{1-n}t^{1-n}}$$

also die Gleichung, welche Kohlrausch in diesem Falle experimentell bestätigte. Wie die Versuche zeigen, hängt bei solchen primären Änderu[ngen] auch der Wert von α von der Stärke und Dauer derselben ab, er wird [be]sonders mit wachsender Dauer der primären Änderung kleiner, das [...]

ische Nachwirkung verläuft um so langsamer, je länger die pri-
derung gedauert hat.

§ 57.

stizitätsgrenze. Die bisher besprochenen durch äußere Kräfte
rachten Veränderungen des Volumens oder der Gestalt der Körper
rübergehende, der Körper kehrte nach Aufhören der Wirkung der
räfte in seinen frühern Zustand zurück, wenn auch ein Teil dieser
nden Bewegung sehr langsam war. Diese Rückkehr in die ur-
he Gleichgewichtslage findet jedoch keineswegs immer statt, man
elmehr immer dann bleibende Änderungen, wenn die ändernden
der vielmehr die durch diese hervorgebrachten Änderungen eine
röße überschreiten. Wird ein Draht durch einen sehr starken
hnt, so behält er nach Aufhören desselben einen Teil seiner Ver-
g bleibend bei, er nimmt, auch wenn die elastische Nachwirkung
übergegangen ist, nicht wieder die frühere Länge an, seine Mole-
en eine neue Gleichgewichtslage erhalten. Dasselbe findet man bei
m von uns betrachteten Fällen; ein zu weit tordierter Draht kehrt
der in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, ebenso gibt
tarke Biegung eine bleibende Durchbiegung des gebogenen Stabes.
eruht die Verlängerung eines Drahtes, wenn man ihn durch einen
zieht, der Abdruck des Stempels auf den Münzen, das Auswalzen
e, die Wirkung des Hämmerns und alle ähnlichen Formänderungen,
an ohne Trennung des Zusammenhanges der Körper bewirkt.
gibt demnach eine Elastizitätsgrenze, oder eine Grenze, welche
räfte bei ihrer Wirkung auf die Körper nicht überschreiten dürfen,
Körper dauernd zu ändern. Als diese Grenze definiert man dann
e, beim Dehnen also die Größe des Zuges, bei der Torsion jenes
moment, welches die erste bleibende Änderung des Körpers her-
Diese Grenze ist für verschiedene Substanzen sehr verschieden,
erhält schon bei sehr schwachem Zuge, bei sehr geringer Torsion
gung eine bleibende Änderung, während es bei Eisen oder Stahl
stärkerer Kräfte bedarf.
leicht es ist, eine Definition der Elastizitätsgrenze aufzustellen, so
ist eine scharfe Bestimmung derselben. Zunächst erkennt man,
genommen eine Kraft, welche eine bleibende Formänderung
schon außerhalb der Elastizitätsgrenze liegt. Um diese Schwierig-
gehen, hat man z. B. bei der Dehnung jenen Zug, in Kilo-
ausgedrückt, der pro Quadratmillimeter des Querschnitts wirkt,
zitätsgrenze bezeichnet, welcher einen Draht um 0,00005 seiner
chen Länge dauernd verlängert.
auch nach dieser Definition, und selbst abgesehen von der elasti-
irkung, bietet die exakte Bestimmung dieser Grenze eine große
keit, ja ist nach den Beobachtungen von Thalén[1] gar nicht mög-
stens dann nicht, wenn man die Elastizitätsgrenze in ähnlicher
den Elastizitätskoeffizienten als eine für das Material charakte-

[1] Thalén, Poggend. Ann. 124. 1865

ristische Konstante ansehen will. Zunächst scheint die Zeitdauer der Wir kung der äußeren Kräfte auf die bleibende Veränderung der Körper i ähnlicher Weise von Einfluß zu sein wie bei der elastischen Nachwirkung ja es scheinen selbst kleine Belastungen bei dauernder Einwirkung per manente Veränderungen hervorzubringen. Aus dem Grunde erlahmen au die Dauer alle Federn, biegen sich die Balken in den Decken usf. Ferne hat Thalén gezeigt, daß das Eintreten einer permanenten Verlängerun durch den Zug wesentlich davon abhängig ist, ob der Körper schon früh eine Dehnung erfahren hat oder nicht. Ein früher noch nicht gedehnte Körper erhält schon durch kleine Gewichte eine bleibende Verlängerung ein bereits durch einen starken Zug bleibend gedehnter erst durch sehr vi größere. So fand Thalén bei einem Stabe von mittelhartem schwedische Stahl, daß bei der ersten Dehnung die Elastizitätsgrenze nach obiger De finition gleich 19,3 war, das heißt ein Zug von 19,3^{kg} auf das Quadrat millimeter brachte bei kurz dauernder Wirkung eine bleibende Verlängerun von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Derselbe Stab wurde da nach und nach einem Zuge bis zu 40^{kg} auf das Quadratmillimeter au gesetzt, wodurch seine bleibende Verlängerung bis auf 0,005 der ursprüng lichen Länge zunahm. Der so verlängerte Stab wurde neuen Dehnungs versuchen unterworfen, und es ergab sich, daß eine neue bleibende Ver längerung jetzt nicht eintrat, wenn auch die früher bestimmte Elastizitäts grenze erheblich überschritten wurde. Erst ein Zug von 33,8^{kg} auf da Quadratmillimeter brachte eine neue Verlängerung von 0,00005 der ur sprünglichen Länge hervor. Bei dieser Versuchsreihe wurde der Zug bi auf 44,5^{kg} auf das Quadratmillimeter gesteigert und der Stab um 0,0085 seiner ursprünglichen Länge bleibend verlängert. Nachfolgende Dehnunge des Stabes ergaben dann, daß bei dem so verlängerten Stabe die Elasti zitätsgrenze erst bei 38,6^{kg} erreicht war[1]).

Es ergibt sich somit, daß durch vorhergehende Streckungen die Elasti zitätsgrenze sehr erheblich erweitert wird, daß man deshalb die gleich Elastizitätsgrenze bei demselben Material nur dann findet, wenn dasselb vorher durch den gleichen Zug gedehnt worden ist. Man erhält deshal für hart gezogene Drähte eines Metalls ziemlich übereinstimmende Wert der Elastizitätsgrenze. In dieser Weise sind auch die in der folgend Tabelle angegebenen von Wertheim[2]) erhaltenen Zahlen für hartgezogen Drähte zu verstehen.

Metalle	Elastizitätsgrenze hartgezogen	Elastizitätsgrenze angelassen	Metalle	Elastizitätsgrenze hartgezogen	Elastizitätsgrenze angelassen
	kg	kg		kg	kg
Blei	0,25	0,20	Kupfer	12,0	3,0
Zinn	0,45	0,20	Platin	26,0	14,5
Gold.	13.5	3,0	Eisen	32,5	5,0
Silber	11,25	2,75	Gußstahl . . .	55,6	5,0
Zink	0,75	1,00	Stahldraht . .	42,5	15,0

1) Man sehe darüber auch *Bach*, Elastizität und Festigkeit. Berlin 18

2) *Wertheim*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848. Ann. de chim. et d 12. (3.) 1844.

Die Beobachtungen Thaléns erklären auch den großen Unterschied, icher, wie ebenfalls die vorstehende Tabelle zeigt, Wertheim für die stizitätsgrenze hartgezogener und geglühter und dann langsam abgekühl- Drähte fand. Durch das Erhitzen gehen die Metalle wieder in den lekularen Zustand über, den sie vor der Streckung besaßen, und deslb tritt schon bei viel geringerem Zuge eine dauernde Verlängerung ein. e Thalén fand, tritt diese Senkung der Elastizitätsgrenze schon bei er Erwärmung auf 200° C. ein. Das Gleiche wird durch eine Reihe n Erfahrungen in der Technik bestätigt, wir erwähnen nur die leichtere hmiedbarkeit der Metalle, wenn sie glühend sind; die Notwendigkeit beim swalzen der Bleche, wenn sie durch mehrere Walzen gegangen sind, dielben erst neu zu erwärmen u. a. m.

Für die Torsion und Biegung hat Wiedemann[1]) schon früher ganz liches gefunden, es zeigt sich auch dort, daß durch mehrmaliges Torren und Biegen die Elastizitätsgrenze ganz erheblich herausgerückt wird. n kann deshalb, wie Wiedemann hervorhebt, bei vorher noch gar nicht formierten, gedehnten, tordierten oder gebogenen Körpern eigentlich von ner Elastizitätsgrenze sprechen, schon die geringsten temporären Defortionen haben bleibende Änderungen zur Folge; erst wenn man die Kör- hinlänglich oft innerhalb gewisser Grenzen durch bestimmte äußere ifte deformiert hat, kehren sie bei erneuerter Einwirkung derselben oder derer Kräfte im gleichen Sinne, wie die zuletzt angewandten waren, in selben Zustand zurück, den sie vor dieser erneuerten Einwirkung been.

Geht man mit den auf einen festen Körper wirkenden Kräften über Elastizitätsgrenze hinaus, so treten Formänderungen der Körper ein, e man im wesentlichen mit Lehmann[2]) als ein Überwinden der Starr-. als ein langsames Fließen, ähnlich dem Fließen einer Flüssigkeit an- kann. Man erkennt, daß die festen Körper plastisch sind.

So hebt Lehmann hervor, daß, wenn bei dem Prägen einer Münze einwirkende Kraft konstant erhalten wird, der Stempel in dem Maße, die elastische Reaktion überwunden wird, immer weiter eindringt, iner stets von neuem Spannung und Deformation hervorruft. In gleichem e, wie der Stempel eindringt, findet eine Verdrängung der Körpersub-. eine langsame Strömung derselben statt, welche im Prinzip identisch mit dem Fließen einer Flüssigkeit.

Ein wirkliches Fließen fester Körper haben Tresca[3]), Spring[4]) und mann[5]) erhalten. Tresca legte zylindrische Scheiben von etwa 10 cm messer in einen festen Stahlzylinder von gleicher lichter Weite, dessen eine Öffnung von 1—4 cm Weite besaß. In den nahezu mit Scheiben packten Zylinder konnte ein dicht schließender Stempel durch eine

1) *Wiedemann*, Poggend. Ann. **103**. 1858; **104** 1858; **107** 1859; **117** 1862; Ann. **6** 1879. Über den Zustand permanent tordierter Drähte sehe man *Warburg*, Wied. Ann. **10** 1880.

2) *O. Lehmann*, Molekularphysik **1**. p. 57. Leipzig 1888.

3) *Tresca*, Comptes Rendus **59**. p. 754. 1864; **60** p. 1226. 1865.

4) *W. Spring*, Ann. de chim. et de phys. **22** (5.) p. 170. 1881.

5) *Tammann*, *Werigin* und *Levkojeff*, Ann. d. Physik. **10** p. 647. 1903. Die reibung des Apparates findet sich Ann. d. Phys. **7** p. 198. 1902.

hydraulische Presse eingepreßt werden, welche einen Druck bis zu 100000 kg zu liefern imstande war. Es wurden Platten von Blei, Silber, Kupfer, Eisen, auch von Ton usw. verwandt, und es zeigte sich, daß alle diese Substanzen in Form eines Strahles durch die enge Öffnung hindurchgepreßt wurden. Indem die ausgepreßten Strahlen durch einen parallel der Achse geführten Schnitt geteilt wurden, konnte man auf der Schnittfläche die Verschiebungen und Bewegungen der einzelnen Teile der gepreßten Substanz erkennen. Es zeigte sich, daß die Platten sämtlich in der Mitte, also über der Ausflußöffnung eingedrückt und röhrenförmig ausgestülpt waren, so daß die vorher übereinander geschichteten Platten in dem Strahl als ineinander gesteckte Röhren erschienen. Spring hat durch starke Kompression Pulver von Metallen und andern Substanzen in kompakte Massen verwandelt, wie wenn dieselben zusammengeschmolzen wären, und sie durch Pressen durch enge Öffnungen, in ähnlicher Weise wie Tresca in Drähte verwandelt.

Tammann hat durch eine eigentümliche Anordnung seines Druckstempels die Schnelligkeit des Fließens der plastisch gewordenen Substanzen die man als ein Maß der Plastizität ansehen kann, messen können.

Der Druckstempel endigte über der auf ihre Plastizität zu untersuchenden, in einem dickwandigen Stahlrohr eingeschlossenen Substanz in einem nach unten breiter werdenden abgestumpften Kegel. Die obere Basis des Kegels hatte den gleichen Durchmesser wie der Druckstempel, die untere größte Fläche des Kegels hatte einen Durchmesser, der etwas kleiner war als der lichte Durchmesser des Stahlrohres, so daß zwischen dem Kegel und der Röhrenwand ein schmaler ringförmiger Zwischenraum blieb. Das zum Fließen gekommene Metall trat durch diesen Zwischenraum in den Raum der oberhalb des Kegels zwischen dem Druckstempel und der innern Röhrenwand frei gelassen war. Da die plastisch gewordene Masse so durch den ringförmigen Zwischenraum nach oben abfloß, übte der Druckstempel stets seinen vollen Druck auf die obere Fläche der festen Substanz. Die Schnelligkeit, mit welcher der Druckstempel unter sonst gleichen Umständen vorwärts bewegt wurde, gab somit ein Maß für die Schnelligkeit, mit der die betreffenden Substanzen in den plastischen Zustand übergehen.

Die Versuche ergaben, daß die untersuchten Metalle Kalium, Natrium, Blei, Thallium, Zinn, Wismut, Kadmium, Zink bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur sehr verschieden plastisch waren; die Ausflußgeschwindigkeit war bei Kalium am größten und wurde nach der Reihenfolge der angegebenen Metalle kleiner. Gleichzeitig ergab sich, daß die Plastizität der Metalle mit steigender Temperatur sehr stark zunahm; die Ausflußgeschwindigkeit wird bei gleichem Drucke und gleicher ringförmiger Ausflußöffnung bei einer Temperatursteigerung von 10^0 nahezu verdoppelt.

In gleicher Weise ist das Ausziehen der Metalle zu Drähten als ein Fließen aufzufassen; der Zug an dem Metallstücke, welches dicker ist als die Öffnung des Zieheisens, überwindet die Starrheit und verschiebt die Molekülschichten so aneinander, wie sie in fließenden Flüssigkeiten, deren Schichten verschiedene Geschwindigkeit haben, aneinander hergehen.

Man bezeichnet die Eigenschaft der Körper, welche eine solche Verschiebung der Molekülschichten ohne Trennung des Zusammenhanges gestattet, als Geschmeidigkeit und Dehnbarkeit. Manche Metalle, wie Gold

und Platin sind ganz außerordentlich dehnbar, man kann sie zu den feinsten Drähten ausziehen, oder wie das Gold durch Hämmern in äußerst dünne Blätter verwandeln.

Fehlt diese Eigenschaft, oder ist sie nur in geringerm Grade vorhanden, so nennt man die Körper spröde.

§ 58.

Festigkeit. Wenn die auf einen Körper wirkenden äußern Kräfte über die Elastizitätsgrenze hinaus weiter und weiter gesteigert werden, so wird der Zusammenhang des Körpers schließlich aufgehoben; ein über eine gewisse Grenze hinaus belasteter Draht zerreißt, unter zu starkem Drucke wird ein Körper zerquetscht oder zerstampft, ein zu stark tordierter Stab wird abgedreht, und ein zu stark gebogener Stab wird zerbrochen.

Den Widerstand, den ein Körper der Trennung seiner Teile entgegensetzt, nennt man seine Festigkeit, und das Maß der Festigkeit ist die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft, welche aufgewandt werden muß, um die Trennung der Körperteile eintreten zu lassen. Der Unterschied zwischen Elastizitätsgrenze und Festigkeit tritt sehr gut in der Definition hervor, wie sie Lehmann[1]) von den beiden Grenzen gibt. Führen wir durch einen Körper, auf welchen irgendwie äußere Kräfte wirken, in Gedanken irgend einen Schnitt, so können wir die durch die äußern Kräfte in diesem Schnitte bewirkten Spannungen stets in zwei Komponenten zerlegen, deren eine parallel dem Schnitte, deren andere zu demselben senkrecht ist. Die erstere Komponente sucht ein Gleiten der benachbarten Schichten, ein Fließen zu erzeugen, und die Elastizitätsgrenze ist erreicht, wenn die Starrheit nicht mehr ausreicht, um das Fließen zu verhindern. Ist die zur Schnittfläche senkrechte Komponente eine Zugspannung, so darf diese eine gewisse Größe nicht überschreiten, wenn die Deformation eine elastische sein soll; wird diese Grenze, also die zulässige Grenze der pro Flächeneinheit wirkenden Zugspannung an irgend einer Stelle überschritten, so tritt dort ein Riß ein, der sich in der Regel durch die ganze Masse fortsetzt. Man unterscheidet so viele Arten von Festigkeiten, als es Arten der Einwirkung äußerer Kräfte auf einen Körper gibt.

Den für die Querschnittseinheit eines gezogenen Drahtes erforderlichen Zug, um den Draht zu zerreißen, nennt man seine Zugfestigkeit oder absolute Festigkeit. Übt man auf einen Draht einen solchen Zug aus, so beginnt er an einer Stelle sich stark zu dehnen unter Einschnürung seines Querschnittes, so daß dieser etwa in der Mitte der gedehnten Stelle am dünnsten ist; an dieser gedehnten Stelle zerreißt der Draht dann. Bei spröden Substanzen ist diese dem Zerreißen vorausgehende Dehnung nicht zu erkennen. Wir müssen daraus schließen, daß der Draht nicht vollkommen homogen ist. Denn da bei einem longitudinal gezogenen Draht der zwischen je zwei zur Drahtachse senkrechten Querschnitten vorhandene Zug über die ganze Länge des Drahtes hin genau der gleiche ist, so ist, die Homogenität vorausgesetzt, gar kein Grund vorhanden, weshalb der Draht eher in dem einen als in dem andern Querschnitt reißen soll. Hat

1) *O. Lehmann*, Molekularphysik. 1. p. 76

in der Tat bei einer bestimmten Belastung der Zug jene vorher definiert Grenze überschritten, so müßte das Reißen zwischen allen Querschnitten gleichzeitig eintreten, der Draht müßte in seine Moleküle zerstäuben. Da das Zerreißen in einem bestimmten Querschnitte eintritt, beweist, daß dort die schwächste Stelle des Drahtes ist, weil dort der Draht wohl seinen kleinsten Querschnitt besaß. Findet man für eine gegebene Substanz in der Tat den gleichen Wert für die absolute Festigkeit, so weist das darauf hin, daß unsere Bearbeitungsmethoden die Stäbe oder Drähte bis zu dem gleichen Grade der Homogenität bringen.

Annähernd können wir indes die Maximalspannungen beim Zerreißen als für das Material charakteristisch ansehen, da der Querschnitt, in welchem das Zerreißen stattfindet, nur um eine für uns nicht meßbare Größe kleiner sein muß als die übrigen Querschnitte. Wir werden deshalb in dem Quotienten aus der zum Zerreißen eines Drahtes erforderlichen Zugkraft und dem Querschnitte des Drahtes annähernd jene Maximalspannung haben, welche der Zugfestigkeit des Materials entspricht.

In nachfolgender Tabelle geben wir einige der von Wertheim[1]) für die Metalle bestimmten Werte des Zuges für das Quadratmillimeter, welche Drähte derselben zerrissen. Das Zerreißen wurde durch allmähliches Wachsen der Belastung bewirkt; für kurz dauernde aber stoßfreie Belastung ist die Festigkeitsgrenze eine höhere.

Metalle	Festigkeitsgrenze		Metalle	Festigkeitsgrenze	
	hartgezogen	angelassen		hartgezogen	angelassen
Blei	2,07	1,80	Kupfer	40,30	30,54
Zinn	2,45	1,70	Platin	34,10	23,50
Gold	27,00	10,08	Eisen	61,10	46,88
Silber	29,00	16,02	Gußstahl	80,00	65,75
Zink	12,80	—	Stahldraht	70,00	40,00

Die Zahlen zeigen, ein wie erheblicher Unterschied der Festigkeit je nach der physikalischen Beschaffenheit des Materials vorhanden ist. Dieser Unterschied zeigt sich auch, wie schon Coulomb[2]) beobachtet hat, bei hartgezogenen Drähten, die Festigkeit wächst im allgemeinen mit Verkleinerung des Querschnittes. Nach Versuchen von Baumeister[3]) wuchs bei Drähten aus schwedischem Stabeisen die Festigkeit von 64^{kg} pro Quadratmillimeter bei einem Draht von $0{,}72^{mm}$ Durchmesser bis 137^{kg} bei einem Draht von $0{,}11^{mm}$ Durchmesser. Für einen Draht von $0{,}1^{mm}$ Durchmesser ergab sich indes wieder der Wert 123. Der Koeffizient der Zugfestigkeit ist also für ein bestimmtes Metall nur dann derselbe, wenn das Metall in ganz gleicher Weise bearbeitet ist.

Bach[4]) hat die Zugfestigkeit von Stäben, deren Querschnitt mehrere Quadratzentimeter betrug, untersucht; er definiert als Zugfestigkeit den Z

1) *Wertheim*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.
2) *Coulomb,* Mémoires de l'Acad. des Scienes. (Paris) 1784. p. 237 und 1
3) *Baumeister,* Wiedem. Ann. 18. p. 607. 1883.
4) *Bach,* Elastizität und Festigkeit. Berlin 1898.

für die Flächeneinheit, bei welcher die vorher erwähnte Dehnung an der Stelle beginnt, an welcher dann die Zerreißung stattfindet. Bei zwei Stäben von Flußeisen erhält er $37{,}47 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$ und $34{,}87 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$, für Flußstahl $72{,}36 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$. Für einen Kupferstab war die Zugfestigkeit $22{,}3 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$, für zwei Stäbe von Bronze $19{,}7$ und $20{,}9 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$. Die Werte sind erheblich kleiner als die von Wertheim und Baumeister gefundenen, so daß man aus denselben ebenfalls den Schluß ziehen kann, daß mit Vergrößerung des Querschnittes die Zugfestigkeit abnimmt.

Bei der Biegung werden die Fasern auf der konvexen Seite des gebogenen Stabes gedehnt, auf der konkaven zusammengepreßt; der Bruch wird demnach eintreten, wenn die Spannung der gedehnten Fasern dort, wo die Dehnung am stärksten ist, so groß ist, daß die Moleküle an dieser Stelle ihren Zusammenhalt verlieren. Der Ort, wo die größte Spannung in einem an seinem einen Ende festen, an dem andern durch den Zug P gebogenen Stab vorhanden ist, und den Wert dieser Spannung erhalten wir leicht aus den Entwicklungen des § 54. Für den Zug, den ein Flächenelement $b\,dy$, welches sich im Abstande y über der neutralen Faser befindet, von dem benachbarten erfährt, fanden wir dort den Wert

$$E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx}\, b\,dy;$$

worin φ den Winkel bedeutet, um welchen zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander geneigt sind. Dieser Ausdruck erhält in dem gegebenen Querschnitt seinen größten Wert dort, wo y am größten ist, das ist in der Grenzfläche des Stabes, in dieser wirkt also auf die Flächeneinheit des Querschnittes, wenn wir $b\,dy = 1$ setzen, die Spannung

$$E \cdot \frac{\frac{e}{2}\varphi}{dx}.$$

Ist der betrachtete Querschnitt im Abstande x von dem befestigten Ende und ist l die Länge des Stabes, so fanden wir für das Drehungsmoment, welches der betrachtete Querschnitt durch den Zug erhält

$$\frac{E}{12} \cdot \frac{e\varphi}{dx} \cdot be^2 = P(l - x),$$

woraus sich ergibt

$$E \cdot \frac{\frac{e}{2}\varphi}{dx} = \frac{6P}{be^2}(l - x).$$

Die Spannung ist also dort am größten, wo $x = 0$ ist, also an dem befestigten Ende des Stabes, sie ist dort, wenn wir sie mit S bezeichnen

$$S = \frac{6Pl}{be^2}.$$

Ist der Stab an beiden Enden gestützt und wird er durch einen Zug P in der Mitte gebogen, so tritt die größte Spannung in der Mitte des Stabes an der konvexen Seite auf. Wir erhalten sie durch die Erwägung, daß

wir den so gebogenen Stab ansehen können, als sei er in der Mitte fest und an jedem der unterstützten Enden durch den Zug $\frac{1}{2}P$ gebogen. Da der Abstand der Mitte von dem gebogenen Ende $\frac{1}{2}l$ ist, so wird die stärkste Spannung

$$S_1 = \frac{6 \cdot \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}l}{be^2} = \frac{3Pl}{2be^2}.$$

Führen wir die Trägheitsmomente der Querschnitte auf eine durch den Schwerpunkt derselben zur Biegungsebene senkrechte Achse ein, so wird

$$S = \frac{\frac{1}{2}ePl}{\frac{1}{12}be^3} = \frac{\frac{1}{2}ePl}{M}$$

$$S_1 = \frac{\frac{1}{2}ePl}{4 \cdot \frac{1}{12}be^3} = \frac{1}{4}\,\frac{\frac{1}{2}ePl}{M}.$$

Setzen wir für $\frac{1}{2}e$ die halbe der Biegungsrichtung parallele Dicke des Stabes, also etwa bei einem kreisförmigen Querschnitte den Radius des Stabes, so können wir durch die letzten Ausdrücke für einen beliebigen Stab die größten Spannungen berechnen.

Bezeichnen wir die Zugfestigkeit mit Z, so muß hiernach das Brechen eintreten, wenn $S > Z$, so daß wir für die Grenze des biegenden Zuges bzw. den brechenden Zug bei einem am einen Ende festen Stab von rechteckigem Querschnitt erhalten

$$P = \frac{be^2}{6l} \cdot Z = \frac{M}{\frac{1}{2}el} \cdot Z.$$

Das Brechen muß beginnen als Riß in der Oberfläche an der stärkst beanspruchten Stelle, bei einem an beiden Enden aufgelegten durch den Druck P in der Mitte gebogenen Stab also in der Mitte.

Auch für die Torsion ist eine Maximalspannung vorhanden, welche wenn sie überschritten wird, ein Abdrehen der tordierten Stäbe oder Drähte bewirkt. Ist die dem letzten Querschnitte des Stabes, an welchem das Drehungsmoment F angreift, erteilte Drehung gleich ω, so ist nach § 5 die Kraft, welche an dem Flächenelement Δq eines kreisförmigen Stabes, die sich im Abstande r von der Stabachse aber in beliebiger Höhe des Stabes befindet, angreift und parallel der Ebene des Querschnittes, nach der Richtung der Tangente an dem Kreise, auf welchem Δq liegt, hin wirkt

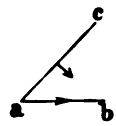
$$P = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{r\omega}{l} \cdot \Delta q,$$

worin l die Länge des tordierten Stabes ist. Die pro Flächeneinheit des Querschnittes, vorausgesetzt alle Elemente der Flächeneinheit befänden sich in demselben Abstande r von der Achse, wirkende Kraft ist demnach der Koeffizient von Δq.

Denken wir uns durch die zur Achse senkrechte Verbindungslinie des Elementes Δq mit der Achse des Stabes eine Ebene gelegt, welche unter 45° gegen die Achse, also auch gegen den Querschnitt, zu welchem das Element Δq gehört, geneigt ist, so können wir uns die Kraft, welche die Verschiebung des Querschnitts bewirkt, nach den in § 50 mitgeteilten Betrachtungen von Clebsch durch einen zu dieser unter [1] gegen den Querschnitt des Stabes geneigten Ebene senkrechten Zug

anden denken. Die Größe dieses an der Flächeneinheit der Diagonalfläche anzubringenden Zuges K erhalten wir durch folgende Überlegung. An dem Stücke ac, das wir gleich df setzen, der unter 45^0 gegen das Element ab geneigten Ebene, welches als Diagonalebene einem Würfel entspricht, dessen Seitenfläche gleich Δq ist, muß eine Kraft Kdf angreifen, so daß $Kdf \cos 45^0$ gleich P ist, wenn durch den zur Ebene senkrechten Zug die parallel ab wirkende schiebende Kraft entstehen soll. Da nun aber die Diagonalebene df gleich $\frac{\Delta q}{\cos 45^0}$ ist, so muß

Fig. 72.



$$Kdf \cos 45^0 = K\Delta q = P$$

sein.

Damit also durch den senkrecht zu der Diagonalebene wirkenden Zug die der Torsion entsprechende verschiebende Kraft entsteht, muß an der Flächeneinheit der Diagonalebene genau derselbe Zug wirken, welcher parallel dem Querschnitte, zu welchem Δq gehört, zur Hervorbringung der Torsion wirkt. Daraus folgt, daß eine parallel ab wirkende Torsionskraft einen senkrecht zu ac wirkenden Zug von der gleichen Größe bedingt.

Dieser Zug K, welcher hiernach gegeben ist durch

$$K = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{r\omega}{l},$$

ist, wie die ganze Überlegung ergibt und wie die Theorie der Elastizität strenge nachweist, die Maximalspannung, welche an der betreffenden Stelle des Drahtes vorhanden ist.

Der Wert von K wird am größten, wo r seinen größten Wert hat, also wenn ϱ der Radius des Stabes ist für $r = \varrho$. Aus dem am untersten Querschnitte des Stabes angreifenden, die Torsion ω bewirkenden Drehungsmomente F

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\varrho^4 \omega}{l}$$

erhalten wir

$$K = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\varrho\omega}{l} = \frac{2F}{\varrho^3 \pi}.$$

Nennen wir also wieder die Zugfestigkeit Z, so wird ein Abdrehen eintreten, wenn das Drehungsmoment am untersten Querschnitt einen solchen Wert hat, daß

$$F = \frac{\varrho^3 \pi}{2} \cdot Z.$$

Das Abdrehen muß in einer spiraligen Fläche erfolgen, welche gegen die Achse des Stabes um 45^0 geneigt ist und das Reißen muß an der Oberfläche des Drahtes beginnen. Da bei einem kreisförmigen Drahte jede gegen die Achse um 45^0 geneigte Spiralfläche gleichwertig ist, so wird auch hier der Riß an einer schwachen Stelle des Drahtes beginnen und von da aus sich spiralig fortsetzen.[1])

1) Es sei auch hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Entwicklungen nur für kreisförmige Querschnitte gelten; für elliptische Querschnitte er-

Bei einer von allen Seiten gleichmäßigen Kompression kann ein Z
trümmern eines festen Körpers nicht eintreten, da in dem Falle die Mo
küle desselben allseitig genähert werden, also keine Zugspannung eintre
kann, welche dieselben voneinander trennt. Bei einseitiger Kompressi
tritt dagegen durch die Querdilatation eine Entfernung der Moleküle u
infolgedessen eine Zugspannung auf.

Ist P der pro Flächeneinheit parallel der Längsrichtung eines Sta
wirkende Druck, so ist die Verkürzung des Stabes

$$\delta = \frac{1}{E} P,$$

die Ausdehnung nach der Quere ist $\mu \delta$. Dieselbe Verlängerung nach
Quere würde eingetreten sein, wenn nach dieser Richtung pro Flächeneinh
der Zug μP gewirkt hätte, wir werden also μP als die der Querrichtu
parallele Zugspannung ansehen müssen. Das zur Längsrichtung senkrec
Zerreißen des Stabes wird demnach, wenn wir wieder mit Z die Zugfest
keit bezeichnen, eintreten müssen, wenn $\mu P = Z$ ist.

Die vorstehenden Betrachtungen können keine Theorie der Festigk
geben, da sie nur von den einfachsten Annahmen ausgehen, die zweif
ohne der Wirklichkeit nicht entsprechen. Wir haben die Gesetze der ela
schen Deformation bis zur Bruchgrenze als gültig angenommen, so daß
z. B. bei Besprechung der Biegung lediglich, wie wir es bei kleinen V
änderungen tun durften, die Verlängerungen und Verkürzungen der Fas
beachteten, keine Rücksicht darauf nahmen, daß wegen der verschieden
Ausdehnung der Fasern eine Reibung zwischen denselben stattfinden m
Ferner setzten wir voraus, daß die zu zerbrechenden Körper überall glei
beschaffen sind, während bei der Biegung es wesentlich von der B
schaffenheit der stärkst gespannten in der Oberfläche liegenden Fasern a
hängen muß, wann der Bruch beginnt. Es wird eben, wie wir schon b
Besprechung der Zerreißungsfestigkeit erwähnten, von einem Mangel d
Homogenität abhängen, ob die Festigkeitsgrenze etwas früher oder spä
erreicht wird. Unsere Entwickelungen werden uns deshalb nur im a
gemeinen die Bedingungen des Bruches geben, ohne daß sie eine zahle
mäßige Übereinstimmung mit der Wirklichkeit liefern können. Das ze
auch die Erfahrung.

Kowalski[1]) hat eine Anzahl Glasstäbchen von nahezu kreisförmige
Querschnitte durch Zerreißen, Zerbiegen, Zerdrehen und Pressen zum Bruc
gebracht. Die Stäbchen waren thüringer Glas aus einem und demselb
Hafen hergestellt und sorgfältig gekühlt, so daß angenommen werd
durfte, die Stäbchen seien alle gleich beschaffen.

Bei den Zerreißversuchen wurden Stäbchen von 2—4^{cm} Länge m
Schellack in zwei Halter eingekittet, so daß 1—2^{cm} der Stäbchen sichtb
blieben; die obere Fassung des Stäbchens wurde an einem Querstabe zw
schen zwei Stelltischen befestigt und an die untere eine Schale zur Au
nahme der Gewichte gehängt und gleichzeitig dafür gesorgt, daß etwa

gibt z. B. die Theorie, daß die stärkste Spannung nicht dort, wo der Abst
von der Achse am größten ist, sondern am Endpunkte der kleinen Achse vo
handen ist. Man sehe *Clebsch,* Elastizität § 37.

1) *von Kowalski,* Wiedem. Ann. 36. 1889.

Schwingungen der Schale sich nicht auf das Stäbchen übertragen konnten. Die Belastung geschah anfänglich durch größere Gewichte, später indem man zu denselben Schrotkörner hinzufügte. Bei 30 derart durchgeführten Zerreißversuchen ergaben sich für Z, dem Zug pro Quadratmillimeter, Werte zwischen 8,651 und 8,971 $^{\mathrm{kg}}$, im Mittel

$$Z = \frac{8{,}767^{\mathrm{kg}}}{\mathrm{mm}^2}.$$

Das Zerbrechen geschah, indem die Glasstäbchen von 40—90 $^{\mathrm{mm}}$ Länge mit ihren Enden auf zwei Schneiden gelegt wurden; es ergab sich als Mittel aus 29 Versuchen, bei denen die Werte zwischen 8,712 und 8,987 schwankten

$$Z = \frac{8{,}794^{\mathrm{kg}}}{\mathrm{mm}^2}.$$

Für die Torsion wurden die Stäbchen ebenso wie für die Zerreißversuche in zwei Halter gekittet und ähnlich aufgehängt; an der untern Fassung war eine Torsionsrolle befestigt, die durch zwei horizontal nach entgegengesetzten Richtungen geführte Drähte, welche dann über vertikal gestellte Rollen liefen, gedreht wurde. Es ergab sich aus 33 Versuchen

$$Z = \frac{10{,}142^{\mathrm{kg}}}{\mathrm{mm}^2}.$$

Das Zerdrehen fand, wie Kowalski ausdrücklich hervorhebt, in einer Fläche statt, die am Rande von einer Spirallinie begrenzt war, eine schöne Bestätigung der Theorie.

Bei den Zerdrückungsversuchen wurden Stäbchen von 3,5—5 $^{\mathrm{cm}}$ Länge durch einen einarmigen Hebel gepreßt, an dessen Enden das drückende Gewicht angebracht wurde. Als Druck P pro Quadratmillimeter, bei welchem das Zerdrücken eintrat, wobei nur solche Versuche als gelungen angenommen wurden, bei denen das Stäbchen in der Längsrichtung parallelen Flächen entzwei ging, fand sich im Mittel aus 14 Versuchen

$$P = \frac{37{,}700^{\mathrm{kg}}}{\mathrm{mm}^2}.$$

Da Kowalski für den Querkontraktionskoeffizienten μ den Wert 0,226 gefunden hatte, ergibt sich

$$Z = \mu P = \frac{8{,}520^{\mathrm{kg}}}{\mathrm{mm}^2}.$$

Nur der für die Torsionsfestigkeit gefundene Wert stimmt nicht mit unseren Entwicklungen überein, derselbe ist zu groß; woran das liegt, läßt sich nicht erkennen.

Die Resultate Kowalskis sind später nicht bestätigt worden. Brodmann[1] hat für das gleiche Material die Zerreißungsfestigkeit, Biegungsfestigkeit, Torsionsfestigkeit verglichen, er fand in $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mm}^2}$ die Festigkeit bei dem

	Zerreißen	Zerdrehen	Zerbiegen
im Maximum	14,50	15,60	16,69
„ Mittel	11,90	12,11	13,47.

1 *Brodmann*, Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1894 Nr. 1.

Die Zahlen sind alle größer als die von Kowalski gefundenen, Zahlen für Zerreißen und Zerdrehen sind nahezu gleich, während die die Biegung erheblich größer sind. Auch Bach[1]) findet für die Biegun festigkeit durchweg größere Zahlen als für die Zerreißung.

Von welch bedeutendem Einfluß die oberflächliche Beschaffenheit Glasstäbchen ist, hat Brodmann gezeigt, indem er eine Anzahl von St chen mit Flußsäure matt ätzte, also die oberflächliche Schicht wegnal Die Festigkeit nahm dadurch beträchtlich zu, so daß man schließen mu es würde durch die Ätzung eine oberflächliche Schicht von geringe Kohäsion fortgenommen. Die Zerreißfestigkeit stieg im Mittel auf 17, die Torsionsfestigkeit auf 20,34, die Biegungsfestigkeit auf 27,46.

Für das Verhältnis von Druckfestigkeit zur Zugfestigkeit bei Gußei fand Bach[2]) 4 : 1, so daß mit dem Querkontraktionskoeffizienten $\mu = 0$ berechnet, sich die vorhin abgeleitete Beziehung ergibt.

Winkelmann und Schott[3]) haben für eine Anzahl Jenenser Gl die Zug- und Druckfestigkeit verglichen; als Druckfestigkeit definierten aber nicht den Druck, bei dem die von Kowalski beobachtete Spalt des Glases eintrat, sondern die Drucksteigerung wurde so weit fortges bis das Glas mit einem Knall auseinander gesprengt war; es wurde da der Staub nach allen Richtungen auseinander geschleudert. Die so messene Druckfestigkeit war die 9,1 bis 18,7 fache der Zerreißungsfestigk

Für die Druckfestigkeit hat Bach[4]) nachgewiesen, daß sie bei G eisen von gleichem Querschnitt von der der Druckrichtung parallelen Dim sion des Stabes abhängig ist; bei Rundstäben von rund $3{,}1\,\text{cm}^2$ Qu schnitt erhielt er als Druckfestigkeit bei einer Höhe von 4^{cm} 72, $1{,}98^{\text{cm}}$ 75,00; 1^{cm} 85,79. Es trat also eine erhebliche Zunahme Druckfestigkeit mit abnehmender Höhe ein.

Weiter ergab sich, daß während bei der Torsion, wie es Kowal fand, der Riß in einer Spirale erfolgt, bei dem Zerdrücken die Bru flächen nicht parallel der Druckrichtung, sondern schräg gegen diese lagen.

Schließlich sei erwähnt, daß ein Zerbrechen und Zerdrücken nur spröden Substanzen eintritt, daß bei zähen Substanzen, wie Flußei Biegungen von 180° eintreten können ohne Brechung, daß Blei nicht drückt werden kann.

Es genüge an diesen Angaben, um zu erkennen, wie verwickelt Brechungserscheinungen sind, so daß eine Theorie derselben die gr Schwierigkeiten bietet[5]).

Man unterscheidet noch eine fünfte Art von Festigkeit, die Hä Als solche bezeichnet man den geringern oder größern Widerstand, ein Körper dem Eindringen von Spitzen oder Schneiden entgegen Das erste Mittel eine Schätzung der Härte zu erhalten war das Aufste

1) *Bach,* Elastizität und Festigkeit. Abschnitt III. § 22. 1898.

2) *Bach,* a. a. O. p. 114.

3) *Winkelmann* und *Schott,* Wiedem. Ann. 51. p. 697. 1894.

4) *Bach,* a. a. O. p. 139.

5) Man sehe auch die Arbeiten von *Sella* und *Voigt,* sowie von Voigt die Festigkeit des Steinsalzes, Bergkristalls und Flußspates. Wiedem. Ann. p. 636—673. 1893.

iner Härteskala. Man teilte die Körper in 10 Klassen und bestimmte den Grad der Härte darnach, welche Körper den zu untersuchenden noch ritzen können und welche er ritzen kann. Die Körper, welche man als die Vertreter der Härteskala aufgestellt hat, sind nach Mohs vom geingsten zum größten Härtegrad fortschreitend folgende 10:

1. Talk.	6. Feldspat.
2. Steinsalz.	7. Quarz.
3. Kalkspat.	8. Topas.
4. Flußspat.	9. Korund.
5. Apatit.	10. Diamant.

Man legt danach einem Körper den Härtegrad 5 bei, wenn er Flußpat ritzen kann, und selbst vom Feldspat geritzt wird. Körper, die sich gegenseitig ritzen können, haben gleiche Härte.

Später wurde von Frankenheim[1]), Seebeck[2]), Franz[3]), Pfaff[4]) und andern ein Maß für die Härte aufzustellen gesucht, indem man den Druck maß, der auf eine Spitze wirken mußte, damit sie den Körper, dessen Härte gemessen werden sollte, zu ritzen imstande waren, oder indem man wie Pfaff die Tiefe bestimmte, bis zu welcher ein mehrfaches Schaben mit einer Diamantschneide in die Fläche des zu untersuchenden Körpers einzudringen gestattete. Alle diese Methoden gestatteten indes nur ein mehr oder weniger an Härte zu erkennen, ein absolutes Maß derselben geben sie nicht.

Ein solches hat später Hertz[5]) aufzustellen versucht. Hertz geht aber von den Spannungen aus, welche an der Berührungsstelle elastischer Körper entstehen, wenn man etwa eine kugelförmig begrenzte Linse auf die Fläche eines Körpers legt und nun auf die Linse einen Druck ausübt. Wird eine solche Linse auf eine Ebene ohne Druck gelegt, so findet die Berührung in einem Punkte statt, wird die Linse gegen die Ebene gedrückt, so berühren sich die Körper in einer von der Größe des Druckes abhängigen Fläche, indem die Ebene eingedrückt, die Kugel abgeplattet wird. Handelt es sich um isotrope Körper, so wird diese Fläche, die Druckfläche, ein Kreis sein, dessen Radius mit der Größe des Druckes wächst. Innerhalb dieser Druckfläche sind Spannungen in beiden Körpern vorhanden, welche im allgemeinen Druckspannungen, an der Grenze der Druckfläche aber jedenfalls Zugspannungen sein müssen, da die in der Druckfläche einander genäherten Moleküle von den nicht gepreßten sich ebenfalls entfernen müssen. Hiernach definiert Hertz die Härte folgendermaßen: Die Härte ist die Festigkeit, welche ein Körper denjenigen Spannungen entgegensetzt, welche in ihm in der Nähe einer kreisförmigen Druckfläche auftreten. Eine Festigkeit messen wir durch diejenigen Kräfte

1) *Frankenheim*, Inauguraldissertation. Breslau 1829.

2) *Seebeck*, Programm des Cöln. Realgymnasiums 1833.

3) *Franz*, Poggend. Ann. 80. p. 37. 1850.

4) *Pfaff*, Münchener Berichte 1883. p 55 und 372. 1884. p 255. Weitere ...atur sehe man in der Abhandlung von *Auerbach*, Wiedem. Ann. 43. p. 64. ..91.

5) *Hertz*, Verhandl. der physikal. Gesellschaft zu Berlin 1882. p. 67. *Crelles* Journal. 92. p. 156. 1882.

oder Ausdehnungen, welche einen Körper eben bis zur Festigkeitsgrenze beanspruchen, sei es, daß die Überschreitung der Grenze, dort wo sie überschritten ist, einen Sprung hervorruft wie bei spröden Körpern, sei es, daß sie wie bei zähen Körpern eine Einsenkung mit aufgewulsteten Rändern zur Folge hat. Das Maß der Härte ist der Druck pro Flächeneinheit, welcher im Mittelpunkte einer kreisförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte des Körpers eben die Grenze der Festigkeit erreicht wird. Dies Maß hat den Vorzug sich nicht auf eine individuelle Spitze zu beziehen, es ist ferner ein absolutes, da zur Bestimmung der Härte eines Materials die Berührung zweier Körper aus diesem Material dienen kann, ein härteres also garnicht vorhanden zu sein braucht.

Nach den Rechnungen von Hertz besteht zwischen der Größe bzw. dem Radius r der Druckfläche und dem ausgeübten Drucke p sowie dem Radius ϱ der drückenden Kugelfläche die Beziehung

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{p\varrho}{E}(1-\mu^2)},$$

wenn E der Elastizitätskoeffizient und μ der Querkontraktionskoeffizient des gedrückten Materials ist. Der mittlere Druck der Flächeneinheit der Druckfläche ist der Quotient aus dem Drucke p und der Größe der Druckfläche also $r^2\pi$. In dem Mittelpunkte der Druckfläche ist nach den Rechnungen von Hertz der Druck der anderthalbfache des mittlern Druckes, somit ist p_1 der Druck pro Flächeneinheit im Mittelpunkte der Druckfläche

$$p_1 = \frac{3}{2}\frac{p}{r^2\pi} = \frac{3}{2\pi}p\left(\frac{2E}{3p\varrho(1-\mu^2)}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ist P der Druck, bei welchem die Elastizitätsgrenze überschritten wird, so ist die Härte P_1 nach der Definition von Hertz

$$P_1 = \frac{3}{2\pi}P\left(\frac{2E}{3P\varrho(1-\mu^2)}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{PE^2}{\varrho^2(1-\mu^2)^2}}.$$

Da die Härte eine charakteristische Eigenschaft des Materials ist, so muß für ein gegebenes Material der Wert von P_1 derselbe sein, es muß demnach $\frac{P}{\varrho^2} = \text{konst}$, also der Druck P dem Quadrate des Radius der drückenden Kugelfläche proportional sein.

Auerbach[1]) hat aufgrund der Entwicklungen von Hertz absolute Härtemessungen an verschiedenen Gläsern und an Bergkristall durchzuführen versucht. Mittels eines Hebels wurden Glaslinsen, deren Krümmungsradien zwischen 1 und 30 $^{\mathrm{mm}}$ waren, auf Glasplatten von 8 $^{\mathrm{mm}}$ Dicke aufgesetzt, und die jedem Drucke p entsprechende Größe der Druckfläche nach einem später zu besprechenden optischen Verfahren, sowie der Druck P bestimmt, bei welchem in der Grenze der Druckfläche der Sprung eintrat.

Die Theorie von Hertz zeigte sich durch diese Versuche nicht voll bestätigt, indem bei Änderung des Krümmungsradius der drückenden Linse sich der Wert von P_1 änderte, derart, daß P_1 um so größer wurde, je kleiner der Krümmungsradius ϱ und damit auch der Radius der Dru

1) *Auerbach,* Wiedem. Ann. 43. p. 61. 1891; 45. p. 262. 1892; 53. p. 1 1894.

..liche wurde, während der ersten Gleichung für r entsprechend der Wert

$$\frac{p\varrho}{r^3} = \frac{2E}{3(1-\mu^2)}$$

..ch in der Tat als konstant fand.

Dagegen ergab sich, daß das Produkt $P_1 \cdot \sqrt{\varrho}$ konstant war, daß also ..r Druck P, bei welchem sich der Sprung zeigte, nicht dem Quadrate von ϱ, sondern der ersten Potenz proportional ist. Auerbach definiert ..shalb das Produkt $P_1 \sqrt{\varrho}$ als die Härte H des Materials. Setzen wir ..n aus mehrfachen Messungen abzuleitenden Quotienten $\frac{p}{r^3} = q$, so wird

$$H = P_1 \sqrt{\varrho} = \frac{3}{2\pi} \sqrt{Pq^2 \cdot \varrho}.$$

Folgende Tabelle enthält die von Auerbach für drei Gläser und für ..rgkristall senkrecht zur Achse gefundenen Werte der Härte in Kilo..ramm. pro mm².

Stoff	$\varrho =$ 1	3	4	5	10	12	15	20	Mittel
Glas I	212	—	215	—	—	214	—	—	213,7
„ II	—	228	—	222	227	—	223	—	226,7
„ III	—	—	244	—	—	237	—	236	239,0
Bergkristall	292	-	298	—	—	293	—	-	294,2

Welches die Zugspannung an der Sprungstelle ist, läßt sich nicht ..rechnen.

In der unten als dritte erwähnten Abhandlung hat Auerbach eine ..zahl Jenenser Gläser auf ihre Härte geprüft, er findet Werte zwischen .. und 316; die früher gefundenen Beziehungen, abweichend von Hertz ..aben sich bestätigt.

§ 59.

Stoß der Körper. Die Erscheinungen, welche zwei Körper darbieten, ..nn sie aufeinander stoßen, die Änderungen, welche ihre Bewegungen ..bei erfahren, hängen wesentlich von den elastischen Eigenschaften der..lben ab. Wir entwickeln die Gesetze des Stoßes, indem wir zunächst ..aussetzen, daß die stoßenden Körper Kugelgestalt haben.[1])

Haben zwei Massen m und m' gewisse gleichgerichtete Geschwindig..keiten v und v' erhalten, so werden sie, wenn die Geschwindigkeit v von m ..ößer ist als die v' von m', nach einiger Zeit aufeinander treffen und ..ährend einer sehr kurzen Zeit gegeneinander gedrückt sein. Infolge

1) Die Gesetze des Stoßes kugelförmiger Körper wurden zu gleicher Zeit .. *Wallis*, *Wren* und *Huyghens* entwickelt und von Wallis am 26. November, .. Wren am 17. Dezember 1668, von Huyghens am 4. Januar 1669 der Royal ..ciety zu London vorgelegt, der letztere soll sie jedoch schon im Jahre 1663 ..funden haben. Philos. Transact. of the Royal Soc. of London from commen..ment etc. Abridged with notes etc. 1. p. 307, 310, 335. London 1809.

dieses Stoßes wird dann die Geschwindigkeit jedes der beiden Körper geändert sein, die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers wird verkleinert, die des gestoßenen Körpers wird vergrößert sein. Sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoße c und c', so erhalten wir zunächst ganz allgemein folgende Relation zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße. Während die Körper sich berühren, übt der eine auf den andern einen Druck aus, und infolge dieses Druckes wird die Geschwindigkeit geändert, und zwar für den stoßenden Körper um $v - c$, für den gestoßenen um $c' - v'$. Da der Druck auf die beiden Massen m und m' während derselben Zeit wirkt, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, die diese Drucke erteilen, also die soeben abgeleiteten Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt wie die Massen, denen sie erteilt sind, oder

$$\frac{v - c}{c' - v'} = \frac{m'}{m}$$

und daraus

$$m v + m' v' = m c + m' c'.$$

Um eine zweite Relation zwischen den Geschwindigkeiten zu erhalten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1) Beide Körper sind absolut unelastisch. Der Stoß wird dann eine bleibende Änderung der Gestalt hervorbringen, die Körper entfernen sich nach dem Stoße nicht mehr voneinander, sondern bewegen sich nach dem Stoße mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter. In diesem Falle ist also $c = c'$, und wir erhalten

$$m v + m' v' = (m + m') c,$$

$$c = \frac{m v + m' v'}{m + m'},$$

$$v - c = \frac{m' (v - v')}{m + m'}, \qquad c - v' = \frac{m (v - v')}{m + m'}.$$

War die Bewegung v' jener von v entgegengesetzt, so haben wir in diesen Ausdrücken nur v' mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen und es wird

$$c = \frac{m v - m' v'}{m + m'}.$$

Und ist nun $m v = m' v'$, so wird $c = 0$, also beide Körper bleiben in Ruhe. Dieser Fall scheint also durchaus dem im § 11 abgeleiteten Satze von der Konstanz der lebendigen Kraft zu widersprechen, da die lebendige Kraft nach dem Stoße gleich Null ist. Indes ist der Widerspruch nur scheinbar, da durch den Stoß Arbeit geleistet, nämlich die Gestalt der Massen bleibend geändert, und, wie wir später nachweisen werden, auch Wärme erzeugt ist. Und da hier, nicht nur wenn $c = 0$ ist, sondern in jedem Falle eine Gestaltsänderung der Massen erfolgt, also Arbeit geleistet wird, so muß in jedem Falle die lebendige Kraft der bewegten Massen nach dem Stoße kleiner sein wie vor dem Stoße. Man findet diesen Satz bestätigt, wenn man die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoße vergleicht.

2) Wenn dagegen die beiden Körper vollkommen elastisch sind, so gleicht sich die im Stoße eintretende Gestaltsänderung sofort wieder

da die zusammengedrückten Körper sich sofort wieder ausdehnen und ihre ursprüngliche Gestalt annehmen. Die Körper sind also nach dem Stoße wieder in ihrem ursprünglichen Zustande, oder es ist bei dem Stoße keine Arbeit geleistet worden. Die lebendige Kraft der bewegten Massen ist in dem Falle durch den Stoß nicht geändert worden. Diese Bemerkung liefert uns für die elastischen Körper die zweite Relation zur Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stoße; denn nach derselben ist

$$mv^2 + m'v'^2 = mc^2 + m'c'^2$$

oder

$$m(v^2 - c^2) = m'(c'^2 - v'^2).$$

Dividieren wir diese Gleichung durch die vorhin allgemein abgeleitete

$$m(v - c) = m'(c' - v'),$$

so folgt

$$v + c = v' + c',$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

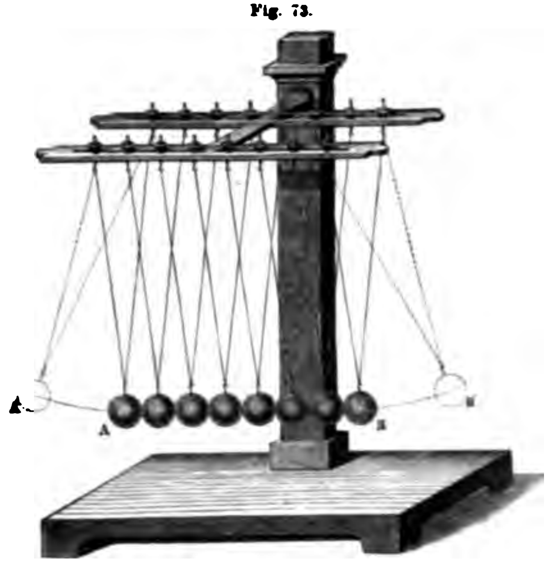
$$c = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'}; \qquad c' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'};$$

in denen wir wieder das Zeichen von v' ändern müssen, wenn die Geschwindigkeiten die entgegengesetzte Richtung haben.

Nehmen wir nun an, daß $m = m'$ sei, so wird

$$c = v', \quad c' = v.$$

Fig. 73.



Die Körper haben also nach dem Stoße ihre Geschwindigkeit einfach ausgetauscht. War die Geschwindigkeit der zweiten Masse m' gleich Null, so wird jetzt die der andern Null, denn dann wird

$$c = 0, \quad c' = v.$$

Wird also eine ruhende Kugel von einer bewegten ganz gleicher Masse gerade gestoßen, so erhält sie von letzterer deren volle Geschwindigkeit, und die stoßende Kugel bleibt liegen. Dieser bemerkenswerte Schluß läßt sich leicht durch den Versuch nachweisen[1]). Man hängt an einem Gestelle (Fig. 73) mehrere unter sich gleiche Kugeln von

1) Der Apparat zum Nachweis des Satzes vom Stoße der Körper wurde zuerst von *Mariotte* angegeben. Mariotte, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.

Elfenbein so auf, daß sie sich berühren, und daß ihre Zentra sich in einer geraden Linie befinden. Man hebt nun die erste um einen gewissen Winkel und läßt sie dann fallen. Sie beschreibt einen Kreisbogen wie ein Pendel und stößt auf die zweite Kugel mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$. Nach dem Stoße ist sie in Ruhe, gibt aber ihre Geschwindigkeit an die zweite Kugel ab; diese überträgt sie an die dritte usf. durch die ganze Reihe bis schließlich die letzte Kugel A die Geschwindigkeit erhält, welche B besaß, und deshalb bis A' aufsteigt.

Dann fällt A wieder zurück, erreicht dieselbe Geschwindigkeit und teilt dieselbe wieder durch alle die Kugeln hindurch an B mit. Man hat demnach ein Pendel, welches aus einer Reihe von Kugeln besteht, deren mittlere unbeweglich bleiben, und deren beide äußeren sich abwechselnd heben und senken.

Ist $m' = \infty$, $v' = 0$, so wird

$$c = \frac{v\,(m - m')}{m + m'} = -\,v\,\frac{m'}{m'} = -\,v\,,$$

d. h. stößt eine Kugel gegen eine feste Wand, so besitzt sie nach dem Stoße eine ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit. Läßt man demnach eine Elfenbeinkugel auf eine Marmorplatte fallen, so muß sie zurückspringen und zu derselben Höhe wieder aufsteigen, von der sie herabfiel, um neuerdings zu fallen und so ihre Bewegung ohne Ende fortzusetzen. Man weiß nun, daß das nicht der Fall ist, daß die Kugel allerdings zurückspringt, aber nicht bis zu ihrer ursprünglichen Höhe, und daß ihre Bewegung nach und nach aufhört. Ebenso findet man, daß die gestoßene Kugel niemals genau die Geschwindigkeit der stoßenden erhält, somit, daß unserer Theorie entgegen jedesmal bei dem Stoße ein Verlust von lebendiger Kraft eintritt, respektive ein Teil der lebendigen Kraft in eine andere Form umgesetzt wird. Der Grund dieser Abweichung der Erfahrung von der Theorie liegt eben darin, daß, wie wir § 56 und 57 sahen, die in der Theorie vorausgesetzte vollkommene Elastizität der Körper nicht besteht. Die durch die elastische Kraft geleistete Arbeit ist niemals genau gleich der in der ersten Hälfte des Stoßes geleisteten Arbeit, es wird vielmehr immer im Innern sowohl des stoßenden als des gestoßenen Körpers ein Teil der geleisteten Arbeit in andere Formen umgesetzt.

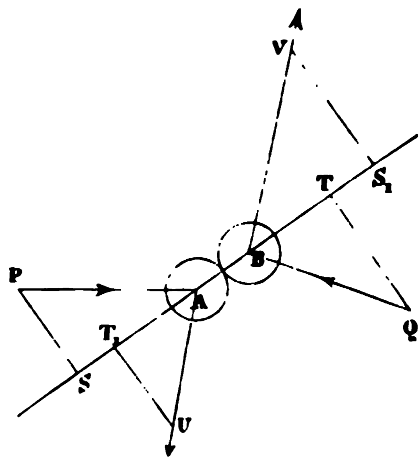
Die in dem bisherigen abgeleiteten Stoßgesetze gelten unter der Voraussetzung, daß die Körper sich in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte stoßen, so daß also der durch den Stoß ausgeübte Druck und der elastische Gegendruck direkt durch den Schwerpunkt gehen. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so ist die Wirkung des Stoßes eine andere.

Bei Kugeln ist es leicht, bei solchen nicht nach dem Zentrum gerichteten, also exzentrischen oder schiefen Stößen die Bewegung nach dem Stoße abzuleiten.

Seien zu dem Ende A und B (Fig. 73a) die Mittelpunkte zweier Kugeln im Momente des Stoßes, und sei PA der Richtung und Größe nach die Geschwindigkeit v der Kugel A, QB jene v' der Kugel B, sei ferner die Masse der ersten Kugel m, jene der zweiten m'. Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte AB geht dann stets durch den Berührungspunkt, und steht, da der Radius einer Kugel stets normal ist

lemente der Kugel, an welches er gezogen ist, normal zu den renden Elementen. Zerlegen wir die Geschwindigkeit PA in B parallele Komponente SA und die zu AB senkrechte Kom- S, und ebenso die Ge- eit QB in QT senkrecht d TB parallel AB, so nd QT gleichzeitig paral- rührungsflächen der bei- n. Diese Komponenten ıer durch den Stoß nicht erden, dieselben sind nach die gleichen wie vor ı. Die beiden anderen en senkrecht zur Berüh- sind nach den Mittel- so den Schwerpunkten der richtet, auf diese sind ittelbar die Gesetze des itoßes anzuwenden. Be- ir den Winkel, den PA ildet, mit α, den Winkel B und BA mit α', so ist

Fig. 73a.



$$SA = v \cdot \cos\alpha, \qquad TB = -\, v' \cos\alpha';$$

ındigkeiten von A und B parallel SA und BT nach dem len dann

$$\ldots\, \frac{\ldots\, v' \cos\alpha' + (m - m')\, v \cos\alpha}{m + m'}, \qquad \xi' = \frac{2 m v \cos\alpha - (m' - m)\, v' \cos\alpha'}{m + m'},$$

$v' \cos\alpha'$ mit dem negativen Vorzeichen schreiben müssen, weil ıg der Komponente TB jener SA entgegengesetzt gerichtet ist. die Massen beider Kugeln als gleich voraus, also $m = m'$, so

$$\xi = -\, v' \cos\alpha'; \qquad \xi' = v \cos\alpha,$$

Kugeln tauschen einfach ihre parallel AB gerichteten Ge- iten aus.

ıtalen Geschwindigkeiten nach dem Stoße erhalten wir als Re- ier je beiden zueinander senkrechten Komponenten

$$c^2 = v^2 \sin^2\alpha + \xi^2, \qquad c'^2 = v'^2 \sin^2\alpha' + \xi'^2,$$

ıchtung der Bewegung nach dem Stoße respektive den Winkel, mit AB bildet, in den Gleichungen

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{v \sin\alpha}{\xi}, \qquad \operatorname{tang} \alpha_1' = \frac{v' \sin\alpha'}{\xi'}.$$

$m = m'$, so wird

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = -\frac{v \sin\alpha}{v' \cos\alpha'}, \qquad \operatorname{tang} \alpha_1' = -\frac{v' \sin\alpha'}{v \cos\alpha}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Richtungen der Bewegung AU und BV an der andern Seite von AB liegen, als die Bewegungen vor dem Stoße. Wir erhalten dieselben, indem wir $AT_1 = BT$, $T_1U = P$ ziehen in der Linie AU und ebenso, indem wir $BS_1 = AS$, $S_1V = Q$ ziehen in BV, für beide Kugeln der Größe und Richtung nach.

Die Bewegung der beiden Kugeln in einzelnen Fällen ist hiernach leicht zu bestimmen. Wird z. B. eine Kugel gegen eine ruhende gleiche Masse gestoßen, so bewegt sich die stoßende nach dem Stoße stets senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, die gestoßene mit der der Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen Komponente der stoßenden Kugel parallel der Verbindungslinie. Die beiden Kugeln bewegen sich also in zueinander senkrechten Richtungen. Ist m' unendlich $v' = 0$, wird also die Kugel m gegen eine feste Wand geworfen, so daß sie mit der Normale der Wand den Winkel α bildet, so wird

$$\xi = -v \cdot \cos\alpha, \qquad \xi' = -o = c', \qquad c = v,$$

$$\tan g\,\alpha_1 = -\frac{v \cdot \sin\alpha}{v \cdot \cos\alpha} = -\tan g\,\alpha.$$

Die zur Wand normale Komponente bleibt ihrer Größe nach ungeändert, sie wird der Richtung nach die entgegengesetzte; die Geschwindigkeit c nach dem Stoße ist deshalb dieselbe wie vor dem Stoße, die Richtung der Bewegung liegt an der andern Seite der Normalen zur festen Wand, in der durch die Bewegungsrichtung vor dem Stoße und der Normalen gegebenen Ebene, sie bildet mit der Normalen zur Wand denselben Winkel wie vor dem Stoße.

Sehr viel verwickelter werden die Wirkungen des Stoßes, wenn einer der stoßenden Körper oder beide nicht Kugeln sind. Die nicht kugelförmigen Körper erhalten im allgemeinen durch den Stoß auch eine rotierende Bewegung. Die Wirkung des Stoßes ist nämlich stets normal zu dem Flächenelement, in welchem die stoßenden Körper sich berühren; diese Richtung geht aber bei nicht kugelförmigen Körpern im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt derselben. Deshalb erteilt der Stoß solchen Körpern im allgemeinen eine rotierende Bewegung um eine Achse, welche durch den Schwerpunkt der Körper geht, und welche senkrecht ist zu der Ebene, welche durch die Bewegungsrichtung vor dem Stoße und die zur Berührungsfläche normale Richtung gegeben ist. Man erhält das Drehungsmoment, indem man die zur Berührungsfläche senkrechte Komponente der Bewegung nochmals zerlegt, und zwar in die durch den Berührungspunkt und den Schwerpunkt gehende und die zu dieser Richtung senkrechte Komponente; letztere bewirkt die Drehung. Es wird demnach von der lebendigen Kraft der stoßenden Körper ein Teil zur Erzeugung der rotierenden Bewegung verwandt, die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung muß somit um diesen Betrag vermindert werden. Die Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen müssen deshalb kleiner sein, als sie sich aus den vorhin für Kugeln durchgeführten Rechnung ergeben.

Ganz vollständig ist indes eine solche Rotation auch nicht bei Kugeln ausgeschlossen; die beiden Kugeln reiben nämlich aneinander, solange die Berührung dauert, und diese Reibung wirkt auf beide Kugeln wie ein

rührungsfläche parallelen Bewegungskomponente entgegengesetzt Kraft; diese muß als senkrecht zum Radius an der Peripherie Kraft eine Rotation der Kugeln zur Folge haben.

olcher Übergang von Bewegung bezw. lebendiger Kraft in das Körper kann je nach der Form der Körper auch bei ganz zenle eintreten. Es ist das z. B. der Fall, wenn man zwei Zylinder oder gerundeten Endflächen aneinander stoßen läßt, so daß ein genau axialer ist. Durch den Stoß der Zylinder werden m zur Achse senkrechten Schichten der Zylinder in die später zu len longitudinalen Schwingungen versetzt. Je nach dem Ver- Länge der Zylinder, wenn wir dieselben gleichen Materials n, kann in dem einen Zylinder ein erheblicher Teil der fort- Bewegung als Molekularbewegung zurückbleiben, und dem- rtschreitende Bewegung nach dem Stoße eine erheblich andere s es die entwickelten Stoßgesetze, die ausdrücklich auf der ing beruhen, daß alle lebendige Kraft auch nach dem Stoße der fortschreitenden Bewegung vorhanden bleibt, ergeben.

ylindrische Stäbe gleichen Materials, gleichen Querschnittes und nge ergibt sich, daß dort die einfachen Stoßgesetze gelten, und on Voigt[1]) bestätigen das; ist der stoßende Stab halb so lang toßene, so würde nach der einfachen Theorie, im Falle der ge- r dem Stoße in Ruhe war, der stoßende mit $\frac{1}{3}$ seiner frühern gkeit zurück, der gestoßene mit $\frac{2}{3}$ der Geschwindigkeit des vorwärts gehen; berücksichtigt man die in den gestoßenen über- Arbeit, so sollte der stoßende nach den Entwicklungen von enant[2]) und Neumann[3]), sowie nach einer elementaren Theorie [4]) in Ruhe bleiben, der gestoßene mit der halben Geschwindig- oßenden vorangehen. Nach den Versuchen von Voigt, Boltz- d Hausmanninger[6]) ist das aber nicht der Fall, der Verlust er Kraft der fortschreitenden Bewegung ist erheblich geringer, h der Theorie von de Saint Venant sein sollte. Die Ab- on der nach der einfachen Stoßtheorie sich ergebenden Be- um so größer, je größer die Geschwindigkeit ist, mit welcher le Körper an den gestoßenen ankommt, bei schwachen Stößen e Bewegungsänderungen fast genau nach der einfachen Stoß-

f- der Versuche, eine Theorie der Erscheinungen zu geben, ver- auf die erwähnten Arbeiten von Voigt und Hausmanninger.

§ 60.

sion. In ähnlicher Weise wie die Moleküle eines und desselben einander haften, ziehen sich auch diejenigen zweier getrennter

gt, Wiedem Ann. 19. p. 44 1883.
aint Venant, Liouvilles Journal 12. (2) p. 237.
mann, nach der Angabe von Voigt a. a. O.
er, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Jahrg. 1891. p. 1383.
tzmann, Wiedem. Ann 17. p. 343. 1882.
usmanninger, Wiener Berichte 88. p. 162. 1883. Wiedem. Ann. 15.

Körper an, wenn man sie hinreichend einander nähert. Am deutlichsten zeigt sich diese als Adhäsion bezeichnete Anziehung, wenn man zwei Körper mit großen Flächen zu recht inniger Berührung bringt. Schleift man zwei Platten von etwa 10^{cm} Durchmesser möglichst gut aufeinander und schiebt sie sorgfältig übereinander, so daß sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, so bedarf es eines Zuges von vielen Kilogrammen, um die Platten voneinander zu reißen.

Durch Versuche mit solchen sogenannten Adhäsionsplatten, denen man eine verschiedene Größe gibt, kann man erkennen, daß die Größe der Adhäsion mit der Größe der adhärierenden Flächen zunimmt; ein Gesetz der Abhängigkeit der Adhäsion von der Größe der Flächen läßt sich in dieser Art schwierig aufstellen, weil es sich nicht erreichen läßt, bei allen Versuchen eine gleich innige Berührung der Flächen herzustellen.

Auf diesem Aneinanderhaften der Körper bei inniger Berührung beruhen alle Methoden der Verbindung zweier Körper durch irgend ein Bindemittel. Um die Berührung der Körper mit dem Bindemittel möglichst innig zu machen, wird das letztere in flüssiger Form zwischen die zu verbindenden Flächen gebracht, und dann erstarren gelassen. In der Regel adhärieren dann diese Bindemittel stärker an den Körpern, zwischen welche man sie gebracht hat, als ihre Teile untereinander kohärieren, deshalb wird bei einer versuchten Trennung der durch ein solches Bindemittel verbundenen Körper meist eher die Kohäsion des Bindemittels überwunden als die Adhäsion desselben an die verbundenen Körper.

Ein solches Aneinanderhaften zweier Körper zeigt sich auch, wenn man zwei Platten mit genau parallelen Flächen bis auf gewisse klein[e] Entfernungen nähert, ohne daß man sie zur Berührung bringt, schon b[ei] Abständen, welche erheblich größer sind, als daß wir nach den später [zu] besprechenden Erfahrungen annehmen können, daß die molekularen Kr[äfte] dort noch wirksam sein können. Stellt man eine Platte genau horiz[ontal] und läßt eine andere, welche an einer Wage äquilibriert ist, in klein[en] Abständen, etwa 0,1^{mm} darüber schweben, so bedarf es stets eines [nicht] unerheblichen Übergewichts, um die schwebende Platte von der festen [zu] entfernen. Stefan hat diese von ihm als scheinbare Adhäsion bezeich[nete] Erscheinung genauer untersucht[1]) und gezeigt, daß sie ein Phänomen g[anz] anderer Art ist, bei welchem von einer molekularen Anziehung gar k[eine] Rede ist.

Es zeigt sich nämlich, daß es in diesem Falle gar keiner bestim[mten] Kraft bedarf, um die bewegliche Platte von der festen loszureißen, [daß] vielmehr schon das kleinste Übergewicht, welches auf die andere W[age]schale gelegt wird, dazu ausreicht. Je kleiner aber das Übergewicht i[st,] einer um so größern Zeit bedarf es, bis der Abstand der Platten v[on] einem gegebenen anfänglichen Wert auf einen gewissen größern Wert [ge]wachsen ist. Diese Zeitdauer ist ferner wesentlich davon abhängig, [ob] man die Platten in der Luft übereinander hängen läßt oder in [einer] Flüssigkeit, und weiter von der Natur der Flüssigkeit; sie ist eine and[ere,] wenn die Platten im Wasser übereinander schweben, als wenn sie sich [in] Alkohol oder in einer Salzlösung befinden. Gerade die Abhängigkeit

1) *Stefan,* Wiener Berichte. **69.** 1874.

rscheinung von der Flüssigkeit, in welcher sich die Platten befinden, erweist auf das deutlichste, daß hier ganz andere Kräfte maßgebend sind, ls eine molekulare Anziehung der beiden Platten. Wir werden deshalb n einer andern Stelle bei Besprechung der Flüssigkeitsreibung auf die ntersuchung von Stefan zurückkommen.

§ 61.

Von der Reibung. Wenn zwei Körper übereinander hin bewegt rden, so bedarf es immer einer gewissen Kraft, um die Bewegung zu rhalten, selbst wenn die Bewegung in genau horizontaler Richtung r sich geht. Durch die Berührung der Körper tritt also der Bewegung selben übereinander hin ein Hindernis entgegen. Dieses Hindernis bechnet man als Reibungswiderstand; er tritt nur dann auf, wenn man en Körper über einen andern hin in der Berührungsebene zu bewegen cht.

Die Reibung ist um so stärker, je rauher die Flächen sind, welche h übereinander bewegen; wir müssen daher eben in dieser Rauhigkeit en hauptsächlichsten Grund suchen, indem dadurch die Teile der Körper lweise ineinander greifen, und deshalb bei jeder Bewegung derselben reinander hin ein geringes Heben des bewegten Körpers stattfinden ß. Je glatter im allgemeinen die Berührungsflächen sind, um so nger ist die Reibung. Daß aber in den Unebenheiten der Berührungsen nicht der einzige Grund der Reibung zu suchen ist, geht daraus vor, daß dieselbe auch von der Natur der reibenden Körper abhängig So z. B. zeigt sich, daß bei sonst gleichen Umständen Stahl und sing aufeinander bewegt, den kleinsten Reibungswiderstand zeigen. r müssen daher zur Erklärung der Reibung noch eine Anziehung zwischen Teilen der sich berührenden Körper annehmen, ähnlich wie wir sie der Adhäsion gesehen haben.

Man unterscheidet gleitende und rollende Reibung; erstere findet statt, zwei Ebenen übereinander hingeschoben werden, oder zwei ineinander ende Flächen, wie Zapfen im Zapfenlager sich ineinander bewegen. ende Reibung tritt auf, wenn ein von krummen Flächen begrenzter per so über einen andern hin bewegt wird, daß in jedem Augenblicke ere Punkte der beiden Körper sich berühren, wenn also ein Körper über en andern fortrollt. Die gleitende Reibung ist bei weitem die stärkere.

Trotz mancher Untersuchungen über die Reibung sind nur wenige tze sicher konstatiert worden. Um die gleitende Reibung zu unteren, legt man einen Körper mit einer glatten Fläche auf eine glatte ontale Unterlage und sucht die Kraft zu bestimmen, deren es bedarf, den Körper in Bewegung zu versetzen, oder genauer, durch welche ihn mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter bewegt, wenn man ihn einen einmaligen Anstoß in Bewegung gesetzt hat. Diese Kraft mißt Reibung. Sehr bequem läßt sich dazu auch die schiefe Ebene veren, indem man den Winkel aufsucht, um welchen man dieselbe neigen damit der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit dieselbe hinab. Man nennt diesen Winkel den Reibungswinkel.

Durch ähnliche Versuche haben Coulomb[1]), Rennie[2]) und besonder Morin[3]) folgende Gesetze erhalten:

1. Die Reibung ist dem Drucke der Körper auf die Unterlage pro portional.

2. Die Reibung hängt bei dem gleichen Drucke nicht von der Aus dehnung der sich berührenden Flächen ab, sofern diese keine Spitzen oder Kanten haben, sondern nur von deren Natur und Glätte.

3. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Letzterer Satz scheint jedoch nur innerhalb gewisser Grenzen zu gelten besonders bei sehr raschen Bewegungen scheint doch die Reibung mit der Geschwindigkeit sich zu ändern[4]).

Das Verhältnis der Reibung zu dem Drucke, das heißt den Bruchteil des Gewichtes eines Körpers, der ihn auf horizontaler Ebene in gleichförmiger Bewegung zu erhalten vermag, der nach dem vorigen für dieselben Körper konstant ist, nennt man den Reibungskoeffizienten. Derselbe ist wie man sieht, gleichzeitig der Sinus des Reibungswinkels. So ist z. B. der Reibungskoeffizient

von Eisen auf Eisen 0,108,
von Messing auf Gußeisen . . 0,189 usf.

Im allgemeinen nimmt die Reibung etwas zu, wenn Körper lange auf einander gestanden haben, jedoch nur bei dem Übergange der Körper aus der Ruhe zur Bewegung; einmal bewegt, ist der Reibungskoeffizient wieder der frühere.

§ 62.

Innere Reibung bei festen Körpern. Bei Besprechung der elastischen Nachwirkung haben wir gesehen, daß bei einer Einwirkung äußerer Kräfte auf die festen Körper nur ein Teil der durch sie stattfindenden Verschiebungen sofort eintritt, daß es sehr lange Zeit dauern kann, bis die den äußeren Kräften entsprechende Gleichgewichtslage vollständig erreicht ist. Wir schlossen daraus, daß sich der Bewegung der Moleküle ein Widerstand entgegenstellt, allerdings ein Widerstand ganz eigentümlicher Art dessen Wesen wir noch nicht zu erkennen imstande sind.

Bei der durch elastische Kräfte bewirkten Bewegung fester Körper läßt sich nun noch in anderer Weise ein Widerstand wahrnehmen, der sich darin zu erkennen gibt, daß diese Bewegungen allmählich zur Ruhe kommen, und zwar viel schneller, als es durch die etwa vorhandenen äußeren Widerstände, wie die Reibung an der umgebenden Luft ihn bietet, der Fall sein kann. Am bequemsten zur Erkennung dieses Widerstandes und deshalb auch am meisten zur Untersuchung desselben angewandt, sind die schwingenden Bewegungen, welche durch die Torsion die

1) *Coulomb,* Mémoires présentés à l'Acad. de Paris. **10.** 1830.
2) *Rennie,* Experiments on the friction etc. Philos. Trans. **119.** 1829.
3) *Morin,* Nouvelles expériences sur le frottement. I. Mémoire prés. l'Acad. de Paris. **4.** 1833. II. Mémoire. Paris 1834. III. Mémoire. Paris Doves Repertorium. **1.**
4) Man sehe indes *Warburg* und *Babo,* Wiedem. Ann. **2.** p. 406. 1877.

Drahtes hervorgebracht werden. Tordieren wir einen Draht um einen Bogen φ, so wissen wir, daß infolgedessen ein Drehungsmoment entsteht welches gleich $D \cdot \varphi$ ist, und welches den Stab in die untordierte Lage zurückzutreiben sucht. Hierin ist D das den Draht zurückdrehende Moment, wenn der Bogen φ gleich der Einheit ist. Wir können uns dieses Drehungsmoment als einen Druck denken, welcher am Ende eines Hebelarms von der Länge eins angreift, dann ist gleichzeitig φ der Abstand des Punktes, an welchem die Kraft angreift, von der Gleichgewichtslage, bezw. der Weg, den dieser Punkt zurücklegen muß, um in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Ist der Draht an seinem untern Ende mit einem Körper beschwert, etwa einer Kugel, so daß das Trägheitsmoment derselben und des Drahtes in bezug auf die Achse des Drahtes gleich M ist, so ist die Beschleunigung, welche der im Abstande eins von der Drehungsachse befindliche Punkt gegen die Gleichgewichtslage erhält, also auch die Winkelbeschleunigung gleich $\frac{D}{M} \cdot \varphi$. Wir erhalten demnach gerade wie im § 27 als Bewegungsgleichung des schwingenden Systems

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M} \cdot \varphi .$$

Nennen wir die Torsion des Drahtes, die wir ihm ursprünglich erteilten, als wir ihn sich selbst überließen, φ_0 und rechnen die Zeit t von dem Momente an, in welchem wir den Draht sich selbst überließen, so erhalten wir gemäß § 27 für den Abstand φ des Systems von der Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$\varphi = \varphi_0 \cos t \sqrt{\frac{D}{M}} .$$

Hieraus folgt, daß wenn

$$t\sqrt{\frac{D}{M}} = 0, \qquad \pi, \qquad 2\pi, \qquad 3\pi, \qquad 4\pi \cdots$$

$$\varphi = \varphi_0, \qquad -\varphi_0, \qquad \varphi_0, \qquad -\varphi_0, \qquad \varphi_0 \cdots$$

der der Draht vollführt Schwingungen, deren Dauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{D}}$$

und deren Amplitude konstant gleich φ_0 ist, das heißt, der Draht bewegt sich unaufhörlich jedesmal in der Zeit T zwischen den Grenzen $+\varphi_0$ und $-\varphi_0$ hin und her.

Wenn man die Bewegungen eines solchen Drahtes nun aber verfolgt, und die Amplituden desselben bestimmt, so findet man, daß dieselben stetig kleiner werden. Man kann das am schärfsten, indem man unten an der Kugel einen Spiegel anbringt und dann in der § 54 besprochenen Weise die Bewegung mit Fernrohr und Skala verfolgt; die Punkte, an denen die Bewegung umkehrt, die also den Werten $+\varphi_0$ entsprechen sollen, rücken immer näher zusammen. Schon Gauß und Weber, welche zuerst diese Abnahme der Schwingungsweiten verfolgten, fanden, daß die Werte der Amplituden, so lange dieselben nicht zu groß sind, etwa 4 bis 6 Grad betragen, in einer geometrischen Reihe abnehmen. Nennen wir also die

Werte der bei den Schwingungen erreichten äußersten Abstände, Rücksicht auf das Vorzeichen φ_0, φ_1, $\varphi_2 \ldots$, so findet sich

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = a$$

oder

$$\log \varphi_0 - \log \varphi_1 = \log \varphi_1 - \log \varphi_2 = \cdots \log a.$$

Die Differenz der Logarithmen der aufeinander folgenden Ampl ist konstant. Diese Differenzen nennt Gauß die logarithmischen I mente.

Dieses Gesetz der Abnahme der Amplitude beweist, daß der schw den Bewegung des Drahtes in jedem Momente ein Widerstand ent wirkt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung portional ist, daß also die Beschleunigung zur Zeit t nicht gleich Werte $\frac{D}{M}\varphi$ ist, sondern kleiner, und zwar um eine Größe klein welche der augenblicklichen Geschwindigkeit v des schwingenden D proportional ist. Bezeichnen wir daher mit 2γ den Widerstand, we Geschwindigkeit v gleich eins ist, so können wir die zur Zeit t vorh Beschleunigung schreiben

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{2\gamma}{M}v$$

oder da v der erste Differentialquotient von φ nach der Zeit ist,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{2\gamma}{M}\frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0,$$

wenn wir $\frac{2\gamma}{M} = 2\varepsilon$ und $\frac{D}{M} = k^2$ setzen.

Aus dieser Gleichung, welche uns eine Beziehung zwischen de schleunigung, Geschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des B lichen gibt, können wir nicht so direkt die Lage des Beweglichen zur ableiten, wie wir es § 27 aus der Gleichung konnten, welche di schwindigkeit oder den ersten Differentialquotienten des Weges na Zeit nicht enthielt. Wir können indes in Erwägung, daß φ eine Funktion von t sein muß, daß die gegebene Gleichung zwischen de schiedenen Differentialquotienten der Funktion φ und dieser selbst sein muß, mit Hilfe unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Funk die gesuchte Funktion in folgender Weise erhalten. Setzen wir

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und λ ein zu bestimmende Konstante sein soll, so ist nach E 3a und E IV

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}; \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird dieselbe

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2) = 0.$$

Somit entspricht die Funktion $\varphi = e^{\lambda t}$ unserer Gleichung, wenn wir λ aus der Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

bestimmen, denn mit dem so bestimmten λ wird die uns gegebene Gleichung erfüllt. Für λ erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Es gibt somit zwei Werte von λ, welche jeder für sich unsere Gleichung erfüllen, nämlich

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Jeder dieser beiden Werte hat dieselbe Berechtigung, wir können daher zur Darstellung von φ nicht den einen wählen und den andern verwerfen. Da indes die Exponentialfunktion mit jedem der beiden Werte der gegebenen Gleichung genügt, so tut es auch die Summe

$$\varphi = e^{-\varepsilon t + t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + e^{-\varepsilon t - t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}.$$

Indem wir so φ dieser Summe gleichsetzen, berücksichtigen wir jeden der beiden Werte ganz gleichmäßig. Indes müssen wir an dem so bestimmten Werte von φ noch eine Korrektion anbringen; würden wir die Gleichung für φ so aufstellen, so läge darin eine ganz bestimmte Voraussetzung, es würde nämlich, wenn wir $t = 0$ setzen, $\varphi = 2$ werden, da dann beide Exponenten gleich Null, somit jedes Glied der rechten Seite gleich 1 würde. Wir müssen deshalb jedes Glied der rechten Seite mit je einer Konstanten multiplizieren, die indes nicht für beide Glieder dieselbe sein darf, da wir dann eine nicht notwendige spezielle Voraussetzung über die Abhängigkeit des Wertes φ von t machen würden. Sind demnach A und B zwei willkürliche Konstante, deren Wert noch näher zu bestimmen ist, so erhalten wir als ganz allgemeine Beziehung für φ

$$\varphi = A e^{-\varepsilon t + t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-\varepsilon t - t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\right\}.$$

In diesem Ausdrucke müssen wir beachten, daß die beiden Exponenten jedenfalls imaginär sind, denn wenn eine dauernde Bewegung eintreten soll, muß k^2 jedenfalls erheblich größer sein als ε^2, wir können daher den Ausdruck schreiben

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} + B e^{-t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}\right\}.$$

An Stelle der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten kann man, wie in der Differentialrechnung bewiesen wird, trigonometrische Funktionen einführen und schreiben

$$A e^{t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} + B e^{-t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}$$
$$= (A + B)\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + (A - B)\sqrt{-1}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{(A + B)\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + (A - B)\sqrt{-1}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}\right\},$$

worin jetzt noch die beiden Konstanten A und B zu bestimmen sind.

Dieselben ergeben sich aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ d Abstand des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage gleich sein soll, und weiter daß, weil zur Zeit $t = 0$ die Bewegung infolge d Elastizität des Drahtes beginnt, in diesem Momente die Geschwindigk der Bewegung gleich Null sein muß. Da zur Zeit $t = 0$ der W $\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = 0$, dagegen der Kosinus gleich 1 ist, so ergibt die er Bedingung

$$A + B = \varphi_0.$$

Um den Koeffizienten des zweiten Gliedes zu bestimmen, haben den Quotienten $\frac{d\varphi}{dt}$ zu berechnen. Setzen wir der Abkürzung wegen

$$(A - B)\sqrt{-1} = b; \quad \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = m,$$

somit

$$\varphi = \varepsilon^{-\varepsilon t}\{\varphi_0 \cos mt + b \sin mt\},$$

so erhalten wir nach E II, E 3a, E 4, E 5

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon e^{-\varepsilon t}\{\varphi_0 \cos mt + b \sin mt\} + e^{-\varepsilon t}\{-\varphi_0 m \sin mt + mb \cos$$

Setzen wir $t = 0$, so wird die rechte Seite unserer Gleichu $-\varepsilon\varphi_0 + mb$, und da die Gleichung gleich 0 sein soll, wird

$$b = \frac{\varepsilon}{m}\varphi_0.$$

Setzen wir diesen Wert für b in die Gleichung für φ, so wird

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left\{\cos mt + \frac{\varepsilon}{m}\sin mt\right\}.$$

Ehe wir die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung näher be trachten, wollen wir zeigen, daß sie der Gleichung entspricht, die wi zwischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit erhielten

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0.$$

Wir haben dazu nur die drei Glieder dieser Gleichung auszurechn Das letzte Glied wird

$$k^2\varphi = k^2\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\cdot\cos mt + k^2\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\frac{\varepsilon}{m}\cdot\sin mt.$$

Das mittlere wird nach obiger Entwicklung, wenn wir für b sein Wert setzen,

$$2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right)\sin mt.$$

Zur Berechnung von $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$ haben wir auf $\frac{d\varphi}{dt}$ dieselbe

legeln anzuwenden wie zur Berechnung von $\frac{d\varphi}{dt}$ aus φ. Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right)\sin mt - \varphi_0\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right)e^{-\varepsilon t}\, m\cdot\cos mt.$$

Beachtet man nun, daß $\frac{\varepsilon^2}{m} + m = \frac{\varepsilon^2 + m^2}{m} = \frac{k^2}{m}$, so sieht man sofort, daß die Summation, dieser drei Ausdrücke den Wert 0 gibt.

Man erkennt unmittelbar, daß die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left\{\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{m}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}\right\}$$

eine schwingende Bewegung darstellt, wie sie **Gauß** und **Weber** bei einem tordierten Draht beobachteten. Wächst t von 0 ab, so nimmt φ ab, der Draht nähert sich der Gleichgewichtslage und erreicht dieselbe, wenn das Glied in der Klammer Null wird. Das tritt ein zu einer Zeit t, die sich aus der Gleichung

$$\cos mt + \frac{\varepsilon}{m}\sin mt = 0$$

$$\operatorname{tang} mt = -\frac{m}{\varepsilon}$$

ergibt. Wächst die Zeit weiter, so wird φ negativ, der Draht schwingt auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, er erreicht dort den größten Abstand, wenn t einen solchen Wert T hat, daß

$$T\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \pi,$$

denn die für die Geschwindigkeit der Bewegung abgeleitete Gleichung zeigt, daß für diesen Wert von t die Geschwindigkeit gleich Null wird, der zu dieser Zeit erreichte Abstand ist also der Punkt, wo die Bewegung umkehrt. Der Abstand φ_1 ist dann

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\varepsilon T}.$$

Wächst die Zeit wieder um denselben Wert

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}},$$

so befindet sich der schwingende Draht wieder an dem andern äußersten Punkte seiner Bahn. Der Abstand wird

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}.$$

Der Draht vollführt somit jedesmal in der Zeit T eine Schwingung, und die aufeinander folgenden äußersten Abstände, oder die Amplituden sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, zur Zeit

$$\begin{array}{cccccc} 0 & T, & 2T, & 3T, & \cdots\cdots & nT \\ \varphi_0, & \varphi_0 e^{-\varepsilon T}, & \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}, & \varphi_0 e^{-3\varepsilon T} & \cdots\cdots & \varphi_0 e^{-n\varepsilon T} \end{array}$$

oder die Amplituden gehören einer geometrischen Reihe an, der Quotient der aufeinander folgenden Amplituden ist

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = e^{\varepsilon T}.$$

Die Differenz der Logarithmen ist

$$\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n = \varepsilon T \cdot \log e.$$

Hieraus erkennen wir auch sofort, daß die Beobachtungen des logarithmischen Dekrements uns ein Maß für die Größe des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes liefert, denn die Gleichung nach ε aufgelöst liefert

$$\varepsilon = \frac{\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n}{T \cdot \log e} = \frac{\varDelta}{T \cdot \log e}.$$

Der Widerstand, welcher der Bewegung entgegensteht, ist somit, da im natürlichen Logarithmensystem $\log e = 1$ ist, gleich dem in natürlichen Logarithmen gegebenen logarithmischen Dekrement dividiert durch die Dauer der Schwingungen.

Voigt[1]) setzt ε gleich dem Ausdruck αk^2, worin α eine von der Natur des Materials abhängige Konstante ist, so daß

$$\frac{\varDelta}{T} = \varepsilon = \alpha k^2.$$

Da die dämpfende Reibung die Schwingungsdauer nur in sehr geringem Maße beeinflußt, so kann man ohne merklichen Fehler setzen

$$T\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = Tk = \pi; \quad k^2 = \frac{\pi^2}{T^2}$$

somit

$$\frac{\varDelta}{T} = \alpha \frac{\pi^2}{T^2}$$

$$\alpha = \frac{\varDelta T}{\pi^2}.$$

Es muß demnach, wenn die innere Reibung die Ursache der Dämpfung ist, das Produkt aus dem logarithmischen Dekrement $\varDelta$ und der Schwingungsdauer T für ein und dasselbe Material eine für das Material charakteristische Konstante sein.

Boltzmann[2]) hat eine ganz andere Auffassung dieser Erscheinung entwickelt, er sieht in derselben lediglich eine Erscheinung der elastischen Nachwirkung, welche bewirkt, daß die den Draht gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft nicht dem Abstande von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Der Gedankengang Boltzmanns ist folgender. Erfährt ein Parallelepiped eines festen Körpers auf den Seitenflächen die Drucke p_1, p_2, p_3, und sind die Verkürzungen parallel den Druckrichtungen α, β, γ, so fanden wir § 50 für die Drucke

$$p_1 = 2k\alpha + K(\alpha + \beta + \gamma), \quad p_2 = 2k\beta + K(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$p_3 = 2k\gamma + K(\alpha + \beta + \gamma)$$

und erkannten, da die im Innern geweckten elastischen Drucke diesen Drucken gleich sind, daß den Verschiebungen α, β, γ diese elastischen

1) *Voigt,* Wiedem. Ann. **47**. p. 671. 1892.

2) *Boltzmann,* Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. p. 624. 1876. Man sehe auch *Riecke,* Wiedem. Ann. **20**. p. 484. 1883; *A. Koch,* Wiedem. Ann. **36**. p. 132. 1889.

äfte entsprechen, mit denen die verschobenen Teilchen gegen ihre rela-
en Gleichgewichtslagen hinstreben. Diese elastischen Kräfte sind indes
difiziert, wenn in dem betreffenden Körper schon früher Deformationen
attgefunden haben, wobei jedoch eine vorhergegangene Deformation von
m so geringerem Einfluß ist, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar
t die durch eine Verschiebung geweckte elastische Kraft geringer, wenn
hon vorher eine Verschiebung im gleichen Sinne erfolgt war. Von der
öße dieser durch die frühere Deformation bedingten Kraftverminderung
mmt Boltzmann folgendes an. Ist zur Zeit t die augenblickliche Ver-
chiebung nach den drei Richtungen α, β, γ, so ist die Kraft parallel α,
m Falle der Körper niemals vorher irgend welche Deformation erfahren
at, durch obigen Ausdruck für p_1 gegeben. Hat aber zur Zeit τ kleiner
ls t, also vor der Zeit, zu welcher die Verschiebung α erteilt ist, während
er unendlich kleinen Zeit $d\tau$ eine Verschiebung $\alpha(\tau)$ stattgefunden, so
oll die durch diese Verschiebung zur Zeit t wirksame Kraftverminderung
roportional sein der Verschiebung $\alpha(\tau)$, der Dauer dieser Verschiebung $d\tau$
nd einer Funktion der Zeit $t - \tau$, welche seit der Verschiebung $\alpha(\tau)$
erstrichen ist.

Hierzu tritt die Annahme, daß sich der Einfluß der zu verschiedenen
eiten τ vorhandenen Verschiebungen superponiert, das heißt, daß die Kraft-
erminderung, welche dieselben zur Zeit t bewirken, jede so in Rechnung
u ziehen ist, wie wenn sie allein vorhanden gewesen wäre. Sie ist also
nabhängig von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durch-
aufen hat.

Gleiches wie für die Verschiebungen α gilt für die Verschiebungen β
nd γ. Wir erhalten demnach für p_1, wenn wir wie früher $\alpha + \beta + \gamma = v$
etzen

$$p_1 = 2k\alpha - Kv - \sum_{-\infty}^{t} d\tau \cdot \alpha(\tau) \cdot \psi(t-\tau) - \int_{-\infty}^{t} d\tau\, v(\tau)\, \chi(t-\tau)$$

wenn wir $\alpha(\tau) + \beta(\tau) + \gamma(\tau) = v(\tau)$ setzen, und die Funktionen der Zeit,
nach welcher die Kraftverminderung sich ändert, für die Starrheit mit
$\psi(t-\tau)$, für die Volumelastizität mit $\chi(t-\tau)$ bezeichnen. Das Summen-
zeichen bedeutet, daß alle vor der Zeit t stattgehabte Änderungen, jede
mit ihrem Betrage in Rechnung zu ziehen und die Summe aller zu
nehmen ist.

Von den Funktionen χ und ψ ist sicher, daß sie mit wachsender Zeit
abnehmen, und wenn die Zeit bis ins unendliche wächst, gleich Null werden.

Ist ein Draht vom Radius R und der Länge l an seinem untern Ende
um den Winkel φ zur Zeit t tordiert und war er zu frühern Zeiten τ um
den Winkel $\varphi(\tau)$ in demselben Sinne tordiert, so wird das den Draht zurück-
drehende Moment hiernach gemäß § 53

$$\frac{\pi R^4}{2l}\left\{\frac{E}{2(1+\mu)}\varphi - \int_{-\infty}^{t} d\tau\, \varphi(\tau)\, \psi(t-\tau)\right\},$$

wobei der Torsion nur der Koeffizient der Starrheit, nicht derjenige der
Volumelastizität eingeht.

Die Gleichung für die Schwingungen eines Drahtes, der etwa eine Kugel trägt, so daß das Trägheitsmoment des schwingenden Systems gleich M ist wird dann

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\pi R^4}{M\cdot 2l}\left\{\frac{E}{2(1+\mu)}\varphi - \int_{-\infty}^{t} d\tau\,\varphi(\tau)\,\psi(t-\tau)\right\}.$$

Auch diese Gleichung liefert gedämpfte Schwingungen; rechnen wir die Zeit t von dem Augenblicke an, in welchem etwa durch einen an dem Zeiger, der sich an der Kugel befindet, wirkenden Stoß der Draht aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, so daß für $t = 0$ $\varphi = 0$ ist, so wird der Gleichung genügt durch

$$\varphi = Ce^{-\varepsilon t}\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Wegen der weitern Entwickelungen müssen wir auf die Abhandlung von Boltzmann verweisen. Als Resultat der Entwicklungen ergibt sich für die Schwingungsdauer T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right)}} = \sqrt{\frac{8\pi l M}{R^4 A}}$$

und für ε

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4}{2l}\cdot B\frac{T}{8M} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 l M A}},$$

worin A und B zwei lediglich von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängige Konstanten sind, von denen A wesentlich von dem Starrheitskoeffizienten abhängt.

Für das in natürlichen Logarithmen ausgedrückte logarithmische Dekrement Λ ergibt sich

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi^2}{2}\frac{B}{A};$$

das logarithmische Dekrement ist also nicht von den Dimensionen des Drahtes abhängig, sondern nur von der Beschaffenheit des Materials, die dämpfende Kraft ε ist demnach wesentlich in reziproker Weise wie die Schwingungsdauer von den Dimensionen des Drahtes abhängig.

Der Ausdruck für die Schwingungsdauer und damit auch für das logarithmische Dekrement wird ein anderer, wenn wir außer der Torsionselastizität auf das schwingende System noch ein anderes Drehungsmoment einwirken lassen. Man kann das etwa dadurch erreichen, daß man an die schwingende Kugel eine Magnetnadel befestigt, so zwar daß, wenn der Draht untordiert ist, die Nadel sich im magnetischen Meridian befindet. Wird dann der Faden um einen Winkel φ tordiert, so erhält die Magnetnadel gleichzeitig die Ablenkung φ aus dem magnetischen Meridiane und damit das schwingende System ein Drehungsmoment $D\varphi$ gegen die Gleichgewichtslage hin, das sich somit zu dem Drehungsmomente der Torsion, welches das System gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, addiert.

Die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{\pi R^4}{2lM}\left\{\frac{E}{2(1+\mu)}\cdot\varphi - \int_{-\infty}^{t} d\tau\,\varphi(\tau)\,\psi(t-\tau)\right\}.$$

Für die Schwingungsdauer ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right) + D}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 l M}{\pi R^4 A + 2lD}}.$$

Der Ausdruck für die dämpfende Kraft ist auch jetzt

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 B}{2l}\cdot\frac{T}{8M},$$

und demnach, wenn wir für T seinen Wert einsetzen

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi^4 R^8 B^2}{32 l M(\pi R^4 A + 2lD)}}.$$

Das logarithmische Dekrement wird

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi R^4 B}{16 l M}\cdot T^2 = \frac{\pi^3 R^4 B}{2(\pi R^4 A + 2lD)}.$$

Während also im ersten Falle das logarithmische Dekrement nur von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängt, ist es jetzt von der Schwingungsdauer abhängig und zwar bei einem und demselben Drahte und bei einem und demselben Systeme, also gleichem Trägheitsmomente desselben, ist es dem Quadrate der Schwingungsdauer proportional. Bei Anwendung einer die Schwingungen mit bewirkenden Magnetnadel kann man durch passende Stellung von Magneten in der Nähe den Wert von D innerhalb weiter Grenzen und damit bei sonst ungeändertem System die Schwingungsdauer variieren.

Betreffs der Entwicklung dieser Gleichungen macht Boltzmann ausdrücklich darauf aufmerksam, daß dieselben nur angenähert sein können, indem eine Reihe vereinfachender Voraussetzungen über die Funktion $\psi(\tau)$ gemacht und nur die Nachwirkungen berücksichtigt werden, welche innerhalb der einzelnen Schwingungen, also zwischen $\frac{1}{4}T$ und $\frac{3}{4}T$, zwischen $\frac{3}{4}T$ und $\frac{5}{4}T$ usw. nach der Anschauung von Boltzmann eintreten. Nur dann läßt sich das in den Gleichungen vorkommende Integral überhaupt behandeln.

Experimentell sind die Gesetze des innern Widerstandes, nachdem zuerst Warburg einige Messungen gemacht hatte, zunächst von H. Streintz[1] und Schmidt[2] mit Hülfe der Torsionsschwingungnn untersucht worden; später von Voigt[3] mit Torsions- und Biegungsschwingungen. Die beiden ersten Experimentatoren beobachteten die Dekremente der Schwingungen, indem die betreffenden Drähte mit einer horizontalen Scheibe, deren Mittelpunkt in der Achse des Drahtes lag oder mit einer Kugel belastet und,

1 *H. Streintz*, Poggend. Ann. 153. p. 387. 1874.
2 *P. M. Schmidt*, Wiedem. Ann. 2. p. 48 u. 241. 1877.
3 *Voigt*, Wiedem. Ann. 48. p. 670. 1892.

nachdem ihnen eine kleine Torsion erteilt war, sich selbst überlass wurden. Das einzige die Bewegung bedingende Drehungsmoment war al das der Torsion. Das so direkt beobachtete logarithmische Dekreme rührt nicht nur von dem innern Widerstande in den schwingenden Dräht sondern zum Teil auch daher, daß die schwingenden Körper an der u gebenden Luft eine Reibung erfahren. Wie man diese bestimmen und Rechnung ziehen kann, werden wir bei Besprechung der Luftreibung (§ 11 kennen lernen.

In den Versuchen von Streintz konnte Boltzmann eine Bestätigu seiner Theorie finden, denn Streintz war in seinen Versuchen zu de Resultate gelangt, daß das logarithmische Dekrement der Schwingung unabhängig sei von der Amplitude der Schwingungen, ebenso von d Schwingungsdauer, wenn dieselbe durch Änderung der Trägheitsmome der schwingenden Massen geändert wurde, ebenso unabhängig von d Länge des schwingenden Drahtes, durch welche sich die Schwingungsda nach den Torsionsgesetzen ändert, und daß dasselbe außerdem vielleic unabhängig oder doch nicht bedeutend abhängig sei von dem Durc messer des schwingenden Drahtes, wenn zugleich das Trägheitsmoment d schwingenden Massen so geändert wird, daß die Schwingungsdauer kon stant bleibt. Da Streintz als erstes Resultat seiner Versuche angibt, da eine Änderung der Schwingungsdauer durch Änderung des Trägheitsm mentes keinen Einfluß auf das Dekrement hat, folgt in bezug auf de letzten Satz, daß eine Änderung des Durchmessers überhaupt keinen Ei fluß auf das logarithmische Dekrement hat. Wie man sieht, entspric das alles der Boltzmannschen Theorie.

Schmidt schloß aus seinen Versuchen, daß bei den elastisch Schwingungen den Bewegungen ein Reibungswiderstand entgegensteh welcher von dem in den elastischen Nachwirkungen sich zeigenden Wid stande verschieden sei. Es ergab sich nämlich aus seinen Versuchen, da bei einem neu aufgehängten und unten mit einer Kugel belasteten Draht das von der Luftreibung befreite, also lediglich den innern Widersta messende Dekrement anfänglich viel größer ist als später, dasselbe näh sich bei längerem Hängen einem kleinsten Werte. Diesen Wert behält bei, wenn der Draht inzwischen keine Veränderung erfährt, welche ei neue elastische Nachwirkung bedingt, und wenn man sich auf so klei Schwingungen beschränkt, daß die Dekremente unabhängig sind von d Amplitude. Jede Beeinflussung des Drahtes, welche elastische Nachwirku bedingt, vergrößert wieder das logarithmische Dekrement. Entlastet m den Draht oder nimmt die Kugel ab, wodurch bewirkt wird, daß der Dra mit Nachwirkung sich einige Zeit zusammenzieht, so wird bei erneut Anhängen der Kugel und hervorgerufenen Schwingungen das Dekrem wieder größer, um bei dauernder gleicher Belastung wieder bis zu d kleinsten Wert abzunehmen.

Man kann indes in diesen Resultaten einen Widerspruch gegen d Boltzmannsche Theorie nicht erkennen, es entspricht derselben vielm durchaus, daß wenn der Draht noch mit der Zeit abnehmende von früh vor Beginn der Versuche stattgehabten Deformationen herrührende Na wirkungen besitzt, daß diese sich zu den durch die Schwingungen bedi ten Nachwirkungen summieren, und daß erst, wenn im Laufe der Z

chwirkungen verschwunden sind, die Dekremente konstant werden, ur die Nachwirkungen, welche von den Schwingungen herrühren, Einfluß sind.

so spricht es nicht gegen die Theorie von Boltzmann, wenn t findet, daß bei zu großen Amplituden die logarithmischen nte nicht mehr konstant sind, sondern mit der Amplitude ab- wobei die Grenze, bis zu welcher die Amplituden konstant sind, verschiedenen Drähte sehr verschieden ist. Es werden dadurch ne Verrückungen der Gleichgewichtslage eintreten, welche für Amplituden verkleinern. Jedenfalls bezieht sich Boltzmanns nur auf Schwingungen von solcher Größe, daß deren Dekrement ist.

midt glaubt aber weiter aus seinen Versuchen den Schluß ziehen , daß das logarithmische Dekrement von den Dimensionen des bei gleicher physikalischer Beschaffenheit desselben abhängig sei. det Schmidt mit zunehmender Länge bald eine Zunahme des ntes bald eine Abnahme; für andere Drähte schwankt dasselbe, rst mit wachsender Länge zu dann wieder ab. Man wird also Versuchen von Schmidt keinen sichern Schluß ziehen können. enig ist ein Versuch Schmidts beweisend, aus welchem er schließt, Dekrement der dritten Wurzel aus dem Radius proportional sei, indes selbst bemerkt, daß ein solcher einzelner Versuch noch weisend sei.

gt hat bei einer Reihe von Metallen die Abhängigkeit der loga- en Dekremente von der Schwingungsdauer verfolgt. Nach der entwickelten Theorie der innern Reibung ergab sich

$$\frac{\Lambda T}{\pi^2} = \alpha$$

Dekrement soll, da α eine Konstante ist, der Schwingungsdauer rt proportional sein, während nach Boltzmann das logarithmische nt von der Schwingungsdauer unabhängig sein soll.

gelangte zu dem Resultate, daß sich in bezug auf die Dekre- owohl bei Biegung als auch bei Torsion die Metalle verschieden Bei 15 Stäbchen von Phosphorbronze, deren Schwingungsdauer en 0,523 und 0,263 Sekunden für die einfache Schwingung be- oigt setzt T für die Dauer der Doppelschwingung, weshalb bei Nenner des Ausdruckes für α die Zahl 2 steht) schwankte bei schwingungen der Wert von α zwischen etwa $32 \cdot 10^{-6}$ und ohne irgend eine Beziehung in den Schwankungen des Produktes ingungsdauer erkennen zu lassen. Ebenso ändert sich auch für chwingungen der Wert von α nur wenig. Voigt schließt aus ahien eine Abnahme mit abnehmender Schwingungsdauer; ähnlich Bronze verhielt sich Messing, während bei Kupfer und Nickel die on α sowohl für Biegung als Drillung konstant waren. Diese en den einfachen Gesetzen der innern Reibung.

Gußstahl, Aluminium, Gußeisen, Kadmium ergaben sich die be- en Dekremente nahezu unabhängig von der Schwingungsdauer, sie en also nahezu der Theorie von Boltzmann.

Werte der bei den Schwingungen erreichten äußersten Abstände, Rücksicht auf das Vorzeichen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$, so findet sich

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = a$$

oder

$$\log \varphi_0 - \log \varphi_1 = \log \varphi_1 - \log \varphi_2 = \cdots \log a.$$

Die Differenz der Logarithmen der aufeinander folgenden Ampli ist konstant. Diese Differenzen nennt Gauß die logarithmischen I mente.

Dieses Gesetz der Abnahme der Amplitude beweist, daß der schwi den Bewegung des Drahtes in jedem Momente ein Widerstand ent wirkt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung portional ist, daß also die Beschleunigung zur Zeit t nicht gleich Werte $\frac{D}{M}\varphi$ ist, sondern kleiner, und zwar um eine Größe kleine welche der augenblicklichen Geschwindigkeit v des schwingenden D proportional ist. Bezeichnen wir daher mit 2γ den Widerstand, wen Geschwindigkeit v gleich eins ist, so können wir die zur Zeit t vorha Beschleunigung schreiben

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{2\gamma}{M}v$$

oder da v der erste Differentialquotient von φ nach der Zeit ist,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{2\gamma}{M}\frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0,$$

wenn wir $\frac{2\gamma}{M} = 2\varepsilon$ und $\frac{D}{M} = k^2$ setzen.

Aus dieser Gleichung, welche uns eine Beziehung zwischen de schleunigung, Geschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des B lichen gibt, können wir nicht so direkt die Lage des Beweglichen zur ableiten, wie wir es § 27 aus der Gleichung konnten, welche di schwindigkeit oder den ersten Differentialquotienten des Weges nac Zeit nicht enthielt. Wir können indes in Erwägung, daß φ eine Funktion von t sein muß, daß die gegebene Gleichung zwischen de schiedenen Differentialquotienten der Funktion φ und dieser selbst sein muß, mit Hilfe unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Funkt die gesuchte Funktion in folgender Weise erhalten. Setzen wir

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und λ eine zu bestimmende Konstante sein soll, so ist nach E 3a und E IV

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird dieselbe

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2) = 0.$$

Somit entspricht die Funktion $\varphi = e^{\lambda t}$ unserer Gleichung, wenn wir λ aus der Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

bestimmen, denn mit dem so bestimmten λ wird die uns gegebene Gleichung erfüllt. Für λ erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Es gibt somit zwei Werte von λ, welche jeder für sich unsere Gleichung erfüllen, nämlich

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Jeder dieser beiden Werte hat dieselbe Berechtigung, wir können daher zur Darstellung von φ nicht den einen wählen und den andern verwerfen. Da indes die Exponentialfunktion mit jedem der beiden Werte der gegebenen Gleichung genügt, so tut es auch die Summe

$$\varphi = e^{-\varepsilon t + t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + e^{-\varepsilon t - t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}.$$

Indem wir so φ dieser Summe gleichsetzen, berücksichtigen wir jeden der beiden Werte ganz gleichmäßig. Indes müssen wir an dem so bestimmten Werte von φ noch eine Korrektion anbringen; würden wir die Gleichung für φ so aufstellen, so läge darin eine ganz bestimmte Voraussetzung, es würde nämlich, wenn wir $t = 0$ setzen, $\varphi = 2$ werden, da dann beide Exponenten gleich Null, somit jedes Glied der rechten Seite gleich 1 würde. Wir müssen deshalb jedes Glied der rechten Seite mit irgend einer Konstanten multiplizieren, die indes nicht für beide Glieder dieselbe sein darf, da wir dann eine nicht notwendige spezielle Voraussetzung über die Abhängigkeit des Wertes φ von t machen würden. Sind demnach A und B zwei willkürliche Konstante, deren Wert noch näher zu bestimmen ist, so erhalten wir als ganz allgemeine Beziehung für φ

$$\varphi = A e^{-\varepsilon t + t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-\varepsilon t - t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\right\}.$$

In diesem Ausdrucke müssen wir beachten, daß die beiden Exponenten jedenfalls imaginär sind, denn wenn eine dauernde Bewegung eintreten soll, muß k^2 jedenfalls erheblich größer sein als ε^2, wir können daher den Ausdruck schreiben

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} + B e^{-t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}\right\}.$$

An Stelle der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten kann man, wie in der Differentialrechnung bewiesen wird, trigonometrische Funktionen einführen und schreiben

$$A e^{t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} + B e^{-t\sqrt{-1}\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}$$

$$= (A + B)\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + (A - B)\sqrt{-1}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\{(A+B)\cos t\sqrt{k^2-\varepsilon^2} + (A-B)\sqrt{-1}\sin t\sqrt{k^2 -$$

worin jetzt noch die beiden Konstanten A und B zu bestimmen

Dieselben ergeben sich aus der Bedingung, daß zur Zeit t Abstand des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage g sein soll, und weiter daß, weil zur Zeit $t=0$ die Bewegung inf Elastizität des Drahtes beginnt, in diesem Momente die Geschwi der Bewegung gleich Null sein muß. Da zur Zeit $t=0$ de $\sin t\sqrt{k^2-\varepsilon^2}=0$, dagegen der Kosinus gleich 1 ist, so ergibt Bedingung

$$A+B=\varphi_0.$$

Um den Koeffizienten des zweiten Gliedes zu bestimmen, ha den Quotienten $\frac{d\varphi}{dt}$ zu berechnen. Setzen wir der Abkürzung we

$$(A-B)\sqrt{-1}=b;\quad \sqrt{k^2-\varepsilon^2}=m,$$

somit

$$\varphi = \varepsilon^{-\varepsilon t}\{\varphi_0\cos mt + b\sin mt\},$$

so erhalten wir nach E II, E 3a, E 4, E 5

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon e^{-\varepsilon t}\{\varphi_0\cos mt + b\sin mt\} + e^{-\varepsilon t}\{-\varphi_0 m\sin mt + mb$$

Setzen wir $t=0$, so wird die rechte Seite unserer Gl $-\varepsilon\varphi_0 + mb$, und da die Gleichung gleich 0 sein soll, wird

$$b = \frac{\varepsilon}{m}\varphi_0.$$

Setzen wir diesen Wert für b in die Gleichung für φ, so w

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left\{\cos mt + \frac{\varepsilon}{m}\sin mt\right\}.$$

Ehe wir die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung n trachten, wollen wir zeigen, daß sie der Gleichung entspricht, zwischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit erhielten

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0.$$

Wir haben dazu nur die drei Glieder dieser Gleichung auszu Das letzte Glied wird

$$k^2\varphi = k^2\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\cdot\cos mt + k^2\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\frac{\varepsilon}{m}\cdot\sin mt.$$

Das mittlere wird nach obiger Entwicklung, wenn wir für Wert setzen,

$$2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon^2}{m}+m\right)\sin mt.$$

Zur Berechnung von $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$ haben wir auf $\frac{d\varphi}{dt}$

Regeln anzuwenden wie zur Berechnung von $\frac{d\varphi}{dt}$ aus φ. Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon\varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right)\sin mt - \varphi_0\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right)e^{-\varepsilon t} m \cdot \cos mt.$$

Beachtet man nun, daß $\frac{\varepsilon^2}{m} + m = \frac{\varepsilon^2 + m^2}{m} = \frac{k^2}{m}$, so sieht man sofort, daß die Summation, dieser drei Ausdrücke den Wert 0 gibt.

Man erkennt unmittelbar, daß die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left\{\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{m}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}\right\}$$

eine schwingende Bewegung darstellt, wie sie Gauß und Weber bei einem tordierten Draht beobachteten. Wächst t von 0 ab, so nimmt φ ab, der Draht nähert sich der Gleichgewichtslage und erreicht dieselbe, wenn das Glied in der Klammer Null wird. Das tritt ein zu einer Zeit t, die sich aus der Gleichung

$$\cos mt + \frac{\varepsilon}{m}\sin mt = 0$$

$$\operatorname{tang} mt = -\frac{m}{\varepsilon}$$

ergibt. Wächst die Zeit weiter, so wird φ negativ, der Draht schwingt auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, er erreicht dort den größten Abstand, wenn t einen solchen Wert T hat, daß

$$T\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \pi,$$

denn die für die Geschwindigkeit der Bewegung abgeleitete Gleichung zeigt, daß für diesen Wert von t die Geschwindigkeit gleich Null wird. Der zu dieser Zeit erreichte Abstand ist also der Punkt, wo die Bewegung umkehrt. Der Abstand φ_1 ist dann

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\varepsilon T}.$$

Wächst die Zeit wieder um denselben Wert

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}},$$

wendet sich der schwingende Draht wieder an dem andern äußersten Ende seiner Bahn. Der Abstand wird

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}.$$

Der Draht vollführt somit jedesmal in der Zeit T eine Schwingung. Die aufeinander folgenden äußersten Abstände, oder die Amplituden sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, zur Zeit

0	$T,$	$2T,$	$3T,$	$\cdots\cdots$	nT
$\varphi_0.$	$\varphi_0 e^{-\varepsilon T},$	$\varphi_0 e^{-2\varepsilon T},$	$\varphi_0 e^{-3\varepsilon T}$	$\cdots\cdots$	$\varphi_0 e^{-n\varepsilon T}$

Die Amplituden gehören einer geometrischen Reihe an, der Quotient aufeinander folgenden Amplituden ist

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = e^{\varepsilon T}.$$

Die Differenz der Logarithmen ist

$$\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n = \varepsilon T \cdot \log e.$$

Hieraus erkennen wir auch sofort, daß die Beobachtungen des logarithmischen Dekrements uns ein Maß für die Größe des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes liefert, denn die Gleichung nach ε aufgelöst liefert

$$\varepsilon = \frac{\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n}{T \cdot \log e} = \frac{\varDelta}{T \cdot \log e}.$$

Der Widerstand, welcher der Bewegung entgegensteht, ist somit, da im natürlichen Logarithmensystem $\log e = 1$ ist, gleich dem in natürlichen Logarithmen gegebenen logarithmischen Dekrement dividiert durch die Dauer der Schwingungen.

Voigt[1]) setzt ε gleich dem Ausdruck αk^2, worin α eine von der Natur des Materials abhängige Konstante ist, so daß

$$\frac{\varDelta}{T} = \varepsilon = \alpha k^2.$$

Da die dämpfende Reibung die Schwingungsdauer nur in sehr geringem Maße beeinflußt, so kann man ohne merklichen Fehler setzen

$$T\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = Tk = \pi; \quad k^2 = \frac{\pi^2}{T^2}$$

somit

$$\frac{\varDelta}{T} = \alpha \frac{\pi^2}{T^2}$$

$$\alpha = \frac{\varDelta T}{\pi^2}.$$

Es muß demnach, wenn die innere Reibung die Ursache der Dämpfung ist, das Produkt aus dem logarithmischen Dekrement $\varDelta$ und der Schwingungsdauer T für ein und dasselbe Material eine für das Material charakteristische Konstante sein.

Boltzmann[2]) hat eine ganz andere Auffassung dieser Erscheinung entwickelt, er sieht in derselben lediglich eine Erscheinung der elastischen Nachwirkung, welche bewirkt, daß die den Draht gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft nicht dem Abstande von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Der Gedankengang Boltzmanns ist folgender. Erfährt ein Parallelepiped eines festen Körpers auf den Seitenflächen die Drucke p_1, p_2, p_3 und sind die Verkürzungen parallel den Druckrichtungen α, β, γ, so fanden wir § 50 für die Drucke

$$p_1 = 2k\alpha + K(\alpha + \beta + \gamma), \quad p_2 = 2k\beta + K(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$p_3 = 2k\gamma + K(\alpha + \beta + \gamma)$$

und erkannten, da die im Innern geweckten elastischen Drucke diesen Drucken gleich sind, daß den Verschiebungen α, β, γ diese elastischen

1) *Voigt,* Wiedem. Ann. 47. p. 671. 1892.

2) *Boltzmann,* Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. p. 624. 1876. Man sehe auch *Riecke,* Wiedem. Ann. 20. p. 484. 1883; *A. Koch,* Wiedem. Ann. 36. p. 132. 1889.

räfte entsprechen, mit denen die verschobenen Teilchen gegen ihre relaven Gleichgewichtslagen hinstreben. Diese elastischen Kräfte sind indes odifiziert, wenn in dem betreffenden Körper schon früher Deformationen attgefunden haben, wobei jedoch eine vorhergegangene Deformation von m so geringerem Einfluß ist, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar t die durch eine Verschiebung geweckte elastische Kraft geringer, wenn hon vorher eine Verschiebung im gleichen Sinne erfolgt war. Von der röße dieser durch die frühere Deformation bedingten Kraftverminderung immt **Boltzmann** folgendes an. Ist zur Zeit t die augenblickliche Verhiebung nach den drei Richtungen α, β, γ, so ist die Kraft parallel α, n Falle der Körper niemals vorher irgend welche Deformation erfahren at, durch obigen Ausdruck für p_1 gegeben. Hat aber zur Zeit τ kleiner s t, also vor der Zeit, zu welcher die Verschiebung α erteilt ist, während er unendlich kleinen Zeit $d\tau$ eine Verschiebung $\alpha(\tau)$ stattgefunden, so ll die durch diese Verschiebung zur Zeit t wirksame Kraftverminderung roportional sein der Verschiebung $\alpha(\tau)$, der Dauer dieser Verschiebung $d\tau$ nd einer Funktion der Zeit $t-\tau$, welche seit der Verschiebung $\alpha(\tau)$ rstrichen ist.

Hierzu tritt die Annahme, daß sich der Einfluß der zu verschiedenen eiten τ vorhandenen Verschiebungen superponiert, das heißt, daß die Kraftrminderung, welche dieselben zur Zeit t bewirken, jede so in Rechnung ziehen ist, wie wenn sie allein vorhanden gewesen wäre. Sie ist also nabhängig von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchufen hat.

Gleiches wie für die Verschiebungen α gilt für die Verschiebungen β nd γ. Wir erhalten demnach für p_1, wenn wir wie früher $\alpha+\beta+\gamma=v$ tzen

$$p_1 = 2k\alpha + Kv - \sum_{-\infty}^{t} d\tau \cdot \alpha(\tau) \cdot \psi(t-\tau) - \int_{-\infty}^{t} d\tau\, v(\tau)\, \chi(t-\tau)$$

enn wir $\alpha(\tau)+\beta(\tau)+\gamma(\tau)=v(\tau)$ setzen, und die Funktionen der Zeit, it welcher die Kraftverminderung sich ändert, für die Starrheit mit $(t-\tau)$, für die Volumelastizität mit $\chi(t-\tau)$ bezeichnen. Das Summenichen bedeutet, daß alle vor der Zeit t stattgehabte Änderungen, jede it ihrem Betrage in Rechnung zu ziehen und die Summe aller zu ilden ist.

Von den Funktionen χ und ψ ist sicher, daß sie mit wachsender Zeit bnehmen, und wenn die Zeit bis ins unendliche wächst, gleich Null werden.

Ist ein Draht vom Radius R und der Länge l an seinem untern Ende m den Winkel φ zur Zeit t tordiert und war er zu frühern Zeiten τ um n Winkel $\varphi(\tau)$ in demselben Sinne tordiert, so wird das den Draht zurückrehende Moment hiernach gemäß § 53

$$\frac{\pi R^4}{2l}\left\{\frac{E}{2(1+\mu)}\varphi - \int_{-\infty}^{t} d\tau\, \varphi(\tau)\, \psi(t-\tau)\right\},$$

wobei der Torsion nur der Koeffizient der Starrheit, nicht derjenige der olumelastizität eingeht.

Die Gleichung für die Schwingungen eines Drahtes, der etwa eine Kugel trägt, so daß das Trägheitsmoment des schwingenden Systems gleich M ist wird dann

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\pi R^4}{M\cdot 2l}\left\{\frac{E}{2(1+\mu)}\varphi - \int_{-\infty}^{t} d\tau\, \varphi(\tau)\,\psi(t-\tau)\right\}.$$

Auch diese Gleichung liefert gedämpfte Schwingungen; rechnen wir die Zeit t von dem Augenblicke an, in welchem etwa durch einen an dem Zeiger, der sich an der Kugel befindet, wirkenden Stoß der Draht aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, so daß für $t=0$ $\varphi=0$ ist, so wird der Gleichung genügt durch

$$\varphi = Ce^{-\varepsilon t}\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Wegen der weitern Entwickelungen müssen wir auf die Abhandlung von Boltzmann verweisen. Als Resultat der Entwicklungen ergibt sich für die Schwingungsdauer T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right)}} = \sqrt{\frac{8\pi l M}{R^4 A}}$$

und für ε

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4}{2l}\cdot B\,\frac{T}{8M} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 l M A}},$$

worin A und B zwei lediglich von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängige Konstanten sind, von denen A wesentlich von dem Starrheitskoeffizienten abhängt.

Für das in natürlichen Logarithmen ausgedrückte logarithmische Dekrement Λ ergibt sich

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{B}{A};$$

das logarithmische Dekrement ist also nicht von den Dimensionen des Drahtes abhängig, sondern nur von der Beschaffenheit des Materials, die dämpfende Kraft ε ist demnach wesentlich in reziproker Weise wie die Schwingungsdauer von den Dimensionen des Drahtes abhängig.

Der Ausdruck für die Schwingungsdauer und damit auch für das logarithmische Dekrement wird ein anderer, wenn wir außer der Torsionselastizität auf das schwingende System noch ein anderes Drehungsmoment einwirken lassen. Man kann das etwa dadurch erreichen, daß man an die schwingende Kugel eine Magnetnadel befestigt, so zwar daß, wenn der Draht untordiert ist, die Nadel sich im magnetischen Meridian befindet. Wird dann der Faden um einen Winkel φ tordiert, so erhält die Magnetnadel gleichzeitig die Ablenkung φ aus dem magnetischen Meridiane und damit das schwingende System ein Drehungsmoment $D\varphi$ gegen die Gleichgewichtslage hin, das sich somit zu dem Drehungsmomente der Torsion, welches das System gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, addiert.

Die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{\pi R^4}{2lM}\left\{\frac{E}{2(1+\mu)}\varphi - \int_{-\infty}^{t} d\tau\,\varphi(\tau)\,\psi(t-\tau)\right\}.$$

Für die Schwingungsdauer ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right) + D}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 lM}{\pi R^4 A + 2lD}}.$$

Der Ausdruck für die dämpfende Kraft ist auch jetzt

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 B}{2l}\cdot\frac{T}{8M},$$

und demnach, wenn wir für T seinen Wert einsetzen

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi^4 R^8 B^2}{32lM(\pi R^4 A + 2lD)}}.$$

Das logarithmische Dekrement wird

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi R^4 B}{16lM}\cdot T^2 = \frac{\pi^3 R^4 B}{2(\pi R^4 A + 2lD)}.$$

Während also im ersten Falle das logarithmische Dekrement nur von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängt, ist es jetzt von der Schwingungsdauer abhängig und zwar bei einem und demselben Drahte und bei einem und demselben Systeme, also gleichem Trägheitsmomente desselben, ist es dem Quadrate der Schwingungsdauer proportional. Bei Anwendung einer die Schwingungen mit bewirkenden Magnetnadel kann man durch passende Stellung von Magneten in der Nähe den Wert von D innerhalb weiter Grenzen und damit bei sonst ungeändertem System die Schwingungsdauer variieren.

Betreffs der Entwicklung dieser Gleichungen macht Boltzmann ausdrücklich darauf aufmerksam, daß dieselben nur angenähert sein können, weil eine Reihe vereinfachender Voraussetzungen über die Funktion $\psi(\tau)$ gemacht und nur die Nachwirkungen berücksichtigt werden, die innerhalb der einzelnen Schwingungen, also zwischen $\frac{1}{4}T$ und $\frac{3}{4}T$, zwischen $\frac{3}{4}T$ und $\frac{5}{4}T$ usw. nach der Anschauung von Boltzmann eintreten. Nur dann läßt sich das in den Gleichungen vorkommende Integral überhaupt behandeln.

Experimentell sind die Gesetze des innern Widerstandes, nachdem von E. Warburg einige Messungen gemacht hatte, zunächst von H. Streintz[1]) und P. M. Schmidt[2]) mit Hülfe der Torsionsschwingungnn untersucht worden; später von Voigt[3]) mit Torsions- und Biegungsschwingungen. Die beiden ersten Experimentatoren beobachteten die Dekremente der Schwingungen, indem sie die betreffenden Drähte mit einer horizontalen Scheibe, deren Mittelpunkt in der Achse des Drahtes lag oder mit einer Kugel belastet und,

1) H. Streintz, Poggend. Ann. 153. p. 387. 1874.
2) P. M. Schmidt, Wiedem. Ann. 2. p. 48 u. 241. 1877.
3) Voigt, Wiedem. Ann. 48. p. 670. 1892.

nachdem ihnen eine kleine Torsion erteilt war, sich selbst überlassen wurden. Das einzige die Bewegung bedingende Drehungsmoment war also das der Torsion. Das so direkt beobachtete logarithmische Dekrement rührt nicht nur von dem innern Widerstande in den schwingenden Drähten sondern zum Teil auch daher, daß die schwingenden Körper an der umgebenden Luft eine Reibung erfahren. Wie man diese bestimmen und in Rechnung ziehen kann, werden wir bei Besprechung der Luftreibung (§ 119) kennen lernen.

In den Versuchen von Streintz konnte Boltzmann eine Bestätigung seiner Theorie finden, denn Streintz war in seinen Versuchen zu dem Resultate gelangt, daß das logarithmische Dekrement der Schwingungen unabhängig sei von der Amplitude der Schwingungen, ebenso von der Schwingungsdauer, wenn dieselbe durch Änderung der Trägheitsmomente der schwingenden Massen geändert wurde, ebenso unabhängig von der Länge des schwingenden Drahtes, durch welche sich die Schwingungsdauer nach den Torsionsgesetzen ändert, und daß dasselbe außerdem vielleicht unabhängig oder doch nicht bedeutend abhängig sei von dem Durchmesser des schwingenden Drahtes, wenn zugleich das Trägheitsmoment der schwingenden Massen so geändert wird, daß die Schwingungsdauer konstant bleibt. Da Streintz als erstes Resultat seiner Versuche angibt, daß eine Änderung der Schwingungsdauer durch Änderung des Trägheitsmomentes keinen Einfluß auf das Dekrement hat, folgt in bezug auf den letzten Satz, daß eine Änderung des Durchmessers überhaupt keinen Einfluß auf das logarithmische Dekrement hat. Wie man sieht, entspricht das alles der Boltzmannschen Theorie.

Schmidt schloß aus seinen Versuchen, daß bei den elastischen Schwingungen den Bewegungen ein Reibungswiderstand entgegensteht, welcher von dem in den elastischen Nachwirkungen sich zeigenden Widerstande verschieden sei. Es ergab sich nämlich aus seinen Versuchen, daß bei einem neu aufgehängten und unten mit einer Kugel belasteten Draht das von der Luftreibung befreite, also lediglich den innern Widerstand messende Dekrement anfänglich viel größer ist als später, dasselbe nähert sich bei längerem Hängen einem kleinsten Werte. Diesen Wert behält es bei, wenn der Draht inzwischen keine Veränderung erfährt, welche eine neue elastische Nachwirkung bedingt, und wenn man sich auf so kleine Schwingungen beschränkt, daß die Dekremente unabhängig sind von der Amplitude. Jede Beeinflussung des Drahtes, welche elastische Nachwirkung bedingt, vergrößert wieder das logarithmische Dekrement. Entlastet man den Draht oder nimmt die Kugel ab, wodurch bewirkt wird, daß der Draht mit Nachwirkung sich einige Zeit zusammenzieht, so wird bei erneutem Anhängen der Kugel und hervorgerufenen Schwingungen das Dekrement wieder größer, um bei dauernder gleicher Belastung wieder bis zu dem kleinsten Wert abzunehmen.

Man kann indes in diesen Resultaten einen Widerspruch gegen die Boltzmannsche Theorie nicht erkennen, es entspricht derselben vielmehr durchaus, daß wenn der Draht noch mit der Zeit abnehmende von früher vor Beginn der Versuche stattgehabten Deformationen herrührende Nachwirkungen besitzt, daß diese sich zu den durch die Schwingungen bewirkten Nachwirkungen summieren, und daß erst, wenn im Laufe der

diese Nachwirkungen verschwunden sind, die Dekremente konstant werden, indem nur die Nachwirkungen, welche von den Schwingungen herrühren, noch von Einfluß sind.

Ebenso spricht es nicht gegen die Theorie von Boltzmann, wenn Schmidt findet, daß bei zu großen Amplituden die logarithmischen Dekremente nicht mehr konstant sind, sondern mit der Amplitude abnehmen, wobei die Grenze, bis zu welcher die Amplituden konstant sind, für die verschiedenen Drähte sehr verschieden ist. Es werden dadurch momentane Verrückungen der Gleichgewichtslage eintreten, welche für sich die Amplituden verkleinern. Jedenfalls bezieht sich Boltzmanns Theorie nur auf Schwingungen von solcher Größe, daß deren Dekrement konstant ist.

Schmidt glaubt aber weiter aus seinen Versuchen den Schluß ziehen zu sollen, daß das logarithmische Dekrement von den Dimensionen des Drahtes bei gleicher physikalischer Beschaffenheit desselben abhängig sei. Indes findet Schmidt mit zunehmender Länge bald eine Zunahme des Dekrementes bald eine Abnahme; für andere Drähte schwankt dasselbe, nimmt erst mit wachsender Länge zu dann wieder ab. Man wird also aus den Versuchen von Schmidt keinen sichern Schluß ziehen können. Ebensowenig ist ein Versuch Schmidts beweisend, aus welchem er schließt, daß das Dekrement der dritten Wurzel aus dem Radius proportional sei, wobei er indes selbst bemerkt, daß ein solcher einzelner Versuch noch nicht beweisend sei.

Voigt hat bei einer Reihe von Metallen die Abhängigkeit der logarithmischen Dekremente von der Schwingungsdauer verfolgt. Nach der von ihm entwickelten Theorie der innern Reibung ergab sich

$$\frac{\Delta T}{\pi^2} = \alpha$$

das Dekrement soll, da α eine Konstante ist, der Schwingungsdauer umgekehrt proportional sein, während nach Boltzmann das logarithmische Dekrement von der Schwingungsdauer unabhängig sein soll.

Er gelangte zu dem Resultate, daß sich in bezug auf die Dekremente sowohl bei Biegung als auch bei Torsion die Metalle verschieden verhalten. Bei 15 Stäbchen von Phosphorbronze, deren Schwingungsdauer zwischen 0,523 und 0,263 Sekunden für die einfache Schwingung betrug, (Voigt setzt T für die Dauer der Doppelschwingung, weshalb bei ihm im Nenner des Ausdruckes für α die Zahl 2 steht) schwankte bei Biegungsschwingungen der Wert von α zwischen etwa $32 \cdot 10^{-6}$ und $2 \cdot 10^{-6}$ ohne irgend eine Beziehung in den Schwankungen des Produktes zur Schwingungsdauer erkennen zu lassen. Ebenso ändert sich auch für Torsionsschwingungen der Wert von α nur wenig. Voigt schließt aus diesen Zahlen eine Abnahme mit abnehmender Schwingungsdauer; ähnlich wie die Bronze verhielt sich Messing, während bei Kupfer und Nickel die Werte von α sowohl für Biegung als Drillung konstant waren. Diese folgen also den einfachen Gesetzen der innern Reibung.

Bei Gußstahl, Aluminium, Gußeisen, Kadmium ergaben sich die beobachteten Dekremente nahezu unabhängig von der Schwingungsdauer, sie entsprechen also nahezu der Theorie von Boltzmann.

Wie schon früher Warburg so haben W. König[1]) bei Gelegenheit von Versuchen über die Reibung von Flüssigkeiten und A. Koch[2]) zu Messungen der innern Dämpfung Schwingungen verwandt, welche außer der Torsion des Fadens noch durch andere Drehungsmomente bedingt wurden. König wandte entweder die später zu besprechende bifilare Aufhängung oder wie früher Warburg und später Koch die Wirkung des Magnetismus an.

Die von diesen Experimentatoren gefundenen Resultate sprechen sehr für die Richtigkeit der Boltzmannschen Theorie. Wir geben zunächst einige Beobachtungen von König. Die unter d angegebenen Zahlen sind den Drehungsmomenten proportional, unter T sind die Schwingungsdauern, unter Λ die von der Luftreibung befreiten Dekremente und unter $\Lambda \cdot 10^5 : T^2$ die Quotienten aus den mit 10^5 multiplizierten Dekrementen und dem Quadrate der zugehörigen Schwingungsdauer angegeben; die Werte beziehen sich auf einen Silberdraht von 73^{cm} Länge und $0{,}09^{mm}$ Dicke.

d	T (Sek.)	Λ	$\Lambda \cdot 10 : T^2$
4	11,991	0,00861	5,981
8	11,137	738	5,950
18	9,591	531	5,772
28	8,569	393	5,353
38	7,792	314	5,172
44	7,203	269	5,185
68	6,346	204	5,066
88	5,737	165	5,013

Die letzte Zahlenreihe zeigt, daß mit wachsender Schwingungsdauer das logarithmische Dekrement nur wenig schneller als dem Quadrate der Schwingungsdauer proportional wächst.

A. Koch kam bei seinen Versuchen zu dem Resultate, daß das logarithmische Dekrement etwas langsamer als das Quadrat der Schwingungsdauer wächst. Die in folgender Tabelle angegebenen Zahlen wurden an Drähten von 100^{cm} Länge und $0{,}27^{mm}$ Durchmesser erhalten, nachdem dieselben durch langes Hängen unter der gleichen Belastung von allen frühern Nachwirkungsdeformationen befreit waren.

$\Lambda \cdot 10^5$	T (Sek.)	$\Lambda \cdot 10^5 : T^2$	$\Lambda \cdot 10^5$	T	$\Lambda \cdot 10^5 : T^2$
	Kupfer			Silber	
892,21	10,793	7,659	244,01	10,03	2,425
1599,71	15,54	6,624	411,91	13,27	2,337
			552,81	15,73	2,234
	Eisen			Platin	
119,81	6,805	2,588	75,24	7,058	1,510
151,26	8,027	2,348	123,31	9,455	1,379
214,91	10,07	2,119	315,41	16,07	1,221
	Messing			Neusilber	
74,81	8,903	0,944	54,71	7,84	0,890
126,76	12,019	0,877	113,91	12,86	0,66[illegible]
208,61	15,61	0,856	319,61	23,66	0,5[illegible]

1) *Walther König*, Wiedem. Ann. 32. p. 208. 1887.
2) *A. Koch*, Wiedem. Ann. 36. p. 122. 1889.

In welcher Weise sich das logarithmische Dekrement bei dieser Anordnung mit den Dimensionen der Drähte ändert, hat Koch nicht untersucht. Dagegen hat er gezeigt, daß das logarithmische Dekrement von dem elastischen Zustande der Drähte wesentlich abhängt, indem er fand, daß das Dekrement derselben im harten Zustande bei gleicher Schwingungsdauer erheblich größer ist als im ausgeglühten.

Nach den Versuchen von Streintz und Schmidt wächst das Dekrement ganz erheblich mit steigender Temperatur.

Man wird hiernach für jeden Draht das den Versuchsumständen entsprechende logarithmische Dekrement, wenn man die Dämpfung bestimmen will, direkt messen müssen.

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§ 63.

Konstitution der Flüssigkeiten. Wir haben im § 47 als zweiten Aggregatzustand den flüssigen bezeichnet und die Flüssigkeiten dahin definiert, daß sie ein festes Volumen besitzen, aber keine selbständige Gestalt, so daß sie sofort die Gestalt des Gefäßes annehmen, in welches wir sie gießen. Die einzelnen Teile der Flüssigkeiten sind nicht, wie die der festen Körper, fest miteinander verbunden, sie können sich vielmehr unter dem Einfluß der geringsten Kraft gegeneinander verschieben und fortwährend ihren Ort verändern, indem jedes Teilchen nach und nach einen bestimmten Platz einnimmt und wieder verläßt, um von einem andern ersetzt zu werden.

Aus dieser, soweit wir beurteilen können, vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen gegeneinander ergibt sich zunächst, daß die flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die auf jedes Teilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, wenn also die auf das Teilchen wirkenden Drucke nach gerade entgegengesetzten Richtungen genau gleich sind und deshalb sich aufheben. Denn wäre der Druck auf das Molekül nach der einen Richtung stärker als nach der gerade entgegengesetzten, so müßte das Molekül, da es auch dem kleinsten Drucke folgt, sich nach der Richtung der größern Kraft bewegen.

Es folgt weiter, daß, wenn wir ein ringsgeschlossenes Gefäß mit Flüssigkeit haben, welche unter der Wirkung irgend welcher Kräfte im Gleichgewicht ist (Fig. 74) und nun durch einen Stempel B einen Druck auf die Flüssigkeit ausüben, daß dann dieser Druck sich ganz ungeändert durch die Flüssigkeit ausbreiten muß. Sei der Druck auf den Stempel normal zur Berührungsebene des Stempels und der Flüssigkeit gleich P, so daß die Flächeneinheit der Berührungsebene, welche die Größe S habe, den Druck $\frac{P}{S}$ erhält, so wirkt auf jede im Innern oder in der Grenzfläche

der Flüssigkeit gedachte Ebene, deren Fläche gleich s ist, der Druck $\frac{P}{S} \cdot s$ also überall auf die Flächeneinheit der Druck $\frac{P}{S}$.

Um dieses nachzuweisen, nehmen wir an, die Flüssigkeit in dem Ge-fäße Fig. 74 sei unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht, un es wirke nun auf den Stempel B eine Kraft, so daß die Flächeneinhe der Berührungsebene einen normalen Druck p_0 erfahre. Denken wir un von dem Mittelpunkte des Stempels B eine Linie in das Innere der Flü-sigkeit von der Länge l, etwa in der Richtun nach dem Mittelpunkte des Stempels A, und un diese Linie einen Kreiszylinder gelegt, dessen Ra-dius gegen die Länge nur sehr klein sei. Die an B anliegende Grenzfläche dieses Zylinders steht schief zur Achse, ihre Normale bildet mit der Achse denselben Winkel α, welchen die Normale der Stempelfläche mit der Richtung AB bildet. An der andern Seite denken wir uns den Zylinder ebenfalls durch eine schiefe Endfläche begrenzt $a'b'$ (Fig. 75), welche etwa parallel sei mit der Fläche des Stempels A, deren Normale mit der Achse den Winkel α' bilde. Die Richtung der Achse bilde mit der Vertikalen den Winkel β. Wenn die Flüssigkeit vor der Herstellung des Druckes im Gleichgewicht war, so bleibt sie es auch nach derselben. Die Flüssigkeit befindet sich also im Innern des gedachten Zylinders im Gleichgewicht. Da nun aber infolge des Druckes auf ab und der Schwere der im Innern des Zylinders vorhandenen Flüssigkeit eine bewegende Kraft vorhanden ist, so kann die Flüssigkeit wegen der vollkommen freien Beweglichkeit der Teile nur dann in dem Zylinder eingeschlossen und in Ruhe bleiben, wenn die auf die äußere Begren-zung des Zylinders wirkenden, durch die um-gebende Flüssigkeit ausgeübten Drucke gleich den bewegenden Kräften sind, oder wenn die überhaupt auf die Grenzfläche des Zylinders wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Denken wir uns die überhaupt auf die Flüssigkeit des Zylinders durch die Umgebung ausgeübten Drucke jeden in zwei Komponenten zerlegt, deren eine normal zur Grenzfläche des Zylinders ist an der Stelle, wo die Kraft wirkt, deren andere parallel der Grenzfläche ist, so müssen die letztern für sich schon im Gleich-gewicht sein, da sonst die Flüssigkeit im Innern des Zylinders sich gegeneinander verschieben würde. Die zur Oberfläche normalen Drucke und die Schwere der Flüssigkeit stehen dann für sich wieder im Gleichgewicht, weil sonst der Zylinder als solcher sich in der umgebenden Flüssigkeit bewegen würde.

Fig. 74.

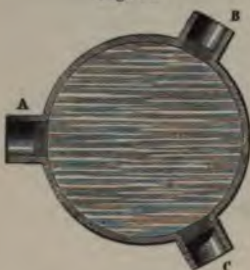
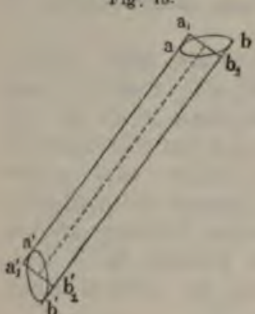


Fig. 75.



Wenn diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so haben sie nach keiner Richtung eine Resultierende; bilden wir also die Summe der Pro-jektionen nach irgend einer beliebigen Richtung, so muß, welche Richtung wir auch wählen, diese Summe stets gleich Null sein. Projizieren wir nu

die Kräfte, welche, wie wir eben sahen, den Zylinder als solchen bewegen können, auf die Achse des Zylinders, so sieht man zunächst, daß die Summe aller Projektionen der auf die Seitenfläche des Zylinders wirkenden Drucke auf die Achse für sich Null ist, da diese Kräfte zur Achse senkrecht sind; es müssen also ebenfalls für sich Null sein die Summe der auf die Achse des Zylinders projizierten Komponenten der auf die schiefen Endflächen wirkenden Drucke und der Schwere der im Zylinder enthaltenen Flüssigkeit. Setzen wir den Druck auf die Fläche ab gleich p, den auf die Endfläche $a'b'$ wirkenden gleich p', und bezeichnen wir das Gewicht der Flüssigkeit des Zylinders mit q, so ist diese Gleichgewichtsbedingung

$$p \cdot \cos \alpha + p' \cdot \cos \alpha' + q \cdot \cos \beta = 0.$$

Bezeichnen wir den Querschnitt unseres Zylinders mit σ, so ist nach bekannten Sätzen der Stereometrie die Größe der schiefen Endfläche ab, welche wir mit s bezeichnen wollen,

$$s = \frac{\sigma}{\cos \alpha},$$

somit

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{s}.$$

Ebenso erhalten wir für $\cos \alpha'$, wenn wir die Größe der schiefen Endfläche $a'b'$ mit s' bezeichnen,

$$\cos \alpha' = \frac{\sigma}{s'}.$$

Das Volumen des schief abgeschnittenen Zylinders ist, nach ebenfalls bekannten Sätzen der Stereometrie, gleich dem Volumen des geraden Zylinders, dessen Achse gleich ist der Länge der Achse des schief abgeschnittenen Zylinders, den wir also erhalten, wenn wir durch die Mittelpunkte der schiefen Endflächen die geraden Endflächen $a_1 b_1$ und $a'_1 b'_1$ legen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, das Gewicht der Volumeinheit mit d, so ist das Gewicht q der im Zylinder enthaltenen Flüssigkeit

$$q = \sigma \cdot l \cdot d.$$

Setzen wir die so erhaltenen Werte für $\cos \alpha$, $\cos \alpha'$, q in die sich aus dem Gleichgewicht des Zylinders ergebende Gleichung ein, so wird

$$\frac{p}{s} \cdot \sigma + \frac{p'}{s'} \cdot \sigma + \sigma l d \cdot \cos \beta = 0$$

oder

$$-\frac{p'}{s'} \cdot \sigma = \frac{p}{s} \cdot \sigma + \sigma \cdot l d \cdot \cos \beta$$

Da β der Winkel ist, welchen die Achse des Zylinders mit der Vertikalen bildet, so ist

$$l \cdot \cos \beta = h$$

gleich dem lotrechten Abstande der Mittelpunkte der beiden Endflächen des Zylinders, und wir erhalten dann schließlich

$$-\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + d \cdot h.$$

Die Quotienten $\frac{p}{s}$ und $\frac{p'}{s'}$ liefern uns die auf die Flächeneinheit wirk-
samen Drucke, vorausgesetzt, daß die Drucke auf derselben gleichmäßi-
verteilt und überall so groß sind als auf den sehr kleinen Flächen s und s'.
Dann sagt also die letztere Gleichung, daß auf der untern Fläche $a'b'$ de-
Zylinders ein gegen das Innere des Zylinders gerichteter normaler Druc-
wirkt, welcher für die Flächeneinheit gleich ist dem auf die Flächeneinhe-
der obern Endfläche des Zylinders wirkenden Drucke, vermehrt um da-
Gewicht eines Flüssigkeitszylinders, dessen Querschnitt der Flächeneinhe-
und dessen Höhe gleich ist dem vertikalen Abstande der Mittelpunkte de-
Flächen, welche den Zylinder oben und unten begrenzen.

Da wir vorher sahen, daß in einer Flüssigkeit nur Gleichgewich-
sein kann, wenn die auf die Moleküle nach entgegengesetzten Richtunge-
wirkenden Kräfte einander gleich sind, so folgt, daß eine ebensolche Kraf-
auf die Flächeneinheit der untern Grenzfläche von innen nach außen wirk-
und daraus weiter, da wir über die Lage unseres Zylinders, also über de-
Winkel β und ebenso über die Winkel α und α' gar keine spezielle Voraus-
setzung gemacht haben, daß sich der auf irgend eine Fläche im Inner-
oder an der Grenze der Flüssigkeit wirkende Druck nach einer beliebige-
Richtung ganz ungeändert fortpflanzt, so daß auf die Flächeneinheit imme-
derselbe Druck wirkt. Setzen wir z. B. in Fig. 74 etwa voraus, daß di-
Stempel A, B, C sich in derselben Horizontalebene befinden, so ist h gleich
Null, und wir erhalten dann, wenn die Querschnitte der Stempel S, S_1, S_2
sind, für die auf dieselben wirkenden Drucke P, P_1, P_2

$$\frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}$$

oder mit der vorhin gewählten Bezeichnung

$$\frac{P}{S} = p_0$$

$$P_1 = p_0 \cdot S_1; \qquad P_2 = p_0 \cdot S_2 .$$

Liegen die Stempelflächen nicht in derselben Horizontalebene, so gi-
für den fortgepflanzten Druck ganz dasselbe; der auf die im tiefern Nivea-
liegenden Stempelflächen wirkende Druck wird dann nur vermehrt durc-
das Gewicht des Flüssigkeitszylinders, dessen Querschnitt gleich ist de-
der tiefer liegenden Stempelflächen, und dessen Höhe gleich ist der Nivea-
differenz der Stempelflächen.

Aus der Gleichmäßigkeit der Fortpflanzung des Druckes ergibt sic-
weiter, daß, wenn wir uns im Innern der Flüssigkeit eine kleine ebe-
Fläche denken, welche durch die vorhandenen Kräfte irgend einen Druc-
erfährt, daß der Druck dann unabhängig ist von der Richtung, welche d-
kleine Fläche hat. Wir mögen die Ebene drehen wie wir wollen, d-
Druck ist immer derselbe. Die vorhin aus der Beweglichkeit der Molekü-
gezogene Folgerung, daß die auf ein Molekül nach gerade entgegengesetzt-
Richtungen wirkenden Kräfte gleich sein müssen, können wir daher da-
erweitern, daß die im Innern einer Flüssigkeit auf ein Molekül wirken-
Kräfte nach allen Richtungen des Raumes dieselben sind.

§ 64.

Kompressibilität der Flüssigkeiten. Wir haben im vorigen Paraphen die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes, den wir an einer elle einer Flüssigkeit ausüben, lediglich als eine Folgerung aus der vollmmen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen abgeleitet; wir können er leicht auch den physikalischen Vorgang erkennen, wodurch diese breitung des Druckes zustande kommt.

Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Molele derselben in bestimmten durch die gegenseitigen Anziehungen und stossungen bedingten Entfernungen. Wenn wir nun auf eine rings einschlossene Flüssigkeit in einer Richtung einen Druck ausüben, so muß nächst in dieser Richtung, gerade wie bei den festen Körpern, eine Anherung der Moleküle stattfinden, bis die infolge der Annäherung derlben vergrößerte Abstoßung der Moleküle gleich ist der durch den äußern ruck vermehrten Anziehung der Moleküle. Gerade so aber, wie die Molele sich in der Richtung des Druckes einander nähern, so nähern sie sich ch in den auf die Druckrichtung senkrechten Dimensionen, und zwar, e aus der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes folgt, um genau e gleiche Größe. Darin unterscheiden sich also die Flüssigkeiten von n festen Körpern; drücken wir einen festen Körper in der einen Richtung sammen, so ist die Querdilatation nur ein Bruchteil der in ersterer Richtg eintretenden Kompression; soll die Ausdehnung nach der Quere hindert werden, so bedarf es deshalb auch nur eines ebenso großen uchteils der in der ersten Richtung tätigen Kraft, welche in der Richtg der Querdimensionen der Ausdehnung entgegenwirken muß. Weil r bei einer in einem unausdehnsamen Gefäße eingeschlossenen Flüssige die Moleküle nach allen Richtungen sich gleichmässig nähern, deshalb ß wenn keine Ausdehnung eintreten soll, von allen Seiten der gleiche gendruck wirken.

Die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten können somit als eine Folge davon ansehen, daß die Flüssigkeiten in einer tung ebenso wie die festen Körper elastisch sind; es treten in ihnen stizitätskräfte immer dann auf, aber auch nur dann, wenn die Moleküle ihrer Gleichgewichtslage so verschoben werden, daß sie sich einander ern; eine Verschiebung der Moleküle ohne Änderung der Dichtigkeit t keine elastische Kraft hervor, die Flüssigkeiten besitzen also nur melastizität.

Um den Nachweis zu liefern, daß die gleichmäßige Fortpflanzung des uckes in der Tat eine Folge der durch eine Annäherung der Moleküle eckten elastischen Kraft ist, haben wir zu zeigen, daß die Flüssigkeiten der Tat durch äußere Drucke eine Volumverminderung erfahren. en wir dann gleichzeitig die durch einen gegebenen Druck hervorrachte Volumverminderung messen, können wir die Abhängigkeit der umverminderung von dem äußern Drucke und besonders die Frage tscheiden, ob auch hier, wie bei festen Körpern, die Volumverminderung Größe des Druckes proportional ist. Ist das der Fall, so muß die ch einen auf die Flächeneinheit wirkenden Druck P hervorgebrachte umverminderung v in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens V

$$v = \varkappa \cdot P$$

sein, worin $\varkappa$ eine Konstante ist, welche man als den Kompressionskoe zienten der Flüssigkeit bezeichnet. Der reziproke Wert dieses Koefficien oder

$$\frac{1}{\varkappa} = E$$

ist dann der Elastizitätskoeffizient der Flüssigkeiten, jener Koeffizient, i welchem wir die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens angegeb Volumverminderung multiplizieren müssen, um die durch diese Volumv minderung geweckte elastische Kraft zu erhalten.

Der erste Versuch, um die Kompressibilität der Flüssigkeiten na zuweisen, wurde von der Academia del Cimento zu Florenz[1]) gemac jedoch mit ungünstigem Erfolge. Man nahm unter anderen Versuch eine mit Wasser gefüllte, mit einer Öffnung versehene Hohlkugel v Silber. In die Öffnung wurde ein Stempel mit großer Gewalt hine getrieben; aber anstatt einer Zusammendrückung des Wassers beobacht man, daß dasselbe durch die Poren des Silbers hindurch gepreßt wur

Mit günstigerem Erfolge wurde der Versuch im Jahre 1761 v Canton[2]) wiederholt, dem es gelang, den Nachweis zu liefern, daß d Wasser durch einen äußern Druck eine Verminderung des Volumens e fuhr. Canton wandte zu seinen Versuchen eine mit einer langen u engen Glasröhre versehene Kugel an. Dieselbe wurde mit Wasser gefü erhitzt, und wenn das Wasser im Kochen war, die Spitze der Röhre z geschmolzen. Durch die Abkühlung zog sich dann das Wasser zusamm und reichte bei einer bestimmten Temperatur bis zu einem gewissen Punk der Röhre. Durch das Zusammenziehen des Wassers entstand über de selben in der Röhre ein luftleerer Raum. Wurde die Spitze abgebroch so drang die Luft rasch in die Röhre, und unter ihrem Drucke sah m die Flüssigkeit in der Röhre sinken. Dieses Sinken hatte jedoch zw Ursachen, einmal die Zusammendrückung des Wassers, dann aber die Ve größerung des Volumens des Gefäßes dadurch, daß plötzlich der Dru im Innern desselben um den Druck einer Atmosphäre erhöht wurde. U die Vergrößerung des innern Raumes des Gefäßes zu messen, genügt den äußern Druck auf die Gefäßwände gerade soviel zu vermindern, a vorher der innere Druck vermehrt war; brachte man also die Kugel i den luftleeren Raum, so mußte sich ihr Volumen gerade so vermehr wie in dem vorigen Falle, Die Vermehrung wurde durch das Sinken d Wassers in der engen Röhre gemessen und die so erhaltene Größe w der bei dem ersten Versuche erhaltenen abgezogen; der Unterschied g die Kompression des Wassers. Auf diese Weise war also die Kompre bilität des Wassers bewiesen. Ähnliche Versuche stellte 1820 Perkin

---

1) *Fischer,* Geschichte der Physik. 2. p. 207.

2) *John Canton,* Experiments to prove that water is not incompressi Philosophical Transactions of London Royal Society. 52. 1762. Poggend. A 12. p. 43. 1828.

3) *Perkins,* Philosophical Transactions for 1826. part. III. p. 541. Po Ann. 9. p. 547. 1827.

ichem Erfolg. Die ersten genauer messenden Versuche rühren Oersted[1] her.

ted konstruierte einen Apparat, den man Piëzometer oder Sym- nennt. Das Piëzometer besteht aus einem weiten Gefäße G an dem sich ein sehr enges Glasrohr O befindet, welches in nen Trichter endigt und unverschlossen bleibt.

Rohr ist genau zylindrisch und in gleiche Teile geteilt. Zu- ß der Apparat graduiert, d. h. die Kapazität des ganzen Gefäßes es zwischen zwei Teilstrichen befind- umes verglichen werden. Wir wollen ren etwas näher beschreiben, da wir g derselben Aufgabe begegnen.

Fig. 76.

wiegt zunächst das leere Gefäß und nn mit Quecksilber; wegen der Enge läßt sich das nicht durch einfaches füllen, weil die im Gefäße enthaltene entweichen und deshalb das Quecksilber ingen kann. Man erwärmt daher das hält den Trichter, in welchem das digt, unter Quecksilber. Beim Erkal- lann durch den Druck der äußern Luft ilber in die Röhre und das Gefäß auf. uecksilber auf zu steigen, so erwärmt lings und so fort, bis das Gefäß ganz ilber gefüllt ist. Um keine Spur Luft fäß zu lassen, erwärmt man dann das mals, taucht währenddes seine Spitze ber und läßt es dann auf 0° erkalten, es vorsichtig mit schmelzendem Eise ach einiger Zeit, vielleicht nach einer de oder bei großen Gefäßen noch länger, den mit Quecksilber von der Temperatur 0° gefüllten Apparat aus eraus, trocknet ihn rasch und vorsichtig ab und bestimmt mög- sein Gewicht. Von dem erhaltenen Totalgewicht P zieht man t p des leeren Gefäßes ab und erhält aus dem Quotienten $\frac{P-p}{D}$ en des Gefäßes in Kubikzentimetern, wenn P und p in Grammen d D das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist

rf erwärmt man das Gefäß sehr wenig, bewirkt dadurch, daß cksilber austritt, und läßt es wieder wie vorhin auf 0° er- aben zieht sich das Quecksilber zusammen, und schließlich wird les in die Röhre hineinragenden Quecksilberfadens konstant einem der Röhre gegenüberstehen, der um n Teilstriche tiefer sei als gen Wägung. Jetzt wiegt man wieder; und ist das jetzt ge- wicht gleich P', so gibt die Verminderung des Gewichts $P - P'$ Gramme Quecksilber den Raum zwischen jenen n Teilstrichen

[1] sted, Denkschriften der Kopenhagener Akademie. 9. 1822. Poggend 603. 1827

ausfüllen; der Quotient $\frac{P-P'}{D}$ gibt dann diesen Raum in Kubikzentimete und der Quotient $\frac{P-P'}{nD}$ den Raum zwischen zwei Teilstrichen in de selben Einheit an.

Nach geschehener Kalibrierung wird das Gefäß in ganz gleicher Wei mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und in den kleinen Tricht ein Tropfen Quecksilber gebracht. Dieser dient einmal als Pfropfen, u das Eindringen von Flüssigkeit in das Gefäß zu verhüten, dann ab auch als Index, da er während der Kompression in die Röhre hinabgedrüc wird und somit angibt, um wieviel das Volumen der Flüssigkeit klein geworden ist. Das Gefäß wird auf einer Messingplatte befestigt, danebe ein Thermometer L und eine geteilte, unten offene, oben geschlossene, m Luft gefüllte Röhre K, welche als Druckmesser dient, und dann die gan Vorrichtung in ein mit Wasser gefülltes Gefäß hinabgelassen, das al Kompressionsapparat dient.

Das Gefäß E besteht aus einem Zylinder von starkem Glase, de unten in einen Fuß F eingelassen und oben mit einer Fassung verseh ist, in deren Röhre A sich ein beweglicher Kolben D befindet. Ma füllt das Gefäß, während der Kolben sich über A befindet, durch den Hahn i mit Wasser soweit, daß dasselbe aus einer Öffnung bei A ausfließt. Ma schließt dann den Hahn und schraubt den Kolben herab. Sobald derselb unter A herabgeschraubt ist, kann kein Wasser mehr entweichen und da des Gefäßes wird zusammengedrückt.

Der Druck, den man auf diese Weise ausübt, trifft nach den Ent wicklungen des vorigen Paragraphen in ganz gleicher Weise die äuße Wand des Piëzometers und die in seinem Innern enthaltene Flüssigkeit Man sieht den Index um eine gewisse Anzahl Teilstriche sinken und mi dadurch die Volumverminderung der im Piëzometer enthaltenen Flüssigkei Zugleich wird auch die Luft in der Röhre K komprimiert, und in de Volumveränderung derselben erhalten wir, wie wir später sehen werden ein Maß für den ausgeübten Druck.

Man hat auf diese Weise die Volumverminderung gemessen und andererseits den Druck, welcher dieselbe hervorgebracht hat. Dividiert man die Volumveränderung durch das ursprüngliche Volumen und diesen Quotienten durch den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck, so erhält man den scheinbaren Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit, d. h. di Kompression der Flüssigkeit ohne Rücksicht auf diejenige des Gefäßes.

Oersted fand diesen Koeffizienten für Wasser gleich 46 Millionteile wenn man als Einheit des Druckes den einer Atmosphäre annimmt, d. h. wenn man in einem rings geschlossenen Gefäße auf jedes Quadratzenti meter Oberfläche einen Druck von $1{,}0333^{\text{kg}}$ ausübt, so wird die Flüssig keit um 46 Millionteile ihres ursprünglichen Volumens komprimiert. Oersted hielt dies für die wahre Kompressibilität des Wassers; denn er glaubt weil der Druck in ganz gleicher Weise auf die äußere und innere Wa ausgeübt wird, so könne sich die Kapazität des Gefäßes nicht ändern ode ganz unmerklich dadurch, daß die Wanddicke des Gefäßes etwas geändert wird. Das Irrige dieser Annahme ergibt sich aus unsern Entwickl des § 51. Wir erhielten dort für die Verminderung einer Kug

vom Radius r, welche in einer Hohlkugel liegt, deren innerer Radius gleich R_0, äußerer gleich R_1 ist (der Wert von r liegt also zwischen R_0 und R_1) und wenn auf der äußern Fläche der Druck P_1 auf der innern P_0 wirkt

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\left\{\frac{1}{3K+2k}\cdot\frac{P_1R_1^3-P_0R_0^3}{R_1^3-R_0^3}+\frac{1}{4k}\,\frac{R_0^3R_1^3(P_1-P_0)}{r^3(R_1^3-R_0^3)}\right\}.$$

Die Volumverminderung des Hohlraumes der Kugel, wenn wie bei den Versuchen von Oersted der Druck pro Flächeneinheit außen und innen gleich ist, erhalten wir aus jener Gleichung, wenn $P_1 = P_0$, $r = R_0$ gesetzt wird, und es ergibt sich

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\,\frac{1}{3K+2k}\cdot P_1 = 3\,\frac{1-2\mu}{E}\cdot P_1 = C_k\cdot P_1.$$

Die Volumverminderung des Hohlraumes unter diesen Umständen ist demnach die gleiche wie die einer massiven Kugel. Gleiches gilt, welche Gestalt auch das Gefäß hat.

Ist V das Volumen des Piëzometers, $\varkappa$ der wahre Kompressionskoeffizient des Wassers, so würde bei ganz ungeändertem Gefäße das Volumen des Wassers bei einem Drucke P um $\varkappa PV$ vermindert sein, da aber der Hohlraum um $C_k PV$ kleiner geworden ist, so ist die beobachtete Volumverminderung w des Wassers

$$w = \varkappa PV - C_k PV;\qquad \frac{w}{PV} = \varkappa - C_k.$$

Man beobachtet also die Differenz zwischen dem Kompressionskoeffizienten des Wassers und dem kubischen Kompressionskoeffizienten des Gefäßes.

Colladon und Sturm wiesen diesen Irrtum in Oersteds Versuchen nach und unternahmen es, ihn zu korrigieren[1]). Sie stellten eine große Reihe von Versuchen mit einem dem Oerstedschen sehr ähnlichen Apparate Fig. 77 an. Ein Piëzometer A wurde wie das Oerstedsche hergestellt und graduiert und dann in ein weites Gefäß C mit starken Wänden, welches mit Wasser gefüllt war, eingeschlossen. Letzteres diente als Kompressionsapparat. Der einzige Unterschied besteht darin, daß sie das Piëzometer horizontal legten und den ausgeübten Druck mit einem fein geteilten, langen und deshalb sehr empfindlichen Quecksilbermanometer KJ maßen. Dieser Druck wurde mit Hilfe eines Kolbens ausgeübt, dessen Stiel I durch ein Seil gezogen wurde, welches um eine durch eine Schraube ohne Ende H bewegliche Walze gerollt war.

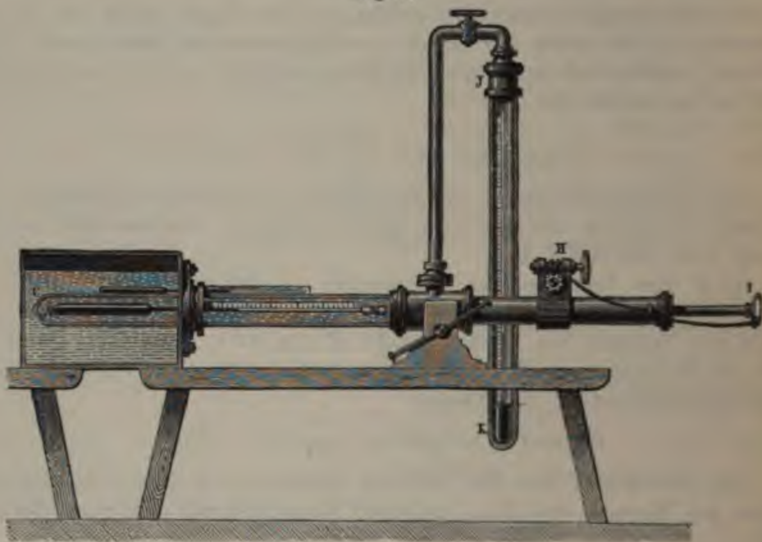
Colladon und Sturm bemerkten nun bald auch einige Fehlerquellen, welche an sich zwar sehr klein, auf das endliche Resultat wegen der Kleinheit der zu messenden Größen jedoch von bedeutendem Einfluß wurden. Der Index von Quecksilber in der Röhre des Piëzometers bot manche Unbequemlichkeit, er adhärierte am Glase, bewegte sich nicht regelmäßig, sondern sprungweise bei Vermehrung des Druckes. Sie wandten deshalb einen Tropfen Schwefelkohlenstoff oder auch eine kleine Luftsäule an und erhielten so regelmäßig verlaufende Versuche.

Andererseits ist das Piëzometer ein wahres Thermometer und wegen

1) Colladon und Sturm, Annales de chim. et de phys. 36 p. 113 1827. Poggend. Ann. 12. 1828.

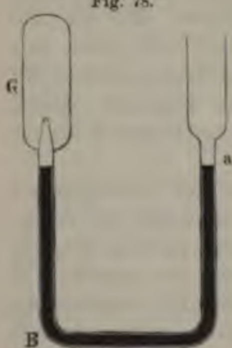
des großen Gefäßes und der engen Röhre sogar ein sehr empfindliches. Jede Temperaturänderung veranlaßt daher eine Bewegung des Index; und da jede Zusammendrückung das Wasser erwärmt, jede Ausdehnung wieder abkühlt, so waren die beobachteten Variationen Resultate sehr verwickelter Natur. Man schaffte diese Störung fort, indem man das Kompressions-

Fig. 77.



gefäß in ein großes Gefäß mit Wasser einschloß, welches dazu diente, die Temperatur konstant zu halten. Die Versuche waren daher sehr genau. Bei der Korrektion wegen der Kompression des Gefäßes begingen Colladon und Sturm jedoch leider den Fehler, daß sie den kubischen Kompressionskoeffizienten einfach gleich dem dreifachen linearen Dilatationskoeffizienten setzten, welchen sie an einem Stabe aus demselben Glase, aus welchem das Piëzometer bestand, gemessen hatten. Sie erhielten so für den kubischen Kompressionskoeffizienten und den Druck einer Atmosphäre 0,0000033. Nehmen wir die Querkontraktion des Glases gleich 0,25, so würde der Kompressionskoeffizient gleich 0,00000165. Die Zahlen für die Kompression der Flüssigkeiten von Colladon und Sturm sind demnach zu groß.

Fig. 78.



Einige Jahre später stellte Aimé[1]) Versuche über die Kompression der Flüssigkeiten an, bei denen er eigentümlich geformte Piëzometer ins Meer senkte und so den Druck des Meerwassers zur Kompression benutzte. Die Form der Piëzometer zeigt Fig. 78. In dem Gefäß G, daß die zu komprimierende Flüssigkeit enthielt, endigte die zu einer Spitze ausgezogene Röhre B, welche bis zu einer gewissen Höhe

1) *G. Aimé*, Ann. de chim. et de phys. 8. (3.) 1843.

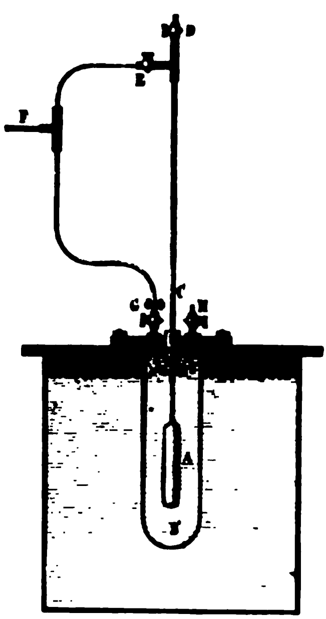
:ksilber gefüllt war. Wurde bei dem Einsenken des Apparates in ser auf die Fläche des Quecksilbers bei *a* ein Druck ausgeübt, so e Flüssigkeit in *G* komprimiert, bei hinreichender Kompression floß :ksilber durch die Spitze in das Gefäß *G* und blieb in demselben, i Piëzometer aus dem Meer herausgezogen wurde. Aus der Menge is Gefäß ausgetretenen Quecksilbers ließ sich die Kompression be-

Die Volumverminderung war gleich dem Volumen der im Rohre dem Quecksilber befindlichen Flüssigkeit und dem Volumen des efäß *G* eingetretenen Quecksilbers. Als Korrektion wegen der ion des Gefäßes nahm er den Wert, der sich aus den Versuchen ladon und Sturm unter Voraussetzung $\mu = 0{,}25$ ergibt, also l6.

st sehr schwierig bei diesem Verfahren genaue Werte zu erhalten, emperaturen, denen das Piëzometer im Laufe des Versuches aus-t, sich schwer genau ermitteln lassen.

suche von Regnault[1]). Regnault wurde durch andere Fragen eführt, sich eingehend mit diesem Gegenstande zu beschäftigen. dem Piëzometer *A* eine genau be-e geometrische Gestalt, einer Metall-n bekanntem innern und äußern ler eines Zylinders mit ebenen oder förmigen Endflächen, wie in Fig. 79. iefäß ist eine gut kalibrierte Glas-' angesetzt, die ihrer ganzen Länge ilt ist, und deren Volumverhältnisse rhin beschriebenen Weise bestimmt

Fig. 79.



schließt nun das Gefäß des Piëzo-n einen mit Wasser angefüllten ınder *B*, der durch einen mittels ı befestigten Deckel verschlossen ist. ne Öffnung des Deckels reicht der Piëzometers aus dem Gefäße her-mit Kitt in der Öffnung befestigt Innere der Röhre kann an ihrem ıde durch einen Hahn *D* mit der uft in Verbindung gebracht und ke der Atmosphäre ausgesetzt wer-rch den Hahn *E* und die Röhre ı das Innere der Röhre *CD* aber einem mit komprimierter Luft ge-efäße in Verbindung gebracht und g einem starkem Drucke ausgesetzt werden oder nicht. Durch die ; kann dasselbe Gefäß mit komprimierter Luft, wenn der Hahn *G* ınd *H* geschlossen ist, auch einen Druck auf das Wasser des Ge-' ausüben.

[1]) *egnault*, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie. 21. aris 1847

Man kann somit 1. auf das Piëzometer einen äußern Druck ausüb indem man E schließt, G und D öffnet und H schließt; 2. einen inne und äußern Druck, wenn man H und D schließt, G und E öffnet; 3. ein innern Druck allein, wenn man D und G schließt, H und E öffnet.

Regnault vollführte nach und nach alle drei Kompressionen.

Wie wir bereits § 51 erwähnten, glaubte Regnault durch d ersten der erwähnten Versuche direkt den Kompressionskoeffizienten des Gefäßes bestimmen zu können, indem Lamé in den Formeln, weld er Regnault zur Berechnung dieser Versuche gegeben hatte, von von herein den Querkontraktionskoeffizienten $\mu = 0{,}25$ gesetzt hatte. In d Tat erhielten wir § 51 für den ersten Versuch die Volumveränderung

$$\frac{\varDelta V'}{V} = \frac{9}{2}\,\frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{R_1^{\,3}}{R_1^{\,3}-R_0^{\,3}}\,P.$$

Setzen wir $\mu = 0{,}25$, so geht der Ausdruck über in

$$\frac{\varDelta V'}{V} = \frac{9\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{E}\,\frac{R_1^{\,3}}{R_1^{\,3}-R_0^{\,3}}\cdot P = \frac{9}{4}\,C_k\,\frac{R_1^{\,3}}{R_1^{\,3}-R_0^{\,3}}\,P.$$

Da der zweite Versuch die scheinbare Kompressibilität gibt, di Differenz zwischen dem wirklichen Kompressionskoeffizienten $\varkappa$ und des Kompressionskoeffizienten C_k des Gefäßes, würde zu dieser Differenz d aus der ersten Beobachtung abgeleitete Kompressionskoeffizient C_k z addieren sein, um die wahre Kompressibilität zu erhalten.

Da μ nicht allgemein 0,25 ist, so ist die Korrektion ungenau. I Ermanglung eines bessern habe ich in früheren Auflagen deshalb aus de ersten Versuche unter Annahme der von Wertheim bestimmten Elasti zitätskoeffizienten für Kupfer, Messing und Glas den Wert von μ und m diesem den Wert von C_k berechnet, eine Korrektion, die ebenfalls unsich ist, weshalb ich die Resultate dieser Rechnungen nicht mehr mitteile.

Der dritte Versuch ist eine Kontrolle für die beiden ersten, die b obachtete Volumverminderung muß nach den Gleichungen des § 51 u der eben gemachten Bemerkung, daß der zweite Versuch die scheinba Kompressibilität gibt, die Summe der bei dem ersten und zweiten Ve suche gefundenen Volumverminderung geben, ein Resultat, das Regna bei allen seinen Messungen bestätigt fand.

Später hat Grassi[1]) mit dem Regnaultschen Apparate eine Rei von Flüssigkeiten untersucht; zur Korrektion wegen der Kompression d Gefäßes nahm er nach dem Vorgange von Wertheim $\mu = \frac{1}{3}$, da wird der kubische Kompressionskoeffizient gleich dem linearen, und d erste Versuch gestattet, wenn die Form des Piëzometers genau geometris bestimmt ist, denselben zu berechnen. Die von Grassi angenomm Korrektion ist demnach für alle Versuche mit gläsernen Piëzometern zu kl

Amagat[2]) hat wegen dieser Unsicherheit der Korrektion an sei Piëzometern in der im § 51 besprochenen Weise den Elastizitätskoeffizi den Querkontraktionskoeffizienten und direkt den kubischen Kompressio koeffizienten des benutzten Glases bestimmt. Gerade die direkte Beobachtu des kubischen Kompressionskoeffizienten ist besonders wertvoll, da bei I

1) *Grassi,* Ann. de chim. et de phys. **31.** (3.) 1851.
2) *Amagat,* Ann. de chim. et de phys. **21.** (6.) 1890.

strung der von der Theorie gegebenen Gleichungen die Dimensionen der Piëzometer sowie deren Form eine große Rolle spielen.

Vom größten Einfluß ist die Korrektion für die Kompression des Piëzometers zur Messung der Kompressibilität des Quecksilbers, da dieselbe nur wenig größer als diejenige des Glases ist. Setzt man für den Querkontraktionskoeffizienten des Glases $\mu = 0{,}25$, so ergeben die Beobachtungen Regnaults für den Kompressionskoeffizienten des Glases für den Druck einer Atmosphäre ($0{,}01033^{kg}$ pro mm^2) den Wert 0,000002 374 die scheinbare Kompressibilität des Quecksilbers wird 0,000001 145 (die von Regnault angegebene Zahl 0,000001 234 beruht auf einem Rechenfehler), somit wird der Kompressionskoeffizient des Quecksilbers für eine Atmosphäre gleich 0,000003 519.

Grassi leitete aus seinen Versuchen mit den Regnaultschen Apparaten für die Kompressibilität des Quecksilbers 0,000002 95 ab, ein Wert, welcher aus dem angegebenen Grunde zu klein ist; nehmen wir statt des von Grassi eingesetzten den Regnaultschen Kompressionskoeffizienten, so erhalten wir 0,000003 74.

Amagat hat mit sieben verschiedenen Piëzometern, deren vier aus Kristallglas, drei aus gewöhnlichem Glase hergestellt waren, für welche, wie eben erwähnt, die Kompressionskoeffizienten direkt gemessen waren, folgende Werte der Kompressibilität des Quecksilbers erhalten.

Piëzometer aus Kristallglas.		Piëzometer aus Glas.	
Nr. 1.	0,000003 916	Nr. 1.	0,000003 898
Nr. 2.	0,000003 925	Nr. 2.	0,000003 880
Nr. 3.	0,000003 937	Nr. 3.	0,000003 934
Nr. 4.	0,000003 954	Mittel	0,000003 904
Mittel	0,000003 933		

Die Werke sind bei Drucken erhalten, die bis zu 50 Atmosphären gingen. Amagat bemerkt am Schlusse seiner Arbeit, daß bei der Schwierigkeit der Bestimmung des Kompressionskoeffizienten der Gläser es ratsamer sei, dieselben durch piëzometrische Versuche mit Quecksilber zu bestimmen. Man beobachtet die scheinbare Kompression und zieht diese von 0,000003 9 ab; die Differenz ist die Kompression des Glases.

Auch Tait[1]) und de Metz[2]) bestimmten direkt die kubischen Kompressionskoeffizienten der von ihnen benutzten Piëzometer; Tait erhielt als Kompressionskoeffizienten des Quecksilbers $3{,}6 \cdot 10^{-6}$, de Metz $3{,}74 \cdot 10^{-6}$ für den Druck einer Atmosphäre.

Für den Druck Kilogramm pro mm^2 ergibt sich aus der Amagatschen Zahl 0,000003 920 : 0,010333 = 0,00038; der Elastizitätskoeffizient des Quecksilbers ist demnach

$$E = \frac{1}{0{,}00038} = 2632^{kg} \text{ pro } mm^2.$$

Die Dimensionen des Elastizitätskoeffizienten einer Flüssigkeit sind selbstverständlich die gleichen wie diejenigen der Elastizitätskoeffizienten

1) Tait, Beibl. 13. p. 443. 1889.
2) de Metz, Wiedem. Ann. 47. p. 731. 1892.

der festen Körper, somit

$$E = s\,[\mu\lambda^{-1}\tau^{-2}],$$

wir müssen den oben geschriebenen Wert mit $981 \cdot 10^5$ multiplizieren ihn im *CGS*-System auszudrücken.

In folgender Tabelle ist eine große Zahl der von Grassi gemessenen Kompressionskoeffizienten zusammengestellt, die in Spalte 3 angegebenen Zahlen sind die mit 10^6 multiplizierten Kompressionskoeffizienten; Spalte gibt die Elastizitätskoeffizienten in Kilogramm pro mm² in der Weise berechnet, wie wir es oben für Quecksilber angegeben haben.

Name der Flüssigkeit	Temperatur	Zusammendrückbarkeit $10^6 \cdot \varkappa$ für Atmosph.	Druck in Atmosphären aus dem $\varkappa$ abgeleitet ist	Elastizitätskoeffizient E in Kilo pro mm²
Wasser	0,0	50,3	—	205
"	1,5	51,5	—	—
"	4,8	49,9	—	—
"	10,1	48,0	—	—
"	13,4	47,7	—	217
"	18,0	46,3	—	—
"	—	46,0	—	—
"	25,0	45,6	—	225
"	34,5	45,3	—	—
"	43,0	44,2	—	—
"	53,0	44,1	—	234
Äthylalkohol	7,3	82,8	2,302	124
"	7,3	85,3	9,495	—
"	13,1	90,4	1,570	114
"	13,1	99,1	8,970	—
Methylalkohol	13,5	91,3	—	113
Äthyläther	0,0	111,0	3,408	93
"	0,0	131,0	7,820	—
"	14,0	140,0	1,580	74
"	13,8	153,0	8,362	—
Chloroform	8,5	62,5	—	165
Chlorcalcium Lösung I	17,5	30,6	—	338
" Lösung II	15,8	20,6	—	500
" Lösung II	41,25	22,9	—	451
Kochsalz Lösung I	18,5	32,1	—	322
" Lösung II	18,1	25,7	—	402
" Lösung II	39,6	26,3	—	393
Jodkalium Lösung	15,5	26,0	—	400
Natronsalpeter Lösung	18,1	29,5	—	350
Soda Lösung	16,6	29,7	—	348
Meerwasser	17,5	43,6	—	237
$H_2SO_4 + H_2O$	13,6	24,2	—	424
$H_2SO_4 + 2H_2O$	14,6	25,0	—	400
$H_2SO_4 + 3H_2O$	16,5	27,1	—	381
$H_2SO_4 + 4H_2O$	14,7	27,9	—	370
$H_2SO_4 + 5H_2O$	14,2	28,3	—	365
$H_2SO_4 + 9H_2O$	14,6	31,5	—	328

Die Versuche Grassis zeigen, daß für Wasser der Kompressionskoeffizient mit steigender Temperatur abnimmt, somit der Elastizitätskoeffizient mit derselben wächst; für die übrigen Flüssigkeiten, soweit

derselben der Einfluß der Temperatur untersucht ist, zeigt dagegen die Kompression mit steigender Temperatur eine Zunahme.

Dieses Resultat ist durch alle spätern Versuche bestätigt und erweitert worden. Zunächst zeigten Pagliani und Vincentini[1]), daß der Kompressionskoeffizient des Wassers bis gegen 60° stetig abnimmt, daß aber bei Temperaturen über 60° der Kompressionskoeffizient zunimmt, ein Resultat, welches von Tait[2]) und Amagat[3]) bestätigt wurde.

Die von Pagliani und Vincentini gefundenen Werte sind folgende:

Temperatur.	$\varkappa \cdot 10^6$	Temperatur.	$\varkappa \cdot 10^6$.
0°	52,1	60°	40,8
10°	48,9	70°	40,9
20°	46,3	80°	41,5
30°	44,2	90°	42,1
40°	42,7	100°	43,0
50°	41,6		

Bis zu 70° lassen sich die Werte von $\varkappa$ recht gut durch die Gleichung

$$\varkappa \cdot 10^6 = 52,1 - 0,372\, t + 0,0031\, t^2$$

darstellen, welche nur wenig von derjenigen abweicht, welche Tait aus seinen Versuchen abgeleitet hat.

Der Gang der Kompressibilität des Wassers bei verschiedenen Temperaturen hängt nicht unwesentlich ab von dem Drucke, unter welchem der Kompressionskoeffizient des Wassers bestimmt wird.

Gegenüber frühern Versuchen von Cailletet[4]) welche eine wirkliche Abänderung des Kompressionskoeffizienten des Wassers mit wachsendem Drucke nicht erkennen ließen, haben Amagat[5]) und Tait[6]) gezeigt, daß derselbe mit steigendem Drucke erheblich abnimmt. Cailletet hatte aus seinen Versuchen bis zu einem Drucke von 705 Atmosphären als scheinbaren Koeffizienten bei 8° den Wert $\varkappa \cdot 10^6 = 45$ gefunden, fügen wir den Regnaultschen oder Amagatschen Kompressionskoeffizienten des Glases $C \cdot 10^6 = 2,2$ hinzu, so ergibt sich für $\varkappa \cdot 10^6$ der Wert 47,2, der nur wenig von dem Paglianischen bei 10° und ebenso von dem von Röntgen und Schneider[7]) bei 9° und einer Drucksteigerung bis 9 Atmosphären gefundenen Werte $\varkappa \cdot 10^6 = 48,1$ abweicht.

Das Verfahren von Cailletet war im wesentlichen das Oerstedsche, nur nahm er die Kompression, um zu hohen Drucken gehen zu können, in sehr dickwandigen Stahlgefäßen vor. Die Methode der Druckmessung

1) *Pagliani* und *Vincentini*, Ann. die Reale Ist. Tecnico Germano Sommeiller a Torino 12. Beiblätter 8. p. 794. 1884. Rend. Reale Accad. dei Lincei 1889 p. 777. Beiblätter 14. p. 94. 1890. Die im Texte mitgeteilten Werte sind der zuerst angegebenen Stelle entnommen.

2) *Tait*, Beiblätter 13. p. 442. 1889.

3) *Amagat*, Comptes Rendus. 104. p. 1159. 1887.

4) *Cailletet*, Comptes Rendus. 75. p. 77. 1872.

5) *Amagat*, Comptes Rendus. 103. p. 429. 1886; 104. p. 1159. 1887; 105. p. 1120. 1887.

6) *Tait*, Proceedings of the Royal Soc. Edinburg. 13. p. 2. 1886. Beibl. 10. p. 149. 1886; 13. p. 442. 1889.

7) *Röntgen* und *Schneider*, Wiedem. Ann. 33. p. 652. 1888.

werden wir in § 66 besprechen. Um die durch den Druck eingetretene Volumänderung zu messen, welche man in den Stahlgefäßen nicht direkt beobachten konnte, waren die Innenflächen der kapillaren Röhren der Piëzometer vergoldet, und das offene Ende derselben in Quecksilber getaucht. Das in die Röhre eindringende Quecksilber löste, soweit es eingedrungen war, das Gold auf, so daß man nach Beendigung des Versuches die während desselben eingetretene Volumverminderung bestimmen konnte.

Amagat, welcher ebenfalls in sehr festen Stahlgefäßen komprimierte, verfuhr nach einem von Tait gemachten Vorschlage etwas anders, er maß die Drucke, welche zum Hervorbringen einer bestimmten Volumverminderung erforderlich sind, mit Hilfe des elektrischen Stromes. Zu dem Zwecke werden in die enge Röhre des Piëzometers in bestimmten Stellen Platindrähte eingeschmelzt, und das zwischen je zwei Drähten abgegrenzte Volumen genau bestimmt. Die Drähte sind außen durch Drähte miteinander verbunden, welche einen bestimmten elektrischen Widerstand haben. Die Piëzometer tauchen, wie bei Cailletet, mit dem offenen Ende nach unten in Quecksilber. Der oberste Draht des Piëzometers tritt durch eine Dichtung, wie bei den § 51 beschriebenen Versuchen Amagats aus dem Kompressionsgefäße heraus. Man verbindet nun das Quecksilber des Gefäßes leitend mit einer galvanischen Säule und den andern Pol mit einem Galvanometer, welches andererseits mit dem obersten Platindraht verbunden ist. Ist der Druck so groß geworden, daß das Quecksilber bis zu dem untersten Platindrahte reicht, so wird der Strom geschlossen; er fließt von dem untersten Platindraht durch sämtliche Widerstände zu dem obersten Drahte, von dort durch das Galvanometer zur galvanischen Säule, und die Nadel des Galvanometers erhält einen Ausschlag. Wird der zweite Platindraht von dem eindringenden Quecksilber berührt, so hat der Strom nicht mehr den Widerstand, zwischen dem ersten und zweiten Draht zu durchlaufen, sondern tritt direkt aus dem Quecksilber in den zweiten Draht. Der Strom nimmt also bei der Berührung des zweiten und ebenso jedes folgenden plötzlich an Stärke zu, so daß man genau den Moment erkennen kann, in welchem die durch den betreffenden Draht angegebene Volumverminderung erreicht ist. Der Druck, durch welchen diese Volumverminderung erreicht war, wurde von Amagat nach dem von Cailletet angewandten Verfahren gemessen.

Tait selbst wandte bei seinen Versuchen in den engen Röhren verschiebbare Indizes an, welche von dem aufsteigenden Quecksilber gehoben wurden, aber in der Stellung sitzen blieben, wenn das Quecksilber zurückging.

Wie sehr mit wachsendem Drucke bei konstanter Temperatur der Wert von $\varkappa$ abnimmt, zeigen folgende von Amagat gegebene Zahlen; dieselben bedeuten die mittlern Werte von $\varkappa \cdot 10^6$, wenn der Druck von der untern bis zur obern Grenze zunahm

Druck in Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$.	Druck in Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$.
von 1— 262	45,1	von 1784—2202	29,8
„ 262— 805	40,1	„ 2202—2590	27,9
„ 805—1334	35,4	„ 2590—2981	26,0
„ 1334—1784	32,4		

a Amagat nur die scheinbaren Kompressionskoeffizienten gibt, habe den von Amagat gegebenen Kompressionskoeffizienten jenen des $C_k \cdot 10^6 = 2{,}2$ hinzuaddiert.

ait gibt für die Abhängigkeit des Kompressionskoeffizienten von und Temperatur folgende Gleichung, in welcher der Druck in auf den Quadratzoll, deren jede 152,3 Atmosphären beträgt, gegeben ist

$$= 52{,}0 - 1{,}7p + 0{,}1p^2 - (0{,}355 + 0{,}005p)t + (0{,}003 + 0{,}001p)t^2.$$

er Kompressionskoefficient bei 456,9 Atmosphären und der Temperatur t wird darnach

$$\varkappa \cdot 10^6 = 47{,}8 - 0{,}370\,t + 0{,}006\,t^2,$$

r man sieht, daß bei diesem Drucke das Minimum des Kompressionskoeffizienten fast genau bei 60° liegt; bei einem Drucke von etwa 60 Tonnen der Kompressionskoeffizient von 10° ab schon wachsen.

ür die Abhängigkeit der Kompressionskoeffizienten des Wassers vom hat Tait später[1]) eine einfachere Formel gegeben. Ist $\varkappa$ der e Kompressionskoeffizient von 1 bis p Atmosphären so ist

$$\varkappa = \frac{A}{B+p}$$

A und B zwei nur von der Temperatur abhängige Konstanten sind. e Temperatur 0° ist

$$\varkappa = \frac{0{,}3015}{5933 + p}.$$

erte von A und B nehmen bis etwa 40° zu, dann aber ab.

ür die übrigen nicht wasserhaltigen Flüssigkeiten würde aus den hen von Grassi folgen, daß die Werte von $\varkappa$ mit steigender Temperatur zunehmen, daß also bei diesen, wie bei den festen Körpern, die ität mit steigender Temperatur abnimmt; die Beobachtungen von lkohol und Äthyläther würden weiter zu dem Schlusse führen, daß mpressibilität mit wachsendem Drucke zunähme, daß demnach der itätskoeffizient abnähme, je näher die Moleküle der Flüssigkeiten der rücken.

rsterer Schluß ist von allen spätern Beobachtern, so von Amagat[2]), ani und Palazzo[3]), Röntgen[4]) u. a. bestätigt worden. So erhält at für $\varkappa \cdot 10^6$ folgende Werte

lalkohol . .	bei 14°,7	C. $\varkappa \cdot 10^6$	= 104	bei 100°	C. $\varkappa \cdot 10^6$	= 221
lkohol . .	„ 14°	„ „	= 101	„ 99°,4	„ „	= 202
lkohol . . .	„ 13°,8	„ „	= 82	„ 99°	„ „	= 154
elkohlenstoff	„ 15°,6	„ „	= 87	„ 100°	„ „	= 174
r	„ 14°	„ „	= 110	„ 99°	„ „	= 280.

1) Tait, Beibl 18 p 115. 1894.

2) Amagat, Ann de chim et de phys. 11 5. 1877. Comptes Rendus 105. 29. 1887

3) Pagliani und Palazzo, Memor. d. Reale Accad. dei Lincei. 19. 3) Beibl. 9 p. 149 1885.

4) Röntgen, Wiedem Ann. 44. p 1. 1891.

Für Chloroform erhält Amagat bei 100° den Wert $\varkappa \cdot 10^6 = 2$ so daß gegenüber dem von Grassi gefundenen Werte die Kompression mehr als das dreifache zunähme; eine solche Zunahme hat Amagat Äthyläther selbst beobachtet, er findet bei 13°,7 $\varkappa \cdot 10^6 = 167$, für Temperatur 99° dagegen $\varkappa \cdot 10^6 = 550$, also mehr als dreimal so gr

Pagliani und Palazzo beobachteten die Kompressionskoeffizien bei 3 oder 4 Temperaturen zwischen 0° und 100° und stellten ihre I obachtungen dar durch eine Gleichung von der Form

$$\varkappa = \varkappa_0 (1 + at + bt^2).$$

Nachstehende Tabelle gibt die von diesen Beobachtern gegeben Werte von $\varkappa_0 \cdot 10^6$, a und b. Die Spalten 5 und 6 enthalten die v Röntgen für die gleichen Substanzen gefundenen Werte und die Zunah der Werte $\varkappa \cdot 10^6$ für einen Grad der Temperaturerhöhung bis zu et 18°, der höchsten von Röntgen genommenen Temperatur. Die We von $\varkappa_0 \cdot 10^6$ habe ich aus Röntgens Angaben abgeleitet, indem ich v den bei 2°—4° gefundenen Werten von $\varkappa$ nach der von Röntgen gef denen Zunahme die betreffenden Größen abgezogen habe.

Substanzen	$\varkappa_0 \cdot 10^6$	$a \cdot 10^3$	$b \cdot 10^3$	$\varkappa_0 \cdot 10^6$	$\frac{\Delta \varkappa_0}{\Delta t} \cdot 10^6$
Toluol	77,0	6,570	0,0174	—	—
Xylol	73,4	2,204	0,0644	—	—
Cumol	72,5	2,531	0,0521	—	—
Methylalkohol	101	6,225	0,01007	105,3	0,80
Äthylalkohol	97,0	3,177	0,0550	98,4	0,67
Normal Propylalkohol	85,8	3,245	0,0530	86,2	0,62
Isobutylalkohol	88,2	2,983	0,0572	88,3	0,565
Amylalkohol	81,65	2,913	0,0590	81,7	0,495
Schwefelkohlenstoff. .	—	—	—	78,4	0,615
Benzol	—	—	—	78,8	0,73

Pagliani und Palazzo finden für Benzol bei 15°,4 C. $\varkappa \cdot 10^6 = 87$, aus den Beobachtungen von Röntgen würde sich für diese Temperat 90,0 ergeben. Man sieht, die von den verschiedenen Beobachtern gefu denen Zahlen stimmen gut überein.

Den aus Grassis Beobachtungen zu ziehenden Schluß, daß die Ko pressibilität mit wachsendem Drucke zunähme, haben die späteren B obachtungen von Amaury und Descamp[1]), Cailletet[2]) und besond von Amagat[3]) nicht bestätigt.

Innerhalb der von Grassi angewandten Druckgrenzen konnt Amaury und Descamps, und in viel weiteren Grenzen auch Caillet eine merkliche Änderung der Kompressibilität nicht erkennen, Amag dagegen fand, daß die Kompressionskoeffizienten aller Flüssigkeiten ebe

1) *Amaury* und *Descamps*, Comptes Rendus. 68. p. 1564. 1869.
2) *Cailletet*, Comptes Rendus. 75. p. 77. 1872.
3) *Amagat*, Ann. de chim. et de phys. 11. (6.) 1887. Comptes Rendus. 1 p. 429. 1886.

wie diejenigen des Wassers mit steigendem Drucke kleiner werden. So erhielt er als Werte $\varkappa \cdot 10^6$ für Äthyläther bei 13°,7 C. folgende Werte

Atmosphären	$\varkappa \cdot 10^6$.	Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$.
8,53—13,70	168	25,40—30,56	162
13,70—19,47	169	30,56—36,45	152
19,47—25,40	169		

Die Abnahme wird merklich, sowie der Druck über 25 Atmosphären steigt; mit weiter wachsendem Drucke nimmt $\varkappa$ noch rascher ab, wie folgende von Amagat gegebene Zahlen zeigen; die Temperatur war 17°,4.

Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$.	Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$.
1—154	158,2	870—1243	65,2
154—487	109,2	1243—1623	51,1
487—870	85,2	1623—2002	47,2

Der Kompressionskoeffizient des Äthers ist also zwischen 1623 und 2002 Atmosphären weniger als $\frac{1}{3}$ desjenigen bei geringen Drucken; bei größern Drucken ist aber, wie zu erwarten war, die Abnahme der Kompression mit wachsendem Drucke eine langsamere als bei geringeren Drucken.

Richards und Stull[1]) haben die Kompressibilität einer Anzahl Flüssigkeiten mit der des Quecksilbers bis 500 Atmosphären Druck verglichen. sie finden ebenso mit wachsendem Druck abnehmende Werte von $\varkappa$ und schließen weiter, daß je größer $\varkappa$, um so größer auch die Abnahme von $\varkappa$ sei.

Die Änderung der Kompressionskoeffizienten bei wachsendem Drucke hängt wesentlich von der Temperatur ab, bei welcher die Kompression stattfindet. Amagat fand für den Äthyläther, dessen Kompressionskoeffizienten bis 36,65 Atmosphären bei 13°,7 C. wir vorher angaben, innerhalb derselben Druckgrenzen bei der Temperatur von 100° folgende Werte von $\varkappa \cdot 10^6$

Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$.	Atmosphären.	$\varkappa \cdot 10^6$
von 8,50—13,90	560	von 25,60—30,55	489
„ 13,90—19,55	540	„ 30,55—36,65	474
„ 19,55—25,60	525		

Während bei der niedern Temperatur die Abnahme der Kompressionskoeffizienten erst bemerkbar wird, wenn der Druck über 25 Atmosphären gewachsen ist, zeigt sich hier dieselbe schon bei geringen Drucken sehr deutlich: während er bei niedriger Temperatur innerhalb dieser Druckgrenzen um 0,1 seines anfänglichen Wertes abgenommen hat, ist er hier um nahezu $\frac{1}{6}$ verkleinert.

Auf die spätern Versuche von Amagat[2]) kommen wir in der Wärmelehre bei Besprechung der Temperaturänderungen durch Druck und der Abhängigkeit der Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeiten vom Druck zurück.

1) *Richards* und *Stull*, Fortschr. d. Physik i. J. 1903. p. 196.

2) *Amagat*, Comptes Rendus **104**. p. 1159. 1887; **105** p. 1120. 1887. Zusammengestellt hat Amagat die Resultate seiner Versuche in Ann. de chim. et de phys. **29** (6) 1893.

Die Versuche von Grassi zeigen weiter, daß die Kompressior zienten der Salzlösungen, soweit er dieselben untersucht hat, klein als jene des Wassers, ein Resultat, das durch neuere Versuche in dere von Röntgen und Schneider[1]) bestätigt worden ist, aus der auch ergibt, daß der Kompressionskoeffizient im allgemeinen mit de gehalte der Lösung abnimmt. Für Mischungen aus Wasser und S säure finden Röntgen und Schneider, daß die Kompressibilit wachsendem Schwefelsäuregehalt kleiner wird, bis zu einer Mi welche etwa 78% H_2SO_4 enthält; von da ab nimmt dieselbe zu jener der reinen Schwefelsäure, welche etwa $\frac{3}{4}$ derjenigen des Was Bis zu einer Mischung von etwa 30,4% H_2SO_4 liegt die Kompres der Mischungen zwischen derjenigen des Wassers und der Schwe für die übrigen Mischungen ist dieselbe kleiner als jene der Schwe

Messungen von Schumann[2]), Tait[3]), Gilbault[4]) gelangten im lichen zu gleichen Resultaten; im allgemeinen ist die Kompressibil Lösungen kleiner als die des reinen Lösungsmittels und nimmt mi sender Konzentration ab; für sehr verdünnte Lösungen von Chlo und Chlorcalcium bei 15° und von Chlorstrontium und Chlorammoniu findet indeß Schumann die Kompressionskoeffizienten etwas größ die des reinen Wassers.

Durch Einführung des Begriffes der molekülaren Kompression Gilbault zu einer ziemlich einfachen Beziehung zwischen der Kom und der Konzentration einer Lösung. Als molekulare Kompres zeichnet Gilbault die durch die Einheit des Druckes eintretende verminderung einer Lösung, welche die gleiche Anzahl von Molekü hält wie die Volumeinheit des Lösungsmittels. Nehmen wir w Lösungen und setzen als Volumeinheit 100 Cc oder das Volum 100 g Wasser, so ist, da 18 das Molekülargewicht des Wassers der Volumeinheit $\frac{100}{18} = 5{,}555$ Moleküle des Lösungsmittels. E 100 g Lösung p g Salz, so ist die Zahl der Wassermoleküle – Würden die Salze als solche in der Lösung sein, und ist m das Mo gewicht des Salzes, so würde $\frac{p}{m}$ die Zahl der Salzmoleküle sein bault nimmt aber an, daß die Salzmoleküle dissoziiert seien, daß bei $NaCl$ in die Bestandteile Na und Cl zerfallen, so daß in der die doppelte Zahl der Moleküle, statt $\frac{p}{m}$ somit $2\frac{p}{m}$ Moleküle vo wären. Die Zahl der Moleküle in 100 g Lösung ist demnach

$$2\frac{p}{m} + \frac{100-p}{18}.$$

Die Zahl z der Moleküle in 100 Cc Lösung erhalten wir, w die Zahl z mit dem spezifischen Gewicht der Lösung σ multipliz

1) *Röntgen* und *Schneider,* Wiedem. Ann. **29**. p. 165. 1886.
2) *Schumann,* Wiedem. Ann. **32**. p. 14. 1887.
3) *Tait,* Fortschritte der Physik für 1897. **1**. p. 380.
4) *Gilbault,* Zeitschrift für physikal. Chemie. **24**. p. 385. 1897.

men von σ g Lösung gleich dem Volumen von 1 g Wasser ist. mnach

$$z = \left(2\frac{p}{m} + \frac{100-p}{18}\right)\sigma.$$

Volumen x der Lösung, welche $\frac{100}{18}$ Grammmoleküle enthält, er-r aus der Proportion

$$z : 1 = 5{,}555 : x.$$

$$x = \frac{5{,}555}{z} = \frac{\frac{100}{18}}{\left(2\frac{p}{m} + \frac{100-p}{18}\right)\sigma}.$$

ch einen Druck P das Volumen x dieser Lösung x_1 so ist

$$\frac{x - x_1}{x} = \varkappa P,$$

r $P = 1$, so wird

$$x - x_1 = \varkappa x = \mu.$$

odukt μ bezeichnet Gilbault als die molekülare Kompression der

Konzentration der Lösung bezeichnet Gilbault das Verhältnis küle des gelösten Salzes zu der Gesamtzahl der in der Lösung ien Moleküle also

$$a = \frac{2\frac{p}{m}}{2\frac{p}{m} + \frac{100-p}{18}}.$$

nun μ_0 die Kompression des Wassers, μ diejenige der Salzlösung Konzentration a, so gelangt Gilbault zu der Gleichung

$$\frac{\log\mu_0 - \log\mu}{a}\sigma = k,$$

ine für jedes Salz charakteristische Konstante ist.

Beziehung wurde an Lösungen von 18 Salzen geprüft und vorzüg-u den größten Konzentrationen bestätigt gefunden.

ergab sich für Lösungen von

ı	Natriumnitrat	Chlorkalium	Chlornatrium	Natriumcarbon
:»	1,264	1,321	1,7055	4,641.

Mischungen zweier Flüssigkeiten, die nicht chemisch aufeinander . liegt die Vermutung nahe, daß die Kompression der Mischung leich der Summe der Kompression der Bestandteile sei, das heißt, Volumverminderung der Mischung stets gleich der Summe der minderungen der Bestandteile sei, daß also auch in der Mischung nen Flüssigkeiten so zusammengedrückt werden, wie wenn der ruck auf jede für sich wirkte. Besteht demnach eine Flüssig-Volumen V aus v_1 einer und v_2 der zweiten Flüssigkeit, so daß v_2, so würde

$$\Delta V = \Delta v_1 + \Delta v_2.$$

Ist $\varkappa$ der Kompressionskoeffizient der Mischung, $\varkappa_1$ derjenige der einen $\varkappa_2$ der andern Flüssigkeit, so würde bei einem Drucke P

$$\Delta V = \varkappa VP, \quad \Delta v_1 = \varkappa_1 v_1 P, \quad \Delta v_2 = \varkappa_2 v_2 P$$

und daraus

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1 v_1 + \varkappa_2 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Nach den Versuchen von Drecker[1]) sowie Pagliani und Palazzo[2]) ist das indes nicht der Fall. Drecker maß die Kompressionen bei einer Temperatur von 25° für Mischungen von Schwefelkohlenstoff mit Alkohol, Wasser mit Alkohol, Chloroform mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff mit Alkohol, Wasser mit Alkohol, Chloroform mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff mit Chloroform. Folgende Tabelle gibt die von Drecker gefundenen Werte, unter $\varkappa \cdot 10^6$ die beobachteten, unter $\varkappa' \cdot 10^6$ die nach obiger Formel berechneten Werte, unter p sind die Gewichte Alkohol bezw. bei den Mischungen Schwefelkohlenstoff-Chloroform die Gewichte Schwefelkohlenstoff in 100 Lösung angegeben.

Wasser-Alkohol			Schwefelkohlenst.-Alkohol			Chloroform-Alkohol			Chloroform-Schwefelkohlenstoff		
p	$\varkappa \cdot 10^6$	$\varkappa' \cdot 10^6$	p	$\varkappa \cdot 10^6$	$\varkappa' \cdot 10^6$	p	$\varkappa \cdot 10^6$	$\varkappa' \cdot 10^6$	p	$\varkappa \cdot 10^6$	$\varkappa' \cdot 10^6$
0	45,5	—	0	97,5	—	0	106,7	—	0	106,7	—
12,37	42,0	55,5	18,54	103,0	101,8	10,33	106,3	107,9	12,46	106,7	106,[illegible]
23,91	41,1	64,5	27,48	106,6	103,6	20,84	106,4	109,0	25,25	105,3	104,1
34,61	44,8	72,8	40,32	109,3	105,9	31,21	108,0	109,9	33,35	105,2	103,[illegible]
50,29	54,5	84,0	51,76	111,3	107,8	40,56	107,6	110,6	45,93	102,9	102,1
62,95	65,0	92,0	64,15	113,8	109,5	50,52	105,4	111,3	58,38	102,2	101,[illegible]
79,72	80,7	102,6	74,89	115,0	110,9	64,28	105,6	112,1	72,07	99,9	99,[illegible]
85,13	88,6	105,6	89,54	115,4	112,7	79,30	109,1	112,9	100	97,5	—
100	113,8	—	100	113,8	—	100	113,8	—			

Die von Pagliani und Palazzo für die Gemische Wasser-Alkohol gefundenen Werte stimmen mit den von Drecker gefundenen recht gut überein; auch sie zeigen, daß die Mischungen, welche weniger als 50% Alkohol enthalten, kleinere Kompressionskoeffizienten besitzen als das Wasser. Das gleiche gilt für die wenig Chloroform enthaltenden Gemische Chloroform-Alkohol, während die Gemische Schwefelkohlenstoff-Alkohol zum Teil größere Werte haben als Alkohol. Das verschiedene Verhalten dieser Mischungen scheint mit der Änderung der Dichte zusammenzuhängen; bei den Mischungen von Wasser und Alkohol und ebenso bei den meisten Mischungen Chloroform-Alkohol tritt eine Kontraktion ein, das heißt, das Volumen der Mischung ist kleiner als das Volumen der Bestandteile, während bei Alkohol und Schwefelkohlenstoff das Volumen der Mischung größer ist als das der Bestandteile.

Jedenfalls zeigen die Versuche, daß auch bei Mischung solcher Flüssig-

1) *Drecker*, Wiedem. Ann. 20. p. 890. 1883.

2) *Pagliani* und *Palazzo*, Rendic. d. Reale Accad. dei Lincei. p. 777. J. 1889. Beiblätter 14. p. 93. 1890.

iten. welche direkt chemisch nicht aufeinander einwirken, Molekülar-
rkungen zwischen den verschiedenen Flüssigkeiten vorhanden sind.

§ 65.

Hydrostatischer Druck. Die im § 63 abgeleitete Gleichung über ie im Innern einer Flüssigkeit vorhandenen Drucke setzt uns in den Stand, as Verhalten einer Flüssigkeit in einem offenen Gefäße und die in der-elben vorhandene Verteilung der Drucke zu bestimmen.

Nehmen wir zunächst an, daß die Flüssigkeit nur der Schwere unter-worfen sei, so ergibt sich als erste Folge jener Gleichung, daß die Ober-fläche der Flüssigkeit eben und horizontal sein muß. Als Bedingung, daß ie Oberfläche einer Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, ergibt sich nämlich nmittelbar, daß die auf irgend einen Punkt der Oberfläche wirksamen, er Oberfläche parallelen Kräfte, sich gegenseitig aufheben müssen. Denn enn das nicht der Fall ist, so wird die Flüssigkeit sich nach der Richtung er größern Kraft bewegen müssen. Dieses Aufheben der der Flüssigkeits-läche parallelen Drucke findet aber nur dann statt, wenn die vorhandenen rucke normal sind zur Oberfläche und an allen Stellen derselben gleiche röße haben. Denn, sind die Drucke nicht normal, so haben sie eine der läche parallele Komponente, welche demnach das Gleichgewicht stören ürde; sind die Drucke aber an verschiedenen Stellen verschieden, so tritt benfalls, wegen der nach allen Richtungen gleichmäßigen Fortpflanzung es Druckes, eine der Oberfläche parallele Kraft auf, welche nicht durch nen Gegendruck aufgehoben wird. Diese zwei Bedingungen fallen also reng genommen in eine zusammen, da bei Flüssigkeiten immer, wenn die rucke an allen Stellen einer Fläche dieselben sind, die Drucke normal zur berfläche sind. Derartige Flächen, in welchen der normale Druck an allen tellen derselbe ist, nennt man Niveauflächen. Damit können wir also als e Gleichgewichtsbedingung einer freien Flüssigkeitsoberfläche den Satz ufstellen, daß dieselbe eine Niveaufläche sein muß.

Wir erhielten nun § 63 ganz allgemein für den auf die Flächeneinheit n Innern einer Flüssigkeit wirkenden Druck, wenn in derselben irgend ne andere Fläche einen Druck erhält, der für die Flächeneinheit p_0 ist,

$$p = p_0 + d \cdot h,$$

enn d die Dichtigkeit der Flüssigkeit und h den vertikalen Abstand des ächenelementes, auf welchem der Druck für die Flächeneinheit p ist, von em Flächenelement, auf welchem der Druck p_0 ist.

Es gehören nun alle diejenigen Flächenelemente zu einer Niveaufläche, r welche p einen und denselben Wert hat, für welche also

$$p = p_0 + d \cdot h = \text{const.}$$

In einer gegebenen Flüssigkeitsmasse ist demnach für alle Elemente onstant, für welche

$$h = \text{const.},$$

ren vertikale Abstände von einem gegebenen Punkte alle gleich sind; ist aber eine horizontale Ebene. Da somit die Niveauflächen die hori-

zontalen Ebenen sind, so muß auch die freie Oberfläche einer l
eine horizontale Ebene sein.

Ganz dasselbe, was von der freien Oberfläche einer Flüssi
das gilt auch für die Grenzfläche zweier nicht mischbaren Flü
verschiedenen spezifischen Gewichtes, welche übereinander geschic
auch diese muß eine horizontale Ebene sein. Es ergibt sich d
mittelbar aus dem eben abgeleiteten Satze, daß die Niveauflächen
Flüssigkeit horizontale Ebenen sein müssen, daß es überflüssig
den Beweis besonders zu führen.

Den letztern Fall finden wir in der Regel in der Natur
indem auf den in unseren Gefäßen vorhandenen Flüssigkeiten
liegt und, wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, auf
fläche einen leicht meßbaren, in jedem Flächenelement gleich
ausübt.

Aus dem soeben bewiesenen Satze, daß die Niveauflächen i
einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sind, ergibt sich ferner, daß
horizontalen, durch die Flüssigkeit gelegten Ebene der Druck
Flächenelement derselbe und zwar gleich dem Drucke der Flüssig
sein muß, welche sich über diesem Flächenelement befindet.
nämlich von dem Drucke der Luft ab, so gibt uns unsere Gleic
der auf die Flächeneinheit einer Ebene, welche in dem vertik
stande h unter der Oberfläche der Flüssigkeit sich befindet,
Druck p gegeben ist durch den Ausdruck

$$p = dh .$$

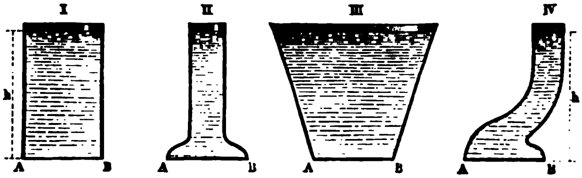
Hat die Fläche im Innern der Flüssigkeit die Größe s, so
auf ihr lastende Druck den Wert

$$ps = sdh ;$$

er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Q
in ihrer ganzen Höhe gleich s ist, und deren Höhe gleich h ist

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydro
Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz näm
der Druck, welcher auf den Boden eines Gefäßes wirkt, nur abh
von der Größe der Bodenfläche und von der Höhe der Flüss
Gefäße, n
von der M
im Gefäße
nen Flüssig
ser Satz i
zuletzt au
Gleichung
bar enthalt
zeigt, daß

Fig. 80.



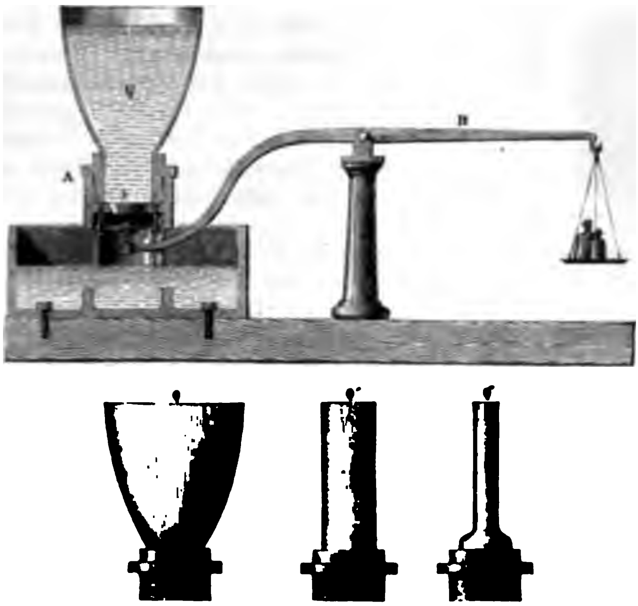
auf eine Fläche s, in einer gegebenen Flüssigkeit nur abhängig
der Größe der Fläche und der Höhe h der Flüssigkeit über de
Haben wir demnach Gefäße verschiedener Form, wie etwa Fig.
stets gleicher Bodenfläche, so ist der Druck auf die Bodenfläche
derselbe, wenn die Gefäße bis zur gleichen Höhe h mit derselben

keit gefüllt sind, einerlei ob die Gefäße sich oben erweitern oder verengern, ob sie senkrechte oder geneigte Wände haben: der Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche überall den Querschnitt s der Bodenfläche und die Höhe h hat.

Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 81 nachweisen und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeinen Satzes liefern, daß auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe h unter der Oberfläche liegenden Ebene ein vertikal abwärts gerichteter Druck wirkt, der gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitszylinders, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich h ist.

Auf einen hohlen metallischen Zylinder A (Fig. 81) können Gefäße verschiedener Form Q, Q', Q'' wasserdicht aufgeschraubt werden. Die Ge-

Fig. 81.



fäße sind unten offen; in dem Zylinder A befindet sich aber eine Platte, auf welcher die Messingfassungen der Gefäße unten aufgepaßt sind. Den Boden der Gefäße bildet dann ein in diese Platte genau eingeschliffenes konisches Ventil k, welches sich von unten nach oben öffnen kann. Wenn in das Gefäß Q Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke eingefüllt ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die Platte hineingedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann geöffnet werden durch einen an dem zweiarmigen Hebel H befestigten Stift s, der das Ventil berührt. Wird in die Wagschale ein Gewicht p gelegt, so treibt der Stift das Ventil mit einem dem Gewichte p gleichen Drucke in die Höhe; ist nun dieser Druck etwas größer als der von oben nach unten gerichtete Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasselbe, und die Flüssigkeit fließt in das den hohlen Zylinder A umgebende Gefäß.

Es bedarf nun, welches der Gefäße Q, Q', Q'' man auch anv stets desselben Gewichtes p, um das Ventil zu heben, wenn man allen dreien dieselbe Flüssigkeit bis zu der in gleicher Höhe übe Boden befindlichen Marke einfüllt, und zwar ist immer das Gew jenes des Flüssigkeitszylinders vom Querschnitte der Bodenfläche u Höhe der Marke über dem Boden.

Wie wir schon im § 63 zeigten, müssen im Gleichgewichtszu die auf ein Flächenelement im Innern einer Flüssigkeit wirkenden dieselben sein, welche Richtung auch die N des Flächenelementes besitzt. Ebenso wie de auf eine horizontale Fläche von der Größe s e tikal abwärts gerichteter Druck von der Größ wirkt, ebenso muß auch ein vertikal aufwä richteter Druck von derselben Größe auf diese wirken. Es läßt sich auch dieser Druck durch den Versuch nachweisen. Wenn man lich gegen das untere gut abgeschliffene End Glasröhre (Fig. 82) eine Messingplatte mittel durch die Röhre hindurchgehenden Fadens fe legt und dann dieses Rohr mit der Platte nach in ein mit Wasser gefülltes Glas taucht, so sieh daß die Platte fest an das Glas gedrückt wi dringt keine Flüssigkeit in die Röhre, und die Platte fällt nicht hinab man den Faden losläßt; ein Beweis, daß im Innern der Flüssigk von unten nach oben gerichteter Druck vorhanden ist. Man kann Druck durch einen gleichen in entgegengesetzter Richtung angebr messen, indem man in die Röhre so lange Wasser schüttet, bis die hinabfällt. Das geschieht, wenn die Flüssigkeit in der Röhre fast die Höhe hat, welche die Flüssigkeit im Gefäße hat, um so genau leichter die Platte ist.

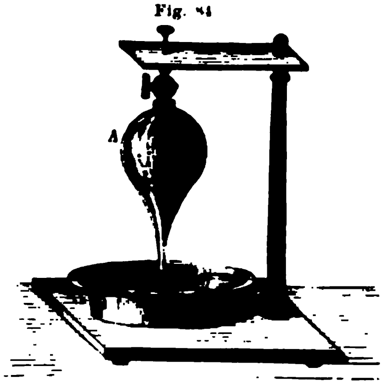
Fig. 82.

Es folgt weiter, daß auch ein Flächenelement der Seitenwand Gefäßes, sei sie vertikal oder geneigt, einen erfahren muß, der gleich dem Gewichte des sigkeitszylinders ist, der das Flächeneleme Basis und den vertikalen Abstand des Ele von der freien Oberfläche zur Höhe hat. Drucke hält der durch die Festigkeit der bewirkte Gegendruck das Gleichgewicht. D solcher Seitendruck vorhanden ist, kann man durch den Versuch nachweisen, indem man einen Seitenwand den Gegendruck durch eine bohrung der Wand fortnimmt. Dann tritt nur eine dem innern Drucke folgende Bew der Flüssigkeit ein, sondern, wenn das Gef in Fig. 83 beweglich aufgestellt ist, tritt eine dem noch übrigen druck folgende Bewegung ein. Man stellt auf einen hinlänglich Schwimmer von Kork ein mit Wasser gefülltes Gefäß, das an einer seiner Seitenwand eine verschließbare Öffnung hat. Ist die Öffnu schlossen, so drückt das Wasser gegen A ebenso stark wie geg

Fig. 83.

nun aber die Ausflußöffnung bei A geöffnet, so kann das Wasser ser Stelle dem Druck folgen und ausfließen; an der gegenüber-n Stelle bei A' dauert aber der Druck fort, und diesem Drucke bewegt sich der Schwimmer mit dem Gefäße in der Richtung AA'. ie sogenannten Reaktionsräder beruhen auf dieser Wirkung des rucks; sie bestehen (Fig. 84) aus einer weitern mit Wasser ge- Röhre A, welche um eine mit ihrer Achse zusammenfallende ver- Achse sich drehen kann. An dem untern Ende befinden sich zwei ehrere horizontale Ausflußröhren, welche in demselben Sinne ge-t sind. Beim Ausfließen des s aus den Öffnungen dieser treibt der gegen die den Aus-ungen gegenüberliegenden Wände te Druck das Rad herum.

Fig. 84



s ist nach Besprechung der ein- Drucke nicht schwierig, den m bestimmen, welcher auf irgend chenstück, sei es im Innern, sei ler Wand einer Flüssigkeit, aus-wird; es ist das nur eine Auf-er Rechnung. Haben wir, um einem einfachen Beispiel zu eine ebene Wandfläche von kigem Querschnitt, die wir uns von der Höhe h und der ' denken wollen, so erhalten wir den Druck, den die ganze Wand-rfährt, in folgender Weise. Denken wir uns in der Tiefe x unter ssigkeit einen horizontalen Streifen der Wandfläche, dessen Höhe dx kleine ist, daß wir ihn als ganz in der in der Tiefe x durch die keit gelegten Niveaufläche liegend ansehen können, so ist der Druck, auf diesen Streifen wirkt, gleich dem Produkte des auf die Flächen-ier Niveaufläche wirkenden Druckes und des Flächeninhaltes des s. Ersterer ist, wenn wir annehmen, daß auf der Oberfläche der keit kein Druck lastet, gleich $s \cdot x$, wenn s das spezifische Gewicht ssigkeit ist; letzterer ist $b \cdot dx$.

r auf den Flächenstreifen wirkende Druck ist somit

$$sbxdx$$

r auf die ganze Fläche wirkende Druck ist die Summe der auf alle n Streifen wirkenden, welche die ganze Fläche zusammensetzen. halten alle diese einzelnen Drucke, wenn wir x nach und nach rte annehmen lassen, von $x = 0$ bis $x = h$, so daß der ganze wird

$$P = \int_0^h sbxdx = \tfrac{1}{2} sbh^2 = \tfrac{1}{2} hfs,$$

ir mit f die Größe der Fläche $f = bh$ bezeichnen. Der Druck gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt

gleich der Fläche f ist, und deren Höhe gleich ist der halben Höl Flüssigkeit.

Zu ganz demselben Satze gelangt man, wenn man eine Fläcl trachtet, welche gegen die Vertikale geneigt ist; es ist immer der gleich einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist der Wand und deren Höhe gleich ist der halben vertikalen Entfernung des Randes der Wandfläche von dem Niveau der Flüssigkeit.

Ebenso wie den resultierenden normal gegen die Wandfläche geric Druck können wir auch leicht den Angriffspunkt dieser Resultierend rechnen. Die auf die einzelnen Flächenelemente wirkenden Druck sämtlich parallel, wir haben also nur den Mittelpunkt dieser par Kräfte aufzusuchen. Zunächst ist klar, daß der Mittelpunkt der in der Halbierungslinie der rechteckigen Fläche liegt, welche wir er wenn wir die Fläche durch einen vertikalen Schnitt in zwei gleich teilen. Es liege der Angriffspunkt in dieser Linie im Abstand X v obern Grenzfläche der Flüssigkeit; bringen wir dann dort eine der tierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft an, so ist die dieselbe als frei beweglich gedacht, im Gleichgewicht, sie nimmt eine fortschreitende noch um irgend eine Achse eine drehende Bewegu Denken wir uns deshalb etwa durch die obere Grenze der Flüssigkei in der Fläche liegende horizontale Drehungsachse gelegt, so muß in auf diese die Summe der Drehungsmomente gleich Null sein. Di Resultierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft liefer das Drehungsmoment

$$-PX,$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, daß das von dieser Kraf rührende Moment die Fläche entgegengesetzt dreht als die vorhar Kräfte.

Der in der Tiefe x auf ein Flächenelement von der Höhe dx wi Druck ist

$$sbxdx;$$

das von diesem herrührende Drehungsmoment ist somit

$$xsbxdx = sbx^2dx.$$

Die Summe aller Drehungsmomente erhalten wir, wenn wir in Ausdrucke nach und nach für x alle Werte von 0 bis h einsetzen und alle die für die einzelnen Elemente erhaltenen Werte summieren, der Summe

$$\int_0^h sbx^2dx = \tfrac{1}{3}sbh^3.$$

Somit wird die Gleichung für X

$$PX = \tfrac{1}{3}sbh^3$$

oder, wenn wir nach X auflösen und gleichzeitig für P seinen We setzen,

$$X = \frac{\tfrac{1}{3}sbh^3}{\tfrac{1}{2}sbh^2} = \tfrac{2}{3}h.$$

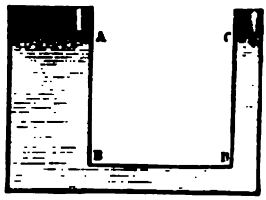
riffspunkt liegt also um $\frac{3}{4}$ der Höhe der Flüssigkeit unter [illegible]iveau derselben.

[illegible]her Weise kann man für alle Flächen, ebene oder gekrümmte, [illegible]aden Druck und dessen Angriffspunkt berechnen, wenn auch [illegible]en zuweilen nicht so einfach sind.

§ 66.

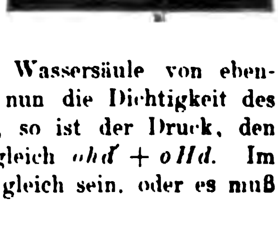
[illegible]nizierende Röhren. Unsere Ausführungen über das Gleich-[illegible]'lüssigkeiten waren durchaus unabhängig von der Gestalt der [illegible]men die Flüssigkeit enthalten ist. [illegible]er auch Gültigkeit, wenn wir die-[illegible] Gefäße verteilen und diese Gefäße [illegible] Röhre miteinander verbinden, daß [illegible]it in beiden gleichsam nur eine [illegible] Man nennt solche Gefäße, weil sie [illegible]renform angewandt werden, kom-[illegible] Röhren. Wenn demnach in beiden [illegible] *CD* (Fig. 85) dieselbe Flüssigkeit [illegible] so muß, da die Gefäße kommu-[illegible]'lüssigkeiten also eine Masse bilden, die Oberfläche derselben [illegible]r in beiden Röhren genau von gleicher Höhe sein, wenn nicht [illegible]lben etwa noch ein besonderer äußerer Druck ausgeübt wird. [illegible]edoch die eine Röhre, z. B. *AB*, eine andere Flüssigkeit von [illegible]t d', während die Flüssigkeit in der Röhre *CD* die Dichtig-[illegible] müssen die Oberflächen verschiedene Höhen haben. Sei z. B. [illegible]6) zuerst Quecksilber gegossen und dann in die Röhre *CDE* [illegible]uß das Wasser höher stehen als das Quecksilber und zwar [illegible]r als es spezifisch leichter ist wie letzteres.

Fig. 85.



[illegible]ir uns eine Scheidewand in *mn* und in derselben ein Element, [illegible]ir mit *o* bezeichnen wollen. Von [illegible]elbe einen Druck, der gleich ist [illegible] einer Quecksilbersäule von der [illegible]er Höhe H', die gleich ist dem [illegible]bstande der durch *o* gelegten [illegible]e von der durch *N* gelegten [illegible]leich $o \cdot H' \cdot d'$, wenn wir mit d' [illegible] des Quecksilbers bezeichnen. Von [illegible]te her erhält das Flächenelement *o* [illegible] zunächst von einer Quecksilber-[illegible] Höhe *h*, welche vom Niveau des [illegible] *o* bis *CD* reicht, und von einer Wassersäule von eben-[illegible] und der Höhe *CE*. Nennen wir nun die Dichtigkeit des [illegible]d bezeichnen die Höhe *CE* mit *H*, so ist der Druck, den [illegible]ck von dieser Seite her erfährt, gleich $ohd' + oHd$. Im [illegible]leichgewichtes müssen diese Drucke gleich sein, oder es muß

Fig. 86



$$oH'd' = ohd' + oHd,$$

$$(H' - h)\,d' = Hd;$$

nennen wir nun die Differenz

$$H' - h = NB = H'',$$

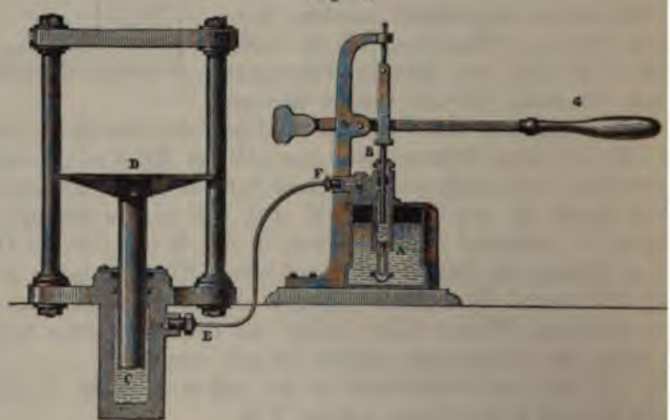
so muß

$$\frac{H}{H''} = \frac{d'}{d},$$

oder die beiden Höhen H'' und H der Flüssigkeiten über ihre Tr
fläche müssen sich verhalten umgekehrt wie die Dichtigkeiten d
Flüssigkeiten.

In Fig. 85 hält, wie wir sehen, die kleine Wassermasse in d
CD der großen Wassermenge in AB das Gleichgewicht. Würde
Wassermenge AB fortgenommen und anstatt deren ein Kolben b
die dann entstehende Flüssigkeitsoberfläche gelegt, so müßte d
der Wassersäule AB gleiches Gewicht haben, um den in der
nach oben gerichteten Druck zu äquilibrieren. Das Gewicht dieses

Fig. 87.



zu dem Gewichte der Flüssigkeit in CD verhält sich wie die Que
der Röhren, da sich so das Gewicht der Flüssigkeitssäule AB zu
ihr das Gleichgewicht haltenden Flüssigkeitssäule CD verhält. W
nun auf die Flüssigkeit in der engen Röhre einen Druck p aus
müssen wir, wenn der Kolben in der weiten Röhre diesem Dr
Gleichgewicht halten soll, diesen mit einem Gewichte P belasten,
ebensovielmal größer ist wie p, als der Querschnitt von AB g
als der von CD.

In Brahmas hydraulischer Presse (Fig. 87) ist dieser Ums
nutzt, um mit kleinen Kräften große mechanische Effekte zu
Dieselbe besteht im wesentlichen aus einer kleinen Druckpum
durch welche man Wasser durch die Röhre EF in die weite, d
mit AB kommunizierende Röhre C pumpt. In diese paßt w
der Kolben CD. Das in die Röhre C gepumpte Wasser hebt de
der die zu komprimierenden Gegenstände gegen einen festen
drückt. Man kann mit einem Drucke von 1^{kg} einem Gew
1000^{kg}, wenn der Querschnitt der Röhre C zu dem der Pumpen

im Verhältnis von 1000 : 1 steht, das Gleichgewicht halten. Dadurch wird zugleich unser Satz bewiesen, den wir anfänglich ableiteten, daß bei einem äußern Drucke auf die Flüssigkeit eines Gefäßes der Druck auf irgend ein Flächenstück der Wandfläche der Größe desselben proportional sei.

Bemerken wollen wir hier, daß bei diesen äußerst großen Wirkungen mit kleinen Kräften doch auch nur eine Übertragung der Arbeit, kein Gewinnst an solcher eintritt; denn auch hier gilt der Satz wieder, was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren. Denn soll der Kolben *D* um ein Zentimeter gehoben werden, so ist eine tausendmal größere Bewegung des Kolbens der Pumpe nötig, da aus dem engen Pumpenrohr die Wassermenge in das weite Rohr geschafft werden muß. Auch hier besteht die

Fig. 88.

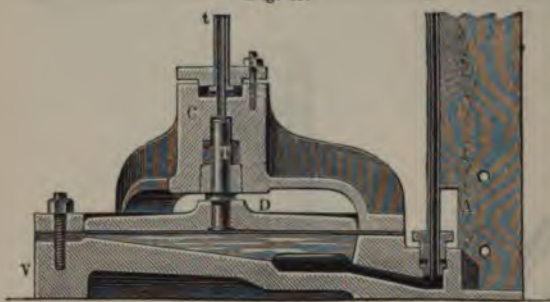
Gleichung, daß das Produkt der Kraft in den Weg, durch welchen sie gewirkt hat, gleich ist dem Produkte der Last in den Weg, um welchen sie gehoben ist.

Das Prinzip der hydraulischen Presse ist in sehr sinnreicher Weise von Gally-Cazalat angewandt, um große Drucke, etwa in der hydraulischen Presse direkt zu messen; das Manometer (es wird gewöhnlich nach einem seiner Verfertiger als Desgoffesches bezeichnet)[1]) ist gewissermaßen die Umkehr der hydraulischen Presse. Dasselbe besteht, wie Fig. 88 in perspektivischer Ansicht, Fig. 89 im Durchschnitt des untern Teiles zeigt, aus einem starken eisernen Gefäße *V* von kreisförmigem Querschnitt,

1 Man sehe *Amagat*, Ann. de chim et de phys. 29. (6. 1893.

in welchem ein Metallstempel D sich auf und nieder bewegen kann. Das Gefäß enthält Quecksilber und auf demselben eine dünne Wasserschicht. Zwischen der Wasserschicht und dem Stempel ist eine feine Kautschukmembran ausgespannt, welche durch den aufgeschraubten Kreisring festgehalten wird, der mit Hilfe der Schrauben so fest angezogen ist, daß die Membran das Gefäß V nach oben hin vollkommen wasserdicht absperrt. Auf der Mitte des Stempels D steht ein Stahlzylinder T, welcher durch eine Stopfbüchse in den Hohlraum des Messingzylinders C eintritt, der mit dem die Kautschukmembran befestigenden, auf das Gefäß aufgeschraubten Ringe aus einem Stücke gearbeitet ist. Der Hohlraum des Zylinders C steht andererseits durch die Röhre t, welche, wie Fig. 89 zeigt, durch die den Hohlraum des Zylinders C oben abschließende Platte hindurchgeführt ist, mit dem Raume in Verbindung, in welchem der Druck ausgeübt wird, also etwa mit dem Hohlraum C der hydraulischen Presse Fig. 87;

Fig. 89.



man gibt zu dem Ende, wenn man den Druck in der hydraulischen Presse messen will, der Wand derselben eine zweite Durchbohrung, an der man das Ende der Röhre t gerade so ansetzt, wie bei E die zur Pumpe führende Röhre angesetzt ist. Das Gefäß V kommuniziert mit seinem untern Teile mit der seitlich angebrachten Glasröhre AB, welche vor einer Teilung an dem an dem Gefäße V befestigten vertikalen Ständer fest angebracht ist.

Die Methode der Messung des Druckes ist hiernach leicht zu übersehen; denken wir uns, die Röhre t sei mit der hydraulischen Presse verbunden, und man beginne durch Handhaben der Pumpe die Presse in Tätigkeit zu versetzen. Das in C (Fig. 87) eingepumpte Wasser fließt dann gleichzeitig durch t in den Hohlraum des Zylinders C (Fig. 88 und 89), füllt denselben und die Röhre t, so daß die Presse und die Röhre von einer zusammenhängenden Wassermasse gefüllt sind. Die obere Basis des Stahlzylinders T erhält deshalb einen genau ebenso großen, vertikal abwärts gerichteten Druck, wie ein ebenso großes Stück in der Wandfläche des Zylinders der Pumpe. Ist der Druck auf die Flächeneinheit in der Presse gleich p und die obere Basis des Zylinders T gleich s, so erhält der Stahlzylinder den vertikal abwärts gehenden Druck $p \cdot s$. Dieser Druck wirkt durch die untere Fläche des Zylinders auf die im Gefäße V enthaltene Flüssigkeit; bezeichnen wir den Flächeninhalt der untern auf die Flüssigkeit drückenden Fläche des Stempels D mit S, so ergibt sich für den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck P aus der Gleichung

$$p \cdot s = P \cdot S,$$

$$P = \frac{s}{S} \cdot p.$$

st also der Durchmesser des Stempels D etwa 10mal so groß als es Zylinders T, so würde $P = 0{,}01\,p$ sein. Durch diesen Druck der Stempel D hinabgedrückt und dadurch in der Röhre AB das ilber so hoch gehoben, daß der Druck der gehobenen Quecksilber- auf die Flächeneinheit gleich P wird. Ist also z. B. der Druck p 100 Atmosphären, also gleich $100 \cdot 1{,}033^{\text{kg}}$ auf das Quadratzenti- so wird das Quecksilber in AB um $0{,}76^{\text{m}}$ steigen, da der Druck uecksilbersäule von dieser Höhe auf das Quadratzentimeter $1{,}033^{\text{kg}}$. Beobachtet man also in AB eine Erhöhung des Quecksilbers Atmosphären, jede gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von so ist in der Presse der Druck in Atmosphären

$$h = \frac{S}{s} \cdot H.$$

urch das Herabdrücken des Stempels D wird die Kautschukmembran demselben gespannt, und auf diese mit stärkerer Ausdehnung wach- Spannung wird ein Teil des Druckes p verwandt, so daß strenge nen an dem soeben berechneten Druck eine kleine Korrektion an- t werden muß. Indes kann man den Querschnitt der Röhre AB ber dem des Gefäßes V so klein wählen, daß für eine beträchtliche ng des Quecksilbers in AB der Stempel D nur um eine verschwin- Größe hinabsinkt. Das von Cailletet bei seinen § 64 erwähnten nen benutzte Manometer von Gally Cazalat hatte ein derartiges nis der Querschnitte, daß, wenn in AB das Quecksilber um $4{,}3^{\text{m}}$ der Stempel D nur um $\frac{1}{8}^{\text{mm}}$ sank, so daß man den Einfluß der ng des Kautschuks ganz vernachlässigen konnte.

§ 67.

leichgewicht einer Flüssigkeit, auf welche beliebige Kräfte

1. Wir haben bisher bei der Untersuchung des Verhaltens der Flüssig- vorausgesetzt, daß nur die Schwere auf dieselben einwirke; die im urchgeführten Betrachtungen lassen sich aber auch sofort anwenden, Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, wenn noch andere auf die Flüssigkeiten einwirken, wenn z. B. die Flüssigkeit sich in rotierenden Zylinder befindet, dessen Rotationsachse die Achse des rs ist. Wir denken uns, um die an den verschiedenen Stellen der keit wirksamen Drucke zu berechnen, gerade wie § 63 einen kleinen r mit schiefen Endflächen s und s' von so kleinem Querschnitte σ kleiner Länge l, daß wir überall in diesem Zylinder die auf die inheit wirkenden Kräfte als gleich und gleich gerichtet ansehen . Nennen wir die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte k, so die jetzt ganz einfach an die Stelle des Gewichtes d der Volum- welches wir § 63 als allein wirksam voraussetzen. Ganz dieselben tungen, welche wir § 63 anstellten, liefern uns dann für den Druck der Fläche s' des Zylinders

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + k \cdot l \cdot \cos\beta,$$

wenn β den Winkel bedeutet, welchen die Achse unseres Zylinders mit der Richtung der resultierenden Kraft bildet, und p den Druck auf die schiefe Endfläche s bedeutet.

Die Bedingung der Niveauflächen ist auch jetzt wieder, daß in ihnen überall der Druck für die Flächeneinheit derselbe sein muß; somit muß, wenn die beiden Endflächen des kleinen Zylinders ein und derselben Niveaufläche angehören sollen.

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s}$$

sein, eine Bedingung, welche erfüllt wird, wenn

$$k \cdot l \cdot \cos\beta = 0 .$$

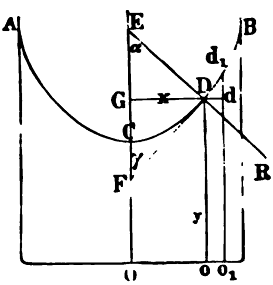
Letztere Bedingung wird aber, da k und l von 0 verschieden sind, nur erfüllt, wenn

$$\cos\beta = 0 , \qquad \beta = 90^{\circ} .$$

Ist also die Achse unseres kleinen Zylinders senkrecht zur Richtung der resultierenden Kräfte, so liegt derselbe ganz in einer Niveaufläche, oder die Niveauflächen sind solche, welche an allen Stellen normal zu den resultierenden Kräften sind.

Können wir die Richtung der resultierenden Kräfte bestimmen, so können wir hieraus die Gleichung der Niveauflächen ableiten; wir wollen diese Ableitung für den vorhin schon erwähnten Fall einer Flüssigkeit in einem rotierenden Zylinder durchführen. Die Kräfte, welche dort auf die Flüssigkeit einwirken, sind die Schwere und die Zentrifugalkraft; da letztere nur abhängig ist von dem Abstand der betrachteten Flüssigkeitsmasse von der Rotationsachse und in gleichen Abständen von der Achse dieselbe ist, so folgt, daß die Niveauflächen Rotationsflächen sind, deren Achse die Rotationsachse des Zylinders ist. Wir erhalten demnach die Flächen schon vollständig bestimmt, wenn wir einen Schnitt derselben, der durch die Rotationsachse gelegt ist, untersuchen.

Fig. 90.



Sei ACB Fig. 90 ein solcher Schnitt und zwar, da wir wissen, daß die Oberfläche eine Niveaufläche ist, durch die Oberfläche der Flüssigkeit, und OC die Rotationsachse. Sei ferner DR die Richtung der aus der Wirkung der Schwere und der Zentrifugalkraft im Punkte D resultierenden Kraft, welche mit der Vertikalen den Winkel α bilde. An dem Punkte D des Schnittes der Niveaufläche legen wir dann eine Tangente DF, welche bekanntlich in dem Punkte D die Richtung der Kurve angibt; dieselbe schneide die Vertikale unter dem Winkel γ. Da FD senkrecht zu R sein muß, so folgt weiter, daß die Winkel γ und α sich zu einem Rechten ergänzen müssen, oder daß

$$\tan\alpha = \cot\gamma$$

sein muß.

Wir beziehen unsere Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Achse der X horizontal, und dessen Achse der Y vertikal sei

Rotationsachse zusammenfalle. Der Anfangspunkt der Koordinaten Punkt O, in welchem die Rotationsachse den Boden des Zylinders . Die Koordinaten des Punktes D seien x und y. Da die DF mit der Kurve auf ein unendlich kleines Stück zusammen- verbindet sie zwei unendlich nahe Punkte D und d_1 der Kurve, zterer die Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$ hat. Ziehen wir lie dem Punkte d_1 entsprechende Ordinate $d_1 o_1$ und verlängern rdinate GD, bis sie erstere in d schneidet, so erhalten wir das lige Dreieck Ddd_1, dessen Winkel $Dd_1 d = \gamma$ ist. Demnach ist

$$\operatorname{tang} \alpha = \cot \gamma = \frac{d d_1}{D d} = \frac{dy}{dx}.$$

den Winkel α zu erhalten, sei m die Masse der im Punkte D ıen Flüssigkeit. Auf diese Masse wirkt dann gleichzeitig die ılkraft, welche, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit mit v be- gleich $\frac{v^2 m}{x}$ ist. Bezeichnen wir die Rotationsdauer des Zylinders ist

$$v = \frac{2\pi x}{t},$$

die Zentrifugalkraft

$$\frac{4\pi^2}{t^2} x \cdot m.$$

lie Schwere vertikal abwärts, die Zentrifugalkraft horizontal von ıngsachse fort wirkt, so erhalten wir die Tangente des Winkels, lie Resultierende mit der Vertikalen bildet, wenn wir die Zentri- , die horizontale Komponente der Resultierenden, durch die also das Produkt aus dem Gewichte m der Flüssigkeit und der igung g dividieren. Damit wird

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x.$$

Bestimmung der Niveaufläche erhalten wir somit die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x.$$

Gleichung liefert uns also direkt den Quotienten aus den beiden ı der Koordinaten, wenn wir von einem Punkte der Kurve zum enden übergehen, oder den Zuwachs

$$dy = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x\,dx,$$

die Ordinate y erfährt, wenn die Abszisse x um dx zunimmt. in der mathematischen Einleitung dargelegten Bedeutung des und mit Beachtung von E 1 wird daraus

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x^2 + \text{const}.$$

Wert der Konstanten ergibt sich, wenn wir x gleich Null setzen, ener Wert von y, in welchem die Kurve die Rotationsachse

schneidet, es ist das der tiefste Punkt der Flüssigkeitsoberfläche. wir die Höhe der Flüssigkeit dort h, so erhalten wir

$$y = \frac{2\pi^2}{gt^2} \cdot x^2 + h.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Gleichung einer Parabe Achse die Rotationsachse des Zylinders ist. Es folgt somit, Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit ein Rotationsparaboloid is Rotationsachse die Rotationsachse des Zylinders ist. Die Flüssigk am höchsten dort, wo x seinen größten Wert hat, also an der W Gefäßes; die Höhe H ist dort, wenn wir mit r den Radius des bezeichnen,

$$H = \frac{2\pi^2}{gt^2} \cdot r^2 + h,$$

$$H - h = \frac{2\pi^2}{gt^2} \cdot r^2.$$

Die Erhebung der Flüssigkeit an der Wand über dem tiefste ist also um so größer, je kleiner die Umlaufszeit t ist, je größ die Rotationsgeschwindigkeit ist, eine Folgerung, die man leicht Zentrifugalmaschine bestätigen kann.

Da die Niveauflächen einander parallele Flächen sind, so fol auch im Innern der Flüssigkeiten dieselben Paraboloide sind, we Oberfläche parallel sind; der auf den verschiedenen Niveauflächen Druck nimmt zu, je tiefer dieselben unter der Oberfläche liegen. jeder Niveaufläche der Druck an allen Stellen derselbe ist, so ha um ihn zu bestimmen, nur den Druck aufzusuchen, welchen diese erhalten, wo die Niveauflächen die Rotationsachse schneiden; man dann, daß der Druck dort gleich ist dem Gewichte der Flüssigk deren Höhe gleich ist dem Abstande der betrachteten Niveaufl der Oberfläche der Flüssigkeit.

§ 68.

Archimedisches Prinzip. Wenn ein Körper in eine Flüssi taucht wird, so wird die Oberfläche desselben von der Flüssigkei umher einen Druck erfahren, welcher an allen Punkten senkrech jedes Element der Oberfläche gerichtet ist, und dessen Größe gleich Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist dem I der Oberfläche des Körpers, und deren Höhe gleich ist der Höhe der keit über diesem Elemente. Wenn wir nun diese rings auf alle Pu Körperoberfläche senkrecht wirkenden Druckkräfte in zwei auf senkrechte Komponenten zerlegen, eine horizontale und eine verti ist klar, daß erstere als von Flüssigkeitsschichten herrührend, welc tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, an den entgegen Seiten des Körpers paarweise gleich und entgegengesetzt sind; sie daher den Körper nur mehr oder weniger zusammendrücken. Ande mit den vertikalen Komponenten, auch diese werden zwar auf den n den Körper begrenzenden Elementen der Oberfläche vertikal nac

des untern nach oben, also gerade entgegengesetzt gerichtet sein; aber sind sich nicht gleich, weil die obern Elemente den Druck einer weniger n Flüssigkeitssäule erfahren als die unteren. Mit der Differenz dieser :ke wird deshalb der Körper in der Flüssigkeit nach oben getrieben en.

Um die Größe dieser Differenz zu erhalten, denken wir uns den Körper ı eine Schar sehr naher vertikaler Ebenen in eine Reihe sehr schmaler ben zerlegt, und diese nochmals durch eine Schar paralleler, eben-vertikaler, aber zu den erstern senkrechter Ebenen zerschnitten. Da-haben wir den ganzen Körper in ein Aggregat elementarer Prismen :t, deren Endflächen ebenfalls sehr kleine Flächenstücke sind, die wir ies als einander gleich betrachten können. Der Druck nun, den die Endfläche eines Prismas vertikal abwärts erfährt, ist gleich dem :e eines Flüssigkeitsprismas, dessen Basis gleich ist einem Flächen-st, und dessen Höhe der senkrechte Abstand desselben von der Ober-der Flüssigkeit ist. Auf die untere Endfläche wirkt ein nach oben teter Druck, dessen Größe gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeits-mit einer der Größe des Elementes gleichen Basis, und mit einer gleich dem senkrechten Abstande dieses Elementes von der Ober-Die Differenz beider Drucke ist also das Gewicht eines Flüssigkeits-is mit einer jenen beiden gleichen Grundfläche und einer der Differenz beiden Abstände gleichen Höhe oder, was dasselbe ist, das Gewicht jenem betrachteten Prisma an Größe gleichen Prismas. Es wird also lches Prisma mit einem Drucke aufwärts getrieben, welcher dem Ge-· einer ihm an Größe gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist. Was von inzelnen Prisma gilt, gilt in gleicher Weise auch von allen zusammen; :langen daher zu dem Resultate, daß jeder in eine Flüssigkeit ge-e Körper einen von unten nach oben gerichteten Druck, einen Auf-erfährt, der dem Gewichte einer ihm an Volumen gleichen Flüssig-·nge gleich ist.

Man spricht diesen Satz auch wohl so aus: Jeder in eine Flüssigkeit t:· Körper verliert ein Gewicht, welches gleich ist dem Gewichte .· der Stelle gedrängten Flüssigkeit.

:· läßt sich dieser Satz noch auf eine andere Weise ableiten. Denken is im Innern der Flüssigkeit eine irgendwie begrenzte Menge von der en.den Flüssigkeit isoliert, so wird diese von der umgebenden Flüssig-n Zustande des Gleichgewichtes vollkommen getragen, ihrer Schwere durch den Druck im Innern der Flüssigkeit das Gleichgewicht ge-Da nun aber dieser Druck unabhängig ist von der Natur und tzung des eingetauchten Körpers, so ist klar, daß, wenn wir anstatt Flüssigkeitsmenge einen andern Körper eintauchen, der der ver-en Flüssigkeitsmenge gleiche Teil seines Gewichtes von der Flüssig-getragen wird, oder, was dasselbe ist, daß er einen so großen Teil Gewichtes verliert.

'm diesen Satz, welcher nach seinem Entdecker Archimedes das medische Prinzip genannt wird, experimentell zu beweisen, hängt unter eine mit einem Haken versehene Wagschale (Fig. 91) einen Kupferzylinder C und unter diesen einen massiven Kupferzylinder · genau in den Zylinder C hineinpaßt. Nachdem man nun mittels

auf die andere Wagschale gelegter Gewichte die Wage ins Gleich gebracht hat, läßt man den massiven Kupferzylinder in ein mit gefülltes Gefäß hinab, indem man mittels des Zahngetriebes im der Wage den Wagebalken herabläßt. Sowie der Kupferzylinder tauchen beginnt, ist das vorh gestellte Gleichgewicht gestört, den Gewichten belastete Schal herab. Es folgt daraus, daß getauchte Körper an Gewicht daß er einen Auftrieb erfährt. derselbe nun genau gleich is Gewichte der verdrängten Flüs folgt daraus, daß wir den Kupferzylinder ganz mit Wass füllen müssen, um das Gleich herzustellen, wenn der Kupferz ganz in das Wasser getaucht i

Fig. 91.

Wenn wir umgekehrt, Fig. 92, das mit Wasser gefüll fäß auf die Wagschale stellen, Gewichte balanzieren und nun an einem festen Gestell aufgeh Kupferzylinder in das Gefäß he sen, so wird das Gleichgewicht gestört; die mit dem Gefäß b Wagschale sinkt herab; sie is schwerer geworden und zwar, wie sich leicht nachweisen läßt, gen so viel schwerer, als der eingetauchte Körper leichter wird. Nehm nämlich Wasser aus dem Gefäße f füllen es in den hohlen Kupferzyl ein, so ist das Gleichgewicht wied gestellt, sobald wir den Zylinder geschöpft haben.

Fig. 92.

Diese Tatsache erklärt sich aus dem Prinzip der Gleichhei Aktion und Reaktion, denn es is daß, wenn der eingetauchte Körpe von unten nach oben gerichteten erfährt, das Wasser entgegen einen großen Druck von oben nach un fahren muß. Man kann diesen aber auch auf folgende Art erklär sahen, die Flüssigkeit trägt einen tauchten Körper genau so weit, al ein gleich großes Volumen Flüssig ihr Inneres gebracht wäre. Das Eintauchen des Körpers bewirkt al dasselbe, als wenn wir die Flüssigkeit um eine dem Körper an V gleiche Menge vermehrt hätten; es muß sich daher das Gewicht d sigkeit um das diesem Volumen gleiche Gewicht vergrößern.

Da nun ein eingetauchter Körper zwei Gruppen von Parallelkräften r den an seinem Schwerpunkte angreifenden Resultierenden unterworfen , welche sich gerade entgegengesetzt sind, so folgt, daß er, wenn er frei , entweder der einen oder der andern Kraft folgen, aufsteigen oder niederken kann. Sei v das Volumen des Körpers, d seine Dichtigkeit, d' die r Flüssigkeit, so ist vd das Gewicht des Körpers, vd' das Gewicht der drängten Flüssigkeit, also die Kraft, welche ihn in die Höhe treibt; $d - d')$ die Resultante aus beiden. Ist nun $d > d'$, so fällt der Körper; $d = d'$, so fällt er nicht und steigt nicht, er ist im Gleichgewicht; ist r endlich $d < d'$, so folgt der Körper dem Auftrieb, er steigt in der sigkeit auf.

§ 69.

Schwimmende Körper. Wenn der eingetauchte Körper mit der sigkeit die gleiche Dichtigkeit besitzt, so ist er, wie wir sahen, im ern der Flüssigkeit im Gleichgewicht. Man kann dieses leicht durch Versuch zeigen. Ein Ei ist dichter als Wasser, weniger dicht als eine sättigte Kochsalzlösung; in ersterem sinkt es unter, in letzterer taucht es r zum Teil ein; in einer passenden Mischung beider ist es an allen Stellen Gleichgewicht. Ähnliches zeigt ein Gemisch aus 1 Teil Zinnober und 25 Teilen weißem Wachs; in Wasser getaucht, ist es an allen Stellen Gleichgewicht. Dasselbe zeigen Öltropfen in einem passenden Gemische Wasser und Alkohol.

Ist die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers kleiner als die der üssigkeit, so steigt er in derselben auf; ist er vollständig untergetaucht, treibt ihn die Kraft $v\,(d - d')$ in die Höhe, er steigt deshalb mit beschleunigter Geschwindigkeit, jedoch nur so lange, bis ein Teil des Körpers s der Flüssigkeit hervorragt. Von dem Augenblick an vermindert sich s Volumen der aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit und damit der Aufieb. Ist das eingetauchte Volum nur mehr v', so ist der Auftrieb $v'd'$.

Da nun das Gewicht des Körpers vd dasselbe bleibt, so wird in einem stimmten Zeitpunkt $vd = v'd'$, Auftrieb und Schwere halten sich das leichgewicht. Wegen der bei der aufsteigenden Bewegung erhaltenen Geschwindigkeit wird jedoch der Körper über diese Lage emporsteigen, dann ieder, weil $vd > v'd'$ wird, herabsinken und so erst nach einigen Oszillaonen zur Ruhe kommen. Körper, welche leichter sind als die Flüssigkeit, welche sie eingetaucht sind, sind also im Gleichgewicht, wenn sie zum il und zwar so weit eingetaucht sind, daß die aus der Stelle gedrängte lüssigkeit ihrem Gewichte gleich ist.

Die Körper können dann zwar keine fortschreitende, wohl aber noch ne drehende Bewegung machen. Soll auch diese nicht stattfinden, so üssen die beiden auf den Körper einwirkenden Kräfte sich auch gerade tgegengesetzt sein. Das Gewicht des Körpers greift an seinem Schwernkte an, der Auftrieb am Schwerpunkte des aus der Stelle gedrängten assers. Es müssen demnach diese beiden Punkte in einer Vertikalen gen, wenn der Körper im Gleichgewicht sein soll. Eine schwimmende ogene Kugel ist demnach in jeder Lage im Gleichgewicht, ein Ellipsoid, nn eine seiner Achsen vertikal ist, ein Parallelepiped, wenn seine Kanten rtikal sind.

Unter diesen Bedingungen braucht aber das Gleichgewicht noc stabiles zu sein; damit das der Fall ist, d. h. damit der Körper bei Veränderungen seiner Lage immer wieder in seine frühere Stellung kehre, dazu muß noch eine dritte Bedingung erfüllt sein. Es muß das Metazentrum des schwi den Körpers über dem Schwer liegen, indem dann die a schwimmenden Körper wir Kräfte immer, bei Schwank denselben in seine frühere zurückdrehen. Um die Bed dieses Punktes zu erkennen, Fig. 93 der schwimmende K aus seiner Lage gebracht, die frühere Vertikale PG, durch den Schwerpunkt des K und den Mittelpunkt des Auftriebs P geht, die Lage $P'G'$ erhalten

Fig. 93.

Der Schwerpunkt des Körpers liegt dann in G'; der Mittelpun Auftriebs ist aber nicht mehr P', sondern P'', weil die Gestalt d getauchten Körpers sich geändert hat. Bei P'' greift der Auftrieb a unten nach oben gerichtet, bei G' die Schwere von oben nach Beide Kräfte suchen also dem Körper eine Drehung zu geben, welc von seiner frühern Lage entfernt; er kehrt also nicht dahin zurü war im labilen Gleichgewicht. Die Vertikallinie, die wir durch P'' schneidet die Linie $P'G'$, welche durch die beiden Schwerpunkte ersten Lage ging, in dem unterhalb G' liegenden Punkte M. Dieser heißt das Metazentrum. Wä gegen die Lage des Körpers Fig. 94 und liegt nach der D der Mittelpunkt des Auftriebs so ist das Metazentrum M dem Schwerpunkte G, beide bringen an dem Körper eine D hervor, welche ihn seiner f Lage nähert; der Körper sch im stabilen Gleichgewicht. Di P'' gelegte Vertikale schneid Linie $G'P'$ um so leichter oberhalb G, das Metazentrum liegt ums über dem Schwerpunkt, je tiefer dieser liegt. Es ist daher für Körper, der im stabilen Gleichgewicht schwimmen soll, z. B. Schiff Beste, wenn ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt.

Fig. 94.

§ 70.

Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper. sahen in § 68, daß, wenn die Dichtigkeit d des eingetauchten K größer ist als die Dichtigkeit d' der Flüssigkeit, der Körper dann sinkt, daß er aber soviel an Gewicht verliert, als die Flüssigkeit

aus der Stelle drängt. Wir haben in § 25 das spezifische Gees Körpers dahin definiert, daß es das Gewicht der Volumeinheit i als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zugrunde rd. Nennen wir das Volumen eines Körpers V, sein spezifisches s, so ist sein Gewicht $P = V \cdot s$. Das Gewicht eines gleichen Wasser ist dann in der obigen Einheit ausgedrückt V, es ist

$$\frac{P}{V} = \frac{V \cdot s}{V} = s.$$

ien wir demnach das Gewicht eines Körpers und das Gewicht chen Volumens Wassers, so ist der Quotient beider $\frac{P}{V}$ das speewicht des Körpers. Da ein in Wasser untergetauchter Körper viel an Gewicht verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches er Stelle drängt, so haben wir hier ein hes Mittel, um das Gewicht eines dem leichen Volumens Wasser zu bestimmen t sein spezifisches Gewicht zu erhalten. einfachste Verfahren, um das spezifische fester Körper zu bestimmen, ist die An der hydrostatischen Wage, welche sich ewöhnlichen Wage nur darin unterscheidet, eine Wagschale nicht so tief herabhängt er Mitte ihrer untern Fläche mit einem versehen ist. Man hängt an dasselbe mittels eines sehr feinen Drahtes den zu nden Körper, bestimmt sein Gewicht in läßt ihn dann in ein mit Wasser gefäß hinab und bestimmt sein Gewicht s. Der Gewichtsverlust ist genau das eines dem Körper gleichen Wasservolu- Quotient beider das spezifische Gewicht ers.

Fig. 96.

sind hierbei jedoch einige Vorsichtsmaß- beachten. Zunächst haben wir schon daß der Draht möglichst fein sein muß, da sonst auch das von s der Stelle gedrängte Wasser auf den Gewichtsverlust von merk- nflusse ist, wir also nicht das Gewicht einer dem Körper allein en gleichen Wassermenge erhalten.

er ist notwendig, daß man reines destilliertes Wasser anwende, dieses die Temperatur 4° C. habe. Wir werden später sehen, Wasser bei dieser Temperatur seine größte Dichtigkeit besitzt, Gewicht der Volumeinheit Wasser bei dieser Temperatur die gewichtseinheit ist. Hat das Wasser eine andere Temperatur, so einer Korrektur, welche aus der gemessenen Ausdehnung des bestimmt werden kann. Einer ähnlichen Korrektur bedarf es r Temperatur der Körper, da auch diese beim Erwärmen sich . Man ist nun überein gekommen, das somit für verschiedene uren verschiedene spezifische Gewicht der Körper stets auf die

Temperatur des schmelzenden Eises, auf 0^0 zu reduzieren. In de von der Ausdehnung durch die Wärme werden wir die Mittel lernen, diese Reduktionen vorzunehmen.

Eine zweite auf demselben Prinzip beruhende Methode zur Best des spezifischen Gewichtes ist die Anwendung des Nicholsonsche meters. Dasselbe besteht aus einem hohlen unten und oben kon gespitzten Zylinder von Messingblech A (Fig. 96). Von der Sp obern Kegels steigt als Verlängerung der Achse des Zylinders ei Stäbchen B auf, an dessen oberm Ende eine Schale C angebracht welche man, wie auf eine Wagschale, den zu suchenden Körper und Gewichte legen kann. Stäbchen ist durch einen Feilstrich eine feine M B angebracht.

Fig. 96.

Von der Spitze des untern Kegels hängt, eines gabelförmigen Drahtes daran befestigt, wicht D herab, das nach oben hin eine hor Fläche hat, auf welche man den zu untersu Körper legen kann. Da durch das Gewicht Schwerpunkt des Apparates möglichst tief li schwimmt derselbe aufrecht und zwar im stabilen gewicht. Das Gewicht des Apparates ist so be daß ein Teil desselben, wenn er in Wasser getauc aus dem Wasser hervorragt, und daß er nur dur legung von Gewichten auf die Schale C bis zu de B einsinkt.

Um nun mittels dieses Apparates das sp Gewicht eines Körpers zu bestimmen, verfährt m gendermaßen. Zunächst legt man den zu untersu Körper auf die obere Schale C und bewirkt durch dem aufgelegte Gewichte, daß das Aräometer ge zur Marke eintaucht. Darauf nimmt man den fort und bewirkt durch zugelegte Gewichte, d Apparat wieder bis B eintaucht. Da derselbe in beiden Fällen dasselbe Volumen Wasser aus seiner Stelle drängt, so ist in beid len das Gewicht dasselbe; die statt des Körpers aufgelegten G geben uns also das absolute Gewicht des Körpers P. Darauf le den Körper in die untere Schale D und nimmt die vorhin ten Gewichte wieder fort. Da jetzt der Körper aber in Wasser so verliert er an Gewicht, und deshalb sinkt der Apparat nicht wi B ein. Um das zu bewirken, müssen wir ein Gewicht P' auf di Schale legen, welches uns den Gewichtsverlust des Körpers im Wass das Gewicht einer ihm an Volumen gleichen Wassermenge gibt. D tient $\frac{P}{P'}$ gibt uns also nach dem vorigen das spezifische Gewi Körpers.

Daß wir hier dieselben Korrektionen anbringen müssen wie vorigen Verfahren, ist klar; aber selbst dann ist es äußerst schwie genau richtiges Resultat zu erhalten, besonders weil es wegen der der demnächst zu betrachtenden Kapillarität schwer ist zu bestimme

der Apparat genau bis zur Marke B eintaucht. Um genaue Resultate zu erhalten, ist daher die vorige Methode vorzuziehen.

Die beiden bisherigen Methoden beruhen auf der Erfahrung, daß ein eingetauchter Körper im Wasser an Gewicht verliert. Man kann als dritte Methode noch die Umkehr der ersten hinzufügen, den Satz bestehend, daß das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefäßes durch das Eintauchen eines Körpers gerade soviel an Gewicht zunimmt, als der Körper verliert.

Man wiegt ein Gefäß mit Wasser ab und bestimmt dann die Gewichtszunahme, welche es erhält, wenn der neben der Wage aufgehängte Körper von bekanntem Gewichte in das Wasser hinabgesenkt wird. Der Quotient des bekannten Gewichtes des Körpers und dieser Gewichtszunahme ist dann das gesuchte spezifische Gewicht des Körpers. Dieses Verfahren ist besonders bei der Untersuchung großer und schwerer Körper anzuwenden, indem es keine besondern, an großen Wagen schwer anzubringenden Vorrichtungen erfordert.

Alle diese Methoden können jedoch nur benutzt werden, wenn es sich darum handelt, das spezifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, welche nicht porös, nicht in Wasser löslich und schwerer als Wasser sind. Sind die Körper porös, so muß man sie mit einem sehr feinen Lack überstreichen, so daß sowohl das Gewicht als auch das Volumen der Körper möglichst wenig geändert wird, und da man dadurch das Eindringen des Wassers in den Körper gehindert hat, verfahren wie vorhin; sind die Körper in Wasser löslich oder leichter als Wasser, so wendet man statt des Wassers Flüssigkeiten an, in denen sich der Körper nicht löst, oder die ein geringeres spezifisches Gewicht haben. Das Verfahren bleibt dann ungeändert dasselbe. Ist das Gewicht des Körpers P, sein Gewichtsverlust in der betreffenden Flüssigkeit gleich P'', sein spezifisches Gewicht gleich s, das der Flüssigkeit gleich s'' und das Volumen des Körpers gleich v, so ist

$$P = vs, \qquad P'' = vs'',$$

$$\frac{P}{P''} = \frac{s}{s''}, \qquad s = s''\,\frac{P}{P''}.$$

Kennt man also s'', das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so läßt sich s berechnen.

Sind die zu untersuchenden Körper pulverförmig, so lassen sich die beschriebenen Methoden zur Bestimmung ihres spezifischen Gewichtes nicht anwenden: in einem solchen Falle verfährt man am besten so, daß man direkt die von einer gewogenen Quantität des Pulvers aus einem Gefäß verdrängte Menge Wassers, oder im Falle das Pulver im Wasser löslich oder leichter als Wasser ist, einer andern Flüssigkeit bestimmt. Man benutzt dazu sogenannte Pyknometer, wie Fig. 97 ein solches darstellt. Es sind kleine Fläschchen, welche einen ziemlich weiten Hals haben, in welchen ein Glasstöpsel eingeschliffen ist, so daß, wenn er eingesetzt ist, ein ganz bestimmter, immer gleicher Raum im Gefäße abgeschlossen ist. Da man, wie vorhin erwähnt, bei diesen Versuchen immer die Temperatur der Flüssigkeit kennen muß, so wendet man als Glasstöpsel, wie Fig. 97 zeigt, sehr bequem ein Thermometer an. An dem Gefäß ist ferner eine kapillare Röhre c angebracht, welche oben ausgeweitet ist und dort ebenfalls mit

einem eingeriebenen Glasstöpsel verschlossen werden kann. An der laren Röhre ist bei *m* eine Marke.

Man füllt das Gefäß zunächst mit Wasser, schließt es, währe kapillare Rohr offen ist, durc setzen des Stöpsels bei *h* und dann, während man es auf k ter Temperatur hält, das Was zur Marke *m* ab. Man schlie kapillare Röhre und wiegt das ab. Es habe das Gewicht *P*. öffnet man das Gefäß und schütt gewogene Quantität *p* des zu suchenden Pulvers hinein. Man s wieder, tupft das Wasser bis und wiegt wieder. Man finde das Gewicht *P'*. Das Gewicht dann gleich dem zuerst gefunde wicht *P*, vermehrt um das Gew des eingeschütteten Pulvers, ab mindert um das Gewicht π d dem Pulver verdrängten Wasser

Fig. 97.

$$P' = P + p - \pi,$$

somit

$$\pi = P + p - P'.$$

Demnach ist das spezifische G des Pulvers

$$s = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{P + p - P'}.$$

Bei diesem Verfahren mu dafür sorgen, daß das Pulver Luft eingeschlossen hält; am be es, daß man vor dem letzten das Wasser bis nahe zum Sied hitzt und dann erst, nach eingetretener Abkühlung, schließt und nac Abtupfen wägt.

§ 71.

Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Flüssigkeiten Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten kann man falls eine Reihe von Methoden anwenden, von denen mehrere auf d stimmung des Gewichtsverlustes eingetauchter Körper beruhen, andere Von letzteren machen wir zwei namhaft. Die genaueste ist di man die im vorigen Paragraphen beschriebenen Pyknometer bis zur einmal mit Wasser füllt, abwiegt und durch Abziehen des vorher besti Gewichtes des Gläschens das Gewicht des im Gefäße enthaltener W bestimmt. Darauf füllt man dasselbe Gefäß wieder bis zur Mar

untersuchenden Flüssigkeit und bestimmt auf gleiche Weise das Gewicht selben. Man hat auf diese Weise direkt das Gewicht gleicher Volumina ser und der zu untersuchenden Flüssigkeit, der Quotient beider gibt spezifische Gewicht der Flüssigkeit.

Eine zweite Methode beruht auf dem Satze, daß in zwei kommunizenden Röhren die Höhen verschiedener Flüssigkeiten sich umgekehrt ihre spezifischen Gewichte verhalten. Vor einem Maßstabe (Fig. 98) zwei Glasröhren befestigt, welche vertikal herabsteigen und unten so bogen sind, daß zwei kürzere aufnde Arme entstehen, welche bei *A* so nigt sind, daß die beiden Röhren gleichnur eine mehrfach gekrümmte Röhre

Fig. 98.

Fig. 99.

. Man gießt in die eine Wasser und zugleich in die andere die tersuchende Flüssigkeit. Auf diese Art erhält man zwei durch eine hicht getrennte Flüssigkeitssäulen. Wenn man die Flüssigkeitsn so reguliert, daß das Niveau derselben in den umgebogenen nschenkeln gleich hoch und das des Nullpunktes der Teilung ist, d die Höhen der Flüssigkeiten in den senkrechten Röhren ihrem schen Gewichte umgekehrt proportional. Ist die Höhe der Wasser-h, die der Flüssigkeit gleich h', die Dichtigkeit der Flüssigkeit

gleich d', die des Wassers gleich 1, so ist

$$h : h' = d' : 1,$$

$$d' = \frac{h}{h'}.$$

Eine etwas andere Anordnung des Apparates zeigt Fig. 99. tikalen Röhren tauchen unten in zwei abgesonderte Gefäße, we den zu vergleichenden Flüssigkeiten gefüllt sind. Oben kommuni mittels eines gebogenen Rohres miteinander und durch einen v baren Hahn mit einer kleinen Luftpumpe. Pumpt man bei g Hahn durch Heraufziehen des Kolbens etwas Luft aus, so ste Flüssigkeiten durch den äußern Luftdruck zu Höhen, welche ihr fischen Gewichten umgekehrt proportional sind. Schließt man Hahn oben und mißt die Höhen, so erhält man daraus gerade w das spezifische Gewicht der einen Flüssigkeit, wenn das der an kannt ist.

Die andern Methoden zur Bestimmung der Dichtigkeit von keiten beruhen auf dem Gewichtsverlust eingetauchter Körper. fachste und genaueste dieser Methoden ist die, daß man einen geformten Körper, etwa ein kleines Glasröhrchen, welch und oben zugeschmolzen ist, nachdem man etwas Qu hineingebracht hat, an einem sehr feinen Drahte, wie in befestigt. Man wiegt denselben genau und bestimmt dan Gewichtsverlust einmal, wenn er in Wasser getaucht dann, wenn er sich in der zu untersuchenden Flüssigke det. Diese Gewichtsverluste geben die Gewichte von Flü mengen, deren Volumen gleich ist dem des eingetauch pers, die Quotienten der Gewichtsverluste also das s Gewicht der zu untersuchenden Flüssigkeit.

Fig. 100.

Eine sehr bequeme Form hat Mohr dem Verfahren das durch den Gewichtsverlust eines Glaskörpers das s Gewicht einer Flüssigkeit bestimmt. Die dazu benutz hat zwei Wagebalken von ungleicher Länge; der län an seinem Ende einen Haken, an welchem der an eine Platindraht befestigte Glaskörper angehängt wird. Der Wagebal auf seiner obern Seite eine Teilung, welche den Abstand von der D achse der Wage bis zum Aufhängepunkt des Glaskörpers, also d des Wagebalkens in 10 gleiche Teile teilt. Der kürzere Arm seinem Ende ein etwas verschiebbares Gewicht, welches so e wird, daß die Wage im Gleichgewicht ist, wenn der Glaskörpe Luft an dem betreffenden Haken aufgehängt ist. Man bestimm den Gewichtsverlust des Glaskörpers im Wasser und fertigt eine an, der diesem Gewichtsverlust entspricht, was man leicht dadurc kann, daß man diesen Gewichtshaken an den Aufhängehaken d körpers hängt und den Glaskörper in Wasser senkt. Ist das Gew Hakens richtig bestimmt, so muß dann Gleichgewicht vorhanden se fertigt ferner einen Haken an, der genau ein Zehntel, und einen der genau ein Hundertstel des Gewichtes des ersten Hakens hat.

Taucht man den Glaskörper in eine Flüssigkeit, die spezifisch

'asser, so muß man zur Herstellung des Gleichgewichtes den ken nicht an den Aufhängehaken des Glaskörpers hängen, sondern Vagebalken näher bei der Drehungsachse. Da es schwer ist, den zu hängen, daß das Gleichgewicht genau erreicht wird, hängt an denjenigen Teilstrich, an welchem der Auftrieb der Flüssig- nicht aufgehoben ist. Zur vollen Herstellung des Gleichgewichtes zweite und dritte Haken. Man hängt den zweiten Haken, wenn gewicht durch Aufhängen desselben an einem bestimmten Teil- st gerade erreicht ist, so daß auch durch ihn der Auftrieb ge- nicht aufgewogen ist, und hängt schließlich den dritten Haken oder zwischen zwei Teilstriche, so daß das Gleichgewicht genau ist. Nehmen wir z. B. an, daß durch Aufhängen des ersten i dem Teilstriche 8 der Glaskörper tiefer sinkt, bei dem Teil- aber der Auftrieb noch nicht ganz aufgewogen ist, so hängt Haken auf den Teilstrich 7; wurde etwa durch Aufhängen des akens bei dem Teilstriche 9 auch das Gleichgewicht noch nicht estellt, so nimmt man den dritten Haken und es sei nun, indem in der Mitte zwischen Teilstrich 4 und 5 aufhängt, das Gleich- erade hergestellt. Der Haken 1 wirkt dann so, als sei 0,7 des Aufhängehaken des Glaskörpers aufgehängt, der Haken 2, als ,09 und der Haken 3, als sei dort 0,0045 des Gewichtes des kens aufgehängt. Da der erste Haken genau dem Gewichtsverlust r entspricht, folgt daß der Gewichtsverlust des Glaskörpers in der n Flüssigkeit gleich 0,7945 von dem im Wasser ist, also daß ische Gewicht der Flüssigkeit gleich 0,7945 ist. Nimmt man iten Haken zu Hilfe, dessen Gewicht gleich ist dem Gewichte ngten Wassers und hängt denselben an den Haken, der den Glas- gt, so kann man in der angegebenen Weise die spezifischen Ge- n Flüssigkeiten bestimmen, deren spezifisches Gewicht zwischen liegt.

das Nicholsonsche Aräometer kann man, wie leicht ersichtlich m Zwecke anwenden. Man bestimmt zunächst das Gewicht des : dasselbe sei A; man taucht es dann in Wasser, und damit es arke einsinke, sei ein Gewicht p erforderlich. Da das Aräometer , so ist das Gewicht des dem eingetauchten Teile an Volumen Vassers gleich $A + p$. Darauf taucht man es in die zu unter- Flüssigkeit, und ist p' das jetzt aufzulegende Gewicht, damit es rke einsinkt, so ist $A + p'$ das Gewicht einer der vorigen Wasser- Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge. Der Quotient beider oder

$$\frac{A + p'}{A + p} = s$$

dem spezifischen Gewichte der Flüssigkeit.

im praktischen Leben sehr häufig notwendig ist, das spezifische on Flüssigkeiten zu bestimmen, ohne daß eine möglichst große it erfordert wird, so hat man noch ein anderes Verfahren er- m leicht und schnell das Geforderte zu leisten; man bestimmt e Dichtigkeit von Flüssigkeiten mittels Aräometer von veränder- lumen. Während man mittels der Nicholsonsche Aräometers

die Dichtigkeit der Flüssigkeiten aus den verschiedenen Gewichten Volume ableitet und dann, wenn P das Gewicht der Flüssigkeit Dichtigkeit D, p das der Flüssigkeit von der Dichtigkeit d ist, suchte Dichtigkeit aus der Proportion erhält,

$$D : d = P : p,$$

verfährt man bei den jetzt zu betrachtenden Apparaten so, daß konstantes Gewicht P in verschiedene Flüssigkeiten eintaucht und lumen beobachtet, welches dieses aus der Stelle drängt. Der Körp stets so tief ein, daß das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit sein wichte P gleich ist. Sinkt er nun in die Flü von der Dichtigkeit D so tief ein, daß er ein men V aus der Stelle drängt, so ist

Fig. 101.

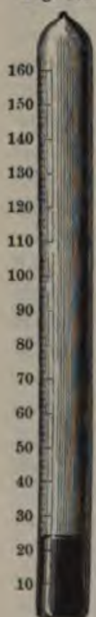


Fig. 102.

$$P = V \cdot D.$$

Drängt er in einer andern Flüssigkeit das V v aus der Stelle, so ist

$$P = v \cdot d$$

und daher

$$v \cdot d = V \cdot D; \quad d : D = V : v.$$

Nehmen wir also z. B. eine zylindrische röhre, welche unten und oben, nachdem etwas silber hineingebracht, zugeschmolzen ist, um wirken, daß sie stets aufrecht schwimmt, u sie bis zu einem bestimmten, etwa in der Mi Röhre liegenden Punkte in Wasser einsinkt, so leicht, aus dieser ein Aräometer zu machen, b chem eine einfache Ablesung genügt, um die I keit der Flüssigkeit, in die es getaucht ist, halten. Man bezeichnet die Stelle, bis zu wel Röhre (Fig. 101) in Wasser einsinkt, durch eine setzt daneben die Zahl 100 und teilt nun die der Röhre von diesem Teilstriche aus nach u in 100 gleiche Teile, und trägt ebenso die nach oben hin auf. Der Rauminhalt zwisch Teilstrichen entspricht dann, da wir die Rö zylindrisch voraussetzten, $^1/_{100}$ des Rauminhal Röhre von unten bis zum Teilstriche 100. T wir nun diese Röhre in eine Flüssigkeit, in sie bis zum Teilstriche 80 einsinkt, so schlie daraus, da sie eine ihrem Gewichte gleiche Flüssigkeitsmenge a Stelle drängt, daß 80 Volumteile dieser ebensoviel wiegen als 100 teile Wasser. Wir haben demnach für das spezifische Gewicht dies sigkeit s

$$s : 1 = 100 : 80,$$

$$s = {}^{100}/_{80} = 1.25;$$

taucht die Röhre dagegen bis zum Teilstriche 120 ein, so ist

$$s = {}^{100}/_{120} = 0{,}833;$$

taucht überhaupt die Röhre in irgend eine Flüssigkeit bis zum Teilstrich n ein, so haben wir für ihr spezifisches Gewicht $\frac{100}{n}$.

Diese Aräometer bestimmen demnach das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung des Volumens derselben mit dem Volumen einer gleichen Gewichtsmenge Wasser. Sie führen daher den Namen Volumeter.

Man gibt ihnen meist eine andere Form (Fig. 102). Es ist klar, daß die Apparate eine um so größere Genauigkeit liefern, je weiter zwei Teilstriche voneinander entfernt sind. Zu dem Ende wählt man sehr enge Röhren, und damit sie dann nicht zu lang und somit zu unbeholfen werden, setzt man unten ein Stück einer weitern Röhre daran. Die Teilung kann dann nur empirisch aufgetragen werden; man verfährt folgendermaßen. Man bringt in die Röhre etwas Quecksilber, so daß das Gewicht des Apparates gleich p wird, taucht ihn in Wasser und bezeichnet die Stelle, bis zu welcher er einsinkt, mit 50. Darauf vermehrt man durch Hinzufügen von Quecksilber sein Gewicht auf $2\,p$, $3\,p$ und taucht ihn wieder in Wasser. Das doppelte und dreifache Gewicht verdrängt die doppelte und dreifache Wassermenge, der Apparat sinkt also tiefer ein. Die Stelle, bis zu der er bei doppeltem Gewichte einsinkt, bezeichnet man mit 100, die bei dreifachem Gewichte mit 150 und teilt nun den Raum zwischen 50 und 100, sowohl als zwischen 100 und 150, in 50 gleiche Teile. Der Raum zwischen 50 und 100 ist die Hälfte von dem Raum, den das Instrument ausfüllt, wenn es bis zu 100 einsinkt; der Raum zwischen zwei Teilstrichen also $^1/_{100}$ dieses Raumes. Man gibt schließlich dem Apparate das Gewicht $2\,p$ und schließt ihn oben. Im Wasser taucht dann derselbe bis zum Teilstriche 100 ein; wir können ihn daher jetzt gerade so benutzen wie das einfachere Aräometer, taucht er in eine Flüssigkeit bis zum Teilstriche n, so ist $\frac{100}{n}$ ihr spezifisches Gewicht.

Aber auch so erhält der Apparat immer noch eine bedeutende Länge und wird dadurch zum praktischen Gebrauche unbequem. Man verfertigt daher selten Apparate, welche zugleich dazu dienen das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, welche schwerer oder leichter sind als Wasser, sondern meist solche, welche nur für die eine oder andere Art von Flüssigkeiten bestimmt sind.

Ist das Instrument für schwerere Flüssigkeiten bestimmt, so bezeichnet man den Punkt oben an der Röhre, bis zu welchem sie beim Gewichte $2\,p$ in Wasser einsinkt, mit 100, und ganz unten über der weitern Röhre beim Gewicht p mit 50, gibt dem Apparate das Gewicht p und graduiert wie vorhin. Ist es für die Bestimmung des spezifischen Gewichtes leichterer Flüssigkeiten bestimmt, so richtet man das Gewicht p des Apparates so ein, daß er in Wasser getaucht bis gerade über die weite Röhre eintaucht, und bei dem Gewichte $2\,p$ bis oben. Der Apparat erhält dann das Gewicht p und der untere Punkt wird mit 100, der obere mit 200 bezeichnet; das spezifische Gewicht ergibt sich dann wie vorhin.

Häufig findet man auch auf den Aräometerskalen anstatt oder neben

der der Teilung entsprechenden Zahl die Angabe des spezifischen G verzeichnet, welche dem nebenstehenden Teilstriche entspricht; al dem Teilstriche 100—1, neben dem 120 dann 0,833, 150—0,666, 2(eine einfache Ablesung ergibt dann das gesuchte spezifische Gewi

Aräometer für besondere Flüssigkeiten. Wenn zwei Flüs verschiedenen spezifischen Gewichtes, die sich miteinander misc sammengegossen werden, so hängt das spezifische Gewicht des G von den Mengenverhältnissen der einzelnen Flüssigkeiten ab. Ke daher für alle Mischungen ihre spezifischen Gewichte, so kann ma der Aräometer die Bestandteile des Gemisches kennen lernen.] zelne Flüssigkeiten sind diese Untersuchungen durchgeführt und nauesten für Alkohol, da es im praktischen Leben vielfach von keit ist, den Prozentgehalt eines Weingeistgemisches mit Schnelli stimmen zu können. Auf den ersten Blick sollte man glauben, d einfacher sei, als aus dem spezifischen Gewichte eines Flüssigkeit den Gehalt desselben an der einen oder andern zu bestimmen, in das spezifische Gewicht aus den Mengenverhältnissen berechnet. würde z. B. ein Gemisch von 50 Volumen Wasser und 50 Volumen ein Gemisch von 100 Volumen geben, dessen spezifisches Gewicht in der Mitte dessen des Alkohols oder des Wassers läge, also, da Alkohols gleich 0,794, das des Wassers bei 15° C. gleich 0,9 gleich 0,8866 sein würde.

Dem ist jedoch nicht so, und zwar deshalb nicht, weil bei der] zweier Flüssigkeiten meist eine Änderung des Volumens eintritt.

Gießt man z. B. Alkohol und Wasser zu gleichen Teilen zu so ist das Volumen des Gemisches nicht gleich der Summe der V sondern kleiner. Es tritt eine Kontraktion der Flüssigkeiten ein; d fische Gewicht ist demnach größer als das vorhin berechnete.

Nach den Versuchen von von Baumhauer[1]) geben:

Volume Wasser.	Weingeist.	Mischung.	Volume Wasser.	Weingeist.	M
100	0	100	40	60	
90	10	99,4	30	70	
80	20	98,2	20	80	
70	30	97,2	10	90	
60	40	96,4	0	100	
50	50	96,0			

Daraus ergibt sich das spezifische Gewicht s bei 15° C.:

Mischung aus Volumen.			Mischung aus Volumen.		
Wasser.	Weingeist.	s	Wasser.	Weingeist.	
100	0	0,9991	40	60	0,9
90	10	0,9857	30	70	0,8
80	20	0,9750	20	80	0,8
70	30	0,9645	10	90	0,8
60	40	0,9511	0	100	0,7
50	50	0,9338			

1) *von Baumhauer,* Mémoire sur la densité etc. des mélanges d

Wenn man ein Volumeter so einrichtet, daß es in Wasser getaucht, zu einem mit 0 bezeichneten Punkte eintaucht, so wird es in Ge-schen aus Alkohol und Wasser tiefer eintauchen. Bezeichnet man die nkte, bis zu denen es in Flüssigkeiten vom spezifischen Gewichte 875, 0,9750 etc. einsinkt, mit 10, 20 ···, so erhält man ein Alko-lometer, welches in ein Weingeistgemisch eingetaucht durch eine ein-he Ablesung angibt, wieviel Volumprozente das Gemisch an reinem kohol enthält.

So sind die Alkoholometer von Tralles[1]) eingerichtet, welche in utschland meist gebraucht werden, um den Alkoholgehalt des käuflichen iritus zu bestimmen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Zahlen für das spezifische Gewicht s Alkohols, wie schon erwähnt, und so auch die der Gemische nur für ne bestimmte Temperatur gelten, nämlich für 15° C. Deshalb gelten auch ie Angaben der Alkoholometer nur für diese oder eine andere Temperatur, i der sie graduiert sind. Um jedoch den Apparat auch für andere Tem-raturen brauchbar zu machen, hat Tralles eine Tabelle aufgestellt[2]), s welcher man für jede Temperatur den Alkoholgehalt eines Gemisches hmen kann, wenn man beobachtet hat, bis zu welchem Punkte bei dieser mperatur der Apparat in das Gemische eintaucht. Deshalb ist an den eisten Alkoholometern auch ein Thermometer angebracht.

Vielfach ist auch an den Alkoholometern selbst die Korrektion bemerkt, elche man für die verschiedenen Temperaturen anzubringen hat. In der tern Röhre am untern Teile des Apparates ist neben dem Thermometer ne Skala befestigt, auf der dann neben dem normalen Thermometerstand, ir welchen das Instrument graduiert ist, 0 verzeichnet ist und darüber er darunter, wieviel Prozente man von der Angabe des Alkoholometers ziehen oder derselben hinzufügen muß, wenn das Thermometer einen ern oder tiefern Stand hat.

Außer den Alkoholometern müssen wir noch die Aräometer von eaumé erwähnen, welche vielfach in Gebrauch sind, obwohl sie direkt eder etwas über die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, noch über ihre Zu-mmensetzung aussagen. Beaumé konstruierte zwei Aräometer, das erste aduierte er so, daß er den Punkt, bis zu dem es in Wasser eintauchte, it 0, und den, bis zu welchem es in einer Lösung von 15 Teilen Koch-lz auf 85 Wasser eintauchte, mit 15 bezeichnete. Die Teilung wurde nn weiter nach unten fortgesetzt. Der Apparat gibt in Schwefelsäure-ydrat 66 Grade an und in konzentrierter Salpetersäure 36.

Für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser, wurde der Punkt, s welchem der Apparat in eine Lösung von 10 Teilen Kochsalz auf 0 Wasser taucht, mit 0, in Wasser mit 10 bezeichnet und die Teilung

ax. Amsterdam 1860 Etwas von diesen verschiedene Werte ergeben sich aus n Versuchen von *Mendelejeff*, Poggend Ann. 138. 1869

1) *Tralles*, Gilbert Annalen. 38. p. 349 431. 1811.

2) *Tralles* a. a. O. Neuerdings werden in Deutschland Alkoholometer an-wandt, welche nach Gewichtsprozenten graduiert sind. Bei der physikalischen ichsanstalt befindet sich die Urnormale eines solchen Alkoholometers, nach nem andere geeicht werden. Man sehe: Das Gewichtsalkoholometer und ne Anwendung, von *H. Homann*. Berlin 1889, bei J. Springer

nach oben hin fortgesetzt. In käuflichem, meist 80—90 prozentigem Spiritus zeigt der Apparat 34—38 Grade[1]).

§ 72.

Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern.

In unseren bisherigen Entwicklungen über die Gesetze des Gleichgewichtes der flüssigen Körper haben wir keine Rücksicht genommen auf die Wirkung von Kräften, welche an den Gefäßwänden zwischen den Molekülen der festen Wand und denen des flüssigen Körpers und welche zwischen den Molekülen des flüssigen Körpers tätig sind, also gemäß unserer Benennung in § 60 und 47 auf die Wirkung der Adhäsion der flüssigen an die festen Körper und die Kohäsion der Flüssigkeiten.

Von dem Dasein beider Kräfte kann man sich leicht überzeugen. Taucht man ein reines Glasstäbchen in Wasser und zieht es dann heraus, so sieht man, daß eine Wasserschicht an demselben haftet. Hält man es vertikal, so sammelt sich an seinem untern Ende ein Tropfen an, der nicht herabfällt, sondern der Wirkung der Schwere entgegen an dem Stäbchen haften bleibt. Diese einzige Tatsache beweist das Dasein der Adhäsion des flüssigen Körpers an den festen sowohl als auch das der Kohäsion der einzelnen Teile der Flüssigkeit. Denn die zunächst am Glase anhängende Wasserschicht wird durch die Adhäsion des Wassers am Glase getragen und der übrige Teil des Tropfens durch die Kraft, mit welcher die einzelnen Wasserteilchen aneinander haften.

Aus diesem Versuche geht zugleich hervor, daß in diesem Falle sowohl die Kohäsion der Flüssigkeit als auch die Adhäsion derselben am Glase größer ist als die Wirkung der Schwere, denn nur dann ist es möglich, daß der Tropfen, der Schwere entgegen, getragen wird. Der Versuch zeigt aber weiter, daß hier auch die Adhäsion des Wassers am Glase größer ist als die Kohäsion der Wasserteile untereinander; denn beim Herausziehen des Stabes wurden die an dem Stabe haftenden Wasserteile von ihrer Umgebung losgerissen, mit welcher sie durch die Kohäsion zusammenhängen.

Nicht immer ist das jedoch der Fall; denn wenn wir den Glasstab in Quecksilber tauchen, so bleibt kein Quecksilber daran haften, er wird von demselben nicht benetzt. Daß aber auch hier eine Adhäsion des Quecksilbers am Glase vorhanden ist, läßt sich durch einen andern Versuch zeigen. Hängt man nämlich eine Platte mittels dreier Fäden an den einen Arm einer Wage horizontal auf, äquilibriert sie durch Gewichte, welche auf die andere Wagschale gelegt werden, so bringt das geringste Übergewicht, auf die Wagschale gelegt, eine Erhebung der Glasplatte hervor. Nähert man aber der Platte von unten ein weites, mit Quecksilber gefülltes Gefäß so weit, daß die untere Fläche der Glasplatte die Oberfläche des Quecksilbers gerade berührt, so bedarf es auf der andern Wagschale bedeutender Zulage, um die Platte von dem Quecksilber loszureißen, ein Beweis, daß sie mit einer gewissen Kraft am Quecksilber haftet, daß also auch das Quecksilber am Glase adhäriert.

---

1) Weiteres *Meißner,* Die Aräometrie in ihrer Anwendung auf Chemie und Technik. Wien 1816.

Die Kohäsion der verschiedenen Flüssigkeiten sowohl als die Adhäsion derselben Flüssigkeit an verschiedene feste Körper ist verschieden. Während Quecksilber Glas nicht benetzt, also an Glas nicht so stark adhäriert, daß die Kohäsion der Quecksilberteile überwunden werden kann, wird Gold vom Quecksilber benetzt. Während reines Glas vom Wasser benetzt wird, vermag eine fettige Glasscheibe die Kohäsion der Wasserteile nicht zu überwinden.

Bei denjenigen Substanzen, bei welchen die Adhäsion an feste Körper größer ist als die Kohäsion der flüssigen Teile, kann obiges Verfahren, welches wir anwandten, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase nachzuweisen, dazu dienen, die Kohäsion der Flüssigkeit zu messen. Gay-Lussac[1]) hat für einige Flüssigkeiten, welche am Glase adhärieren, dieses Verfahren angewandt und mit einer Scheibe von 118,366^{mm} Durchmesser folgende Resultate erhalten.

Flüssigkeit		Spezifisches Gewicht	Gewichte
Wasser	bei 8,5° C.	1	59,40 gr
Alkohol	„ „ „	0,8196	31,08 „
Alkohol	„ 10° „	0,8595	32,87 „
Alkohol	„ 8° „	0,9415	37,15 „
Terpentinöl	„ 8° „	0,8694	34,10 „

Die angegebenen Gewichte sind diejenigen, welche bei langsamem [Au]flegen der Gewichte gerade die benetzte Platte loszureißen imstande [wa]ren. Ganz dieselben Resultate erhielt Gay-Lussac, als er die Glas[sc]heibe der vorigen Versuche durch eine Kupferscheibe ersetzte, was einen [neu]en Beweis dafür liefert, daß durch diese Versuche wirklich die Kohäsion [de]r Flüssigkeiten gemessen wird.

Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren [be]nutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Ver[su]che an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die [Za]hlen jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen ...gr und 296gr, je nachdem er die Übergewichte rasch oder langsam [au]flegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Teil in der Reibung [de]s Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

§ 73.

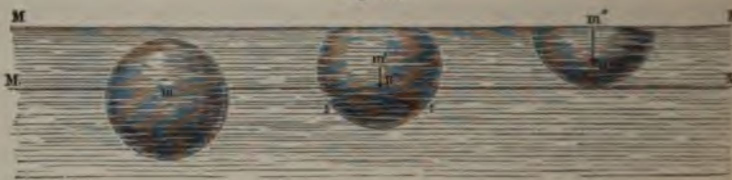
Normaldruck und Oberflächenspannung in der Oberfläche der Flüssigkeiten. Aus den im vorigen Paragraphen mitgeteilten Tatsachen [fol]gt erstens, daß die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich an[zie]hen, und zweitens, daß die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten [fes]ten Körpers ebenfalls die benachbarten Teile der Flüssigkeit anziehen. [Bei] der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen

1 *Gay-Lussacs* Versuche in La Place Supplément à la Théorie de l'action [ca]pillaire II. Supplément zum 10. Buche der Mécanique céleste. Daraus *Gilbert*, [An]nalen 33. p. 320. 1809.

wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Änderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitssteile aufeinander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, daß die Kräfte sich nur auf unmeßbare oder jedenfalls äußerst kleine Entfernungen erstrecken, daß sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen sehr kleine Werte übersteigen.[1])

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche MN (Fig. 103) begrenzt ist, und untersuchen die Resultierende aller auf die Moleküle m, m', m'' von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien r, welche als sehr klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so daß also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf m, m', m'' wirken.

Fig. 103.



Auf das Molekül m wirken die ringsum ganz gleichmäßig verteilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein; dasselbe wird also nach allen Richtungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf m wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

Anders bei den der Oberfläche nahen Molekülen; das Molekül m'', welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit liegt, erfährt einen einseitigen Zug senkrecht zur Oberfläche gegen die Flüssigkeit hin; nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeit gefüllt, die obere nicht. Die anziehenden Kräfte der die untere Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben eine zur Oberfläche MN senkrechte Resultierende, da sie ganz symmetrisch um die durch m'' gelegte Normale gruppiert sind; ein etwa rechts von der durch m'' gelegten Normale liegendes Molekül hat ein genau entsprechendes links liegendes. Zerlegen wir die von beiden ausgeübten Anziehungen in ihre Komponenten parallel der Normale und parallel der Oberfläche, so summieren sich die ersteren, während die letztern auf das Molekül m'' nach gerade entgegengesetzter Richtung in genau gleicher Größe wirken. Die der Normale parallele Komponente sämtlicher Anziehungen, welche von den in der mit dem Radius der Wirkungssphäre beschriebenen Halbkugel liegenden Flüssigkeitsmolekülen auf m'' ausgeübt werden, liefern also einen normalen gegen das Innere der Flüssigkeit wirkenden Druck.

1) *La Place*, Théorie capillaire im Supplément zum 10. Buche der Mécanique céléste, daraus *Gilbert*, Annalen **33**. 1809.

es gilt von dem Molekül m', welches um weniger als r unter he der Flüssigkeit liegt; auch dessen Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeit ausgefüllt und unterhalb st wirkt eine Quankeit auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach ete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird. Auch an m' eine zur Oberfläche senkrechte gegen das Innere gerichtete e jedoch kleiner ist als die an m'' angreifende.

e ist der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als r berfläche der Flüssigkeit liegen, deren Anziehungssphären also cht mit Flüssigkeit ausgefüllt sind. Legen wir daher parallel he im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der m r entfernt ist, so werden alle in dieser Schicht liegenden ch innen gezogen. Es muß demnach infolge der Molekularie Oberfläche einer Flüssigkeit ein normaler gegen das Innere keit gerichteter Druck vorhanden sein, welcher, da alle in Oberfläche parallelen Fläche liegenden Moleküle in gleicher lußt werden, der Größe der Oberfläche proportional sein muß. e Einheit der Fläche wirkenden Druck K nennen wir den r.

mensionen des Normaldruckes ergeben sich aus der Überlegung, odukt aus dem Normaldruck und einer Fläche eine Kraft ist, naldruck die Kraft pro Flächeneinheit bedeutet, es ist demnach

$$K = z\,[\mu\lambda\tau^{-2}\lambda^{-2}] = z\,[\mu\lambda^{-1}\,\tau^{-2}].$$

diesem Normaldruck muß in der eben betrachteten Schicht, n durch die Oberfläche, innen durch die von der Oberfläche ten derselben parallelen Fläche begrenzt ist, auch eine der arallele Spannung, die Oberflächenspannung, vorhanden sein. die der Oberfläche parallele Komponente der Anziehungen, berfläche senkrechte Komponente uns den Normaldruck liefert. uns durch die Oberfläche eine Linie gelegt nach irgend welcher werden an dieser, und zwar senkrecht zu derselben, nach tzten Richtungen gleiche Kräfte wirken. Die oberflächliche r Flüssigkeit muß sich demnach verhalten wie eine gespannte embran, man nennt deshalb auch vielfach die Oberflächenschicht eitshäutchen.

erflächenspannung, welche auf alle in einer Linie der Oberien Moleküle nach entgegengesetzten Richtungen einen gleichen ist der Länge einer in der Oberfläche gedachten Schnittlinie : die auf die Längeneinheit der Schnittlinie wirkende Kraft O die Oberflächenspannung. Ihre Dimension ergibt sich daraus, odukt aus der Oberflächenspannung und einer Länge einen t, eben weil sie der Zug pro Längeneinheit sein soll. Es

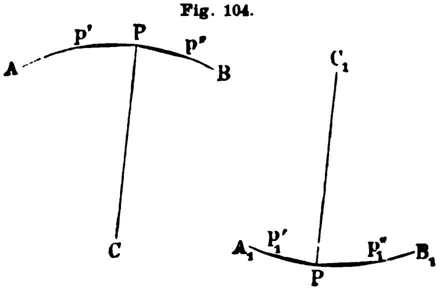
$$O = z\,[\mu\lambda\tau^{-2}\lambda^{-1}] = z\,[\mu\tau^{-2}].$$

Dimensionen der Oberflächenspannung kommt die Länge

Oberflächenspannung bewirkt gleichzeitig, daß in gekrümmten der Normaldruck ein anderer wird als in ebenen Oberflächen

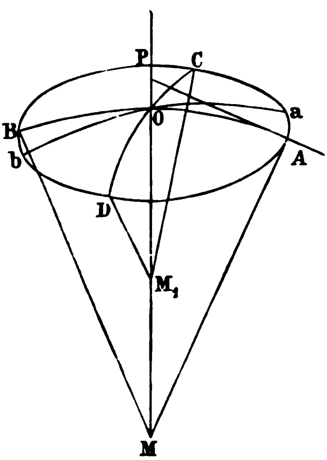
derselben Flüssigkeit. In Flächen, welche nach außen konvex sind, tritt infolge der Oberflächenspannung eine Vergrößerung, in solchen, welche nach außen konkav sind, eine Verminderung des Normaldrucks ein. Denn ist AB (Fig. 104) ein Durchschnitt durch eine konvexe, A_1B_1 ein solcher durch eine konkave Oberfläche, so müssen die gegenseitigen Anziehungen der in der oberflächlichen Schicht liegenden Flüssigkeitsteilchen eine der Normale parallele Komponente liefern, welche bei den konkaven Flächen nach außen, bei den konvexen Flächen nach innen gerichtet ist; wir wollen diesen infolge der Krümmung von der Oberflächenspannung vorhandenen Teil des Normaldruckes den Oberflächendruck nennen.

Fig. 104.



Die Größe dieses Oberflächendruckes und die Beziehung desselben zur Krümmung der Oberfläche erhalten wir durch folgende zuerst von A. Dupré[1]) angestellte Betrachtung. Es stelle $ACBD$ eine sehr kleine Kalotte der gekrümmten Oberfläche einer Flüssigkeit dar. Die Kalotte soll so erhalten sein, daß von einem Punkte O der Oberfläche nach allen Richtungen die gleiche Länge $r = OA = OC$ usw. abgetragen sei, und die Länge r sei nur so groß, daß wir die Schnitte AB und CD der Kalotte als ganz und gar mit den Krümmungskreisen im Punkte O zusammenfallend ansehen können, keinenfalls aber größer als der Radius der Wirkungssphäre. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises für AB, also des im Schnitt MAB liegenden Kreises, mit welchem der Schnitt der Oberfläche auf die Länge AB zusammenfällt, sei M, der Mittelpunkt des Krümmungskreises für CD sei M_1. An der Länge A des Umfanges, die wir gleich $rd\varphi$ setzen wollen, wirkt die Oberflächenspannung, und zwar können wir, da $d\varphi$ verschwindend klein ist, annehmen, der Zug $Ord\varphi$ wirke parallel der im Punkte A an den Kreis MAB gelegten Tangente. Dieser nach innen sich übertragende Zug hat eine zur Normale MO parallele Komponente, die wir erhalten, wenn wir den Zug $Ord\varphi$, der in der Richtung der Tangente PA wirkt, mit dem Kosinus des Winkels APM multiplizieren. Dieser Kosinus ist $\frac{AP}{PM}$. Für AP können wir ohne Ungenauigkeit r setzen, ebenso für PM den Radius ϱ_1 des Krümmungskreises; demnach wird

Fig. 105.



1) *A. Dupré,* Ann. de chim. et de phys. 7. (4.) 1866.

a dem Zuge $Or d\varphi$ herrührende, der Normale in O parallele Komponente

$$Or d\varphi \frac{r}{\varrho_1}.$$

Genau dieselbe Komponente erhalten wir von dem an der Länge Bb, elche an dem andern Ende des Kreisbogens AB liegt, wirkenden Zuge $)rd\varphi$, so daß der von Aa und Bb herrührende Oberflächendruck gleich $!Ord\varphi \frac{r}{\varrho_1}$ ist.

Gleiches gilt von den Elementen $rd\varphi$, welche bei C und D, den Enden ls zu AB senkrechten Schnittes CD liegen, nur daß wir dort zur Bechnung des Kosinus des Winkels CPM, in den Nenner den Radius des n AB senkrechten Krümmungskreises ϱ_2 einsetzen müssen.

Von den vier betrachteten Elementen $rd\varphi$ erhalten wir deshalb als a O bezw. auf die vier Flächenstücke, die wir als Dreiecke mit der Basis $rd\varphi$ und der Höhe r ansehen können, wirkenden Oberflächendruck

$$2Or^2 d\varphi \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Den auf die ganze Kalotte wirkenden Druck erhalten wir, wenn wir) nach und nach für je vier, also an je zwei zueinander senkrechten chnitten, liegenden Dreiecken die Drucke bestimmen und die Summe aller ser Drucke bilden. Bedeuten also ϱ_m und ϱ_n die Krümmungsradien gend zweier zueinander senkrechter Schnitte, so können wir die Summe hreiben

$$\sum 2Or^2 d\varphi \left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_n}\right).$$

Bezeichnen wir mit R den Radius der stärksten Krümmung, also den einsten Krümmungsradius, und mit R_1 den Radius der schwächsten ümmung, also den größten Krümmungsradius, welcher bei Herstellung ler Schnitte vorhanden ist, so ist nach einem von Euler bewiesenen tze stets

$$\frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Die Summe der reziproken Werte der Krümmungsradien zweier zueinander nkrechter Schnitte, hat bei einer gegebenen Oberfläche immer denselben 'ert und ist gleich der Summe der reziproken Werte des größten und einsten Krümmungsradius. Wir können demnach aus jenem den Oberichendruck darstellenden Ausdruck diesen konstanten Faktor herausbreiben und erhalten

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \sum 2Or^2 d\varphi.$$

Ohne merklichen Fehler, soweit es die Größe der Fläche angeht, können r die Oberfläche der Kalotte als einen mit dem Radius r beschriebenen eis betrachten, wir erhalten dann die Summe aller Dreiecke $rd\varphi$, da r konstant angesehen wird, wenn wir für φ einsetzen $\frac{\pi}{2}$, also

$$Or^2\pi \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Der in einer gekrümmten Oberfläche, überall gleiche Krümmung vorausgesetzt, vorhandene, an jedem Punkte derselben bezw. auf jedes Oberflächenelement normal zur Oberfläche wirkende Druck ist demnach der Größe des Oberflächenelementes proportional. Beziehen wir ihn, gerade wie den Normaldruck auf die Flächeneinheit, so wird derselbe

$$O\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Der Oberflächendruck hat die Dimension des Normaldruckes, denn er ist der Quotient aus der Oberflächenspannung $z[\mu \tau^{-2}]$ und einer Länge, also $z[\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}]$.

Als Konstante des Oberflächendruckes haben wir die Oberflächenspannung erhalten. La Place hat eine andere Konstante H eingeführt, welche dem Doppelten der Oberflächenspannung gleich ist. In einer Kugelfläche ist $R = R_1$, somit wird in dieser der Oberflächendruck

$$\frac{2O}{R} = \frac{H}{R}.$$

Führen wir demnach als Konstante des Ausdruckes für den Oberflächendruck den Druck ein, welchen die Flächeneinheit einer Kugeloberfläche, deren Radius die Länge eins hat, erfährt, so ist diese von La Place eingeführte Konstante H gleich der doppelten Oberflächenspannung, und mit dieser Konstanten wird der Oberflächendruck

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

In einer Ebene ist ein solcher Oberflächendruck nicht vorhanden, da dort die zur Normale parallelen Komponenten gleich Null werden. Das gibt auch unser Ausdruck zu erkennen; denn bei einer Ebene werden sowohl R als R_1 unendlich groß, ihre reziproken Werte also gleich Null.

Bei einer nach außen konvexen Oberfläche tritt dieser Oberflächendruck zu dem in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit vorhandenen Normaldruck hinzu, indem dieser Druck, der in jedem Normalschnitt gegen den Mittelpunkt der Krümmung gerichtet ist, gegen das Innere der Flüssigkeit wirkt.

Bei einer nach außen konkaven Fläche $A_1 B_1$ Fig. 104 ist der Normaldruck um diese Größe kleiner als in der Ebene, da die auch hier gegen C_1 gerichtete Komponente der Oberflächenspannung nach außen wirkt. Nennen wir den auf die Flächeneinheit bezogenen Normaldruck in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit K, so erhalten wir für den in einer gekrümmten Oberfläche vorhandenen Normaldruck[1])

---

1) Der Satz wurde zuerst abgeleitet von *Thomas Young*, Philosophical Transactions of London Royal Society for 1805, p. 65; von *La Place:* Sur l'action capillaire. Supplément au X livre du traite de mécanique céléste; von *Poisson:* Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831; von *Gauß:* Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Commentat. societ. reg. Göttingen. 7. p. 43 ff. 1832. — Man sehe auch *Quincke*, Poggend. Ann. 135. p. 621. 1868; *J. Stahl*, Poggend. Ann. 139. p. 239. 1870; *Beer*, Elastizität und Kapillarität. Leipzig 1869, bei Teubner; *Duclaux*, Théorie élémentaire de la Capillarité. Paris 1872, Gauthier-Villars.

$$P = K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

worin das positive Vorzeichen für konvexe, das negative Vorzeichen für konkave Flächen gilt. Unterscheiden wir die Krümmung der Oberfläche, ob konvex oder konkav, dadurch, daß wir die Vorzeichen der Radien positiv für konvexe, negativ für konkave Radien wählen, so können wir in unserm Ausdrucke dem zweiten Gliede allgemein das positive Vorzeichen geben, also setzen

$$P = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

§ 74.

Experimenteller Nachweis der Oberflächenspannung; Versuche von Dupré, van der Mensbrugghe, Sondhaus. Der nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen in einer ebenen Oberfläche vorhandene Normaldruck läßt sich nicht direkt experimentell nachweisen, dagegen wohl die Oberflächenspannung und der aus derselben folgende Oberflächendruck. Am besten eignen sich dazu flüssige Lamellen, mit deren Eigenschaften sich Plateau[1] in ausgedehnter Weise beschäftigt hat. Als Flüssigkeit, aus welcher man die Lamellen verfertigt, empfiehlt Plateau eine Mischung aus einer Lösung Marseiller Seife und Glyzerin, über deren Herstellung er zuletzt[2] folgende Angaben gemacht hat.

Man soll zur Herstellung eine warme Witterung wählen oder muß selbst dafür sorgen, daß während der ganzen Dauer der Zubereitung die Temperatur nicht unter 20° C. herabgeht. Frische Marseiller Seife, die noch ihre ganze Feuchtigkeit besitzt, wird in sehr kleine Stückchen geschnitten und in ihrem 40fachen Gewicht mäßig erwärmten Wassers aufgelöst. Nach Abkühlung auf die Zimmertemperatur wird die Lösung filtriert und dann 3 Volumen derselben mit 2,2 Volumen Glyzerin (Plateau empfiehlt besonders englisches, von Price) gemischt und die Mischung eine Woche stehen gelassen. Sie wird dann auf 3° C. abgekühlt und etwa [illegible] Stunden auf dieser Temperatur gehalten und bei dieser Temperatur filtriert, wobei man sorgfältig darauf zu achten hat, daß die Temperatur nicht steigt, da sonst der durch die Abkühlung entstandene Niederschlag wieder aufgelöst wird. Nach Beendigung der Filtration läßt man die Flüssigkeit noch 10 Tage stehen, dann ist sie zum Gebrauche fertig.

Je nach der Güte der Seife und des Glyzerins dauern aus dieser Flüssigkeit hergestellte Seifenblasen bis zu 18 und mehr Stunden, wenn man sie sorgfältig aufhebt.

Mit Hilfe von solchen flüssigen Lamellen haben Dupré[3] und van der Mensbrugghe[4] durch eine Anzahl hübscher Versuche die Oberflächen-

---

1) *Plateau.* Die Untersuchungen Plateaus über flüssige Lamellen finden sich in den Mémoires de l'Acad. de Bruxelles von 33. an. Auszüge in Poggend. Ann. 114 p. 597. 1861; **130**. p. 149 u. 264. 1867; **141**. p. 44. 1870.

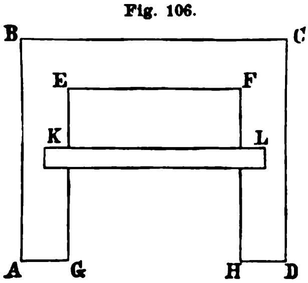
2) *Plateau*, Poggend. Ann. **130**. p. 264. 1867.

3) *A. Dupré*, Ann. de chim. et de phys. 7. (4.) p. 246. 406. 1866.

4) *van der Mensbrugghe*, Bulletin de l'Acad. de Bruxelles. **22**. Poggend. Ann. **133** p. 277. 1868.

spannung augenfällig vorgeführt. Dupré nahm ein Metallblech mit viereckigen Ausschnitt, welches vertikal aufgehängt wurde. Ein seh ter Metallstreifen KL, der etwas länger ist als der Ausschnitt I des Bleches (Fig. 106) breit ist, wurde zunächst in der Nähe v gehalten, und darauf zwischen EF und KL Seifenlösung gebracht, mit einem Pinsel sorgfältig beide Ble netzt wurden. Zieht man KL herab, steht in dem Raume $EFKL$ eine flüssi melle, und wenn KL losgelassen wird, es durch die Oberflächenspannung der I emporgehoben, also der Schwere entgeg unter Überwindung der Reibung gehobe stört man die Flüssigkeitslamelle, so fä Streifen sofort herab.

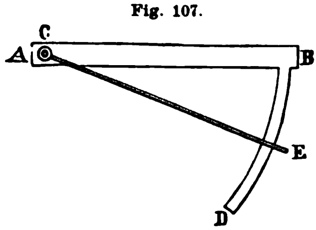
Fig. 106.



Eine etwas andere Form des Ve stellt Fig. 107 dar. An den Metallstreif ist ein Kreisbogen BD und ein um die bei C drehbarer Draht angesetzt. Wenn der Draht auf dem Streif gelegt und mit einem Pinsel Seifenlösung zwischen Draht und Blech aufgetragen wird, so entsteht bei Drehung des Drahtes in die La zwischen ihm und dem Metallstreifen eine Lamelle, deren Spannu Draht zurückzieht, so daß er auf den Streifen zurückkehrt.

Van der Mensbrugghe tauchte in Glyzerinlösung einen zu Quadrate umgebogenen Eisendraht; zieht man das Quadrat vorsicht der Flüssigkeit heraus, so bildet sich in selben eine ebene an den Seiten des Q tes anhaftende Lamelle. Man legt a Lamelle einen Seidenfaden passender dessen Enden aneinander geknotet sind Seidenfaden schwimmt in der Lamelle gend eine Kurve geformt, die von den ligen Umständen abhängt, unter welch den Seidenfaden in die Lamelle gelegt hat stört man dann an irgend einer St der von dem Seidenfaden umgrenzten Fläche durch Eintauchen mit Stückchen Fließpapier die Lamelle, so wird sofort der Seidenfad einem genauen Kreis auseinander gezogen, der den von der Lamelle Raum von der übrigen Lamelle trennt, wie es Fig. 108 darstellt. andere Form des Versuches zeigt Fig. 109. Man befestigt an zwei ten m und n der einen Quadratseite die Enden eines Seidenfadens. man jetzt das Quadrat in die Seifenlösung und zieht es vorsichtig so daß sich eine Lamelle in demselben bildet, so schwimmt der S faden in irgend welcher Form in der Lamelle; zerstört man die L zwischen dem Seidenfaden und dem Drahtstücke mn, so wird der S faden sofort in einen Kreisbogen mon auseinander gezogen, so d eine Sehne des Kreises wird.

Fig. 107.



In einem andern Versuche stellte van der Mensbrugghe aus Eisendrahte von 0,6 mm Dicke einen Ring von 33,3 mm Durchmesser der von drei Füßen ebenfalls von feinem 0,25 mm dicken Eisendraht

mm Länge getragen wurde, Fig. 110. Der Ring wurde mit Glyzerinssigkeit bestrichen horizontal aufgestellt. Ein größerer Eisenring von mm Durchmesser wurde mit einer Lamelle versehen und so über den tern Ring gebracht, daß die gebildete Lamelle den untern Ring behrte. Wurde der obere ng gehoben, so bildete, e die Figur zeigt, die melle zwischen den iden Ringen eine zylinische Fläche, deren der chse paralleler Schnitt ne Kettenlinie ist. Bei sreichender Hebung des bern Ringes wird der ntere Ring gehoben, und chwebt an der flüssigen Lamelle in stabilem Gleichgewicht.

Fig. 108.

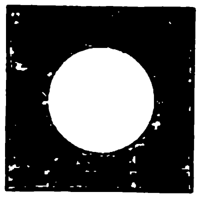
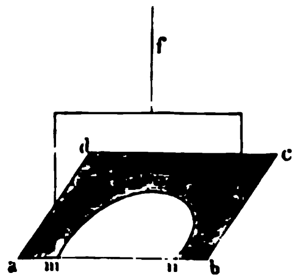


Fig. 109.



Die Oberflächenspannung der Lamelle übt auf den Ring nen Zug aus parallel der Tangente der Lamellenfläche, dort wo sie den Ring berührt. Die vertikale Komponente dieses Zuges trägt den Ring. Der Ring muß deshalb gehoben werden, wenn sein Gewicht nicht zu groß st, so daß vor dem Heben die Lamelle zerreißt. Er muß so weit dem bern Ringe folgen, also so weit gehoben werden, daß sein Gewicht gleich st dem von der Oberflächenspannung herrührenden Zuge multipliziert mit dem Kosinus des Vinkels, den die an dem untern Rande an die ylinderfläche gelegte Tangente mit der Vertikalen bildet. Da dieser Winkel je nach dem bstande der beiden Ringe erheblich verschieden sein kann, so kann das Gewicht des untern inges erheblich verschieden sein, er wird stets n stabilen Gleichgewicht getragen, so lange in Gewicht unterhalb der vorhin angegebenen renze bleibt.

Fig. 110.

Man kann dieses Verfahren benutzen, um e Oberflächenspannung zu messen, und van er Mensbrugghe hat einen Versuch derart urchgeführt, wie es ähnlich früher schon Dupré than hatte. Besser gelingt aber die Messung ach dem Verfahren von Sondhaus[1]). Man mmt zwei Drahtringe von gleichem Durchmesser, der eine steht auf drei üßen und wird, erforderlichenfalls durch Belastung der Füße, so schwer gemacht, daß er nicht wie bei der Anordnung von van der Mensbrugghe hoben wird. Der zweite Ring, der gerade so, wie es Fig. 110 zeigt, durch nen rechteckig gebogenen, mit einem längern Stil versehenen Draht getragen wurde, war an der einen Seite einer hydrostatischen Wage (Fig. 95, 365) befestigt und durch die erforderlichen Gewichte auf der andern Seite

1) *Sondhaus*, Poggend. Ann. Erg.-Bd VIII. p 266. 1878.

genau ins Gleichgewicht gebracht. Der untere Drahtring wurde so aufgestellt, daß er den an der Wage hängenden gerade berührte. Es wurden dann beide Ringe mittels eines Pinsels mit Seifenflüssigkeit bestrichen und der Wagebalken ein klein wenig gehoben. Damit der an der Wage hängende Ring unter Lamellenbildung dieser Hebung folgte, war es nötig auf der andern Wagschale das Gewicht zu vermehren. Vorsichtige Vermehrung des Gewichtes ließ es dann erreichen, daß der von der Wage getragene Ring im Gleichgewicht hing, daß er also durch die Oberflächenspannung der Lamelle genau so stark herunter, wie durch den Gewichtsüberschuß auf der andern Wagschale emporgezogen wurde. Der den Gleichgewichtszustand bewirkende Gewichtsüberschuß ist gleich der doppelten Oberflächenspannung, da die beiden Oberflächen der Lamelle durch ihre Spannung wirken. Bei einem in dieser Art von Sondhaus mit Plateauscher Glyzerinflüssigkeit durchgeführten Versuche hatten die Ringe $6{,}8^{\mathrm{cm}}$ Durchmesser, der an der Wage hängende obere Ring wog $7{,}83^{\mathrm{g}}$, und um der Lamellenspannung das Gleichgewicht zu halten, waren $1{,}20^{\mathrm{g}}$ hinzuzufügen. Der Quotient

$$\frac{1{,}2}{\pi \cdot 6{,}8} = 0{,}0562^{\mathrm{g}}$$

gibt die Spannung in den beiden Oberflächen der Lamelle für die Länge 1^{cm}; die Oberflächenspannung ist demnach 0,0281 pro Cm oder $2{,}81^{\mathrm{mg}}$ für das Millimeter.

Das beschriebene Verfahren ist nur für wenige Flüssigkeiten anwendbar, da nur wenige Flüssigkeiten, fast nur Seifenlösungen solche Lamellen bilden. Indes fand Sondhaus, daß man durch eine kleine Modifikation des Verfahrens die Oberflächenspannung einer ganzen Reihe von Flüssigkeiten nachweisen und wenigstens sehr angenähert messen kann. Nachdem man den Ring an die Wage gehängt und sein Gewicht ausgeglichen hat, schiebt man ein flaches Gefäß, welches etwas der zu untersuchenden Flüssigkeit enthält, unter den Ring, bringt den letzteren mit der Flüssigkeit zur Berührung, und legt auf die andere Wagschale so viel Gewicht, daß der Ring in die Höhe gehoben wird. Es bildet sich eine Lamelle zwischen dem Ringe und der Flüssigkeitsoberfläche, und bei passender Belastung der Wage stellt sich Gleichgewicht her zwischen der Spannung der Lamelle und dem Zuge der Gewichte. Mit einem versilberten Kupferring, der von Quecksilber benetzt wird, gelang es selbst die Oberflächenspannung des Quecksilbers zu messen und deren starke Änderung mit der Temperatur zu konstatieren.

Bei diesen Versuchen darf man nicht zu kleine Ringe anwenden, da mit Hebung des Ringes sich die Lamelle an der Oberfläche der Flüssigkeit zusammenzieht, so daß die Lamelle nicht mehr ein gerader Zylinder, sondern ein abgestumpfter Kegel wird. Es wird somit nur die vertikale Komponente des Lamellenzuges gemessen. Man findet die Oberflächenspannung, wenn man einfach das Übergewicht durch den Umfang des Ringes dividiert, zu klein. Wir kommen auf die von Sondhaus bestimmten Oberflächenspannungen in § 79 und § 80 zurück.

Zum Nachweise des aus der Oberflächenspannung sich ergebenden Druckes kann man ebenfalls Lamellen wählen, nämlich Seifenblasen. Die Wände einer Seifenblase sind auf der äußern Seite konvex, auf der innern

akav gekrümmt. Auf der äußern Seite ist daher der gegen den Mittelakt der Blase gerichtete Druck, wenn wir den Radius der Blase mit R zeichnen,

$$P = K + H \frac{1}{R};$$

f der innern Seite, wenn wir den Radius der innern Fläche wegen der hr geringen Dicke der flüssigen Hülle gleich dem der äußern Kugeliche setzen, ist der vom Mittelpunkt fortgerichtete Druck

$$P_1 = K - H \frac{1}{R}.$$

ie beiden Drucke liefern als Resultierende den gegen den Mittelpunkt in gerichteten Druck

$$P - P_1 = 2H \frac{1}{R}.$$

Man nimmt den Druck leicht wahr, denn schließt man das Rohr, durch elches man die Blasen dargestellt hat, mit dem Finger, so behält die Blase ihre ursprüngliche Größe; wenn man das Rohr aber öffnet, so wird ie Blase rasch kleiner, indem jetzt die in der Blase vorhandene Luft rem Drucke folgen und entweichen kann. Hat man die Blasen mit abakrauch oder Leuchtgas hergestellt, so sieht man den austretenden asstrom, indem man die Öffnung einer Flamme nähert, welche das austende Gas schon entzündet, wenn die Öffnung noch ziemlich weit von r Flamme ist.

Plateau[1]) hat den Oberflächendruck gemessen, indem er Seifenblasen a einem kleinen Trichter blies, dessen passend verlängertes Rohr U-förmig bogen und mit Wasser gefüllt war; zur Herstellung der Blase war unter m Konus des Trichters seitlich ein verschließbares Rohr angebracht. r Druck $P - P_1 = p$ wurde so durch die Wassersäule gemessen, um lche das Wasser in dem offenen Schenkel des U höher stand. Nach r soeben entwickelten Gleichung muß

$$pR = 2H = 4O$$

n Messungen an 10 Blasen aus Glyzerinflüssigkeit, deren Durchmesser ischen 7,55 und 48,10 mm betrugen, gaben für das Produkt aus der gessenen Niveaudifferenz p der Wassersäulen des Manometers und dem dius der Kugel

$$pR = 11{,}375.$$

Die Zahl gibt die den Druck auf die Luft im Innern der Blase sende Wasserhöhe für eine Blase vom Radius eines Millimeters oder n doppelten Oberflächendruck pro Quadratmillimeter einer Kugelfläche dem Radius 1 mm. Für die Oberflächenspannung, welche gleich $\frac{1}{2}H$ folgt demnach

$$O = \frac{11{,}375}{4} = 2{,}844^{\text{mg}},$$

Wert, welcher dem von Sondhaus für die Plateausche Flüssigkeit ge-

1) Plateau, Poggend. Ann. 114. p. 604. 1861.

fundenen Werte der Oberflächenspannung 2,81—2,83^{mg} für das Millim so nahe kommt, daß diese beiden Beobachtungen einen schönen exp mentellen Beweis dafür liefern, daß die Konstante H des Oberfläc drucks gleich der doppelten Oberflächenspannung ist, wie es unsere leitung ergab.

§ 75.

Einfluß der Wände. Auch die festen Körper üben, wie wir sa auf die Flüssigkeitsteilchen eine anziehende Wirkung aus, es muß als den Wänden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes zwischen den Tei der festen Wand und den Flüssigkeitsteilchen eine Wechselwirkung st finden. Diese Einwirkung muß sich in doppelter Weise geltend mach

Zunächst muß, worauf Poisson[1]) zuerst aufmerksam machte, in Nähe einer in eine Flüssigkeit eingetauchten Wand eine Änderung in Dichtigkeit der Flüssigkeit bewirkt werden. Wenn die Lage der einzel Moleküle im Innern der Flüssigkeit von den Anziehungen der umgeben Moleküle abhängt, so muß, wenn die Anziehung der Wandschicht e andere ist als die Anziehung einer an derselben Stelle gedachten Flüs keitsschicht, die Verteilung der Moleküle in derselben eine andere werd als inmitten der Flüssigkeit. Ist die Anziehung der Wand auf die Flüs keitsmoleküle eine stärkere, so müssen in der der Wand nächsten Flüs keitsschicht mehr Moleküle sich ansammeln als in anderen parallel di im Innern der Flüssigkeit liegenden Schichten. Die der Wand zunäc liegende Flüssigkeitsschicht muß demnach eine größere Dichtigkeit halten als die übrige Flüssigkeit. Diese Verdichtung muß sich bis eine gewisse Entfernung von der Wandfläche erstrecken, denn die unmit bar an der Wand anliegende verdichtete Schicht muß eine ähnliche Wirku auf die folgende Schicht ausüben, wie die Wand auf die erste Schicht, wel indes nicht ganz so stark sein kann als die Anziehung der Wand sel In dieser Weise erkennt man, daß die Verdichtung an der Wand größten sein muß, und daß mit Entfernung von der Wand die Dichtigk allmählich abnehmen muß, bis sie in einem gewissen Abstande von d selben die normale der Flüssigkeit wird.

Das Entgegengesetzte muß eintreten, wenn die Anziehung der Wa auf die Flüssigkeit eine kleinere ist als jene einer an der Stelle der Wa gedachten Schicht derselben Flüssigkeit.

Die in der Nähe der Wand befindlichen Moleküle erhalten in d Falle gegen die Flüssigkeit hin einen stärkeren Antrieb als gegen Wand, es können deshalb in der Nähe der Wand nicht so viele Molek vorhanden sein, als in entsprechenden Schichten im Innern der Flüssigk

Zweitens aber muß in der Nähe der Wand eine Krümmung der Ob fläche der Flüssigkeit eintreten, es kann die Flüssigkeit, wenn wir etwa eine solche, deren Oberfläche horizontal ist, eine vertikale Wand eintauch nicht bis an die Wand hin eine horizontale ebene Oberfläche erhalten, wel die Wand unter einem rechten Winkel schneidet, sie muß vielmehr d

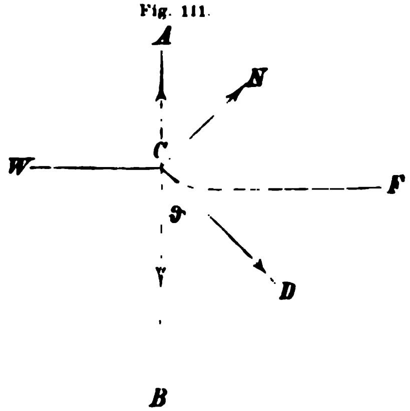
1) *Poisson,* Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831. Im A von *Link,* Poggend. Ann. 25. 1832 u. 27. 1833.

einem andern Winkel schneiden, welcher von den Anziehungen zur Flüssigkeit und von der Kohäsion der Flüssigkeit ab-

s zu erkennen und zugleich zu bestimmen, von welchen Um-Größe dieses Winkels abhängt, sei Fig. 111 AB eine feste and, welche in eine Flüssigkeit eintaucht, deren Oberfläche in m Abstande von der Wand horizontal sei. Die Oberfläche der sei in der Nähe der Wand nach außen konkav gekrümmt, und n der Wand anliegende Flüssigkeitselement schneide die Wand-dem Winkel $BCD = \vartheta$. Es sei also CD Tangente an der berfläche im Schnittpunkte.

s letzte Flüssigkeitselement in der Oberfläche wirken eine Reihe , welche bei der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen sich fheben müssen, wenn das Gleichgewicht sein soll. sind erstens ein gewisler Richtung CN, normal he in C, herrührend von chendruck der gegen die mmten Flüssigkeit, zweig nach der Richtung der D, welche die Tangente der in der Oberfläche Kräfte, also die in den graphen besprochene Oberung ist, welche hier ein-. da nur nach der einen keit vorhanden ist. Dritie in dem Winkel ϑ vor-

Fig. 111.



oleküle der Flüssigkeit einen Zug aus, dessen Richtung innerinkels ϑ liegt, und dessen Stärke wesentlich abhängt von der der Flüssigkeit an der Oberfläche der Wand. Dazu kommt Anziehung der festen Wand, also aller Moleküle, welche in aus mit dem Radius der Wirkungssphäre in das Innere des ers beschriebenen Halbkugel liegen, auf das Flüssigkeitselement. ng des sich hieraus ergebenden, resultierenden Zuges würde zur Wand normale Richtung CW sein, wenn wir die Wand mogen betrachten dürften. Das wird indes nicht der Fall sein, ird die in die Flüssigkeit tauchende Wandschicht durch die der Flüssigkeit eine Lockerung erfahren haben, infolge deren ng der untern Hälfte der Halbkugel ohne Zweifel eine etwas orden ist, als diejenige der obern Hälfte. Die Richtung der len wird deshalb in den Winkel WCA fallen.

sen molekularen Anziehungen würde dann noch die Wirkung kommen, welche wir indes gegenüber den molekularen Anach den Bemerkungen des § 72 als verschwindend klein außer dürfen.

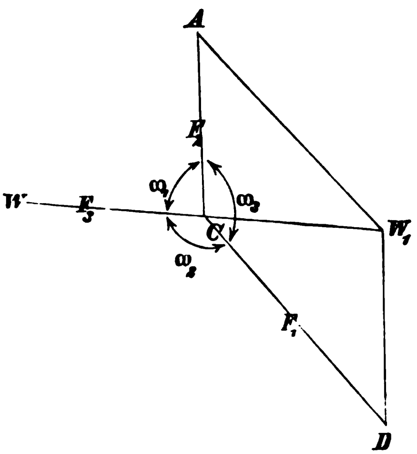
lden von allen diesen Kräften ihre Komponenten erstens parallel se Komponente gleich F_1, zweitens parallel AB, sei diese gleich

F_2, und zwar positiv, wenn dieselbe nach A hin, also von der Flü nach außen gerichtet ist und drittens parallel CW, sei diese gle

Die Resultierende F_1 hängt nur von der Anziehung der Flü auf das betrachtete Element ab, dieselbe wird deshalb einfach prop der im § 73 abgeleiteten Oberflächenspannung respektive der Konst gesetzt werden dürfen, da der hauptsächlichste Teil dieser Result die tangentiale Komponente der in der oberflächlichen Schicht li Flüssigkeitsteilchen ist. Die Kräfte F_2 und F_3 dagegen hängen we von der Anziehung des Festen und des Flüssigen ab, also von häsion des Flüssigen zum Festen.

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist die, daß diese an dem keitselemente wirkenden Kräfte sich aufheben. Stellen F_1, F_2, F_3 (F der Größe und Richtung nach die drei resultierenden Kräfte dar, kennt man sofort aus der Bedingung des Gleichgewichtes, nach je zwei derselben eine Mi geben müssen, welche der an Größe gleich, aber der R nach entgegengesetzt sein m die drei Kräfte sich verhalt sen wie die Seiten eines I welches aus den Kräften r Nebenwinkeln der Winkel, miteinander bilden, kon wird[1]). Denn bilden wir r Kräften F_1 und F_2 das Kräf lelogramm, so muß, wenn gewicht vorhanden sein a Diagonale $CW_1 = CW$ se $W'W_1$ muß eine gerade Linie Demnach ist in dem Dreieck der Winkel ACW_1 der Ne kel des Winkels ω_1, welchen F_3 miteinander bilden, der

Fig. 112.



$AW_1C = DCW_1$ ist Nebenwinkel des Winkels ω_2, den F_1 und schließen, und schließlich CAW_1 ist Nebenwinkel von ω_3. Da einem Dreiecke sich die Seiten verhalten wie die Sinus der Gegen so können wir die Gleichgewichtsbedingung schreiben

$$\frac{F_1}{\sin\omega_1} = \frac{F_2}{\sin\omega_2} = \frac{F_3}{\sin\omega_3},$$

wo wir an Stelle der Sinus der Dreieckswinkel die Sinus der Neben welche die Kräfte miteinander einschließen, geschrieben haben.

Nennen wir den Nebenwinkel von ω_3, den Winkel, welchen d Oberflächenelement mit der Wandfläche bildet, ϑ, so ist nach d allgemeinerten pythagoräischen Lehrsatz

1) Diese Formulierung der Gleichgewichtsbedingung rührt von F. N her; man sehe *Quincke*, Poggend Ann. **139**. p. 59. 1870. *P. Du Bois-R* Poggend. Ann. **139**. p. 266. 1870.

$$CW_1^2 = F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\,F_1 F_2 \cos\vartheta,$$

it die Bedingung des Gleichgewichtes für den Winkel ϑ,

$$\cos\vartheta = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2\,F_1 F_2}.$$

In unserem spezielleren Falle ist der der Seite F_1 gegenüberliegende kel, da wir F_2 parallel der Wandfläche F_3 senkrecht zu derselben nmen haben, ein Rechter, somit

$$F_1^2 - F_3^2 = F_2^2,$$

demnach

$$\cos\vartheta = \frac{F_2}{F_1}.$$

Es folgt somit, daß der Winkel ϑ, unter welchem die Oberfläche der igkeit die Wandfläche schneidet, nur von dem Verhältnis der beiden e F_2 und F_1 abhängig ist, von denen die zweite nur von der Ko- n der Flüssigkeit, welche nach der vorhin gemachten Bemerkung der ächenspannung, beziehungsweise der Hälfte der Größe H gleich ge- werden kann, und F_2 wesentlich von der Adhäsion des Flüssigen Festen abhängt. Es folgt somit, daß ein und dieselbe Flüssigkeit flächen eines und desselben festen Körpers immer unter demselben el, den man als den Randwinkel bezeichnet, schneiden muß.

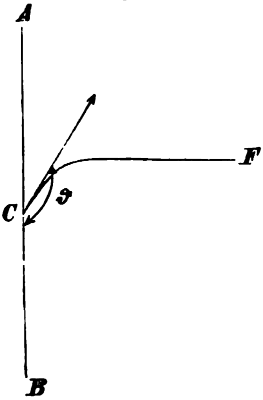
Die Krümmung der Oberfläche gegen den festen Körper hin kann sich auf das letzte Flüssigkeitselement beschränken, sie muß vielmehr bis zu einem gewissen Abstande von der Wandfläche erstrecken, der ich größer ist als der Radius der Wirkungssphäre. Je weiter wir er von der Wand entfernen, um so mehr muß der Winkel ϑ sich Rechten nähern, die Oberfläche muß allmählich in die ebene über- Zunächst erkennt man, daß mit einer Entfernung von der Wand lb des Radius der Wirkungssphäre des festen Körpers F_2 kleiner muß, er wird aber noch nicht in einem dem Radius der Wirkungs- gleichen Abstande zur Null, da, wie wir sahen, in der Nähe der and eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeiten eintritt. er Dichtigkeit geänderten Flüssigkeitsschichten wirken aber auf r Richtung gegen die Flüssigkeiten weiter folgenden in demselben schwächer, ein als die feste Wand auf die nächstliegenden, des- it der Zähler des Ausdruckes für $\cos\vartheta$ mit Entfernung von der ab. Von da ab, wo derselbe gleich Null geworden ist, treten gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeit ein, es der in der Ebene vorhandene Normaldruck übrig, dem die aktion der unter der Oberfläche liegenden Flüssigkeit das t hält, die Oberfläche stellt sich wieder normal zu den wirk- n.

nkel ϑ ist ein spitzer, wenn F_2 positiv ist, wenn also die rallel der Wand gerichteten Kräfte von der Oberfläche der ch außen gerichtet sind; es ist das stets der Fall, wenn die Wand benetzt, wie wir schon daraus schließen können, daß alle an einer vertikal aus der Flüssigkeit gezogenen Wand emporheben können. Deshalb sieht man auch stets, daß

eine die Wand benetzende Flüssigkeit sich an der Wand emporzie Oberfläche nimmt die Fig. 111 dargestellte Gestalt an.

Der Winkel ϑ ist ein stumpfer, wenn F_2 negativ ist, das heil die sämtlichen der Wand parallelen Komponenten der Kräfte, we bei der vorigen Zerlegung erhalten, gegen das Innere der Flüssi der Zeichnung also nach unten gerichtet sind. Es ist das dann wenn die Wand nicht von der Flüssigkei wird, wenn also eine in die Flüssigkei tauchte vertikale Wand keine Flüssigl herauszuheben imstande ist. In dem Fal wenn wir eine Glaswand in Quecksilber sehen wir auch, daß die Oberfläche in d der Wand herabgedrückt wird, sie nimm Fig. 113 dargestellte Form an, sie ist Nähe der Wand nach außen konvex ge

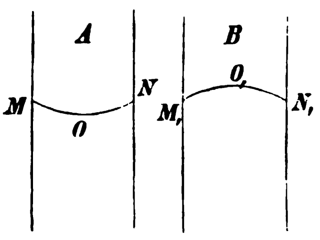
Fig. 113.



Die hier durchgeführten Betrachtunge daß in zwei Fällen an einer festen Wa haupt kein Gleichgewichtszustand eintret nämlich erstens, wenn $F_2 > F_1$, denn Falle erhalten wir für den cos ϑ einen W größer ist als 1, und zweitens, wenn die der zur Wand normalen Komponenten ist, die Resultierende F_3 also von de gegen die Flüssigkeit gerichtet ist. Welche Erscheinungen dann müssen, werden wir später kurz besprechen.

Wenn wir der einen festen Wand in einer Flüssigkeit ein in hinreichend kleiner Entfernung gegenüberstellen, oder wenn wi Flüssigkeit eine enge, sogenannte kapillare Röhre eintauchen, so ganze Oberfläche im Innern gekrümmt Wenn die Flüssigkeit die Wand be muß sie sich in der Röhre rings Wand emporziehen und ein Dur durch die Oberfläche muß die Gestal Fig. 114 A annehmen. Wird die W der Flüssigkeit nicht benetzt, so m rings an der Wand herabgedrückt ein Durchschnitt nimmt die Gestalt Fig. 114 B an.

Fig. 114.



In Röhren von kreisförmige schnitt muß diese Fläche eine Rotationsfläche werden, da dann jede schnitt durch die Oberfläche der Flüssigkeit dieselbe Gestalt hab Ist der Durchmesser der Röhre nicht zu groß, so ist die Flü nahe eine Kugelfläche, wir wollen sie als das Segment einer sol trachten[1]).

Wir haben bei der Bestimmung des Winkels ϑ erwähnt, daß

1) Diese Annahme ist strenge genommen nur für sehr enge Röhr Man sehe darüber außer *Poisson* a. a. O. *Hagen*, Poggend. Ann. 57 *E. Desains*, Annales de chim. et de phys. 51. (3.) 1857; *Wertheim* chim. et de phys. 63. (3.) 1861.

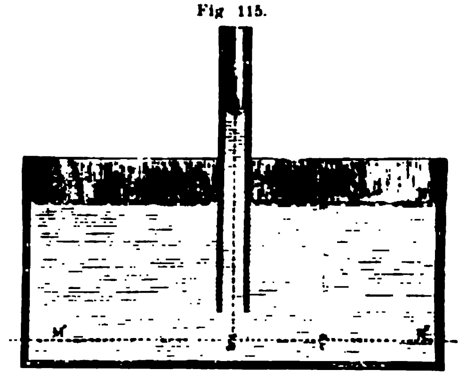
schwere bei Betrachtung der an der Wand wirksamen Kräfte gelassen werden kann. Es folgt daraus, daß der als Randichnete Winkel ϑ bei derselben Flüssigkeit und derselben Sub-Wandfläche auch immer derselbe sein muß. Wir werden sehen, fahrung diese Folgerung bestätigt[1]).

rollen den konstanten Randwinkel stets mit ϑ, seinen Nebenan wir denselben in unsere Gleichungen einführen zum Unterdem großen griechischen Buchstaben Θ bezeichnen.

§ 76.

uveränderungen in kapillaren Röhren. Da, wie wir in , der molekulare Druck, den eine Flüssigkeitsoberfläche durch g der Flüssigkeitsmoleküle auf sich selbst erfährt, verschieden der Gestalt der Oberfläche, so folgt, daß durch die Verände-Oberfläche das Niveau gkeit in engen Röhren sein muß als in damit renden weiten Röhren n einem weiten mit gefüllten Gefäß, in enge Röhre einge-

Fig. 115.



en wir mit dem Falle, hre benetzt wird, die oberfläche also kon-

die Oberfläche einer konkav ist, so ist, en, der Druck, den die haut nach dem Innern der Flüssigkeit ausübt, kleiner als bei hen. Wird daher in eine Flüssigkeitsmasse mit ebener Ober-Fig. 115), z. B. Wasser, eine enge Röhre gestellt, deren etzt werden, so ist außerhalb der Röhre der vertikal herabuck, der aus der Schwere der Flüssigkeit und dem Normalmmengesetzt ist, größer als im Innern der Röhre. Auswärts wir mit q den aus der Wirkung der Schwere hervorgehenden ehnen, der vertikal abwärts gehende Druck in jedem der chen Stücke der Oberfläche gleich $q + K$, im Innern der gleich $q + K - q$, wenn wir den von der Oberflächenspan-

[1]) Satz von der Konstanz des Randwinkels wurde zuerst von *Thomas* ures on natural philosophy II, p. 685. 1807; Young works I, p 459 ff. t 1816 abgeleitet. Man sehe *Quincke*, Ann. der Physik 2 p. 147. ch leitet ihn ab *Moutier*, C. R 70. p. 612 1870. In anderer Weise *Place*, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécadaraus Gilberts Ann 33 1809; *Poisson*, Nouvelle théorie de l'Action aris 1831; *Gauß*, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in brii Com. soc reg Göttingen 7 p 43 ff. 1832; *Mousson*, Poggend. 405. 1872 zu dem gleichen Resultate.

nung herrührenden Druck mit q bezeichnen. Legen wir durch die Flüssigkeit eine mit der Oberfläche parallele Ebene $M'N'$, so muß über dieser in der Röhre die Flüssigkeit so viel höher stehen als außerhalb, daß das Gewicht der über dem äußeren Niveau gehobenen Flüssigkeit gleich ist der Differenz zwischen dem vertikal abwärts gerichteten Drucke in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke des äußeren ebenen Niveaus und demselben in der Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre. Denn wir wissen, daß eine der Schwere unterworfene Flüssigkeit nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn der Druck in allen Punkten einer horizontalen Schicht derselbe ist. Denken wir uns in c ein dem Querschnitt f der Röhre gleiches Flächenstück, so ist der dort wirksame Druck, wenn wir gleichzeitig mit s die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnen

$$s \cdot f \cdot cd + f \cdot K.$$

Im Punkte b senkrecht unter der Röhre wirkt das Gewicht der Flüssigkeitssäule ba vom Querschnitt f, das Gewicht des Meniskus, welcher über der durch a gelegten Ebene gehoben ist, das mit m bezeichnet werde, und die Vertikalkomponente des in der gekrümmten Fläche wirkenden Druckes. Um zunächst die letztere zu bestimmen, denken wir uns ein Flächenelement df in der Oberfläche, welches mit der Horizontalebene den Winkel φ bildet. Der Normaldruck in diesem Elemente $(K - q)\,df$ bildet mit der Vertikalen denselben Winkel φ, und die vertikale Komponente ist somit

$$\cos\varphi\,(K - q)\,df.$$

Cos $\varphi \cdot df$ ist aber die horizontale Projektion des Flächenelementes df; somit ist die vertikale Komponente des in dem Flächenelement wirkenden Druckes gleich dem Produkte aus diesem Drucke in die horizontale Projektion des Flächenelements. Was für dieses Element gilt, gilt für alle; somit ist die vertikale Komponente des Druckes in der Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre einfach gleich $(K - q) \cdot f$, da der Querschnitt der Röhre die horizontale Projektion der Oberfläche in der Röhre ist.

Der in b wirksame Druck ist somit

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f,$$

und die Bedingung des Gleichgewichtes wird

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f = s \cdot f \cdot cd + f \cdot K$$

oder

$$s \cdot f(ab - cd) + m = q \cdot f,$$

Wird die Röhre von der Flüssigkeit nicht benetzt, tauchen wir z. B. eine Glasröhre in Quecksilber, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre konvex (Fig. 116). Dadurch ist nach dem Frühern der vertikal abwärts gehende Druck im Innern der Röhre größer als außerhalb, und es ist klar, daß deshalb die Höhe der Flüssigkeit in der Röhre kleiner sein muß als außerhalb.

In ganz gleicher Weise wie vorhin folgt dann wieder, daß der [Ge]wichtsunterschied der Flüssigkeitssäulen $cd \cdot s \cdot f$ und $ab \cdot s \cdot f + m$ [der] Differenz der vertikalen Drucke bei a und d gleich sei; es muß

$$s \cdot f(ab - cd) + m = - qf$$

Folgerungen lassen sich leicht durch den Versuch bestätigen. wir eine enge Glasröhre in eine Flüssigkeit, welche die Röhren- setzt, so wird im Innern derselben die Oberfläche der Flüssigkeit und die Flüssigkeit erhebt sich bedeutend über das Niveau der lüssigkeit. Umgekehrt zeigt sich eine Depression bei konvexer

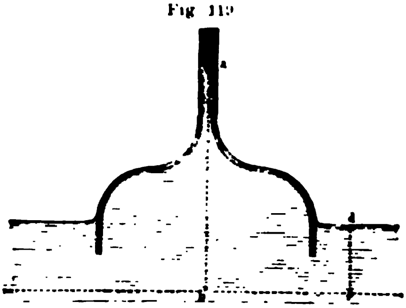
Fig. 116.

Fig. 117.

Fig. 118.

beim Eintauchen einer Röhre in das sie nicht benetzende r. Man kann diese Tatsache sehr anschaulich machen bei g U-förmig gebogener Glasröhren (Fig. 117), deren einer sehr weit, der andere aber sehr eng ist. Füllt man ein solches Wasser, so sieht man, wie in Fig. 117, daß das Wasser in dem enkel um vieles höher steht als im weiten, während die Ober- Flüssigkeit in dem weiten viel geringere Krümmung in dem engen Rohre. Das e zeigt sich, wenn man in lasrohr Quecksilber gießt. ksilber steht dann, wie im engen Rohre viel tiefer iten Rohre

Fig. 119.



einen andern Versuch sehr deutlich bestätigen, wir soeben nachwiesen, die der Flüssigkeiten bei be- die Depression bei nicht n. nur von der Krümmung der Oberfläche abhängig ist. Versieht eiteres Gefäß (Fig. 119) mit einer engen Röhre a, und taucht weit in Wasser, daß das untere Ende der engen Röhre unter äche des Wassers reicht, so steigt das Wasser bis zu einer Höhe h über dem äußern Niveau; zieht man nun das Gefäß aus keit allmählich heraus, so muß in der engen Röhre das Wasser die Höhe h über dem Niveau des äußern Wassers besitzen, weil, üben, die Höhe, bis zu der die Flüssigkeit ansteigt, proportional

ist der durch die Krümmung der Oberfläche entstehenden Druckdi
Und das muß selbst der Fall sein, wenn ein Teil des weiten Gefä
der Flüssigkeit hervorragt. Denn der Druck in b hängt, wie wir
sahen, nicht ab von der Form des Gefäßes, sondern nur von der H
der Flüssigkeit über b. Wie der Versuch zeigt, kann man auf diese
ziemlich große Flüssigkeitssäulen heben.

Taucht man dieses Gefäß umgekehrt, wie in Fig. 120, in
silber, so ist die Depression ab des Quecksilbers dieselbe, als wen
eine Glasröhre von der We
engen angesetzten Röhre in
silber eintauchen würde,
nach dem vorigen die
verlangt.

Fig. 120.

Einen noch evidenter
such führt La Place in
„Théorie capillaire" an.

Taucht man ein heberf
Glasröhrchen, wie ABC (Fi
senkrecht so tief in Wass
der kürzere Schenkel gan
getaucht ist, so steigt das
in dem längern Schenkel bis zu einer gewissen Höhe a über das
der äußern Flüßigkeit AJ. Zieht man nun das Röhrchen heraus, s
sich bei A ein konvexer Tropfen, und sofort sieht man, wie die F
keit in dem längern Schenkel höher steigt bis b, weil jetzt in der k
Oberfläche bei A der vertikal abwärts gerichtete Druck größer ist a
her in der ebenen Oberfläche der äußeren Flüssigkeit. Nimmt m
Tropfen vorsichtig fort, so wird di
vexität bei A kleiner, und man sieh
dementsprechend die Flüssigkeit
sinkt; hat man schließlich die Begre
fläche der Flüssigkeit in A durch fort
Wegnahme des Tropfens eben gema
ist die Höhe der Flüssigkeit in BC
ebenso, wie sie war, als das Röhrc
das Wasser eingetaucht war. Wen
durch vorsichtiges Zulegen von Tröpf
A die frühere Konvexität wiederh
so steigt auch das Wasser in BC wi
seiner frühern Höhe an.

Fig. 121.

Fig. 122.

Einen ähnlichen Versuch gibt La Place an, um zu zeigen,
Depression und Erhebung der Flüssigkeit der gleichen Ursache an

Gießt man in eine Glasröhre (Fig. 122), bei welcher der
Schenkel länger ist als der enge, Alkohol, so wird zunächst der
in dem engen Schenkel höher stehen als im weiten. Durch lan
und vorsichtiges Nachtröpfeln von Alkohol bewirkt man, daß die F
keit in dem engen Schenkel gerade das Ende erreicht; zunächst
die Oberfläche konkav, und der Alkohol steht im weitern Schenkel
soviel tiefer als vorher. Durch weiteres vorsichtiges Nachtröpfeln

man bewirken, daß die Oberfläche der Flüssigkeit bei b erst eben, dann wie bei dem vorigen Versuche ein konvexer Tropfen wird. Man beobachtet auch, daß bei ebener Begrenzung in b die Flüssigkeit im weiten Schenkel nahezu die gleiche Höhe hat als im engen, und bei konvexer, daß die Flüssigkeit in dem weiten viel höher steht; ein Beweis, daß die Erhebung oder Depression in einer Röhre nur von der Gestalt der Oberfläche und somit von den in der Oberfläche vorhandenen Drucken abhängt.

§ 77.

Steighöhen in verschiedenen Räumen. Wir gelangten vorhin zu dem Resultat, daß in einer kapillaren Röhre das Gewicht der gehobenen oder deprimierten Flüssigkeit gleich sein muß der Druckdifferenz in der gekrümmten Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre und in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke der ebenen Oberfläche. Behalten wir die vorhin gebrauchte Bezeichnung bei und setzen die Differenz $ab - cd$, die Steighöhe der Flüssigkeit gleich h, so erhalten wir zur Bestimmung derselben

$$sfh + m = \pm qf,$$

wobei zu beachten ist, daß q der mittlere Oberflächendruck der flüssigen Oberfläche in der Röhre ist, daß heißt der Oberflächendruck für die Einheit der Fläche, vorausgesetzt, daß dieselbe an allen Punkten der Oberfläche die gleiche ist. Wenn wir das Vorzeichen von q wie im § 73 bestimmen, also positiv setzen, wenn die Fläche konvex nach außen, dagegen negativ, wenn die Fläche nach außen konkav ist, können wir das doppelte Vorzeichen auf der rechten Seite fortlassen und schreiben

$$sfh + m = -qf.$$

Nehmen wir Rohren von kreisförmigem Querschnitt und solchem Durchmesser, daß die Oberfläche im Innern derselben ein Kugelsegment ist, so erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung des Oberflächendruckes

$$q = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

da in einer Kugel alle Krümmungsradien und an allen Stellen gleich und gleich dem Radius ϱ der Kugel sind,

$$q = \frac{H}{\varrho},$$

somit für das Gewicht der in einer solchen Röhre gehobenen Flüssigkeit

$$sfh + m = -\frac{H}{\varrho} f \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

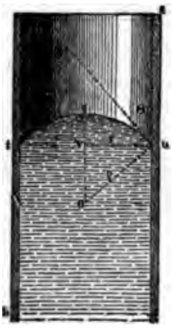
Das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit hängt somit ab von dem Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche und dem Querschnitt der Röhre. Dieser Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche läßt sich direkt aus dem Radius der Röhre bestimmen. Ist ab (Fig. 123) die

Röhre und *ust* die Oberfläche der Flüssigkeit, *o* der Mittelpunkt (förmigen Oberfläche und der Radius der Röhre gleich *r*, so ist

$$ou = \varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{r}{\cos ouv}.$$

Legen wir im Punkte *u* an die Oberfläche der Flüssigkeit (gente, so bildet diese mit der Röhrenwand nach der Seite der F hin den Winkel ϑ, welcher für dieselbe Flüssigkeit und für Material der Röhrenwand konstant ist, da ϑ der, wie wir sah(dieser Voraussetzung konstante Winkel ist, unter die Oberfläche der Flüssigkeit die Wand der Röh det. Da nun *ou* senkrecht zur Tangente und recht zur Röhrenwand *ua* in *u* ist, so folgt, daß kel *vuo* das Supplement von ϑ, also gleich Θ i

Fig. 123.



$$ou = \varrho = \frac{r}{\cos \Theta}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die oben Gleichung für das Gewicht der gehobenen Flüssi(so wird

$$sfh + m = -H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r} = H \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r}$$

Die Gleichung zeigt unmittelbar, daß, wenn d winkel $\vartheta < 90^0$, die Flüssigkeit in der engen Röl steht, da dann $\cos \vartheta$ und damit *h* einen positiven Wert hat, daß wenn $\vartheta > 90^0$ eine Depression der Flüssigkeit stattfindet.

Da der Querschnitt der Röhre

$$f = r^2 \pi,$$

so ist auch

$$sfh + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \pi \cdot r,$$

oder

$$\frac{shf + m}{2\pi r} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta \quad \ldots \quad (3).$$

Der Nenner auf der linken Seite ist der innere Umfang de den Quotienten aus dem Gewichte der gehobenen Flüssigkeit (Röhrenumfange können wir somit bezeichnen als das von der L(heit der Berührungslinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand (Flüssigkeitsgewicht, und gelangen dann zu dem Satze, daß dieses unabhängig ist von der Weite der Röhre und nur abhängt von schaffenheit der Flüssigkeit und derjenigen der festen Wand, da (stanten *H* und ϑ nur von dieser abhängen.

Dividieren wir die Gleichung (2) durch *f*, so wird

$$sh + \frac{m}{f} = H \cdot \cos \vartheta \, \frac{1}{r};$$

bei den vorausgesetzten engen Röhren können wir das Gewicht des (vernachlässigen und erhalten

$$sh = H \cdot \cos\vartheta \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos\vartheta \frac{1}{r} = a^2 \cos\vartheta \frac{1}{r},$$

wenn wir, nach der von Poisson eingeführten Bezeichnung, $\frac{H}{s} = a^2$ setzen.

Es folgt also, daß bei hinreichend engen zylindrischen Röhren desselben Materials die Steighöhen oder Depressionen einer Flüssigkeit dem Halbmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Dieser Satz, den schon ältere Physiker aus ihren Beobachtungen ableiteten, so der Jesuit Honoratius Fabry[1]) um die Mitte des 17. Jahrhunderts, ist in neuerer Zeit durch sehr genaue Beobachtungen bestätigt worden, zunächst von Gay-Lussac, welcher auf Anregung von La Place Versuche zur Prüfung der Theorie anstellte[2]). Die Röhren, welche Gay-Lussac anwandte, waren sorgfältig kalibriert und ihr Durchmesser aus dem Gewichte eines Quecksilberfadens von gemessener Länge folgendermaßen bestimmt. Ist die Länge des Quecksilberfadens in der Röhre gemessen gleich l, das Gewicht desselben gleich g, das spezifische Gewicht des Quecksilbers gleich s und der Radius der Röhre gleich r, so ist

$$g = r^2 \pi l s$$

$$r = \sqrt{\frac{g}{\pi l s}}.$$

Die Röhren, in welchen die Steighöhen verglichen wurden, waren zugleich in einer durchbohrten Metallplatte befestigt, welche auf den eben geschliffenen Rand eines großen Glasgefäßes gelegt wurde. Das Gefäß konnte durch Stellschrauben so gerichtet werden, daß die Ebene, auf der die Metallplatte lag, genau horizontal und somit die Röhren genau vertikal waren. Nun wurde das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die Röhren im Innern durch mehrmaliges Aufsaugen der Flüssigkeit vollständig benetzt und dann die Höhe der Flüssigkeitssäulen in den Röhren gemessen.

Die von Gay-Lussac erhaltenen Resultate sind folgende:

Flüssigkeit	Durchmesser der Röhre $2r$	Steighöhe h	$2rh$
Wasser	1,294 mm	23,379 mm	30,262
	1,903 „	15,903 „	30,263
Alkohol vom spezif.	1,294 „	9,398 „	12,164
Gew. 0,8196	1,903 „	6,389 „	12,158

Man sieht, daß die Werte für $2rh$ bei den verschiedenen Beobachtungen fast genau dieselben sind, daß also wirklich die Steighöhen der Flüssigkeit in verschiedenen Röhren desselben Materials dem Durchmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

1) Gehlers physikalisches Wörterbuch. Artikel Kapillarität.

2) Gay-Lussac, Versuche in La Place, Théorie capillaire. Supplément zum Buche der Mécanique celeste. Gilberts Annalen. 33. p. 316 ff. 1809.

Dasselbe Resultat bestätigen die Versuche von Brunner[1]), D
Bède[3]), Simon[4]) u. a. für Röhren, deren Querschnitte hinreich
sind, so daß die Voraussetzung einer kugelförmigen Oberfläche e
Die für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit erhaltene (

$$shf + m = -qf$$

können wir immer unmittelbar anwenden, wenn in kapillaren R
Krümmung der Oberfläche und damit der Oberflächendruck an all
dieselbe ist; es ist das z. B. auch der Fall zwischen zwei eina
nahe gegenübergestellten parallelen Platten. Dort ist die Fl
oberfläche ein Teil einer Zylinderfläche, indem nach der einen
hin die Flüssigkeit gar keine Begrenzung hat. Ein durch die Fl
oberfläche parallel den Platten gelegter Schnitt schneidet die (
demnach in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Sc
unendlich groß. Ein senkrecht zu den Platten gelegter Schnitt
die Oberfläche dagegen in einem Kreisbogen, dessen Radius ϱ
Gleichung für die Oberflächenspannung

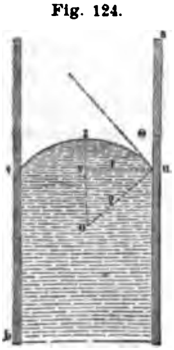
$$q = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

geht daher in diesen Fällen über in

$$q = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Ist (Fig. 124) ab ein Durchschnitt senkrecht zur Ebene de
$os = ou = \varrho$ der Krümmungsradius des Schnittes, d der Ab
Platten, so erhalten wir auch hier wieder

Fig. 124.



$$\varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{d}{2 \cdot \cos \Theta}$$

$$-q = H \cos \Theta \frac{1}{d} = -H \cos \vartheta \frac{1}{d}$$

und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit wird

$$shf + m = H \cos \vartheta \frac{1}{d} \cdot f.$$

Nehmen wir ein Stück von der Länge l
$l \cdot d = f$ gleich dem Querschnitt des auf dies
zwischen den Platten eingeschlossenen Raumes,
wird

$$\frac{shf + m}{2l} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Da die Oberfläche der Flüssigkeit jede der beiden Platte
Länge l berührt, bedeutet die linke Seite der Gleichung wieder
wicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie gehobenen Fl
es ergibt sich für diese somit derselbe Wert wie in kapillaren

1) *Brunner*, Poggend. Ann. **70**. 1847.
2) *E. Desains*, Annales de chim. et de phys. **51**. (3.) 1857.
3) *Bède*, Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles. **30**. 18
4) *Simon*, Ann. de chim. et de phys. **32**. (3.) 1851.

der nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand abhängt.

Für die Steighöhe h erhalten wir

$$h + \frac{m}{f \cdot s} = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cos \vartheta \frac{1}{d},$$

worin für hinreichend kleine Werte von d das Gewicht m des Meniskus außer acht gelassen werden kann.

Die Steighöhe zwischen zwei parallelen Platten ist sonach umgekehrt proportional dem Abstande der beiden Platten; oder die Steighöhe zwischen parallelen Platten ist halb so groß als in Röhren gleichen Durchmessers. Der Versuch bestätigt dies, denn Gay-Lussac fand bei den schon vorhin erwähnten Messungen für einen Abstand der Platten von 1,069 mm die Steighöhe des Wassers gleich 13,574 mm; woraus das Produkt $dh = 14{,}524$ sich ergibt, welches nur wenig von der Hälfte des Wertes von $2\,rh = 30{,}262$ abweicht.

Ist die Krümmung der Oberfläche in einem Raume nicht an allen Stellen dieselbe, so läßt sich das Gewicht der ganzen gehobenen Flüssigkeit nicht so einfach berechnen, wohl aber die Steighöhe an irgend einer Stelle dieses Raumes. Denn ist für irgend ein Flächenelement df der größte Krümmungsradius R, der kleinste R_1, so gilt für dieses unmittelbar die § 76 abgeleitete Gleichung

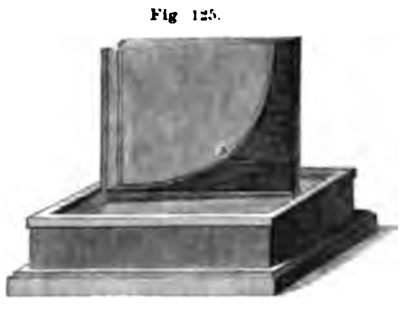
$$shdf = -\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) df,$$

da, wenn wir das Flächenelement uns unendlich klein denken, das Gewicht des Meniskus gleich Null ist; es ergibt sich daraus

$$sh = -\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \qquad h = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Man kann hiernach z. B. sehr leicht die Steighöhen an den verschiedenen Stellen des Zwischenraumes zwischen zwei Platten erhalten, welche wie Fig. 125 so aufgestellt sind, daß sie sich in einer vertikalen Linie schneiden, so daß also ihre einander zugewandten Flächen miteinander einen sehr kleinen Winkel bilden. Bezeichnen wir den Abstand eines Punktes a in der Halbierungsebene des Winkels von dem Scheitel des Winkels mit x, so ist der Abstand d der Platten in diesem Punkte

Fig. 125.



$$d = c \cdot x,$$

wenn c eine Konstante bedeutet, deren Wert von der Neigung der Platten gegeneinander abhängt. Da wir den Winkel, den die Platten bilden, als klein voraussetzen, so ist der Abstand der Platten überall so klein, daß wir den senkrecht zur Halbierungsebene des Winkels durch die Oberfläche geführten Schnitt als einen Kreisbogen

ansehen dürfen, dessen Radius gerade wie bei parallel gestellt gegeben ist durch

$$\varrho = \frac{d}{2\cos\Theta} = \frac{cx}{2\cos\Theta} = -\frac{cx}{2\cos\vartheta}.$$

Dieser Krümmungsradius ist überall der kleinste; die Halbie des Winkels schneidet die Oberfläche nach der schwächsten K deren Radius ein überall so großer ist, daß wir seinen rezipr gegenüber dem reziproken Wert des eben bestimmten kleinsten Ki radius vernachlässigen dürfen. Dann ergibt sich für die Höhe i Abstande x von der Schnittlinie der Platten

$$h = \frac{a^2 \cos\vartheta}{cx}.$$

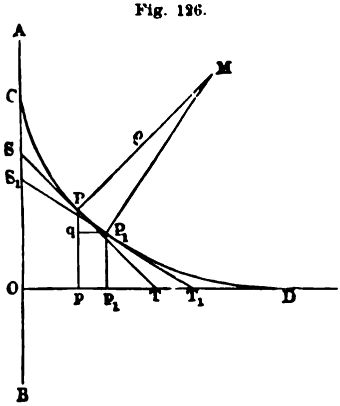
Man ersieht daraus, daß die Steighöhen der Entfernung de teten Punktes a von dem Scheitel des Winkels umgekehrt propor oder daß die Halbierungsebene des Winkels die Oberfläche in ei seitigen Hyperbel schneidet, deren Asymptoten die Vertikale, i die Innenseiten der Platten sich schneiden, und die Horizontale si in der Halbierungsebene des Winkels liegt. Denn es werden

für $x = 0$ $\quad h = \infty \quad$ und für $h = 0$ $\quad x = \infty$

Eine Messung der zusammengehörigen Werte von h und Fig. 125 dargestellten Zusammenstellung bestätigt diese Folgen

In ähnlicher Weise können wir die Steighöhe an einer vertika Wand, die Gestalt der Oberfläche der an der Wand emporgehoben keit und das Gewicht dieser Flüs halten. Sei Fig. 126 AB ein Du der vertikalen ebenen Wand, un Durchschnitt durch die Oberfläc der Wand emporgezogenen Flüssi Steighöhe h der Flüssigkeit in ein P ist

Fig. 126.



$$h = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Ist die Wand eben, so sch der Wand parallel geführter S Oberfläche in einer geraden Linie, mungsradius dieses Schnittes ist endlich groß, sein reziproker W gleich Null. Wir erhalten dahe Steighöhe im Punkte P, wenn Krümmungsradius des Schnittes CD im Punkte P mit ϱ bezeic

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Beziehen wir die Schnittkurve auf ein rechtwinkliges Ko system, dessen Anfangspunkt im Punkte O liegt, wo die passend v horizontale Flüssigkeitsfläche die Wand schneiden würde, und dess die horizontale OD und die vertikale OA sind, so würden wir d

des Schnittes CD und damit die der flüssigen Oberfläche erhalten, wenn wir den Krümmungsradius der Schnittkurve im Punkte P durch die Koordinaten dieses Punktes $Pp = h$ und $pO = x$ ausdrücken würden. Die Durchführung dieser Rechnung ist aber ohne ausgedehnte Anwendung der höhern Analysis nicht möglich; wir begnügen uns deshalb damit, die Steighöhe in einer etwas andern Weise auszudrücken, welche uns gestattet, die Steighöhe im Punkte C, wo die Schnittkurve die Wand schneidet, und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit zu berechnen.

Wir drücken zu dem Ende den Krümmungsradius ϱ aus durch den Winkel χ, welchen die im Punkte P an die Schnittkurve gelegte Tangente ST mit der Achse OA bildet, also durch den Winkel TSO. Für ein unendlich kleines zwischen den Punkten P und P_1 gelegenes Stück $d\sigma$ der Schnittkurve fällt dieselbe mit dem an P gelegten Krümmungskreise zusammen. Ist also M der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und bezeichnen wir den Winkel PMP_1, den die beiden von M nach P und P_1 gezogenen Radien miteinander bilden, mit $d\tau$, so ist

$$d\sigma = \varrho \cdot d\tau$$

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

Legen wir in dem Punkte P_1 die Tangente S_1T_1 an die Schnittkurve, so ist, da die Tangenten eines Kreises zu den Radien senkrecht sind, der Winkel $d\tau$, den die beiden Radien miteinander bilden, gleich dem, welchen die beiden Tangenten miteinander bilden. Dieser Winkel ist aber gleich der Zunahme, welche der Winkel χ erfährt, welchen die Tangente ST mit OA bildet, wenn dieselbe anstatt an den Punkt P an den folgenden Punkt P_1 gelegt wird. Denn der Winkel $T_1S_1O = \chi + d\chi$ ist Außenwinkel des von den beiden Tangenten gebildeten Dreiecks; der eine Gegenwinkel ist $TSO = \chi$, der andere Winkel $d\tau$, welchen die beiden Tangenten miteinander bilden. Danach ist

$$d\tau = d\chi,$$

somit

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\chi}.$$

Ziehen wir von dem Punkte P_1 die Senkrechte P_1q auf die Ordinate Pp, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke PP_1q der Winkel $qPP_1 = \chi$, somit

$$\frac{Pq}{PP_1} = \cos\chi.$$

Pq ist die Änderung der Steighöhe h, wenn wir in der Schnittkurve von einem Punkte zu dem nächstfolgenden übergehen. Setzen wir diese Änderung gleich dh, so wird, da $PP_1 = d\sigma$,

$$\frac{dh}{d\sigma} = \cos\chi; \quad d\sigma = \frac{dh}{\cos\chi}.$$

Damit wird dann

$$\varrho = \frac{dh}{\cos\chi\, d\chi}$$

und

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\cos\chi d\chi}{dh},$$

oder

$$2\,h \cdot dh = -\,a^2 \cos\chi d\chi.$$

Da sich nun h um dh ändert, wenn sich χ um $d\chi$ ändert, so aus dieser Gleichung nach schon mehrfach benutzten Sätzen der Einl und den Regeln E 1 und E 4

$$h^2 = C - a^2 \cdot \sin\chi.$$

Die Konstante C bestimmt sich, wenn wir beachten, daß dort, Flüssigkeit horizontal, somit $\chi = 90^0$ ist, die Steighöhe $h = 0$ ist,

$$0 = C - a^2; \qquad C = a^2.$$

Damit wird

$$h^2 = a^2(1 - \sin\chi).$$

In dem Punkte C, in welchem die Schnittkurve die Wand sch ist der Winkel χ gleich dem Winkel ϑ; dort wird somit die Steigh

$$h_0 = a \cdot \sqrt{1 - \sin\vartheta} = \sqrt{\frac{H}{s}(1 - \sin\vartheta)}.$$

Die Steighöhe hängt also nur ab von der Beschaffenheit der F keit und der festen Wand.

Das Volumen der an einer Wandstrecke von der Länge l geh Flüssigkeit erhalten wir, wenn wir die Fläche CDO mit der Länge tiplizieren. Die Fläche CDO ist gleich der Summe aller der un kleinen Vierecke $Pp p_1 P_1$, in welche wir die Fläche zerlegen, wo uns von allen Punkten P der Kurve die Ordinaten Pp gezogen Nennen wir die Abstände dieser Ordinaten dx, so ist $h \cdot dx$ der F inhalt eines jeden solchen Vierecks und die Summe aller Produkte wenn h von h_0 dem Werte an der Wand bis zu Null abnimmt, lie die ganze Fläche. Ersetzen wir in dem Produkte hdx h durch d der Gleichung

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \cos\chi \frac{d\chi}{dh}$$

sich ergebenden Wert, so wird

$$h \cdot dx = -\frac{a^2}{2} \cdot \cos\chi \cdot d\chi \cdot \frac{dx}{dh}.$$

In diesem Ausdrucke ist unter Beachtung, daß mit wachsender Höhe h kleiner wird, für ein positives dx also dh negativ ist,

$$\frac{dx}{dh} = \frac{qP_1}{qP} = -\tang\chi;$$

somit wird

$$hdx = \frac{a^2}{2} \cdot \cos\chi \cdot \tang\chi \cdot d\chi = \frac{a^2}{2} \sin\chi d\chi,$$

und die Fläche CDO wird

$$CDO = \int_{\chi = \vartheta}^{\chi = \frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \sin \chi d\chi,$$

a dem Werte $x = 0$ oder $h = h_0$ der Wert $\chi = \vartheta$ und dem Werte $h = 0$ er Wert $\chi = \frac{\pi}{2} = 90^0$ entspricht. Die Summe wird nach E VIII und E 5

$$CDO = -\frac{a^2}{2}\left\{\cos 90^0 - \cos \vartheta\right\} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos \vartheta .$$

Das für die Länge l gehobene Volumen erhalten wir, wenn wir diese läche mit l multiplizieren, und das Gewicht, wenn wir das Volumen mit er Dichtigkeit s der Flüssigkeit multiplizieren. Das für die Längeneinheit ehobene Flüssigkeitsgewicht wird demnach

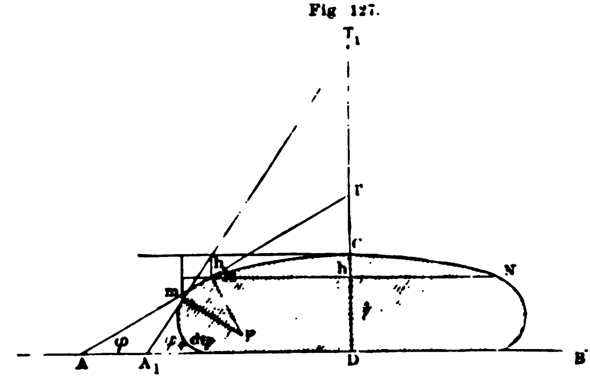
$$G = \frac{a^2 s}{2} \cdot \cos \vartheta = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta .$$

Wir gelangen also auch hier zu demselben Resultat, daß das Gewicht er an der Längeneinheit gehobenen Flüssigkeit nur von den beiden Kontanten H und ϑ abhängig ist, ein Satz, der ganz allgemein gilt, welches ach die Gestalt des Raumes ist, in welchem die Flüssigkeit emporsteigt.

§ 78.

Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene. Wenn man auf ine horizontale Ebene eine Flüssigkeit möglichst langsam auffließen läßt, sammelt sich dieselbe auf der Ebene in Form von Tropfen an, deren estalt ebenfalls durch die Kohäsion der Flüssigkeit und ihre Adhäsion an er Substanz der Unterlage bedingt ist. Zunächst erkennt man leicht, daß n solcher Tropfen durch der Ebene parallele Schnitte in Kreisen gehnitten werden muß, aß also seine Oberäche eine Rotationsäche sein muß; denn ch bei dem Tropfen die Bedingung des eichgewichtes, daß allen Punkten der erfläche die normal derselben nach innen und nach außen richteten Kräfte einder das Gleichgeicht halten müssen. enken wir uns durch den Tropfen (Fig. 127) eine mit der Unterlage AB parallele Ebene MN legt, so ist in den Punkten der Oberfläche, welche von dem Schnitte troffen werden, der von innen nach außen gerichtete Druck überall derlbe und zwar gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe

Fig. 127.



gleich ist dem Abstande des höchsten Punktes C des Tropfens von der Ebene MN. Es muß deshalb auch in allen Punkten des Schnittes der normal nach innen gehende Druck derselbe, oder es muß die Oberfläche in allen Punkten des Schnittes MN gleich gekrümmt sein. Das ist aber nur der Fall, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Achse durch den Scheitel C des Tropfens geht.

Zur Untersuchung der Gestalt des Tropfens genügt es deshalb, die Gestalt einer durch die Achse CD des Tropfens gelegten Schnittkurve zu bestimmen.

Wir gelangen dazu in folgender Weise. Der im Punkte M gegen das Innere des Tropfens gerichtete Normaldruck ist bezogen auf die Flächeneinheit

$$P = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Diesem Drucke hält der an derselben Stelle von innen nach außen gerichtete Druck das Gleichgewicht, der sich zusammensetzt aus dem Normaldruck in dem höchsten Punkte des Tropfens und dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, und deren Höhe gleich ist dem vertikalen Abstande h des höchsten Punktes des Tropfens von dem Punkte M.

Ist der Tropfen nicht zu klein, so ist im Punkte C die Oberfläche des Tropfens eine horizontale Ebene; der Normaldruck ist somit gleich K. Ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich s, so ist der von innen nach außen gerichtete Druck

$$P = K + h \cdot s.$$

Damit wird die die Gestalt der Oberfläche liefernde Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Ist die Tropfengröße ziemlich beträchtlich, so kann man den reziproken Wert des Krümmungsradius jenes Schnittes, den wir in M senkrecht zu dem Schnitte $MCND$ legen, vernachlässigen; bezeichnen wir dann den Krümmungsradius des Schnittes $MCND$ im Punkte M mit ϱ, so wird die Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Wir können nun, gerade so wie im vorigen Paragraphen, den Wert von ϱ durch h, den Winkel φ, welchen die in M an den Schnitt gelegte Tangente mit der Horizontalen bildet, und den Zuwachs, welchen dieser Winkel φ erfährt, wenn wir vom Punkte M zu dem nachfolgenden Punkte m des Schnittes übergehen, dessen Tiefe unterhalb der an C gelegten Tangente $h + dh$ ist, ausdrücken. Ist nämlich die Länge des Elementes Mm gleich $d\sigma$, und der Winkel, den die beiden nach M und m gezogenen Krümmungsradien im Krümmungsmittelpunkte miteinander bilden, $d\tau$, ist zunächst wieder

$$d\sigma = \varrho d\tau.$$

Nun ist $d\tau$ gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten AT

$L_1 T_1$ miteinander bilden, von denen die erste im Punkte M, die zweite im unkte m an den Schnitt gelegt ist. Dieser Winkel ist aber gleich dem wachs $d\varphi$ des Winkels φ, den die Tangente mit der Horizontalen bildet. mnach ist

$$d\sigma = \varrho\, d\varphi\,.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{dh}{d\sigma} = \sin\varphi\,;$$

mit ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{dh}\,,$$

d

$$2\, h\, dh = \frac{H}{s}\cdot\sin\varphi\, d\varphi\,.$$

Daraus ergibt sich aber

$$h^2 = -\frac{H}{s}\cdot\cos\varphi + \text{const.}$$

Zur Bestimmung der Konstanten erhalten wir, da für den obersten nkt des Tropfens, für welchen $h = 0$ ist, auch der Winkel φ gleich 0 rd, weil die in C an den Schnitt gelegte Tangente horizontal ist,

$$0 = -\frac{H}{s} + \text{const.}$$

$$\frac{H}{s} = \text{const.},$$

mit

$$h^2 = \frac{H}{s}\,(1 - \cos\varphi)\,.$$

Um die Höhe des ganzen Tropfens zu erhalten, müssen wir für φ den nkel einsetzen, unter welchem der Schnitt des Tropfens die horizontale che schneidet. Nach § 75 ist der Winkel, unter welchem eine Flüssigeit die feste Wand schneidet, immer derselbe Randwinkel ϑ, dort wo der opfen die Ebene schneidet, ist demnach

$$\varphi = \vartheta\,,$$

mit wird die Höhe T des Tropfens gegeben durch

$$T^2 = \frac{H}{s}\,(1 - \cos\vartheta)\,.$$

Für Flüssigkeiten, welche die Wand benetzen, ist der Winkel ϑ immer einer als 90°, da diese Flüssigkeiten an einer vertikalen Wand eine konve Oberfläche bilden; es ist deshalb $\cos\vartheta$ positiv, somit

$$T < \sqrt{\frac{H}{s}}\,.$$

Bei Flüssigkeiten, welche die Unterlage nicht benetzen, die also an er vertikalen Wand eine nach oben konvexe Oberfläche bilden, ist ϑ ßer als 90°, somit $\cos\vartheta$ negativ und

$$T > \sqrt{\frac{H}{s}}\,.$$

Da nun bei solchen Tropfen der Winkel φ, welcher an der Kuppe des Tropfens gleich Null ist, stetig, wenn man auf die Schnittkurve bis zur Basis des Tropfens fortschreitet, bis zu dem Werte $\varphi = \vartheta > 90^0$ wächst, so muß an einer Stelle der Schnittkurve $\varphi = 90^0$ werden, also die Tangente senkrecht stehen. An dieser Stelle hat somit der Tropfen seinen größten Durchmesser. Nennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Tropfenkuppe t, so ist dort

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

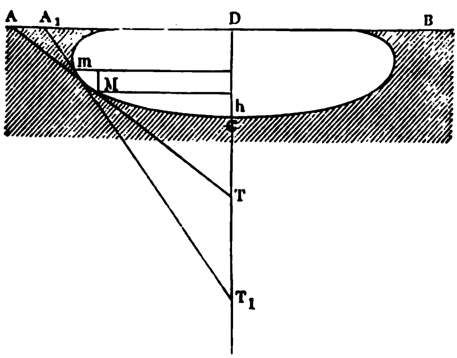
Aus den Werten von T und t erhält man somit

$$T^2 = t^2 (1 - \cos\vartheta)$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{T^2}{t^2}.$$

Die Beobachtung der Höhen T des ganzen Tropfens und t des Abstandes der Stelle, an welcher der Tropfen den größten Durchmesser hat, von der Kuppe des Tropfens, liefert also direkt und getrennt voneinander die Werte der Größe a und des Winkels ϑ, wenn die Flüssigkeiten die Wand nicht benetzen.

Fig. 128.



Dasselbe, was Tropfen für nicht benetzende Flüssigkeiten geben, liefern uns Luftblasen, welche wir unter einer ebenen horizontalen Fläche in einer benetzenden Flüssigkeit bilden. Ist AB (Fig. 128) etwa eine Glasfläche, welche auf Wasser sich befindet, und bringen wir eine Luftblase unter die Fläche, so muß diese Luftblase dieselbe Gestalt annehmen, welche ein die Unterlage nicht benetzender Tropfen annimmt, wie eine der im Beginne dieses Paragraphen gemachten ganz gleiche Überlegung ergibt. Die Gleichgewichtsbedingung für die Oberfläche ergibt sich in ganz ähnlicher Weise. Im Punkte M ist der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Normaldruck

$$P = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

In dem tiefsten Punkte C der Blase ist der Normaldruck, wenn die Blase nicht zu klein ist, gleich K; bezeichnen wir die vertikale Erhebung des Punktes M über C mit h und die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit s, so können wir diesen Druck K gleich setzen

$$K = P + h \cdot s,$$

da der Druck in C um das Gewicht der Flüssigkeitssäule von der Hö

ßer sein muß als in dem um h höher liegenden Punkte M. Diese iden Gleichungen liefern, genau wie bei dem Tropfen,

$$h \cdot s = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Drücken wir den Krümmungsradius ϱ wieder durch den Winkel $AD = \varphi$ aus, so wird ganz in derselben Weise wie vorhin

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos\varphi + \text{const.}$$

Dort wo die Grenzfläche der Blase die Platte AB schneidet, wird φ leich dem Winkel Θ, also in diesem Falle gleich dem Supplement des andwinkels ϑ. Für den tiefsten Punkt C der Blase wird $h = 0$ und leichzeitig $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$.

Demnach ist auch jetzt

$$-\frac{H}{s} + \text{const.} = 0,$$

$$\text{const.} = \frac{H}{s}.$$

Daraus ergibt sich

$$h^2 = \frac{H}{s}(1 - \cos\varphi).$$

Da die Wand der Blase die Fläche AB unter dem Winkel Θ schneidet, o wird die Höhe T der Blase

$$T^2 = \frac{H}{s}(1 - \cos\Theta) = \frac{H}{s}(1 + \cos\vartheta).$$

An der Stelle des größten Durchmessers wird $\varphi = 90^0$; $\cos\varphi = 0$. ennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Kuppe der lase t, so ist

$$t^2 = \frac{H}{s},$$

so ist

$$\frac{T^2}{t^2} = 1 + \cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{T\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{t}.$$

Wie demnach aus der Beobachtung von Tropfen der Flüssigkeiten, ie die Unterlage nicht benetzen, kann aus der Beobachtung von Luften zwischen einer Ebene und einer dieselbe benetzenden Flüssigkeit e der Größen H und ϑ gesondert bestimmt werden.

Die Bildung von Tropfen bei nicht benetzenden Flüssigkeiten und en bei benetzenden Flüssigkeiten ist noch in anderer Weise zur Bemmung des Oberflächendruckes benutzt worden. A. König[1] wandte ende von von Helmholtz angegebene Versuchsanordnung an. Die

1 *A. König*, Wiedem. Ann. **16**. p. 1. 1882. Die gleiche Methode wurde *G. Meyer*, Wiedem. Ann. **53**. p. 845. 1894; *Siedentopf*, Wiedem. Ann. **61**. 35 1897; *Stöckle*, Wiedem. Ann. **64**. p. 499. 1898 angewandt.

Anordnung zeigt Fig. 129. Eine ungefähr 10^{cm} im Durchmesser halt Glasschale *a* ist an ein U-förmig gebogenes Rohr *b* angeschmolzen, d zweiter Schenkel bei *c* etwas höher als der obere Rand der Schale r winklig umbiegt und dann, nachdem er eine kurze Strecke horiz gelaufen, wiederum U-förmige Gestalt annimmt. An den zweiten kür Schenkel dieses Teiles ist ein Gefäß *n* angeschmolzen, dessen Durchm

Fig. 129.

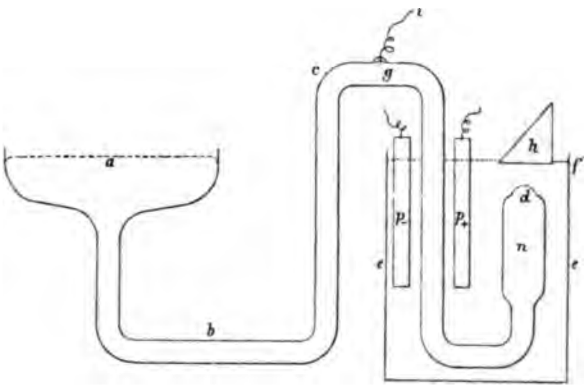


Fig. 130

Fig. 130 in natürlicher Größe zeigt. Der scharfe Rand *oo* bildet Kreis von $0{,}9^{cm}$ Durchmesser und liegt etwa $1{,}5^{cm}$ tiefer als der der Schale *a*. Mit Hilfe einer Dosenlibelle wird *oo* horizontal ge und dann der Apparat sorgfältig mit Quecksilber gefüllt, so daß im horizontalen Teil der Röhre bei *c* sich keine Luftblasen befinden. Is Schale fast vollständig gefüllt, so tritt bei *d* das Quecksilber kuppenf hervor; in die Schale tauchte eine durch Metallstücke beschwerte flasche, die an einem Flaschenzuge hing und durch denselben gehoben gesenkt werden konnte. Eine Senkung der Flasche trieb die Kuppe w

Fig. 131.

Fig. 132.

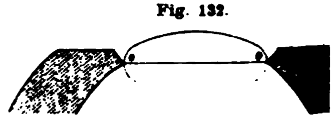
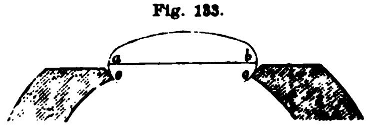


Fig. 133.



hervor. Ist die Kuppe nur sehr wenig hervorgetrieben, so ist wie Fig. die Krümmung an der Kuppe der Oberfläche klein, die Kuppe gewissermaßen einen Teil eines ideellen, auf einer Glasplatte lieg Quecksilbertropfens, dessen größter Durchmesser bei *ab* zu denken machen an der scharfen Kante *oo* die Oberflächenelemente eine Nei nach innen. Wird die Kuppe mehr hervorgedrängt, so rückt *ab* i

r werdend nach oben und kommt endlich in oo zu liegen (Fig. 132); then die Oberflächenelemente bei oo senkrecht. Bei noch weiterm rdrängen der Kuppe neigen sich die Oberflächenelemente nach außen ler größte Durchmesser des Quecksilbertropfens liegt (Fig. 133) bei ab. Minimum des Tropfendurchmessers tritt demnach ein, wenn die Oberelemente bei oo senkrecht stehen, und ist dann gleich dem Durchr der Öffnung oo.

Mit der Größe des Tropfendurchmessers ändert sich auch der Krümradius im Scheitel des Tropfens, und die in den letzten drei Figuren hneten Durchschnitte lassen schon erkennen, daß für das Minimum Tropfendurchmessers auch die Krümmung im Scheitel des Tropfens ärkste ist, oder daß in dem Falle der Krümmungsradius seinen klein-Wert hat. Das gleiche zeigt eine von Poisson[1]) abgeleitete Glei- für den Krümmungsradius im Scheitel des Tropfens in seiner Abgkeit von dem Oberflächendruck und dem größten Tropfendurchmesser; lbe liefert für den Krümmungsradius des Scheitels bei dieser Anordein Minimum, wenn der größte Durchmesser des Tropfens ein Mini-ist.

Mit Hilfe der Poissonschen Gleichung läßt sich aus dem gemessenen en Tropfendurchmesser bei nicht zu großen Werten desselben und Krümmungsradius im Scheitel des Tropfens die Kapillaritätskonstante hnen. Die Messung des Krümmungsradius geschah mit dem Helmtschen Ophthalmometer, dessen Theorie und Anwendung wir im vierten e kennen lernen werden. Der Raum gestattet es nicht auf die ziemkomplizierte Berechnung des Oberflächendruckes einzugehen, wir vern deshalb auf die Abhandlung von König, nur sei bemerkt, daß in Rechnung der Randwinkel nicht eingeht[2]).

In anderer Weise hat Cantor[3]) die Bildung von Tropfen an den n der scharfkantig abgeschnittenen Kapillarröhren bei nicht benetzen-Flüssigkeiten, die Bildung von Blasen bei benetzenden Flüssigkeiten Bestimmung der Oberflächenspannung benutzt. Ein sehr weites Glasund eine Kapillare sind zu einem U-Rohr verbunden, welches mit silber gefüllt wird. In der weiten Röhre soll der Einfluß der Kapilt vernachlässigt werden können. Die Kapillare ist scharf abgesprengt, at kreisförmigen Querschnitt und ist, wie Fig. 134 zeigt, von einer n Röhre umgeben, welche Luft oder eine Flüssigkeit enthält, wenn

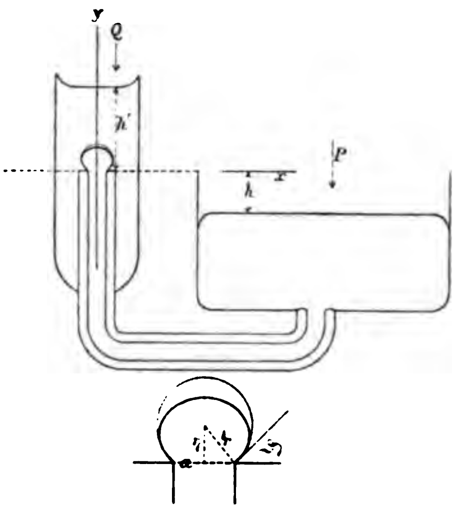
1) *Poisson*, Nouvelle théorie de l'action capillaire. p. 216. Paris 1831. *Lohn-*.at Wiedem. Ann. 54. p. 713. 1895) gezeigt, daß die *Poisson*sche Formel rechnung der Kapillaritätskonstanten nicht ausreicht; er hat eine andere r Berechnung durchgeführt, welche die Ungenauigkeit der *Poisson*schen l vermeidet Die Rechnung ist ziemlich umständlich. Leichter kommt um Ziel durch Benutzung des Werkes von *Bashforth* und *Adams*, An Att. test the theories of capillarity actions. Cambridge 1883, in welchem m Wege der mechanischen Integration der Differentialgleichung, welche stalt der Tropfen bedingt, für mittlere und kleinere Dimensionen der s berechnet und die Resultate in Tabellen zusammengestellt sind.

2) Man sehe über die Berechnung der Kapillaritätskonstanten außer *Lohn-*nach *Siedentopf*, Wiedem. Ann. 61. p. 239. 1897; *Stöckle*, Wiedem Ann 66. 1898.

3) *M. Cantor*, Wiedem. Ann. 47. p. 399. 1892.

die Kapillaritätskonstante an der Grenze von Quecksilber und einer Flüssigkeit bestimmt werden soll. Die Kapillare wird vertikal gestellt, der Schnitt durch die Kapillarröhre bezw. deren Endfläche horizontal. Wird der Druck über der kapillaren Röhre hinreichend vermindert oder über der Quecksilberoberfläche im weiten Rohre hinreichend vermehrt, so tritt ein Tropfen Quecksilber aus der Kapillaren heraus. Die Größe und Form des Tropfens hängt ab von dem Drucke P auf der weiten Quecksilberoberfläche und den Drucken, welche den Tropfen wieder in die kapillare Röhre zurücktreiben wollen. Hat der Tropfen eine bestimmte Gestalt und Größe angenommen, so daß ein Gleichgewichtszustand erreicht ist, so müssen diese Drucke einander gleich sein. Sei der Druck auf der weiten Quecksilberoberfläche gleich P. Wir beziehen die kapillare Oberfläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Y-Achse vertikal mit der Achse des kapillaren Rohres zusammenfällt, die positive Seite nach unten gerichtet, dessen X-Achse horizontal durch die Schnittfläche des kapillaren Rohres geht; der Anfangspunkt des Koordinatensystems liege in dem Mittelpunkte der Schnittfläche. Ist Q der Druck auf die Oberfläche der Flüssigkeit in dem die Kapillare umgebenden Rohr, h' die Höhe der Flüssigkeit oberhalb der Schnittfläche der Kapillaren, h die Höhe dieser Schnittfläche über der Oberfläche des Quecksilbers in dem weiten Rohre, s das spezifische Gewicht des Quecksilbers, s' das der Flüssigkeit über dem kapillaren Tropfen, so ist die Bedingung des Gleichgewichts an einem Element der kapillaren Oberfläche des Tropfens, dessen Koordinaten x und y, und die beiden Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 sind

Fig. 134.



$$P = Q + h's' - ys' + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + ys + hs.$$

Setzt man

$$P - Q - (hs + h's') = p \qquad s - s' = \sigma,$$

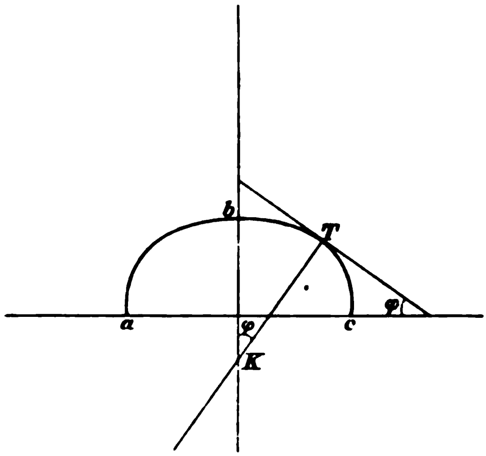
so wird

$$p = y\sigma + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Um ϱ_1 und ϱ_2 durch die Koordinaten auszudrücken, ist zu beachten, daß der Tropfen eine Rotationsfläche ist, wir brauchen also nur die Verhältnisse an einer Meridiankurve zu untersuchen. In der analytischen Geometrie wird bewiesen, daß bei einer Rotationsfläche der Krümmungsradius des Schnittes senkrecht zum Meridianschnitt gleich ist der l

male KT. Ist der Winkel, den die Tangente im Punkte T mit der X-Achse bildet, gleich φ, so ist der Winkel, den die Normale KT mit der Y-Achse bildet, ebenfalls gleich φ, und es folgt

Fig. 135.



$$KT = \varrho_1 = \frac{x}{\sin\varphi}.$$

Für den Krümmungsradius des Meridianschnittes erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung einer Kurve $y = f(x)$

$$\varrho_2 = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn wir setzen $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi$

$$\varrho_2 = \frac{1}{\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}},$$

somit

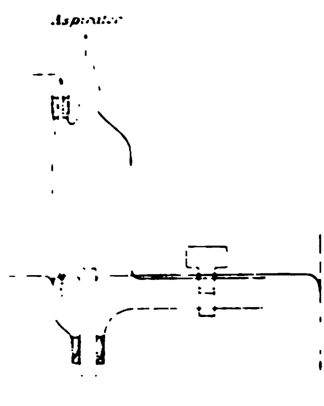
$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\sin\varphi}{x} + \cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{d(x\sin\varphi)}{dx}.$$

Damit wird

$$p = \sigma y + \frac{H}{2x}\cdot\frac{d(x\sin\varphi)}{dx}.$$

Eine nähere Untersuchung dieses Ausdruckes für p ergibt, daß der Druck p ein Maximum hat, und nach einigen vereinfachenden Annahmen und Umformungen, wegen deren wir auf die zitierte Abhandlung von Cantor verweisen, ergibt sich, daß, wenn d den Radius der kapillaren Öffnung bedeutet, dieses Maximum $\bar{p}$ den Wert hat

Fig. 136.



$$\bar{p} = \frac{H}{d} + \frac{\sigma d}{3}\left(2 + \frac{\sigma d}{\bar{p}}\right).$$

Für die Kapillarkonstante H ergibt sich daraus

$$H = \bar{p}d - \frac{\sigma d^2}{3}\left(2 + \frac{\sigma d}{\bar{p}}\right).$$

Oder setzen wir $\frac{\sigma d}{\bar{p}} = m$

$$H = \bar{p}d\left(1 - \frac{2m}{3} - \frac{m^2}{3}\right).$$

Beobachtet man demnach diesen Maximaldruck und mißt den Radius der kapillaren Röhre, so erhält man direkt den Wert von H, ganz unabhängig vom Randwinkel, da dieser in unserer Rechnung gar nicht eingeht.

Zur Messung des Maximaldrucks gab Cantor seinem Apparat die Form Fig. 136. Die Kapillare wird mit Hilfe eines Korkes in das untere

Ende einer weiten Glasröhre eingepaßt; letztere ist oben ausgezogen, so daß man dort einen Schlauch ansetzen konnte. Unten ist seitlich ein mit einem Hahn versehenes Rohr angesetzt. Der Apparat wird in eine weite Schale getaucht und in diese soviel Quecksilber gefüllt, daß das seitliche Rohr unter den Spiegel desselben zu liegen kommt. Der Apparat wird an einem Stative befestigt, so daß das obere scharf und eben abgesprengte Ende der Kapillare horizontal ist. Ein Schlauch verband das obere Ende der weiten Röhre einerseits mit einem Aspirator, andererseits mit einem U-förmigen Rohre, das Wasser enthielt und so als Wassermanometer zur Messung des Druckes Q diente. Bei langsamer Verminderung des Druckes verfolgte man mit dem Kathetometer die Niveaudifferenz des Wassermanometers und konnte so das Maximum des Druckes bestimmen.

Bei benetzenden Flüssigkeiten muß man das scharf abgesprengte Ende der Röhre in die Flüssigkeit tauchen und durch passende Vermehrung des Druckes in dem kapillaren Rohre unter demselben eine Luftblase erzeugen.

§ 79.

Kapillaritätskonstanten. Die in den letzten Paragraphen dargelegte Theorie der Kapillarerscheinungen zeigt, daß dieselben wesentlich von den Größen a^2 und ϑ abhängig sind, von denen die erstere, oder genauer das Produkt derselben in die Dichtigkeit der Flüssigkeit, die Größe H, ein Maß für die Kohäsion dieser Flüssigkeit ist, da sie uns den Oberflächendruck in der Flächeneinheit einer Kugelfläche gibt, deren Radius der Einheit gleich ist; während die andere Größe, der Winkel ϑ, von dem Verhältnisse der Adhäsion der Flüssigkeit an die feste Wand und der Kohäsion der Flüssigkeiten abhängig ist. Die Bestimmung dieser Konstanten aus den verschiedenen kapillaren Erscheinungen ist deshalb gleichzeitig eine experimentelle Bestätigung dieser Theorie, da die verschiedenen Erscheinungen zu denselben Werten von a^2 oder H und ϑ führen müssen.

Als erste Methode zur Messung von H fanden wir die von Dupré, van der Mensbrugghe und besonders von Sondhaus angewandte Messung der Oberflächenspannung von Lamellen. Wir sahen bereits, daß der von Sondhaus gefundene Wert der Oberflächenspannung für Plateausche Glyzerinflüssigkeit vortrefflich mit dem von Plateau gefundenen Werte des Oberflächendruckes übereinstimmt.

Für solche Flüssigkeiten, welche die Körper vollkommen benetzen, ist der Winkel ϑ sofort gegeben, er ist gleich 0^0. Denn bei einer Flüssigkeit, welche einen festen Körper vollkommen benetzt, haftet die letzte Flüssigkeit einfach an der Wand wie eine Haut, das letzte Flüssigkeitselement ist somit der Wand parallel. Da wir den Winkel ϑ von der innern in die Flüssigkeit tauchenden Seite der Wand gerechnet haben, so wird danach $\vartheta = 0^0$.

Für Flüssigkeiten, welche eine feste Wand vollkommen benetzen, können wir deshalb zunächst aus den Steighöhen in Röhren oder an einer festen Wand die Konstante a^2 oder H, welche die Kohäsion der Flüssigkeiten mißt, ableiten.

In § 77 erhielten wir für das Gewicht der in einer Röhre vom Radius r gehobenen Flüssigkeit den Ausdruck

$$h \cdot s \cdot f + m = H \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

rin m das Gewicht des Flüssigkeitsmeniskus ist, welcher über dem fsten Punkte der nach außen konkaven Flüssigkeitsoberfläche erhoben . Für den Fall, daß der Randwinkel 0° ist, läßt sich das Gewicht ses Meniskus in solchen zylindrischen Röhren, in welchen die Ober-che ein Kugelsegment ist, leicht bestimmen. Wenn nämlich die kugel-rmige Oberfläche die Röhrenwand unter einem Winkel von 0° schneidet, ist dieselbe eine Halbkugel, deren Radius gleich dem Radius der Röhre t. Das Volumen des Meniskus ist somit gleich demjenigen eines Zylinders, sen Querschnitt gleich ist dem Querschnitt f der Röhre, dessen Höhe ich ist dem Radius r der Röhre weniger dem Volumen der Halbkugel m Radius r. Es ist somit

$$m = \left(f \cdot r - \tfrac{2}{3} r^3 \pi\right) s = f\left(r - \tfrac{2}{3} r\right) \cdot s = \tfrac{1}{3} f r \cdot s.$$

Damit wird die Gleichung für das gehobene Gewicht

$$h \cdot s \cdot f + \tfrac{1}{3} r \cdot s \cdot f = H \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

ler. indem wir auf beiden Seiten durch $s \cdot f$ dividieren, $\vartheta = 0°$ setzen,

$$h + \tfrac{1}{3} r = \frac{H}{s} \cdot \frac{1}{r} = a^2 \frac{1}{r}$$

$$r\left(h + \tfrac{1}{3} r\right) = a^2,$$

ler die Kapillaritätskonstante a^2 ist gleich dem Produkte aus der um ein ttel des Radius vermehrten Steighöhe in den Radius der Röhre, wenn e Röhre so enge ist, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine Kugelfläche t. Darin, daß die Konstante hier als das Produkt zweier Dimensionen ftritt, liegt auch der Grund, daß sie als a^2 bezeichnet ist. Wird der dius $r = 1^{mm}$, so wird

$$a^2 = \left(h + \tfrac{1}{3}\right),$$

er die Konstante a^2 kann auch als die um $\tfrac{1}{3}^{mm}$ vermehrte Steighöhe in em Röhre von 2^{mm} Durchmesser definiert werden, vorausgesetzt, daß rt die kapillare Oberfläche eine Kugelfläche wäre.

Läßt man diese Annahme, die nur für sehr enge Röhren gilt, fallen, ergibt sich genauer nach Volkmann[1])

$$a^2 = r\left(h + \tfrac{1}{3} r - 0{,}1288 \frac{r^2}{h}\right).$$

Da h mit wachsendem r abnimmt, so ist das dritte Glied um so mehr Einfluß, je größer r ist. Bis zu Röhren von 2^{mm} Durchmesser fällt Einfluß des Korrektionsgliedes im allgemeinen erst in die zweite und te Dezimale.

Wir wollen hier indes sofort darauf aufmerksam machen, daß die ße a^2 nur dann die Dimension einer Fläche hat, wenn wir die Kraft h Gewichte messen, nicht im absoluten Maßsystem. Die Konstante H, doppelte Oberflächenspannung, ist, wie wir sahen, der Quotient einer

1) Volkmann, Wiedem. Ann. 11. p. 180. 1880.

Kraft und einer Länge, somit ist $H = z\,[\mu\tau^{-2}]$, wie wir es auch fanden. Das spezifische Gewicht ist der Quotient aus einer Masse, Gewichte und einem Volumen, somit $s = z\,[\mu\lambda^{-3}]$. Dividieren durch s, so wird

$$\frac{H}{s} = z\,[\lambda^3\tau^{-2}].$$

Dasselbe ergibt obige Ableitung. Setzen wir $\cos\vartheta = 1$, so b

$$\frac{H}{r}\cdot f = z\,[\mu\tau^{-2}\lambda^{-1}\lambda^2] = z\,[\mu\lambda\tau^{-2}]$$

eine Kraft, denn $\frac{H}{r}$ ist ein Druck, und ein Druck ist die auf die F einheit wirkende Kraft, also Druck mal Fläche ist eine Kraft. Setz

$$\frac{H}{r}\cdot f = fs\,(h + \tfrac{1}{3}r),$$

so setzen wir diese Kraft einem Gewichte, dem Gewichte der geh Flüssigkeit gleich; wollen wir H in absolutem Maße ausdrücken, s die rechte Seite der Gleichung mit der Beschleunigung g multi werden. Es wird

$$\frac{H}{r}\cdot f = g\cdot f\cdot s\,(h + \tfrac{1}{3}r),$$

$$\frac{H}{r} = gr\,(h + \tfrac{1}{3}r) = z\,[\lambda\tau^{-2}\lambda\lambda] = z\,[\lambda^3\tau^{-2}],$$

wie wir es auch vorhin erhielten.

Für die Steighöhe an einer vertikalen Wand erhielten wir in den Ausdruck

$$h_0 = \sqrt{\frac{H}{s}\,(1 - \sin\vartheta)} = a\cdot\sqrt{1 - \sin\vartheta}.$$

Ist der Winkel $\vartheta = 0^0$, so ist $\sin\vartheta = 0$; somit wird für vollk benetzende Flüssigkeiten

$$h_0 = a; \qquad h_0^2 = a^2,$$

oder die Kapillaritätskonstante a^2 ist ebenfalls gleich dem Quadra Steighöhe der Flüssigkeit an einer vertikalen ebenen Wand.

Zur Bestimmung der Konstanten a^2 genügt es deshalb, die St einer Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr von bekanntem, ab kleinem Radius r oder an einer ebenen Wand, welche vollkommen v Flüssigkeit benetzt werden, zu messen, und in dieser Weise ist d für eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Flüssigkeiten unter Be von Glasröhren und Glaswänden von Frankenheim[1]), Mendel Bède[3]), Quincke[4]), Volkmann[5]) Röntgen und Schneider[6]), Sc u. a. bestimmt worden.

1) *Frankenheim*, Kohäsionslehre. p. 79 ff. Breslau 1835.
2) *Mendéléeff*, Comptes Rendus. 50. p. 52. 1860. 51. p. 97 1860.
3) *Bède*, Mémoires couronnés de Bruxelles. 30. p. 1. 1862.
4) *Quincke*, Poggend. Ann. 135. 1868; 139. 1870. Wiedem. Ann. 52. p.
5) *Volkmann*, Wiedem. Ann. 11. p. 177. 1880; 17. p. 353. 1882; 53. p.
6) *Röntgen* und *Schneider*, Wiedem. Ann. 29. p. 202. 1886.
7) *Schiff*, Liebigs Ann. 223. p. 47. 1884.

Für das Gewicht der von der Längeneinheit der Berührungslinie ischen Flüssigkeit und fester Wand getragenen Flüssigkeit erhielten wir § 77 ganz allgemein

$$G = \frac{H}{2} \cdot \cos\vartheta = \alpha \cdot \cos\vartheta.$$

Ist ϑ gleich 0^0, so wird

$$G = \frac{H}{2} = \alpha = \tfrac{1}{2} a^2 s.$$

Die Größe $\frac{H}{2}$ ist, wie wir sahen, die Oberflächenspannung, dieselbe t demnach gleich dem Gewichte, welches an vollkommen benetzter Wand, $= 0$, von der Längeneinheit der Berührungslinie über das Niveau der lüssigkeit erhoben wird.

Auch hier ist zu beachten, daß wir die Kraft durch Gewicht messen. Vollen wir die Oberflächenspannung in absolutem Maße messen, so müssen ir G als Quotienten eines Gewichtes und einer Länge bezeichnen und it der Beschleunigung g bei dem freien Falle multiplizieren: es wird also

$$\frac{H}{2} = g \cdot \frac{m}{l} = g \cdot G,$$

an m das an der Länge l der Berührungslinie getragene Gewicht ist, d man erkennt, da $g = z\,[\lambda\tau^{-2}]$, $m = z\,[\mu]$, $l = z\,[\lambda]$ ist, daß auch rnach

$$\frac{H}{2} = z\,[\mu\tau^{-2}].$$

Wenn wir α zunächst entsprechend der von den meisten Beobachtern gewandten Bezeichnung als ein Gewicht bezeichnen, haben wir dasselbe : g zu multiplizieren, um die Größe im absoluten Maßsystem auszu- ken.

Man kann die Konstante $\alpha = \frac{H}{2}$ ebenso als die Konstante der Kapil- tät einer Flüssigkeit bezeichnen, wie es in neuerer Zeit besonders von ilhelmy und Quincke geschehen ist.

Wilhelmy[1]) hat diese Konstante nach einer sehr einfachen Methode estimmen und gleichzeitig die nach der Poissonschen Theorie an n Wänden der eingetauchten Körper eintretende Verdichtung zu messen rsucht. Wilhelmy hing feste Körper, planparallele Platten oder linder, deren Dimensionen vorher genau gemessen waren, an den einen m einer feinen Wage und bestimmte ihr Gewicht. Er ließ diese Kör- r dann bis zu einer bestimmten Tiefe, so daß ein genau bekanntes Vo- men derselben eintauchte, in die zu untersuchende Flüssigkeit hinab. egen der Methode, durch die Wilhelmy dieses Volumen bestimmte, issen wir auf die Abhandlung selbst verweisen. Es wurde das Gewicht r eingetauchten Körpers beobachtet. Dieses Gewicht ist gleich dem wichte des Körpers in der Luft, weniger dem Gewicht der verdrängten üssigkeit plus dem Gewichte der kapillar gehobenen und der an der erfläche verdichteten Flüssigkeit. Denn diese beiden Flüssigkeitsmengen

1 *Wilhelmy*, Poggend. Ann. **119** 1863; **121**. 1864; **122** 1864.

werden von dem Körper getragen. Ist demnach Π das Gewicht des eingetauchten Körpers, P sein Gewicht in der Luft, G das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, ferner λ der Umfang des festen Körpers im Niveau der Flüssigkeit, taucht weiter die Fläche O des festen Körpers ein und nennen wir β das Gewicht der an der Einheit der Oberfläche verdichteten Flüssigkeit, so ist

$$\Pi = P - G + \alpha\lambda + \beta O.$$

Um in dieser Weise die beiden gesuchten Größen α und β zu bestimmen, wird bei weiteren Versuchen der Körper tiefer eingetaucht. Nennen wir die bei einem zweiten Versuche eingetauchte Oberfläche O_1, das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit G_1, so wird

$$\Pi_1 = P - G_1 + \alpha\lambda + \beta O_1.$$

Aus diesen beiden Beobachtungen ergibt sich

$$\beta = \frac{G_1 - G + \Pi_1 - \Pi}{O_1 - O},$$

und mit dem so bestimmten β erhalten wir dann α

$$\alpha = \frac{\Pi + G - P - \beta O}{\lambda}.$$

Wilhelmy schloß aus seinen Versuchen, daß in der Tat an der Oberfläche der festen Körper eine sehr wohl meßbare Verdichtung stattfände, und daß dieselbe je nach der Natur des festen Körpers und der Flüssigkeit verschieden sei. Wilhelmy gibt folgende Werte von β in Milligrammen auf das Quadratmillimeter.

Flüssigkeiten	Werte von β an					
	Glas	Platin	Silber	Messing	Zink	Aluminium
Äthylalkohol.	0,012 59	0,006 41	0,015 12	0,023 26	0,007 09	0,007 16
Amylalkohol.	0,012 42	0,004 49	0,011 60	0,004 97	0,007 86	0,006 57
Äther	0,011 86	0,011 80	—	—	—	—
Aceton	0,012 90	0,002 20	—	—	—	—
Essigsäure . .	0,008 75	0,001 69	—	—	—	—
Essigäther . .	0,000 51	0,005 21	—	—	—	—

Es zeigt sich hier keineswegs, was man zunächst hätte vermuten sollen, daß die Verdichtung mit der Dichtigkeit des festen Körpers zunimmt, im Gegenteil sind die Verdichtungskoeffizienten für den dichtesten Körper, das Platin, im allgemeinen am kleinsten.

Für die Konstante α ergab sich nach diesen Versuchen ein verschiedener Wert je nach dem festen Körper, der in die Flüssigkeit eingetaucht war, trotzdem alle Körper von den untersuchten Flüssigkeiten benetzt wurden. Weiter schloß Wilhelmy, daß, der Theorie entgegen, selbst die Form der Körper, ob Platte, ob Zylinder auf den Wert von α von Einfluß sei. Folgende Tabelle enthält einige von Wilhelmy für Äthylalkohol und Amylalkohol erhaltene Werte von α und β für verschiedene Platten und Zylinder.

ne Körper	α		β	
	Äthylalkohol	Amylalkohol	Äthylalkohol	Amylalkohol
......	2,444	2,542	0,015 12	0,011 60
......	2,410	2,396	0,004 67	0,004 05
......	2,395	2,401	0,006 41	0,004 49
......	2,325	2,407	0,012 59	0,012 42
e	2,448	2,551	0,023 26	0,004 97
der mm				
ser 14,945	2,983	3,098	0,024 95	0,028 27
5,009	2,358	2,477	0,020 05	0,015 28
1,529	2,301	2,299	0,009 00	0,006 75

ie von Wilhelmy aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse, Oberflächen der festen Körper eine so erhebliche Verdichtung iten stattfände, und daß der Wert der Konstante α von der)berflächen abhängig sei, sind später sehr erhebliche Einwände len. Röntgen[1]) bestimmte zunächst den Gewichtsverlust eines altbaren Gipsstückes von 3900$^{\mathrm{qmm}}$ Oberfläche bei dem Ein-Veingeist. Dieselbe Gipsplatte wurde dann in 11 einzelne lt, so daß jetzt die Oberfläche des eingetauchten Gipses um nahm. Nimmt man nun auch den kleinsten, von Wilhelmy hol gegebenen Verdichtungskoeffizienten, nämlich 0,005 an, dem letzten Falle der Gewichtsverlust 0,180$^{\mathrm{g}}$ weniger be-. Röntgen fand aber den Gewichtsverlust im letzten Falle demjenigen im ersten Falle, so daß er gar keine meßbare beobachten konnte. Dasselbe ergab ein Versuch mit Glas. selampe wurde Glas zu äußerst feinen Häutchen ausgeblasen. Häutchen hatte eine Gewichtsmenge von 0,730$^{\mathrm{g}}$ nach einer ndestens 80000$^{\mathrm{qmm}}$ Oberfläche. Mit dem von Wilhelmy ge-ichtungskoeffizienten 0,01259 hätte diese Glasoberfläche etwa hol auf sich verdichten müssen. Setzt man das spezifische Glases gleich 2,5, das des Alkohols gleich 0,8, so verdrängt eim Eintauchen in Alkohol etwa 250$^{\mathrm{mg}}$ Alkohol. Die ver-igkeit hätte also etwa das Vierfache der verdrängten Flüssig-, oder dieses Glas hätte bei dem Eintauchen in Alkohol wiegen müssen, als in der Luft. Es ergab sich indes eine hme von 231$^{\mathrm{mg}}$, aus der sich das spezifische Gewicht des 2,53 berechnet, während sich für ein massives Stück desselben ezifische Gewicht 2,51 ergab. Es ließ sich also überhaupt he Verdichtung beobachten.

hen Resultaten gelangte Schleiermacher[2]) bei einer Unter-r die auf benetzten Körpern verdichtete Flüssigkeitsmenge, sie so groß ist, wie Wilhelmy sie annahm, auf spezifische mmungen von beträchtlichem Einflusse sein kann. Schleier-et, daß die Verdichtung der Flüssigkeiten höchstens 0,0001$^{\mathrm{mg}}$

1) en, Wiedem. Ann. 3 p. 321. 1878.
2) rmacher, Wiedem. Ann. 8. p. 52. 1879.

auf das Quadratmillimeter betragen könne, und daß sich ebenso wen Unterschiede derselben für die verschiedenen Substanzen erkennen lasse

Volkmann[1]) hat dann die Folgerung Wilhelmys geprüft, daß d Gestalt des eingetauchten Körpers auf den Wert der Konstanten von Ei fluß sei. Zunächst weist derselbe nach, daß die Verdichtung der Flüssi keiten an den Oberflächen, welche Wilhelmys Versuche zu ergeb schienen, sich vollständig erklären lassen, wenn man annehme, daß Wi helmys Bestimmung des spezifischen Gewichtes des Alkohols mit eine kleinen Fehler behaftet sei, und daß dieselbe Annahme auch die an ve schiedenen Formen derselben Substanz gefundenen Werte von α sich se viel näher bringe; weiter, daß die Annahme eines kleinen konstanten Ei stellungsfehlers bei Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die Körp eingetaucht seien, die Unterschiede der gefundenen Werte von α fast zu Verschwinden bringe.

Um einen etwaigen Einfluß der Krümmung der Oberfläche zu unte suchen, bestimmte Volkmann mit der größten Sorgfalt die Steighöhe einiger Flüssigkeiten zwischen parallelen Platten, die in verschiedenen Ab ständen einander gegenüber standen und in Röhren verschiedenen Durch messers. Wenn er annahm, daß die Flüssigkeiten nicht direkt von de Wand, sondern, wie es in sofort zu besprechender Weise aber aufgrund anderer Auffassung schon Wilhelmy getan hatte, von einer an der Wa haftenden Flüssigkeitsschicht, der Wandschicht, getragen werden, so ergebe sich aus diesen Beobachtungen für Platten und Röhren die genau gleiche Werte von a^2, so daß ein Einfluß der Krümmung sich nicht erkenn ließ. Die Dicke der Wandschicht, welche Volkmann annehmen muß fand sich allerdings zwischen Platten und in Röhren verschieden. Fü jede Platte fand er mit Alkohol und Knochenöl 0,002^{mm}, für Röhre deren Durchmesser zwischen 2,93 und 0,71^{mm} betrug, dagegen 0,00 So erhielt Volkmann z. B. für Alkohol folgende Werte für a^2, berech aus den Steighöhen unter der Voraussetzung, daß $\vartheta = 0$ sei. Die a^2 berechnet angegebenen Werte sind aus den beobachteten erhalten, i dem von den gemessenen Werten des Abstandes bzw. des Radius die ob angegebenen Größen 0,004 und 0,007 abgezogen wurden.

Platten			Röhren		
Abstand	a^2		Radius	a^2	
mm	Beobachtet	Berechnet	mm	Beobachtet	Berechnet
1,956	5,80	5,78	1,9655	5,83	5,80
1,519	5,84	5,81	1,6745	5,83	5,79
1,138	5,79	5,75	1,0655	5,845	5,80
0,438	5,89	5,78	0,503	5,885	5,80
			0,714	5,92	5,80

Der von Wilhelmy aus seinen Versuchen gefolgerte Einfluß der Su stanz des festen Körpers auf das von der Längeneinheit der Berühr

1) *Volkmann*, Wiedem. Ann. **11**. p. 177. 1880.

linie getragene Gewicht der kapillar gehobenen Flüssigkeit ist dagegen durch andere Beobachtungen bestätigt worden. So läßt sich zunächst ein solcher Einfluß, wie Quincke[1]) gezeigt hat, aus Versuchen von Guthrie[2]) über die Bildung von Tropfen folgern. Läßt man nämlich von einem festen Körper Tropfen einer Flüssigkeit, die denselben vollkommen benetzt, abfließen, so liefert das Gewicht des abfallenden Tropfens das Gewicht, welches an einer dem Umfange des Tropfens an der Berührungsstelle gleichen Kontaktlinie zwischen festem und flüssigem Körper getragen werden kann. Der Quotient aus dem Tropfengewichte und dem erwähnten Umfange muß deshalb der von uns mit α bezeichneten Größe sehr nahe gleich sein. Kennt man den Umfang, so kann man aus dem Tropfengewichte den Wert α berechnen. Man kann das erreichen, indem man von kleinen vollkommen benetzten Scheiben Tropfen abfallen läßt; der Umfang der Scheiben ist dann gleich dem obern Umfange des Tropfens. Handelt es sich nur um eine Vergleichung der Kapillaritätskonstanten, so braucht man den Tropfenumfang nicht zu kennen, wenn man die Tropfen verschiedener Flüssigkeiten von einem und demselben festen Körper abfließen läßt, oder indem man bei Benutzung verschiedener fester Körper dieselben in Form von Kugeln gleicher Radien benutzt. Da die Umfänge der Tropfen bei benetzenden Flüssigkeiten dann gleich sind, so sind die Gewichte der Tropfen den Kapillaritätskonstanten proportional.

In dieser Weise hat Guthrie das Gewicht von Wassertropfen bestimmt, welche von Kugeln verschiedener Substanzen abfielen, deren Radien gleich 7^{mm} waren. Die von Guthrie erhaltenen Zahlen enthält folgende kleine Tabelle, das Gewicht der Tropfen ist in Milligrammen gegeben.

Antimon	119,8	Blei	122,6
Schwefel	120,2	Phosphor	122,7
Kadmium	121,8	Wismuth	122,8
Zink	122,5	Zinn	124,2.

Von einer Glaskugel, deren Radius 7^{mm},1 betrug, fielen die Tropfen vom Gewicht 129,7 und von einer gleichen Messingkugel 132,2.

Die Unterschiede sind ähnlich wie bei den Versuchen von Wilhelmy; auch hier zeigt sich wie dort der Wert von α bei Messing größer als bei Glas.

Diesen Einfluß der Körpersubstanz auf das getragene Flüssigkeitsgewicht glaubte Wilhelmy[3]) mit der Theorie vereinigen zu können, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß bei allen benetzenden Flüssigkeiten der Randwinkel $\vartheta = 0$ ist. Wilhelmy glaubt, wie es schon Poisson annahm, daß man als die Kapillarröhre, in welcher die Flüssigkeit aufsteigt, die letzte an der Wand haftende Flüssigkeitsschicht ansehen müsse, welche je nach der Natur des festen Körpers mehr oder weniger verdichtet ist. Der Winkel ϑ, der dann maßgebend ist, ist jener, unter welchem sich

1) *Quincke*, Berliner Berichte über die Fortschritte der Physik für das Jahr 1865. 21 p. 99.
2) *Guthrie*, On drops. Proceedings of Royal Society of London 13. 1865.
3) *Wilhelmy*, Poggend. Ann. 119. 1863.

die kapillare Oberfläche der Wandschicht anschließt, und dieser ist je nach der Verdichtung der Wandschicht verschieden. Damit muß auch der beobachtete Wert von α verschieden sein, da wir aus der Steighöhe oder dem gehobenen Gewicht die wahre Kapillaritätskonstante nur erhalten wenn $\vartheta = 0^0$ ist.

Daß der Randwinkel ϑ bei benetzenden Flüssigkeiten nicht ohne weiteres 0 ist, wurde durch die Beobachtungen von Quincke bestätigt indem er zunächst zeigte[1]), daß die Steighöhe des Wassers an einer Glaswand verschieden ist, je nachdem man dieselbe gleich nach Herstellung des Meniskus oder längere Zeit nachher untersucht. Aus fünf Versuchsreihen, bei denen er die Höhe, bis zu welcher das Wasser an der vertikalen Wand einer vorher luftfrei gemachten Flasche emporstieg, bestimmte, fand er im Mittel

$$h_0 = a = 4{,}135$$

bei einer Temperatur von 17^0. Bei Wiederholung desselben Versuches, nachdem das Wasser mehrere Wochen mit Abschluß der Luft gestanden hatte, ergab sich bei derselben Temperatur

$$h_0 = a = 3{,}867,$$

also ein merklich kleinerer Wert, der beweist, daß der Winkel ϑ größer als 0^0 geworden war.

Später hat Quincke[2]) direkt die Steighöhen in kapillaren Röhren mit den aus der Messung von Luftblasen sich ergebenden Werten der Konstanten verglichen, und nach den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen die Werte von H und ϑ direkt bestimmt. Nach diesen Gleichungen ist die Höhe T der ganzen Luftblase

$$T = \sqrt{\frac{H}{s}(1 + \cos\vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 + \cos\vartheta}$$

und der Abstand der Blasenkuppe von dem Schnitte, in welchem die Blase den größten Durchmesser hat,

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

Für den Winkel ϑ ergab sich schließlich

$$\cos\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{T\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{t}.$$

Folgende kleine Tabelle enthält die von Quincke aus den Steighöhen in kapillaren Röhren abgeleiteten Konstanten a, sowie die aus Beobachtungen an Tropfen sich ergebenden Werte von a und ϑ.

Die Beobachtung der Steighöhen geschah bei einer Temperatur von 20^0, jene an Tropfen bei etwa 25^0 C.

1) *Quincke*, Poggend. Ann. **135**. 1868.
2) *Quincke*, Poggend. Ann. **139**. 1870.

Sustanzen	Kapillaritätskonstanten a und ϑ aus			
	Steighöhen	Beobachtungen an Blasen		
	$a = \sqrt{h \cdot r}$	$a = t$	$T\sqrt{\frac{1}{2}}$	ϑ
gvon unterschwefligsaurem ron in Wasser	3,684	3,748	3,670	23°20′
r	3,804	4,062	3,834	25°32′
felkohlenstoff	2,296	2,270	2,185	32°16′
öl	2,675	2,868	2,817	21°50′
tinöl	2,497	2,615	2,475	37°44′
form	1,916	—	—	—
. . . .	2,536	2,850	2,705	36°20′
l	2,379	2,564	2,503	25°12′

r die Kapillaritätskonstanten $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot s$ ergeben sich daraus Werte:

Substanzen	Dichte s	aus Steighöhen α_1 Milligr.	aus Blasen α Milligr.	$\alpha \cos \vartheta$
chwefligsaures Natron .	1,1248	7,636	7,903	7,256
. . . .	1	7,235	8,258	7,449
elkohlenstoff	1,2678	3,343	3,274	2,768
il	0,9136	3,271	3,760	3,490
tinöl	0,8867	2,765	3,033	2,398
form	1,4878	2,733	—	—
. . . .	0,7977	2,566	3,238	2,604
l	0,7906	2,273	2,599	2,352

man sieht, stimmen außer für Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl len der zweiten und letzten Kolumne ziemlich gut überein, ein daß man aus der Beobachtung kapillarer Steighöhen und unter tzung $\vartheta = 0^\circ$ im allgemeinen zu kleine Werte der Konstanten a rhält.

Abweichungen bei Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl glaubt einer chemischen Veränderung dieser Flüssigkeiten während des der Versuche zuschreiben zu müssen.

einer ausführlichen Untersuchung über den Randwinkel hat dann e[1] später denselben für eine Anzahl Flüssigkeiten und feste Körper n Tropfen, welche er auf Flächen derselben auffallen ließ, gemessen. reinen Flächen, die indes nur schwierig und auf ganz kurze Zeit llen sind, glaubt er aus seinen Versuchen schließen zu können, daß lwinkel benetzender Flüssigkeiten gleich Null sei. Für gewöhnlich Randwinkel indes größere bei derselben Flüssigkeit und verschiedenen Körpern sowohl als bei demselben festen Körper und vern Flüssigkeiten verschiedene, von Null verschiedene Werte. Quincke n, daß die feste Oberfläche mit einer unmerklich dünnen Schicht

1) Quincke, Wiedem. Ann. 2. 1877.

einer andern Substanz, etwa adhärierenden Gases, überzogen sei, dere Dicke kleiner als der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle sei. Di Dicke dieser Schicht hat auf die Größe des Randwinkels Einfluß. Deshal findet man bei derselben Flüssigkeit, wie Wasser, Alkohol auf demselbe festen Körper verschiedene Randwinkel. So erhielt er mit Wasser a reinen Oberflächen, je nachdem er 2 Minuten oder 10 Minuten nach Her stellung der reinen Oberfläche wartete, ehe er die Tropfen aufbracht folgende Werte von ϑ:

	nach 2 Minuten	nach 10 Minuten
Platin	$10^0 43'$	$18^0 13'$
Gold	$4^0 16'$	$8^0 18'$
Silber	$11^0 32'$	$17^0 58'$

Gegen die Annahme, daß auch bei benetzenden Flüssigkeiten der Randwinkel allgemein nicht Null sei, und daß man deshalb aus kapillaren Steighöhen die Kapillaritätskonstante a^2 oder α nicht mit Sicherheit bestimmen könne, ist mehrfach Einspruch erhoben.

Zunächst hob Volkmann[1]) hervor, daß wenn bei Wasser und Alkohol an Glas der Randwinkel nicht Null sei, das darin seinen Grund habe, daß die Flächen nicht vollkommen rein seien bzw. nicht vollkommen benetzt seien, daß man diese vollkommene Benetzung nicht nur, wie Quincke meine, auf kurze Zeit, sondern für eine hinreichende Zeitdauer herstellen könne, so zwar, daß man zwischen Platten und besser noch in kapillaren Röhren die Kapillaritätskonstante a^2 mit Sicherheit unter der Annahme $\vartheta = 0$ berechnen könne. Erforderlich sei dazu, daß man die Platten und Röhren vorher sorgfältig mit der Flüssigkeit benetze, ehe man aus der kapillaren Steighöhe die Kapillaritätskonstante ableite.

Einen Beweis für seine Ansicht findet Volkmann in folgendem: taucht man ein gereinigtes trockenes Glasrohr in Wasser, so gelingt es meist durch Heben und Senken des Rohres den Randwinkel zu ändern, ohne daß die Kontaktlinie ihre Lage im Glasrohre ändert. An derselben Stelle des Rohres kann man aber füglich nicht von einer verschiedenen Adhäsion der Flüssigkeit am Glase reden, durch welche ein verschiedener Randwinkel bedingt würde. Die Ursache jener Erscheinung ist vielmehr in dem großen Einfluß der Reibung an der Wandfläche zu suchen. Die Reibung wird vermieden, wenn für vollständige Benetzbarkeit Sorge getragen wird, bei jeder Erschütterung schwingt dann die Kontaktlinie mit dem ganzen Meniskus um die Gleichgewichtslage im Zustande der Ruhe.

Es scheint mir nicht, daß diese Beobachtung beweisend ist, denn die während des Hebens und Senkens des Rohres stattfindende Änderung des Randwinkels zeigt eben nur, daß der Meniskus wegen der Reibung um die Kontaktlinie pendelt, während an der benetzten Fläche die Kontakt-linie nicht haftet und mit auf- und niedergeht. Ob in dem einen oder andern Falle der Kontaktwinkel dauernd von Null verschieden ist, läßt sich auf diese Weise nicht erkennen.

Der Randwinkel geht bei der Bestimmung der Kapillaritätskonstante a^2 aus der Steighöhe nur ein, wenn man aus dem Radius der Röhre ...

1) *Volkmann,* Wiedem. Ann. **11**. p. 177. 1880; **17**. p. 353. 1882; **18**. p. [?] 1883; **28**. p. 135. 1886

Krümmungsradius der Oberfläche ableiten will. Deshalb hat Magie[1]) neben der Steighöhe die Krümmung der Oberfläche direkt durch ein optisches Verfahren bestimmt. Er maß die Größe und den Abstand des Bildes, das die spiegelnde Oberfläche der Flüssigkeit von einem in gemessener Entfernung von der Oberfläche befindlichen Gegenstande bekannter Größe entwirft, von eben dieser Oberfläche. Wie sich daraus die Krümmung des Spiegels ergibt, werden wir in der Lehre vom Lichte sehen.

Magie erhielt für Wasser unter andern folgende Werte für a^2 aus der Steighöhe h und dem Krümmungsradius ϱ bei einer Temperatur von 19°,25

h	ϱ	a^2
38,23	0,3731	14,262
32,73	0,4573	14,968
23,23	0,6258	14,537

Als Mittel von neun Messungen erhielt Magie für 19°,25 C.

$$a^2 = 14,453,$$

der mit dem Brunnerschen Temperaturkoeffizienten für 16° C.

$$a^2 = 14,536.$$

Dieser Wert ist so erheblich kleiner als die von allen sonstigen Beobachtern gefundenen Werte, daß man ihn kaum als für reines Wasser geltend ansehen kann; die meisten Beobachter finden nämlich, worauf wohl zuerst Hagen[2]) ausdrücklich hinwies, daß eine geringe Verunreinigung des Wassers den Wert von a^2 erheblich vermindert.

Quincke hat später[3]) neben der Steighöhe in kapillaren Röhren direkt nach einer optischen Methode den Randwinkel unter welchem die kapillare Oberfläche die Röhrenwand schneidet, gemessen, er findet denselben für Wasser bei neu hergestellten oder auch längere Zeit trocken aufbewahrten Röhren von Null verschieden. Die Werte sind indes erheblich kleiner, als sie sich aus der Beobachtung an Blasen ergaben, sie liegen zwischen 3° und 9°.

Gleichzeitig fand Quincke, daß die aus den Steighöhen berechnete Kapillarkonstante des Wassers von der Natur des Glases und der Weite der Röhre abhängig sei. So findet er für Röhren aus Jenaer Normalglas, wenn der Durchmesser von 0,3046 auf 1,425^{mm} zunahm, eine Zunahme von a^2 von 14,784 auf 15,693 bei 18° C., für englisches Flintglas bei von 0,446 bis 1,576 wachsendem Durchmesser eine Zunahme von a^2 von ... auf 15,553. Bei thüringer Glas war die Zunahme sehr klein.

Quincke glaubt diese Verschiedenheit auf Verunreinigung der kapillaren Oberfläche durch aufgelöstes Glas oder Zersetzungsprodukte desselben zurückführen zu können. Da die Verunreinigung nur von der Wand der Röhre ausgehen kann, ist der Einfluß der Röhrenweite verständlich; in engern Röhren ist das Verhältnis der kapillaren Oberfläche zur Kontaktfläche ein kleineres als bei größerer Röhrenweite, somit bei gleicher Glas-

1) *Magie*, Wiedem. Ann. 25. p. 421. 1885.
2) *Hagen*, Poggend. Ann. 67. p. 160. 1846.
3) *Quincke*, Wiedem. Ann. 52. p. 1. 1894.

sorte die aufsteigende kapillare Oberfläche stärker verunreinigt. . ist indes, daß sich die verschiedenen Gläser so verschieden ze schwerlösliche Gläser die Oberflächenspannung zum Teil stärker b als leichtlösliche Gläser.

Volkmann[1]) hat eine solche Abhängigkeit von a^2 von (des Glases und der Röhrenweite bei sorgfältig mit Ätzkali und Wasser ausgewaschenen Röhren nicht erkennen können; er fand verschiedenen Glassorten und Röhren verschiedener Weite a bei 18° C.

Gegen die von Quincke aus seinen Messungen an Tropfen u gezogenen Schlüsse machen Worthington[2]) und Magie[3]) da merksam, daß die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleich T und t, die von Quincke benutzt sind, nur für Tropfen von sol gelten, daß man deren Kuppe als eben betrachten und den Kr radius des durch den Bauch, die Stelle wo das Element des schnitts vertikal ist, geführten horizontalen Schnittes als unen annehmen dürfe. Für kleinere Tropfen treten wegen der so ver ten Krümmungen Korrektionsglieder in die Gleichungen, welche, unmittelbar erkennt, für die Kapillaritätskonstanten die Werte, v ersterer Voraussetzung sich ergeben, verkleinern. Indem Wort und Magie, letzterer nach einer Formel von Poisson, diese Ko anbringen, gelangen sie zu Werten der Kapillaritätskonstanten, Teil erheblich kleiner sind als die von Quincke berechneten un kapillaren Steighöhen sich ergebenden erheblich näher kommen.

Dem gegenüber weist Quincke darauf hin[4]), daß er für W Alkohol sowie für Lösungen von Salzen in Wasser und Alkohol l an kleinen Luftblasen auf solche an großen Luftblasen redu Er beobachtete[5]) die Werte von T und t zunächst an Blasen v Durchmesser, bei welchen die vereinfachenden Voraussetzungen g verglich mit den so gefundenen Werten diejenigen an kleiner So ergeben sich z. B. aus vier Versuchsreihen bei den Durchm von Wasserblasen folgende Werte von T und t

$2r$ mm	T mm	t mm	$\frac{T}{T_{100}}$	$\frac{t}{t_{100}}$
100	5,613	3,975	1,0000	1,0000
47	5,806	4,077	1,0344	1,0261
30,1	5,821	4,147	1,0372	1,0433
20,1	5,738	4,022	1,0223	1,0121.

Mit diesen und andern Messungen wurde eine Tabelle entw welcher man für jeden Tropfendurchmesser die gemessenen We und t durch Division mit dem betreffenden Quotienten den We endlich große Durchmesser berechnen kann.

1) *Volkmann*, Wiedem. Ann. **53**. p. 633. 1894; **66**. p. 194. 1898.
2) *Worthington*, Philosoph. Magazin. **20**. (5.) p. 54. 1885. Bei p. 710. 1886.
3) *Magie*, Wiedem. Ann. **25**. p. 421. 1885.
4) *Quincke*, Wiedem. Ann. **27**. p. 219. 1886.
5) *Quincke*, Poggend. Ann. **160**. p. 354. 1877.

us den für Wasser und Alkohol direkt an Blasen von 100mm Durch-
gemessenen Werten

sser . . .	$T = 5{,}613$	$t = 3{,}975$	wird $a^2 = 15{,}80$	$\vartheta = 6^0 16'$
ohol . . .	3,448	2,434	5,92	0^0.

ie Werte von a^2 stimmen mit denen überein, welche Magie aus den gen Quinckes mit der Poissonschen Formel berechnete. Die Be- ung der kapillaren Steighöhe desselben Alkohols hatte Quincke den ,80 gegeben, der an der Blase gefundene Wert von a^2 ist also m größer, obwohl sich aus T und t der Randwinkel Null ergibt. ohnstein[1]) hält das empirische Verfahren Quinckes nicht für hend, die Beobachtungen an kleinern Blasen auf unendlich große zu reduzieren, ebenso wie er die Poissonsche Formel zur Berech- er Kapillarkonstanten aus Beobachtungen an Tropfen nicht für aus- d hält. Er hat nach der von ihm entwickelten Methode einige htungen Quinckes berechnet und erhält erheblich kleinere Werte pillarkonstanten wie Quincke. So erhält er für

$r = 100$, $T = 5{,}613$, $t = 3{,}975$, $a^2 = 14{,}94$ statt $15{,}80$,
$r = 88$, $T = 5{,}628$, $t = 4{,}112$, $a^2 = 15{,}48$ „ $16{,}9$.

h sind die aus Quinckes Beobachtungen an Blasen sich ergeben- erte nicht größer als die nach andern Methoden gefundenen.

antor[2]) erhielt nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Me- er Beobachtung des Maximaldruckes in Tropfen $a^2 = 15{,}28$ bei 19° C. äter hat Magie[3]) selbst Messungen an Blasen vorgenommen in der Quincke und gelangt ebenfalls zu dem Resultate, daß für eine benetzender Flüssigkeiten der Randwinkel einen endlichen Wert hat, für Wasser, Essigsäure, Terpentin, Petroleum und Äther. Die von gefundenen Winkel liegen zwischen 17° und 26°. Für Äthylalkohol, lkohol, Chloroform, Benzin und Ameisensäure schließt Magie, daß ndwinkel Null sei.

e Methode von Sondhaus gibt nach den Beobachtungen von Tim- m allgemeinen größere Werte für die Konstante a^2 als die Be- ng an Blasen. So erhält Timberg für die Temperatur 16° folgende von a^2

	an Blasen,	an Lamellen
Alkohol	5,817	6,360
Benzol aus Benzoesäure . .	6,571	7,573
Wasser	15,837	15,773.

Die aus den Beobachtungen an Blasen sich ergebenden Werte der laritätskonstanten ändern sich nach den Beobachtungen Quinckes[5]) ler Zeit, und ähnliches gibt Timberg für die Lamellenspannung an.

[1] Lohnstein, Wiedem. Ann. 53. p. 1070. 1894. Man sehe auch Heydweiller, em Ann 65. p. 311. 1898.
[2] Cantor, Wiedem. Ann 47 p. 420. 1892.
[3] Magie, Philosoph. Magazin. 26. (5.) p. 162. 1888.
[4] Timberg, Wiedem. Ann. 30. p. 545. 1887.
[5] Quincke, Poggend. Ann. 160. p. 568. 1877.

Gleich nach Bildung der Luftblase ist die Kapillaritätskonstante erheb größer als später, dieselbe scheint sich mit wachsender Zeit einem M mum zu nähern. So gibt Quincke unter andern für Wasser und Alk sowie Quecksilber folgende Beobachtungsreihen:

Wasser.

Zeit	a^2	ϑ
0^h	16,89	$30^0 36'$
$3\ 48'$	16,39	$24^0 8'$
$21\ 20'$	15,88	31^0
bewegt	15,94	$26^0 34'$
0^h	16,91	$29^0 14'$
$1\ 3'$	16,84	$28^0 56'$
$17\ 23'$	15,97	$26^0 48'$
$21\ 4'$	15,18	$28^0 24'$
$27\ 22'$	14,67	$25^0 6'$
$41\ 17'$	14,69	$29^0 32'$

Alkohol.

Zeit	a^2	ϑ
0^h	5,818	0^0
$0\ 14'$	5,665	0^0
$1\ 44'$	5,567	0^0
$2\ 30'$	5,554	0^0
$5\ 51'$	5,546	0^0

Quecksilber

Zeit	a^2
0^h	7,823
$0\ 5'$	7,783
$0\ 10'$	7,225
3	7,081

Quincke fand diese Abnahme der Oberflächenspannung kleiner kleinen Tropfen als an großen Tropfen und sieht darin auch den Gr weshalb man eine solche Abnahme in kapillaren Röhren im allgemei nicht findet. Hiermit stimmt überein, daß er in Röhren von 5,5, 3,8 2,1 mm Durchmesser deutlich eine Abnahme erhielt, welche um so grö war, je kleiner der Durchmesser der Röhre war. Volkmann[1]) beobach ähnliches an einigen Salzlösungen auch in noch engern Röhren. Quin sieht in dieser Erscheinung eine Art elastischer Nachwirkung in Flü keiten ähnlich der elastischen Nachwirkung in festen Körpern. Er m daß ähnlich wie die elastische Gleichgewichtslage der Teilchen eines f Körpers erst allmählich oder nach unendlich langer Zeit eintritt, w auch die Gleichgewichtslage der Grenzteilchen einer Flüssigkeit sich allmählich einstellen.

Es läßt sich nicht leugnen, daß, wie auch Volkmann hervor diese Auffassung in der vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssig teilchen eine Schwierigkeit findet, man müßte denn annehmen, daß, w auch manches andere spricht, in der Oberflächenschicht eine eigentüml Zähigkeit vorhanden ist. Volkmann möchte die Erscheinung eher ei eigentümlichen Einfluß der Luft auf die kapillare Oberfläche zuschrei da er zwischen Platten und auch in kapillaren Röhren die Erschei viel stärker bei luftfreiem, als bei mit Luft gesättigtem Wasser fa Wenn Quincke die größere Konstanz der Erscheinung in kleinen und in Röhren dem Einflusse der festen Wand zuschreibt, indem di häsion des Flüssigen am Festen die Moleküle hindert der elastischen N wirkung zu folgen, glaubt Volkmann, daß in engen Röhren die Luft in dem Maße einwirken könne. Welcher Art diese Einwirkung der sein soll, darüber läßt sich Volkmann nicht aus[3]).

1) *Volkmann,* Wiedem. Ann. **17**. p. 361. 1882.
2) *Volkmann,* Wiedem. Ann. **17**. p. 377. 1882.
3) Man sehe auch Fräulein *Pockels,* Nature. **46**. p. 418. 1892. Ann. d. 8. p. 854. 1902.

Daß in der Tat kleine Verunreinigungen oder Verdichtung von Gasen den Oberflächen die Kapillarkonstanten wesentlich beeinflussen kann, zeigt sonders das Quecksilber. Die Konstanten desselben sind von verschiedenen obachtern und zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden gefunden, und iincke hat schon in seiner ersten Arbeit über die Kapillaritätskonstanten Quecksilbers gezeigt, daß der aus der Messung an flachen Tropfen sich ebende Wert von a^2 mit wachsender Zeit kleiner wird.[1]) Gleiches gen die vorher angegebenen Zahlen. Gleich nach dem Auflegen ergab h $a^2 = 7{,}823$ oder $\alpha = \frac{a^2 s}{2} = 52{,}96$, nach drei Stunden aber $a^2 = 7{,}085$ r $\alpha = 48{,}11$.[2]) Noch etwas größere Werte als sofort nach dem Aufen der Tropfen erhielt Quincke[3]) aus der Messung der Depression in en Röhren und des Randwinkels, er fand $\alpha = 54{,}08$ und $55{,}78$ bei 5° C. Sämtliche übrige Beobachter fanden kleinere Werte. Cantor[4]) ielt nach der Methode des Maximaldruckes $\alpha = 45{,}89$, G. Meyer[5]) nach Methode von Helmholtz-König und nach der Berechnung von Lohnin[6]) $\alpha = 43{,}68$. Siedentopf[7]) nach der gleichen Methode $a^2 = 6{,}698$ 45,4.

Stöckle[8]) und G. Meyer[9]) haben dann den Nachweis geliefert, daß Veränderlichkeit der Kapillarkonstanten eine Folge der Verdichtung Gase an der Oberfläche des Quecksilbers ist. Stöckle beobachtete h der Methode von Helmholtz-König, brachte aber die Röhre, aus en Endquerschnitt der zu messende Tropfen herausgepreßt wurde, in en luftdicht schließenden Raum, so daß er den Tropfen hervortreten en konnte, wenn die Umgebung desselben luftleer war, oder wenn die- e mit Gasen unter verschiedenen Drucken gefüllt war. Der Tropfen rde soweit aus dem Endquerschnitt herausgetrieben, daß die Krümmung Tropfenkuppe ein Maximum war, die Berechnung der Konstanten chah mit Hilfe der Seite 411 erwähnten Tabellen von Bashforth und ams. Die von Stöckle erhaltenen Resultate sind folgende: Im luft- en Raum gebildet und erhalten, zeigt der Quecksilbertropfen konstant $44{,}4 \left(\frac{\text{mllgr.}}{\text{mm}}\right)$ bei 15°; dabei ist es gleichgültig, welches Gas vor dem spumpen die Umgebung des Tropfens enthalten hat.

In mit Gasen erfüllten Räumen ergibt sich die Oberflächenspannung eblich höher als im leeren Raum, wenn man sie sobald wie möglich h Bildung des Tropfens bestimmt, sie nimmt dann aber mit wachsen- Zeit erheblich ab und sinkt in allen Gasen nach etwa $^3/_4$ Stunden nahezu den Wert, welchen sie auch im leeren Raum zeigt. Die nelligkeit der Abnahme ist verschieden für die verschiedenen Gase, am

1 *Quincke*, Poggend. Ann. **105**. p. 1. 1858.
2 *Quincke*, Poggend. Ann. **160**. p. 568. 1877.
3 *Quincke*, Wiedem. Ann. **52**. p. 1. 1894.
4 *Cantor*, Wiedem. Ann. **47**. p. 415. 1892.
5 *G. Meyer*, Wiedem. Ann. **53**. p. 865. 1894.
6 *Lohnstein*, Wiedem. Ann. **54**. p. 722. 1895.
7 *Siedentopf*, Wiedem. Ann. **61**. p. 253. 1897.
8 *Stöckle*, Wiedem. Ann. **66**. p. 499. 1898.
9 *G. Meyer*, Wiedem. Ann. **66**. p. 523. 1898.

schnellsten erfolgt sie im Wasserstoff, am langsamsten im Stickstoff. geben in folgender Tabelle einige Resultate Stöckles an:

Name des Gases	Druck	Temperatur	Anfangswert	End
Vacuum	0,0004—0,001	15°	44,4	44
Wasserstoff	Atm.	21°	47,9	44
Wasserstoff gemischt mit trockner Luft.	„	„	48,4	44
Trockene Luft	„	17°	48,5	43
Kohlensäure	„	19°	49,0	44
Sauerstoff	„	23°	48,7	44
Stickstoff.	„	16°	49,8	44
Stickstoff.	10mm	„	49,9	44

Die Endwerte sind die eine Stunde nach Herstellung der Tr sich ergebenden Werte:

Stöckle weist zunächst durch Betrachtung des Ganges der Ab von α nach, daß nicht die Ablagerung von Dämpfen, die aus der Fe der Hähne in den Röhren, die zur Luftpumpe führen oder die Umg des Tropfens mit verschiedenen Gasen füllen lassen, die Abnahme bew kann. Da im leeren Raume dieser Niederschlag sich außerorde schnell bildet, während er bei Atmosphärendruck längere Zeit beansp müßte die Schnelligkeit der Bildung vom Drucke des Gases abhängig was, wie die beiden Beobachtungen mit Stickstoff zeigen, nicht der ist. Weiter aber zeigte Stöckle, daß der Gang der beobachteten von α genau derselbe war, wenn man bei der Zusammenstellung Apparates jede Verwendung von Fett ausschloß und schließlich Stöckle darauf hin, daß auch an freier Luft, wo überhaupt keine dämpfe vorhanden sein können, die Abnahme der Oberflächenspannun obachtet sei; er sieht deshalb den alleinigen Grund der Abnahm Oberflächenspannung in der Verdichtung der Gase an der Oberfläch Tropfens.

Eine Erklärung dafür, daß in den Gasen der Endwert der Oberfl spannung derjenigen im leeren Raume gleich wird, ist hierdurch gegeben, im Gegenteil, diese experimentell konstatierte Tatsache biet das Verständnis unleugbar eine große Schwierigkeit.

Aus der Tatsache, daß die gefundenen Anfangswerte der Oberfl spannung im allgemeinen in denjenigen Gasen die kleineren sin welchen die Abnahme die schnellere ist, kann man den Schluß ziehen wenn man eine unendlich kleine Zeit nach Bildung des Tropfen Messungen machen könnte, sich ein Anfangswert für die Oberfl spannung ergeben würde, der größer sein müßte als der von St gefundene. Diese Folgerung haben die Versuche von G. Meyer bes Derselbe maß die Oberflächenspannung nach einer dynamischen Me die wir im § 90 besprechen werden, bei welcher die Oberflächensp sofort nach Berührung von Quecksilber und Gas durch die Schwing eines aus einer elliptischen Öffnung ausfließenden Strahles erhalten

1) Wir werden bei der Lehre von der schwingenden Bewegung nae

Die gefundenen Werte sind für die Oberflächenspannung in

Wasserstoff	Luft	Sauerstoff	Stickstoff	Kohlensäure
$\alpha = 56{,}5$	51,5	51,4	50,5	49,6

Die Zahlen sind sämtlich größer als die von Stöckle gefundenen ngswerte, scheinen aber in den verschiedenen Gasen nicht ganz überstimmen. Die Werte für Luft kommen denen Quinckes für frisch elegte Tropfen oder in kapillaren Röhren sehr nahe; Meyer glaubt in der Art der Messung auch begründet. Quincke taucht in eine ere Quecksilbermasse eine oben zugeschmolzene Kapillarröhre und t dann das zugeschmolzene Ende ab, das Quecksilber steigt dann aus Innern einer größern Masse, also ohne mit Luft in Berührung ge- zu sein, in der Röhre auf, ferner wird sich in der Achse der e das Quecksilber am schnellsten bewegen und sich somit fortwährend das an den Wänden zurückbleibende legen. Damit ist die Bedingung Bildung einer Oberfläche gegeben, auf der keine Luft verdichtet ist. Mit der Auffassung von Stöckle uud G. Meyer stimmt auch überein, die aus den verschiedenen Methoden der Messung sich ergebenden e der Oberflächenspannung des Quecksilbers fast sämtlich zwischen 44 etwa 55 liegen, nur wenige Werte gehen unter 40 herunter.[1])

Da ähnliche Einflüsse bei andern Substanzen nicht ausgeschlossen wird man sich nicht wundern können, wenn die nach verschiedenen oden gefundenen Werte der Oberflächenspannung für ein und dieselbe igkeit nicht vollständig übereinstimmen.

§ 80.

Zahlenwerte; Einfluß der Temperatur. Wir stellen hiernach im den einige Zahlenresultate gemessener Kapillaritätskonstanten zu-en. Die Zahlenwerte gelten, wie schon erwähnt, stets nur für die gebene Temperatur. Wie nämlich zuerst Frankenheim und Sond-[2] erkannt haben, nimmt die Kapillarkonstante mit steigender Tem-ur erheblich ab. Aus Beobachtungen in kapillaren Röhren erhielt lhaus für Wasser als Wert von a^2 bei der Temperatur t

$$a^2 = 15{,}373 - 0{,}02983\, t,$$

Abnahme war also der Temperaturzunahme proportional. Zu dem

e dynamische Methode kennen lernen, die von Lord *Kelvin* angegeben und ord *Rayleigh*, *Matthießen*, *Grunmach* u. a. benutzt worden ist.

1 *Bashforth*, $\alpha = 34$, An attempt to test the theory of capillary action. ridge 1883; *Sentis*, $\alpha = 39{,}23$, Journal de phys. 9. 2. p. 384 1890; *Kalähne* nach der Methode von Lord Kelvin bei frisch hergestellter Oberfläche 4,91 und 42,17, nachdem die Oberfläche 2^1_2 Stunden an der Luft gestan-,42 und nach weiteren 35 Min. 37,57 (Ann. d. Physik. 8. p. 440. 1902); *nach*, Ann. d. Physik. 9 p. 1278. 1902, findet nach der Methode von Lord Werte die bis etwa $\alpha = 33$ heruntergehen; für ganz frische Quecksilber- unmittelbar nach ihrer Herstellung wurde α etwa gleich 50 und nahm nd einer Stunde auf 41,26 ab.

2 *Sondhaus* und *Frankenheim* nach *Sondhaus*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VIII. 1878.

gleichen Resultate und fast genau dem gleichen Wert der Konstanten für Wasser gelangten später Brunner[1]) und Wolf[2]), es erhielt

Brunner	Wolf
$a^2 = 15{,}332 - 0{,}02864\,t$	$a^2 = 15{,}592 - 0{,}02934\,t$,

letzterer Wert ist das Mittel aus drei in Röhren verschiedener Weite durchgeführten Beobachtungsreihen, deren Zahlen sehr nahe überein-stimmen.

Eine etwas raschere Abnahme zeigen die von Sondhaus durch Messung der Lamellenspannung für Wasser gefundenen Werte, die indes wenig zahlreich sind.

Timberg[3]) hat die Änderung der Oberflächenspannung mit der Temperatur sowohl durch Messungen an Blasen als auch durch Messung der Lamellenspannung und Wägung der bei verschiedenen Temperaturen aus einer Röhre fallenden Tropfen verfolgt; durch Messungen an Blasen fand Timberg

$$a^2 = 16{,}347 - 0{,}03190\,t,$$

durch Messung der Lamellenspannung

$$a^2 = 16{,}413 - 0{,}04063\,t.$$

Wenn auch die Bestimmung der Kapillaritätskonstanten durch das Gewicht der von einer Röhre fallenden Tropfen unsicher ist, da es schwierig ist, den Umfang, also die Länge der Linie, an welcher der Tropfen im Augenblicke des Abfallens hängt, genau zu bestimmen, so ist doch das Gewicht der fallenden Tropfen stets der Oberflächenspannung proportional. Ist demnach P_0 und P_t das Gewicht der abfallenden Tropfen bei 0° und t, und α_0 und α_t die Oberflächenspannungen, so ist

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_0} = \frac{P_t}{P_0}.$$

Wird demnach beobachtet

$$P_t = P_0\,(1 - \nu t)$$

so ist auch

$$\alpha_t = \alpha_0\,(1 - \nu t)$$

und da allgemein $\alpha_t = \frac{1}{2} a^2 s_t$ wenn s_t das spezifische Gewicht bedeutet,

$$\frac{\alpha_t}{s_t} = \tfrac{1}{2} a_t^2 = \tfrac{1}{2} a_0^2 \frac{s_0}{s_t}\,(1 - \nu t),$$

oder indem wir beachten, daß $s_t = \frac{s_0}{1 + \gamma t}$ oder $s_0\,(1 - \gamma t)$ gesetzt werden kann und daß wir für $(1 - \nu t)\,(1 - \gamma t)$, da ν und γ kleine Zahlen sind, schreiben können $1 - \mu t$

$$a_t^2 = a_0^2\,(1 - \mu t).$$

1) *Brunner*, Poggend. Ann. **70**. p. 507. 1878.
2) *C. Wolf*, Poggend. Ann. **102**. p. 571. 1857. **Das Mittel ist von** *Sondhaus* berechnet a. a. O.
3) *Timberg*, Wiedem. Ann. **30**. p. 545. 1887.

Timberg fand in dieser Weise für Wasser $\mu = 0{,}002\,252$; die beiden [er]sten Methoden ergeben $\mu = 0{,}001\,951$ und $0{,}002\,475$, während die [G]leichung von Sondhaus den in dieser Weise berechneten Temperatur[k]oeffizienten zu $0{,}001\,940$ ergibt.

Volkmann[1]) gibt die Werte von α aus beobachteten Steighöhen [v]on 6° bis 10° C. in einer Tabelle. Die Werte lassen sich sehr gut dar[ste]llen durch die Gleichung

$$\alpha = 7{,}695\,(1 - 0{,}00198\,t),$$

[w]ährend Weinberg[2]) für a^2 nach der Methode von Sondhaus erhält

$$a^2 = 16{,}3\,(1 - 0{,}001\,975\,t).$$

[D]ie so bestimmten Temperaturkoeffizienten stimmen darnach recht gut überein.

Riess[3]) erhält nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen er[wäh]nten dynamischen Methode von Lord Kelvin einen mit der Tem[pera]tur abnehmenden Temperaturkoeffizienten, während Ochsé eine solche [Ab]nahme des Koeffizienten nur zwischen 0° und 8°, darüber hinaus den [Ko]effizienten konstant findet. Von 0° bis 8° erhält er

$$a^2 = 16{,}46 - 0{,}183\,t + 0{,}006\,t^2,$$

[da]rüber hinaus

$$a^2 = 15{,}906 - 0{,}0666\,t.$$

[De]r Temperaturkoeffizient ist also mehr als doppelt so groß, als er von [de]n andern Beobachtern nach den verschiedensten Methoden gefunden ist.

Brunner hat außer für Wasser auch für Äthyläther und Olivenöl [de]n Temperaturkoeffizienten bestimmt, er findet

Äthyläther . $a^2 = 5{,}3536 - 0{,}028\,102\,t = 5{,}3536\,(1 - 0{,}005\,21\,t)$
Olivenöl . . . $a^2 = 7{,}4640 - 0{,}010\,486\,t = 7{,}4640\,(1 - 0{,}001\,40\,t)$.

Wolf findet als Änderung der Steighöhe in einem Rohre, dessen [Du]rchmesser er nicht angibt, für Äthyläther

$$h = 38{,}0819 - 0{,}175\,436\,t = h_0\,(1 - 0{,}004\,61\,t)$$

[al]so einen nur wenig kleineren Temperaturkoeffizienten wie Brunner. [Wol]fs Beobachtungen reichen bis 100°, Brunners bis 35°.

Timberg findet für Äthyläther

$$a^2 = 5{,}192 - 0{,}023\,42\,t = 5{,}192\,(1 - 0{,}004\,510\,t)$$

[au]ch Beobachtungen an Blasen, einen Temperaturkoeffizienten, der dem [vo]n Wolf gefundenen fast genau gleich ist.

Für Benzol aus Benzoesäure findet Timberg aus Beobachtungen an Blasen

$$a^2 = 6{,}960 - 0{,}024\,31\,t = 6{,}960\,(1 - 0{,}003\,493\,t)$$

[La]mellen nach der Methode von Sondhaus

$$a^2 = 7{,}972 - 0{,}024\,96\,t = 7{,}971\,(1 - 0{,}003\,123\,t),$$

[die] Temperaturen reichten bis gegen 70°.

Für Alkohol erhält Timberg nach den beiden Methoden

1) *Volkmann*, Wiedem. Ann. **56**. p. 483. 1895.
2) *Weinberg*, Zeitschr. f. physikal. Chemie. **10**. p. 49. 1892.
3) *Riess*, Exner Repertorium **24**. p. 122. 1890.

$$a^2 = 6,074 - 0,016\,91\,t = 6,074\,(1 - 0,002\,784\,t)$$
$$a^2 = 6,603 - 0,015\,21\,t = 6,603\,(1 - 0,002\,304\,t).$$

Volkmann[1]) erhält zwischen 12°,5 und 17°,5 C.

für Benzol . . $a^2 = 7,176 - 0,025\,t$
für Toluol . . $a^2 = 7,048 - 0,019\,t$
für Anilin . . $a^2 = 9,09 \quad - 0,018\,t$

Timberg und Ochsé haben die Änderung der Kapillaritätskon für eine Anzahl Salzlösungen verfolgt, es ergibt sich für diese eb daß die Abnahme der Oberflächenspannung innerhalb der Grenz Beobachtungstemperaturen der Temperatur proportional ist, für Salzlö sind die Temperaturkoeffizienten kleiner als für Wasser und nehm steigender Konzentration der Lösung ab[2]). In sehr ausgedehnter hat H. Schiff[3]) die Kapillaritätskonstanten von organischen flüssig bindungen und deren Änderung mit der Temperatur gemessen, Kapillarkonstanten bei der Siedetemperatur miteinander zu vergl Schiff maß bei seinen Versuchen die kapillaren Steighöhen bei ni Temperaturen und bei solchen, welche der Siedetemperatur der Flü nahe liegen. Zur Vergleichung mit den anderweitig gefundenen mögen folgende dienen:

Äthylalkohol . $a^2 = 6,044 - 0,0161\,t$
Benzol . . . . $a^2 = 6,974 - 0,0235\,t$,

Zahlen, welche mit den von Timberg durch Beobachtung an Bla fundenen Werten sehr nahe übereinstimmen.

Als allgemeines Resultat in betreff der Temperaturkoeffizienten Schiff, daß dieselben bei homologen Flüssigkeitsreihen mit steig Molekulargewicht abnehmen. So sind dieselben für

Benzol C_6H_6 — 0,0235, Toluol C_7H_8 — 0,0213, Xylol C_8H_{10} — 0
Propylbenzol C_9H_{12} — 0,0189, Cymol $C_{10}H_{14}$ — 0,0183.

In folgender Tabelle stellen wir einige der vorhin bereits angeg Werte in absolutem Maße zusammen. Die Oberflächenspannung ist im Zahlenwerte gleich dem Drucke auf der Flächeneinheit; wir sie in Milligrammen angegeben. Wir führen sie in absolutes Maß zwar in das Milligramm — Millimeter — Sekundensystem über, ind sie mit $g = 9810^{\mathrm{mm}}$ multiplizieren. Da ein Milligramm $0,001^{\mathrm{g}}$ i geben wir die Werte im gr cm sec Systeme an, wenn wir die fundenen Zahlen mit 1000 dividieren. Die von uns angegebenen von α werden also in das gr cm sec System übergeführt, wenn mit 9,81 multiplizieren.

Die Richtigkeit dieser Rechnung gibt uns die früher erkannte I sion der Oberflächenspannung $\varepsilon\ [\mu\tau^{-2}]$ sofort. Ist die Oberflächenspa durch G milligr. gegeben, so ist sie in absoluten Einheiten

---

1) *Volkmann,* Wiedem. Ann. **56**. p. 487. 1895.

2) Man sehe auch *P. de Heen,* Bulletin de l'acad. de Bruxelles. **5**. (3) 492 u. 505.

3) *H. Schiff,* Liebigs Ann. **223**. p. 47. 1884. Man sehe auch Fel Liebigs Ann. **228**. p. 96. 1885 und *Schiffs* Erwiderung, Liebigs Ann. **228**. 1885.

$$9810\, G\, [\text{mllgr sec}^{-2}]$$

demnach im Grammsystem

$$9810\, G \left[\frac{\text{gr}}{1000}\,\text{sec}^{-2}\right] = 9{,}810\, G\, [\text{gr sec}^{-2}].$$

Wir gelangen zu dem gleichen Resultate durch folgende Überlegung. Die Größe α gibt uns den Druck in Milligrammen auf 1 mm^2 einer Kugel vom Radius 1$^{\text{mm}}$. Im Gramm — Zentimetersystem müssen wir zunächst den Druck auf 1 cm^2 bei einem Radius von 1$^{\text{cm}}$ einführen. Da die Fläche die hundertfache, der Krümmungsradius aber der zehnfache ist, so ist der Druck zehnmal so groß, wie unsere Werte ihn ergeben. Um den Druck in Grammen auszudrücken, haben wir den zehnfachen Wert durch 1000, unsere Zahlen also durch 100 zu dividieren. Um nicht Gramme als Druckeinheit zu wählen, sondern jenen Druck, der der Masse Gramm die Beschleunigung 1$^{\text{cm}}$ in der Sekunde gibt, haben wir den letztern Quotienten mit 981, also unsere Zahlen mit 9,81 zu multiplizieren.

Die Oberflächenspannung, also die Größe $\frac{H}{2}$, nennt man jetzt vielfach Kohäsion der Flüssigkeit.

Die Größe a^2, welche Quincke die spezifische Kohäsion nennt, erhalten wir durch Division der doppelten Oberflächenspannung mit dem Gewichte der Volumeinheit. Wir haben also die in absolutem Maße gegebenen Werte von $2\,\alpha$ durch das spezifische Gewicht zu dividieren, es folgt somit, daß wir die Werte von a^2 in absolutem Maße erhalten und zwar im gr cm sec-System, wenn wir die früher angegebenen Werte mit 9,81 multiplizieren. Es stimmt das damit, daß a^2 nach der Länge im absoluten Maßsystem von der dritten Dimension ist. Denn da wir die im Gewichtssystem in Milligrammen etc. angegebenen Größen mit 9810 multiplizieren müssen, um sie in das absolute Gaußsche System überzuführen, müssen wir eine der Länge nach die dritte Dimension habende Größe $a^2 = z\,[\lambda^3 \tau^{-2}]$ durch $10^3 = 1000$ dividieren um sie in unser gr cm sec überzuführen, es bleibt also die Multiplikation mit 9,81.

Die in folgender Zusammenstellung (s. Seite 436) angegebenen Werte von Quincke und Timberg sind durch Messungen an Blasen erhalten, die übrigen durch Messung der Steighöhen, der von Rayleigh für Wasser angegebene Wert ist der nach der Bemerkung am Schlusse des vorigen Paragraphen durch die dynamische Methode von Lord Kelvin (W. Thomson) gefundene. Die in der Tabelle für dieselbe Substanz angegebenen Werte lassen den Unterschied der nach der Messung an Blasen und der Messung der kapillaren Steighöhe sich ergebenden Werte der Kapillaritätskonstanten deutlich hervortreten.

Während die bisher besprochenen Messungen wesentlich den Zweck hatten, die Kapillaritätstheorie zu prüfen, hat man in neuerer Zeit begonnen, systematisch die Kapillarkonstanten von Substanzen zu untersuchen, um Beziehungen zwischen den Kapillarkonstanten und sonstigen Eigenschaften aufzufinden.

Zunächst hat Quincke die Kapillaritätskonstanten geschmolzener Substanzen, geschmolzener Metalle und Salze untersucht[1]. Er bestimmte zu

[1] *Quincke*, Poggend. Annalen **134**. p. 356. 1868; **135**. p. 634. 1868; **138**. 141. 1869.

Tabelle von Kapillaritätskonstanten.

Substanz	Spez. Gew.	$\alpha \frac{gr}{sec^2}$	$a^2 \cdot \frac{cm^2}{sec^2}$	Temp.	Beobachter
Wasser[1]	1,000	77,499	154,998	17°	Quincke
„	„	74,000	148,000	18°	Rayleigh
„	„	73,869	147,738	16°	Volkmann
Olivenöl	0,9136	36,585	80,090	25°	Quincke
„	„	32,473	71,092	25°	Brunner
Steinöl	0,798	31,716	79,488	25°	Quincke
Steinöl rektif.	0,767	25,591	66,210	17°	Rodenbeck[2]
Schwefelsäure	1,849	62,126	67,182	14,5°	Frankenheim
Amylalkohol	0,8181	23,985	58,636	18—24°	Mendéléeff
Äthylalkohol	0,7904	23,039	58,434	17°	Quincke
„	0,7939	22,695	57,123	15°	Schiff[3]
Äthyläther	0,7217	18,528	51,346	15°	Brunner
„	0,7446	17,692	47,539	13°	Timberg
Chloroform	1,488	26,810	36,826	25°	Quincke
„	1,494	27,224	36,473	17°	Rodenbeck[2]

dem Zwecke entweder das Gewicht von Tropfen, welche von den Drähten der betreffenden Metalle, deren Enden in der Flamme eines Lötrohres geschmolzen wurden, oder welche aus engen Glasröhren, in denen die Substanzen geschmolzen wurden, herabfielen, oder er goß die geschmolzenen Substanzen auf horizontalen Unterlagen aus, welche von den Substanzen nicht benetzt wurden. In letzterem Falle bildeten die Substanzen Tropfen, welche auch nach dem Erstarren dieselbe Gestalt behielten, die sie flüssig im Momente des Erstarrens besessen hatten. Die Gestalt dieser Tropfen war somit bedingt durch die Oberflächenspannung bei der Schmelztemperatur, und der Abstand der Tropfenkuppe von dem Schnitte, wo der Tropfen seinen größten Durchmesser hatte, lieferte bei großen Tropfen sofort die Konstante a.

Für das Quadrat dieser Konstanten $a^2 = \frac{H}{s}$, also den Quotienten aus der doppelten Oberflächenspannung und der Dichte der betreffenden Substanz, der spezifischen Kohäsion, ergibt sich aus diesen Versuchen das interessante Resultat, daß dieselbe in Quadratmillimetern ausgedrückt für alle untersuchten Körper sich als ein einfaches Vielfaches der Zahl 4,3 oder später[4]) von 8,5 darstellen ließ, mit Abweichungen, die innerhalb der Grenzen der bei diesen Versuchen unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen. Quincke findet folgende Werte von a^2:

$a^2 = 1 \cdot 8,5$ für Quecksilber, Blei, Wismuth, Antimon
$2 \cdot 8,5$ „ Iridium, Platin, Gold, Silber, Zinn, Aluminium, Wasser,
$3 \cdot 8,5$ „ Palladium, Rhodium, Kupfer, Nickel, Kobalt, Eisen, Zink,
$4 \cdot 8,5$ „ Kalium,
$7 \cdot 8,5$ „ Natrium.

1) Eine Zusammenstellung der verschiedenen für Wasser gefundenen Werte gibt *Weinberg,* Ztschr. für physikalische Chemie. **10**. p. 34. 1892 und *Kalähne* Ann. der Physik. 7. p. 467. 1902.
2) *Rodenbeck,* Beiblätter. 4. p. 104. 1881.
3) *H. Schiff,* Liebigs Ann. **223**. p. 69. 1884.
4) *Quincke,* Wiedem. Ann. **61**. p. 280. 1897.

Siedentopf[1]) hat später in hinreichend hoch erhitzten Räumen nach Methode von Helmholtz-König die spezifische Kohäsion einiger siger Metalle bestimmt; er findet für Blei 9,78, Wismuth 8,76, n 17,87, Zahlen, die im allgemeinen die Quinckesche Gruppierung ennen lassen.

Für geschmolzene chemische Verbindungen ergab sich der Satz: Gemolzene Substanzen von ähnlicher chemischer Zusammensetzung haben selbe spezifische Kohäsion bei einer Temperatur, die ihrem Schmelzikte möglichst nahe liegt.

Kohlensaure und schwefelsaure (wahrscheinlich auch phosphorsaure) ze zeigen im geschmolzenen Zustande dieselbe spezifische Kohäsion wie Wasser.

Salpetersaure Salze, Chlormetalle, Zuckerarten und Fette zeigen diebe spezifische Kohäsion wie das Quecksilber.

Brom- und Jod-Metalle, sowie Selen, Brom, Schwefel und Phosphor gen eine halb so große spezifische Kohäsion wie das Quecksilber.

Inwieweit die von Quincke direkt beobachteten Zahlen mit diesen tzen übereinstimmen, möge an folgender Reihe angedeutet werden, welche Werte a^2 für die untersuchten Nitrate und Chloride angibt.

Natriumnitrat . . .	$a^2 = 8{,}55$	Kaliumchlorid . . .	$a^2 = 8{,}76$
Kaliumnitrat . . .	8,35	Kalciumchlorid . .	8,49
—	—	Strontiumchlorid .	8,18
Lithiumchlorid . .	8,53	Bariumchlorid . . .	8,29
Natriumchlorid . .	8,41	Silberchlorid . . .	8,18

Wie man sieht, weichen diese Zahlen nur wenig von dem für Quecker gefundenen Werte ab.

Quincke scheint zu der Annahme zu neigen, daß für alle reine Substanzen die spezifische Kohäsion sich in dieses System einfüge, wenn man selbe in der Nähe des Schmelzpunktes untersuche.

H. Schiff[2]) hat später eine große Zahl organischer Substanzen in gewöhnlicher Temperatur und in der Nähe des Siedepunktes untersucht und dem er in dem letztern Zustande, dem Siedepunkte unter dem Druck r Atmosphäre die Substanzen als in vergleichbarem physikalischen Zustande ansah, die spezifischen Kohäsionen der verschiedenen Substanzen erglichen. Nachdem schon früher Wilhelmy einige Beziehungen zwischen en Kapillarkonstanten und der Zusammensetzung der chemischen Verbindungen angegeben, gelangt Schiff aus seiner Untersuchung von weit über 100 Substanzen zu sehr interessanten Beziehungen zwischen den Kapillaritätskonstanten und der chemischen Zusammensetzung der Flüssigkeiten.

Schiff knüpft seine Betrachtungen an eine von dem bisherigen etwas

1 *Siedentopf*, Wiedem. Ann. **61**. p. 262. 1897. Betreffs der Messungen an entarteten Tropfen sehe man auch *Heydweiller*, Wiedem. Ann **62**. p 694. 1897; **G** p. 314 1898; *Herzfeld*, Wiedem. Ann. **62**. p. 450. 1897; *Gradenwitz*, Wiedem. Ann **67**. p. 467. 1899

2 *H Schiff*, Liebigs Annalen. **223** p. 47. 1884. Gazzetta chimica Italiana. **14** p **368**. 1884.

abweichend definierte Kapillarkonstante. Ist m das Molekulargewicht einer Substanz, so setzt er

$$N = \frac{a^2 s}{2m} = \frac{a^2}{2\frac{m}{s}} = \frac{a^2}{2v}.$$

Die Definition von N ist folgende. Es bedeutet $\frac{a^2}{2}s$ das Gewicht, also $\frac{a^2}{2}$ das Volumen der pro Längeneinheit der Kontaktlinie gehobenen Flüssigkeit; ist m das Molekulargewicht der Substanz, so bedeutet $\frac{m}{s}$ das Molekularvolumen, somit N die Anzahl der gehobenen Moleküle. Um nicht mit zu kleinen Zahlen operieren zu müssen, gibt Schiff das Molekulargewicht in Tausendstel der gewöhnlichen Zahlen oder setzt, wenn m wie gewöhnlich geschrieben wird

$$N = 1000\,\frac{a^2}{2v}.$$

Betreffs der Zahl N gelangt nun Schiff zunächst zu dem Resultate, daß dieselbe für Substanzen die gleiche sei, in deren Molekül zwei Wasserstoffatome durch ein Kohlenstoffatom oder drei Wasserstoffatome durch ein Sauerstoffatom ersetzt werden. So ist z. B. für

Hexan	C_6H_{14}	$N =$ 16,1
Orthoxylol	C_8H_{10}	$N =$ 16,0
Metaxylol		15,0
Paraxylol		15,8
Äthylbenzol. . . .		16,2
Isobutylformiat . .	$C_5H_{10}O_2$	$N =$ 15,8
Propylacetat . . .		15,6
Äthylpropionat . .		15,6
Methylbutyrat . .		15,9
Methylisobutyrat .		15,7.

Ebenso findet er, daß ein Atom Chlor 7 Atome Wasserstoff im Molekül ersetzen kann, so daß N denselben Wert behält, so ist für

Dimethylacetat	$C_4H_{10}O_2$	$N = 18,4$
Chloroform . .	$C\,H\,Cl_3$	$N = 18,6$.

Die 3 Atome Chlor ersetzen in kapillarer Beziehung $3C$, $9H$ und $2O$, also nach der früher gefundenen Äquivalenz $21H$.

In gleicher Weise entsprechen sich

$$1 \text{ Brom} = 13H, \qquad 1 \text{ Jod} = 19H,$$

wonach in bezug auf die Kapillarität die Halogene sich um je $6H$ unterscheiden.

Hiernach gelang es die Werte von N für die verschiedensten Substanzen durch eine empirische Gleichung darzustellen; bedeutet x die Anzahl Wasserstoffatome, welche den das Molekül einer Substanz zusammensetzenden Atomen in kapillarer Beziehung äquivalent ist, so ergibt sich aus der Gleichung

$$N = \frac{1}{x}\, e^{6.482928 - 0.016762 8 \cdot x}$$

Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. In Logarithmen wird die Gleichung

$$\log N = 2{,}8155 - 0{,}00728 \cdot x - \log x.$$

les einige Substanzen sich dieser Gleichung nicht unterordnen metameren Substanzen die Zahlen nicht genau übereinstimmen, chiff, daß auch die Stellung des Atoms im Molekül auf die kapillarer Beziehung von Einfluß sei.

er Wert der Kapillarkonstanten durch die chemische Konsti- Moleküls bedingt sein kann, hat Feustel[1]) durch Untersuchung n Methylderivate von Toluol, Phenol und Anilin, also ortho- ylol, ortho-meta-para-Kresol und ortho-meta-para-Toluidin nach- Es zeigte sich, daß in allen Fällen der Substituent in der ng den größten, in der para-Stellung den kleinsten, in der ng einen mittleren Wert gab. So war bei 45° für

met.-Kresol	p.-Kresol	o.-Toluidin	met.-Toluidin	p.-Toluidin
3,72	3,70	4,07	3,85	3,72

ür

	o.-Xylol	met.-Xylol	p.-Xylol
$\alpha =$	3,28	3,15	3,08

ay und Shields[2]) sowie Ramsay und Aston[3]) haben für eine organischer Verbindungen Messungen der Oberflächenspannung auf welche wir noch an anderer Stelle zurückkommen werden. sgedehnter Weise sind die Kapillaritätskonstanten von Salz- Valson[4]), Quincke[5]), Volkmann[6]), Rother[7]), Röntgen und [8]), Traube[9]) und von Forch[10]) untersucht worden; Quincke dem Resultate, daß, während die Steighöhe im allgemeinen als bei reinem Wasser, die Größe α, die von Quincke als die ohäsion der Flüssigkeit bezeichnet wird, dem Salzgehalte pro- nimmt. Nennt man y die Anzahl von Äquivalenten eines he in 100 Äquivalenten Wasser gelöst sind, so findet Quincke sung kapillarer Steighöhen für alle Chloride in Milligrammen

$$\alpha = 7{,}35 + 0{,}1783\, y,$$

quivalente der Chloride einwertiger Metalle doppelt genommen, . K_2Cl_2 usw., werden müssen. Aus Messungen flacher Tropfen

$$\alpha = 8{,}30 + 0{,}1870\, y.$$

1) *...tel*, Ann d Physik. **16**. p. 61. 1905.
2) *...say* und *Shields*, Zeitschr. für physikal. Chemie. **12**. p. 33. 1893.
3) *...say* und *Aston*, Zeitschr. für physikal. Chemie. **15**. p. 89 1894.
4) *...son*, Ann. de chim. et de phys **20** (4.) p. 361. 1870.
5) *...cke*, Poggend. Ann **160**. p. 337. 1877.
6) *...kmann*, Wiedem. Ann. **17**. p. 353. 1882.
7) *...her*, Wiedem Ann **21** p. 576. 1884.
8) *...tgen* und *Schneider*, Wiedem Ann. **29**. p. 252. 1886.
9) *...ube*, Berichte der chemischen Gesellschaft. **17**. p. 2294. 1884.
10) *...ch*, Wiedem Ann. **67**. p. 801. 1899.

Für andere Salze werden die Werte des Koeffizienten von y andere; indes sind nach Volkmann und Rother die Werte für die Salze gleicher Säuren sehr nahe gleich, nur kohlensaures Kali und kohlensaures Natron haben sehr verschiedene Werte der Quotienten, K_2CO_3 gibt 0,190, Na_2CO_3 dagegen 0,112.

Nach den Messungen Forchs gilt indes der Satz von Quincke nicht allgemein. Für Lösungen von Salpetersäure und die Säuren von der Fettsäurereihe ist der Wert α kleiner als für Wasser, auch sind die Abnahmen nicht dem Gehalt an Säure proportional.

Traube[1]) hat Lösungen organischer Substanzen in Wasser und Mischungen organischer Flüssigkeiten, wie letztere schon früher von Duclaux[2]) untersucht waren, und Rodenbeck[3]) verschiedene Mischungen, Alkohol-Wasser, Alkohol-Chloroform, Steinöl und Chloroform und mehrere andere untersucht. Allgemeine Sätze haben sich aus diesen Messungen nicht ergeben, so interessant auch einzelne Resultate sind, so gestattet uns hier der Raum nicht darauf näher einzugehen, wir verweisen deshalb auf die Arbeiten selbst.

§ 81.

Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten. Plateaus Versuche. Wenn man zwei Flüssigkeiten miteinander mischt, so beobachtet man, daß die Anziehung der Flüssigkeiten aufeinander sehr verschieden ist. Man findet nämlich entweder, daß die Flüssigkeiten, wenn sie ein verschiedenes spezifisches Gewicht haben, einfach sich übereinander lagern ihrer Schwere gemäß, oder, daß die Flüssigkeiten sich mischen, daß die eine die andere vollständig durchdringt, und so die schwerere in die leichtere gehoben und verbreitet und die leichtere in die schwerere hinabgezogen wird. So mischen sich z. B. Wasser und Weingeist in allen Verhältnissen, während Wasser und Öl sich nicht mischen, sondern ihrer Schwere gemäß sich übereinander lagern.

Ein Flüssigkeitsgemisch ist eine ganz homogene Flüssigkeit, deren einzelne Bestandteile sich nicht durch mechanische Mittel, sondern nur durch eine Veränderung des Aggregatzustandes trennen lassen. Dadurch unterscheidet sich das Gemische wesentlich von einem Gemenge, wie man es herstellen kann, wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes in einem Gefäße zusammengießt und stark schüttelt.

Bei der Mischung zweier Flüssigkeiten zeigt sich in den meisten Fällen auch eine Kontraktion des Gemisches, indem das Volumen der Mischung kleiner und somit ihre Dichtigkeit größer ist als die Summe der Volumina der Bestandteile bezw. deren mittlere Dichtigkeit. Wir haben bereits bei Besprechung der Alkoholmetrie für die am genauesten untersuchten Gemische, diejenigen von Wasser und Alkohol, einige Zahlen angegeben.

Wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes zusammengießt, die sich nicht mischen, so z. B. Öl in ein Gemische

1) *Traube* a. a. O.
2) *Duclaux,* Ann. de chim. et de phys. 18. (5.) p 76. 1878.
3) *Rodenbeck,* Beiblätter. 4. p. 104. 1880.

l und Wasser bringt, so beobachtet man, daß sich die Flüssigkeiten n unregelmäßiger Weise durcheinander lagern, sondern die eine in dern, so das Öl in dem Gemische in Gestalt kugelförmiger Tropfen mmt.

s beweist dies, daß die beiden nicht sich mischenden Flüssigkeiten, eine sich in der andern befindet, ebenso einen Normaldruck und eine chenspannung haben, wie die freie Oberfläche einer Flüssigkeit. nennen wir den Normaldruck des im Alkoholgemische schwimmenles K' und die Oberflächenspannung desselben H', so muß das im lgemische der Wirkung der Schwere entzogene, also nur den Molekräften unterworfene Öl eine solche Gestalt annehmen, daß für jeden der Oberfläche der von außen nach innen gerichtete Druck der ist. Da nun

$$P = K' + \frac{H'}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right),$$

n der Öltropfen nur im Gleichgewicht sein, wenn die Summe der ken Werte der Hauptkrümmungsradien überall die gleiche ist, und der Fall, wenn der Tropfen die Gestalt einer Kugel annimmt.

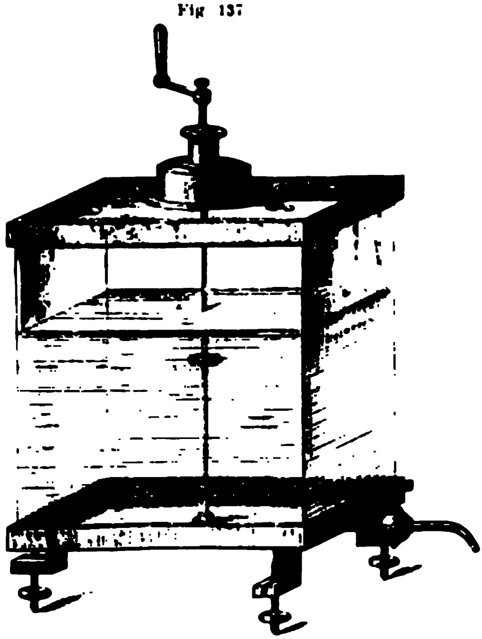
äßt man auf den gewichtslosen Tropfen noch andere Kräfte wirndem man ihn an feste Körper adhärieren macht, so kann er noch eihe anderer Gestalten annehmen, für deren freie Oberflächen aber lgemeine Bedingung bebleiben muß

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$$

lateau[1] hat über die en, welche Flüssigkeiten er andern von gleichem chen Gewichte annehmen i, vielfache Versuche an. Um zwei Flüssigkeiten n spezifischen Gewichtes tellen, wandte er ein Gevon Alkohol und Was, welches das gleiche spe Gewicht hatte wie Öl, also ein Öltropfen an Stelle dieses Gemisches differenten Gleichgewicht mmt.

he Versuche werden in parallelepipedischen Glas(Fig. 137) angestellt, desände aus ebenen Glasn bestehen, die mit ihren n zusammengekittet sind. In der Bodenplatte ist ein Hahn ange-

Fig. 137



[1] *Plateau*, in verschiedenen Jahrgängen der Bulletins de l'Academie de s, daraus Poggend. Ann. 55. 1842; 56. 1842. Erg.-Bd II. 1848; 88. 1851.

bracht, um die Flüssigkeiten abzulassen, und in der Deckplatte verschiedene Öffnungen, um die Flüssigkeiten und einige bei den Versuchen benutzte Apparate hineinzubringen. Nachdem der Kasten mit dem Weingeistgemische angefüllt ist, bringt man mittels einer kleinen Pipette, welche mit einem etwas gefärbten Öle angefüllt ist, in die Mitte der Flüssigkeit etwas Öl, welches sich an dem Ende der Pipette in Form eines großen Tropfens ansammelt. Zieht man dann die Pipette, nachdem man sie oben mit dem Finger verschlossen hat, vorsichtig heraus, so bleibt der Tropfen in Form einer Kugel ruhig an seinem Platze stehen, wie es die Theorie verlangt. Denn ist der Tropfen sich selbst überlassen, so daß nur die Oberflächenspannung auf ihn einwirkt, so muß diese an allen Stellen gleich sein, und das ist, wie wir sahen, der Fall, wenn die Krümmung der Oberfläche an allen Stellen dieselbe ist.

Fig. 138.

Wenn man den Tropfen an gewissen Stellen mittels vorher mit Öl bestrichener Eisendrähte fixiert, so adhäriert der Tropfen an diesen und dort wirkt dann außer der Kohäsion des Öles die Adhäsion am Eisen. Die Gestalt der Oberflächen muß demnach eine andere werden, indem an gewissen Stellen die Oberflächenspannung modifiziert wird; für die freien Oberflächen muß aber auch in diesem Falle $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$ sein.

Legt man den Tropfen in einen Ring von Eisendraht, so nimmt er die Gestalt einer bikonvexen Linse an (Fig. 139), deren beide Flächen Kugelsegmente von gleichem Radius sind. Für die freien Oberflächen ist dadurch die Bedingung erfüllt $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$ Wenn man den in dem Drahtringe schwebenden Tropfen vorsichtig herabläßt, bis er unten einen Drahtring berührt, so legt er sich auch an diesen an, und wenn man dann den an dem Dreifuß befestigten Drahtring wieder aufzieht, während man Öl in den Tropfen nachfließen läßt, so bleibt der Tropfen unten an dem Drahte haften, und zwischen den beiden Drähten bildet sich ein vollkommener Kreiszylinder (Fig. 140), welcher oben und unten von Kugelsegmenten gleichen Radius begrenzt ist.

Fig. 139.

Fig. 140.

Der eine Krümmungsradius des Zylinders in einer durch die Achse parallel derselben geführten Ebene ist unendlich, da diese Ebene die Zylinderfläche in einer geraden Linie schneidet, deshalb ist

$$\frac{1}{\varrho'} = 0.$$

ler andere Krümmungsradius ist der Radius des Zylinders. Da die ichenspannung an allen Punkten der freien Oberflächen gleich sein so muß, wenn wir mit ϱ_1 den Radius der Kugelflächen bezeichnen,

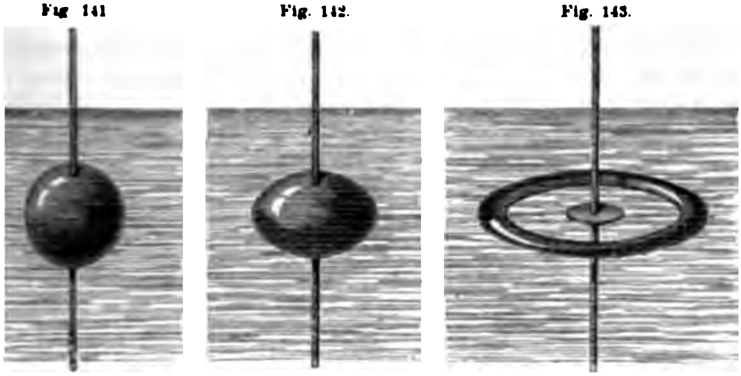
$$K' + \frac{H'}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = K' + H' \cdot \frac{1}{\varrho_1},$$

$$\frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}; \quad \varrho_1 = 2\varrho;$$

ß demnach der Radius der Kugelsegmente doppelt so groß sein als adius des Zylinders. Eine Messung der Höhe der Kugelsegmente und Krümmung ergibt in der Tat $\varrho_1 = 2\varrho$.

Iittels Drahtfiguren von verschiedener Gestalt ist es Plateau ge-, noch eine Reihe Flüssigkeitsfiguren herzustellen, so Würfel, Oktasf. mit konvexen, ebenen und konkaven Oberflächen, je nach der ige, welche er zwischen die Drahtnetze brachte.

Fig. 141 Fig. 142. Fig. 143.



Wenn man auf die Tropfen noch andere als die innern Kräfte der ion und Adhäsion wirken läßt, so wird auch dadurch die Gestalt der m eine andere. Plateau bewirkte zu dem Ende, daß der Tropfen n den in Fig. 137 abgebildeten, in der Mitte des parallelepipedischen s herabgehenden Metalldraht anlegte, welcher mittels der Kurbel in on versetzt werden konnte. Die in der Mitte des Drahtes befindliche e war vorher mit Öl bestrichen, und nun mittels eines Eisendrahtes kugel, von 6^{cm} Durchmesser, so an die Scheibe geführt, daß sie ymmetrisch um Scheibe und Draht herumlegte (Fig. 141). Wenn nun die Handhabe langsam dreht, so sieht man zunächst, wie die allmählich an den Polen, durch welche die Drehungsachse geht, bplattet und am Äquator anschwillt (Fig. 142). Dreht man rascher a-her, so wird die Kugel von unten und oben hohl und dehnt sich mehr in horizontaler Richtung aus; endlich verläßt sie die Scheibe erwandelt sich in einen vollkommen regelmäßigen Ring (Fig. 143). hese Erscheinungen erklären sich leicht durch die zur Molekular-;g der Flüssigkeit auf sich selbst hinzutretende Zentrifugalkraft. Der an dem Drahte und der Scheibe adhärierende Tropfen wird mit in on versetzt, und die einzelnen Teile desselben erhalten dadurch eine

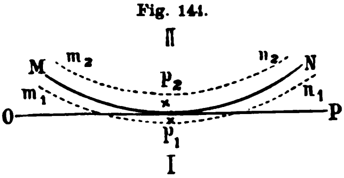
von der Drehungsachse fortgerichtete zentrifugale Beschleunigung, welche in der Nähe des Äquators am stärksten ist. Dadurch suchen die Teile in der Nähe des Äquators sich am stärksten von der Achse zu entfernen. Anfangs wird dieser zentrifugalen Beschleunigung durch eine verstärkte Oberflächenspannung das Gleichgewicht gehalten, und es tritt nur eine Abplattung des Tropfens an den Polen, eine Aufhäufung und verstärkte Krümmung am Äquator ein. Überwiegt die zentrifugale Beschleunigung, so reißt sich die ganze Masse von der Achse los und umgibt dieselbe in der Form eines Ringes, der eine Zeitlang besteht, dann aber, da sich die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung des Öls am Alkohol stetig vermindert, wieder zusammenfließt und sich als kugelförmiger Tropfen wieder um die Achse legt.

Durch besondere Kunstgriffe gelang es Plateau[1]), es auch dahin zu bringen, daß sich nur ein Teil des Tropfens als Ring loslöste, während ein anderer Teil in Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids an der Achse haften blieb, also eine Erscheinung hervorzurufen, welche mit der des Saturn im Weltenraum die größte Ähnlichkeit hat.

Alle diese Versuche, welche unsere Sätze über die Oberflächenspannung in so schöner Weise vor Augen führen, zeigen die an der Grenze zweier Flüssigkeiten vorhandene Oberflächenspannung.

Über die Größe dieser Oberflächenspannung können wir uns durch folgende von F. E. Neumann[2]) durchgeführte Betrachtung Rechenschaft geben. Es sei MN Fig. 144 die Grenze zweier Flüssigkeiten, nach oben konkav, indem wir annehmen, die Flüssigkeit I sei die schwerere, also unten. Die molekularen Kräfte, welche in der Grenze in Spiel treten, sind die Anziehungen der Teilchen der Flüssigkeit I aufeinander, der Flüssigkeit II aufeinander und die Anziehungen der verschiedenen Flüssigkeiten I und II aufeinander. Um den auf die Grenzfläche nach dem Innern der Flüssigkeit I gerichteten wirksamen Druck zu erhalten, haben wir die Summe der vier Wirkungen, die sich hiernach ergeben, zu bilden.

Fig. 144.



Wir nennen Normaldruck und doppelte Oberflächenspannung, herrührend von der Wirkung der Teilchen der Flüssigkeit I aufeinander K_1 und H_1, der Teilchen der Flüssigkeit II K_2 und H_2, der Wirkung der Teilchen I auf II K_{12} und H_{12}, der Teilchen II auf I K_{21} und H_{21}.

Wir setzen den in der Grenzfläche nach unten wirkenden Druck positiv; für den von der Flüssigkeit I herrührenden Druck, welcher derselbe ist, wie wenn die andere Flüssigkeit nicht da wäre, haben wir

$$K_1 - \frac{H_1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

1) *Plateau,* Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.

2) *Volkmann,* Wiedem. Ann. 16. p. 321. 1882. Die im folgenden vorgenommene Bestimmung der Kapillarkonstanten zweier Flüssigkeiten rührt *F. E. Neumann.* Man sehe *Quincke,* Poggend. Ann. 139. p. 59. 1870; *Paul Bois Reymond,* Poggend. Ann. 139. p. 262. 1870.

wenn ϱ und ϱ_1 die beiden Hauptkrümmungsradien sind. Ebenso erhalten wir für die Flüssigkeit II

$$-K_2 - \frac{H_2}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

denn die Flüssigkeit I ist nach außen konkav, die Flüssigkeit II nach außen konvex.

Um die Anziehung der Flüssigkeit I auf II auszuwerten, dürfen wir nicht lediglich die Wirkung auf die in der geometrischen Grenze liegenden Moleküle ins Auge fassen, sondern müssen die auf alle Moleküle p_2 wirkenden Kräfte in betracht ziehen, welche innerhalb der Grenze der Wirkungssphäre oberhalb der Oberfläche liegen.

Stellt uns $m_2 n_2$ die Grenze der Wirkungssphäre dar, so sind also alle innerhalb dieser Grenze liegenden Moleküle zu beachten. Die unterhalb der Ebene OP liegenden Teilchen bewirken den Normaldruck K_{12} nach unten hin. Die in der geometrischen Grenze MN liegenden Teilchen der Flüssigkeit II werden von den ebenfalls in der Grenze liegenden Teilchen der Flüssigkeit I nach unsern frühern Betrachtungen einen Zug nach oben erhalten. Anders aber die höher liegenden Teilchen p_2; dieselben erhalten von der zwischen OP und MN befindlichen Flüssigkeit I einen Zug, der eine nach unten gerichtete Resultierende hat. Da das für die weitaus größte Anzahl der Teilchen in der Wirkungssphäre innerhalb II gilt, wird im ganzen in der Oberfläche ein nach unten resultierender Zug entstehen $\frac{H_{12}}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right)$, da die Menge der oberhalb OP liegenden und diesen Zug bewirkenden Moleküle der Flüssigkeit I mit der Krümmung der Fläche MN zunimmt. Für den von der Wirkung der Teilchen I auf die Teilchen II resultierenden nach unten gerichteten Druck erhalten wir demnach

$$K_{12} + \frac{H_{12}}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Die Wirkung der Flüssigkeit II auf die Teilchen der Flüssigkeit I wird

$$-\left(K_{21} - \frac{H_{21}}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right)\right).$$

Die innerhalb der Wirkungssphäre unter MN liegenden Teilchen p_1 würden von der Flüssigkeit II, wenn dieselbe bis zur Ebene OP reichte, einen Zug nach oben erhalten, der zu dem Normaldrucke K_{21} führte. Nun enthält aber der zwischen MN und OP liegende Raum keine Flüssigkeit II, deshalb fehlt die Anziehung dieser Flüssigkeit, wir müssen demnach von K_{21} die von dieser Flüssigkeit, wenn sie vorhanden wäre, ausgeübte Anziehung abziehen. Die Begründung für die Form des abzuziehenden Gliedes dieselbe wie in dem vorigen Falle.

Für den in der gemeinsamen Grenze nach unten, also gegen die Flüssigkeit I wirkenden Druck erhalten wir demnach

$$P = K_1 - K_2 + K_{12} - K_{21} - \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} - \frac{H_{12}}{2} - \frac{H_{21}}{2}\right).$$

Für den in der Grenze MN nach oben hin wirkenden Druck erhalten wir selbstverständlich, wenn wir jetzt den gegen das Innere der Flüssigkeit II

wirkenden Druck positiv setzen, alle einzelnen Werte dem eben gefunde gleich, nur haben alle das entgegengesetzte Vorzeichen. Derselbe wird

$$P = K_2 - K_1 + K_{21} - K_{12} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} - \frac{H_{12}}{2} - \frac{H_{21}}{2}\right)$$

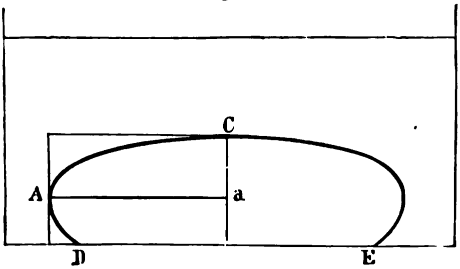
Setzen wir die algebraische Summe der K gleich K' und jene der gleich H'_{12}, so wird

$$P = K' \pm \frac{H'_{12}}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

also ganz die frühere Gleichung mit nur durch die jetzige Betrachtu gegebener Deutung der Konstanten.

Von den in unsern Gleichungen vorkommenden Größen werden wi ohne weiteres nach dem Prinz der Gleichheit von Aktion und Reaktion setzen können.

Fig. 115.



$$K_{21} = K_{12}, \qquad H_{12} = H_{21},$$

so daß wird

$$H'_{12} = H_1 + H_2 - 2 H_{12}.$$

Um zu erkennen, inwie und in welcher Weise wir Konstanten unserer Gleich bestimmen können, wollen einen Tropfen einer Flüssigkeit in einer andern also etwa Quecksilber Wasser betrachten. Sei DCE der Tropfen und setzen wir wie § 78 Tropfen so groß voraus, daß derselbe in C eben und daß wir in durch A gelegten Horizontalschnitt den Krümmungsradius der Tropfenf in A als unendlich ansehen können, so daß die Krümmung in A durch Krümmungsradius ϱ des Vertikalschnittes gegeben wäre, so ist der außen nach innen gerichtete Druck in A

$$P = K' + \frac{H'_{12}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Diesem Drucke hält das Gleichgewicht der in C vorhandene Normaldruck vermehrt um die Differenz der hydrostatischen Drucke des Queck und des Wassers einer Säule von der Höhe $Ca = h$. Nennen wir spezifische Gewicht des Quecksilbers s_1, jenes des Wassers s_2, so erh wir demnach

$$K' + h\,(s_1 - s_2) = K' + \frac{H'_{12}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

$$h\,(s_1 - s_2) = \frac{H'_{12}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \alpha'_{12} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Wir erhalten demnach genau dieselbe Gleichung wie in § 78, tritt an die Stelle des spezifischen Gewichtes s der einen Flüssigkeit Differenz der spezifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten $s_1 - s_2$ an Stelle der Kohäsion α der einen Flüssigkeit die zusammengesetzte stante, die wir vorhin ableiteten.

Nennen wir wie im § 78 T die Höhe des ganzen Tropfens und ϑ_{12} a Randwinkel, so erhalten wir auch jetzt

$$T^2 (s_1 - s_2) = H'_{12} (1 - \cos \vartheta_{12})$$

nd ist t der vertikale Abstand des vertikalen Meridianelementes von der ropfenkuppe, so ist

$$t^2 (s_1 - s_2) = H'_{12} = 2 \alpha'_{12}.$$

Ganz ebenso können wir den Tropfen eines spezifisch leichtern Flüssigit, welcher auf einer spezifisch schwerern Flüssigkeit schwimmt, zu den ssungen benutzen, derselbe nimmt die Form der im § 78 besprochenen ase an, und die dort gegebenen Entwicklungen gelten auch hier.

Quincke[1]) hat in dieser Weise eine große Zahl Konstanten α'_{12} gemen. Unsere Gleichung für H'_{12} können wir auch schreiben, indem wir es Glied durch 2 dividieren,

$$\alpha'_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2 \alpha_{12}$$

d können dann aus der Messung von α'_{12} und den bekannten Kohäsionen einzelnen Flüssigkeiten die Anziehung α_{12} der einen Flüssigkeit auf lere berechnen. In nachfolgender Tabelle sind einige der Messungen Quincke angeführt und aus denselben

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha'_{12}}{2}$$

echnet. Wir geben die α in Milligrammen, wie es auch Quincke an hat.

Substanz	s_1	s_2	α_1	α_2	α'_{12}	α_{12}
ecksilber in unterschwefligsaurem Natron	13,543	1,125	55,03	7,90	45,11	8,91
„ in Wasser	„	1	55,03	8,25	42,58	10,35
„ in Alkohol	„	0.7906	55,03	2,60	40,71	8,46
„ in Chloroform	„	1,4878	55,03	3,12	40,71	8,72
„ in Schwefelkohlenstoff	„	1,2687	55,03	3,27	37,97	10,15
„ in Olivenöl	„	0.9136	55,03	3,760	34,19	12,30
„ in Steinöl	„	0,7977	55,03	3,233	28,94	14,66
„ in Terpentinöl	„	0,8867	55,03	3,030	25,54	16,26
hwefelkohlenstoff in Wasser	1,2687	1	3,27	8,25	4,26	3,63
einöl „ „	0,7977	1	3,23	8,25	3,83	3,82
aloroform „ „	1,4878	1	3,12	8,25	3,01	4,18
livenöl „ „	0,9136	1	3,76	8,25	2,10	4,96
erpentinöl „ „	0,8867	1	3,03	8,25	1,18	5,05
ivenöl in wässerigem Alkohol	0,9136	0,9231	3,76	2,91	0,69	2,99
„ „ Alkohol	0,9136	0,7906	3,76	2,599	0,23	3,06

Da alle Werte α, wie wir sie eingeführt haben, positiv sind, so folgt, Volkmann hervorhebt, daß α'_{12} kleiner oder höchstens gleich $\alpha_1 + \alpha_2$

1 *Quincke*, Poggend. Ann. 139. p. 1. 1870.

sein kann, letzteres wenn α_{12} gleich Null wäre, daß aber ebendeshalb $2\,\alpha_{12} < \alpha_1 + \alpha_2$ sein muß. Die Beobachtungen bestätigen das, α'_{12} ist stets kleiner als $\alpha_1 + \alpha_2$ und ebenso ist $2\,\alpha_{12} < \alpha_1 + \alpha_2$. Da ferner α_{12} stets größer ist als der kleinere der beiden Werte α, so ist α'_{12} stets kleiner als die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$. Die Erfahrung, daß α_{12} stets größer ist als der kleinere der beiden Werte α_1 oder α_2, zeigt, daß die Bedingung der Nichtmischbarkeit die ist, daß die Kohäsion einer der beiden Flüssigkeiten größer ist als die Anziehung der beiden aufeinander.

In noch anderer Weise hat Quincke die Konstante α'_{12} gemessen, indem er zwei Flüssigkeiten übereinander schichtete und in dieselbe eine Kapillarröhre brachte, so daß dieselbe, wenn sie in die untere Flüssigkeit tauchte, gleichzeitig von der obern bedeckt war. Es bedarf nach dem vorherigen wohl keines besondern Nachweises, daß, wenn h die Höhe ist, bis zu welcher die untere Flüssigkeit I in dem kapillaren Rohre, dessen Radius gleich r ist, aufsteigt, und s_1 und s_2 die spezifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten sind, die Gleichung besteht

$$rh\,(s_1 - s_2) = 2\,\alpha'_{12} \cos \vartheta_{12},$$

wenn ϑ_{12} der Randwinkel ist, unter welchem die gemeinsame Oberfläche die Röhrenwand schneidet.

Zur Durchführung der Versuche mit Wasser und Terpentinöl z. B. füllte Quincke in ein Becherglas Wasser als Flüssigkeit I bis zu einer gewissen Höhe. Darauf wurde eine ziemlich hohe Schicht Terpentinöl gebracht, indem man dasselbe vorsichtig an den Wänden des Glases herabrinnen ließ, so daß die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten ganz scharf war. In ein reines kapillares Rohr ließ man dann Wasser einsteigen und schmolz es oben nahe der Wasseroberfläche zu. Unterhalb der Wasseroberfläche versah man das Rohr mit einem Feilstrich und tauchte jetzt das passend befestigte Rohr in die Flüssigkeiten, so daß das untere Ende in das Wasser tauchte und der Feilstrich sich unter Terpentinöl befand. Darauf wurde die kapillare Röhre am Feilstrich abgebrochen. Das Wasser in derselben sank und wurde in dem obern Teile der Röhre durch Terpentinöl ersetzt. Die kapillare Oberfläche in der Röhre war demnach die gemeinsame Oberfläche Wasser — Terpentinöl. Der kapillare Meniskus sank in der mit Wasser benetzten Röhre hinab. Quincke fand

$$rh\,\frac{s_1 - s_2}{2} = \alpha'_{12} \cos \vartheta_{12} = 1{,}26,$$

während die Messung an auf Wasser liegenden Terpentinöltropfen $\alpha'_{12} = 1{,}1$[illegible] ergeben hatte. Der Randwinkel ϑ_{12} war also Null. Bei den Versuchen mit auf Wasser unter einer Spiegelglasplatte liegenden Terpentinöltropfen hatte sich $\vartheta_{12} = 47^0$ ergeben; fast den gleichen Wert fand Quincke, wenn er den Versuch mit der kapillaren Röhre insofern umkehrte, daß er in das Kapillarrohr vorher Terpentinöl einsteigen ließ und es dann in das mit Wasser und Terpentin gefüllte Becherglas brachte. Der kapillare Meniskus stieg dann nach Abbrechen des obern Endes des kapillaren Rohres in das mit Terpentin benetzte Rohr empor. Es ergab sich

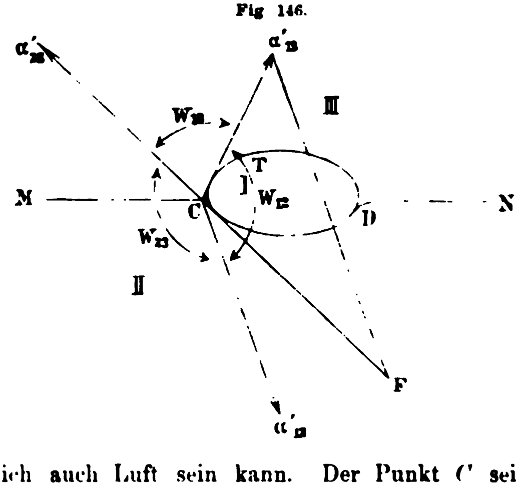
$$\alpha'_{12} \cos \vartheta_{12} = 0{,}809 = 1{,}18 \cos 50^0.$$

Randwinkel und damit die Steighöhe in einem kapillaren Rohre nders, wenn die Wand mit Wasser, als wenn sie mit Terpentinöl t.

§ 82.

breitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern und Flüssig- Wenn man einen Tropfen einer Flüssigkeit auf eine horizontale tte oder auf die Oberfläche einer spezifisch schwereren Flüssig-ft, so ist das Verhalten des Tropfens je nach den Kapillaritäts-n ein sehr verschiedenes. Entweder legt sich der Tropfen in er Linse auf die Unterlage, wie Quecksilber auf Glas, oder fette Terpentinöl auf Wasser, welches längere Zeit an der Luft ge-at, oder es breitet sich der Tropfen über der Oberfläche immer id weiter zu einer immer dünner werdenden Flüssigkeitsschicht Bedingung, unter welcher das erstere oder letztere eintritt, läßt allgemeinen leicht erkennen; damit ein Tropfen als solcher auf erlage sich halten kann, muß der Randwinkel, unter welchem die erfläche die Unterlage schneidet, größer als Null sein. Ist der leich Null oder geben gar die Verhältnisse der Kapillaritätskon-inen unmöglichen Winkel, so muß die Flüssigkeit sich über die ausbreiten.[1]) Die Abhängigkeit des Randwinkels ϑ von den ins tenden kapillaren it nach der Angabe u Bois Reymond cke von F. Neu-i folgender Weise t. Wir wollen allgemeinsten Fall n Stelle Fig. 146 Tropfen vor, von wir annehmen, er aus einer Flüssig-welche auf einer it II, dieselbe kann fester Körper sein, l die Flüssigkeit II , wie der Tropfen I Flüssigkeit III be-iche selbstverständlich auch Luft sein kann. Der Punkt C sei chnitt des Meridianschnittes des Tropfens an der Stelle, wo die erfläche die Flüssigkeit II trifft, so daß also dort alle drei iten zusammenstoßen. An dem zur Ebene der Zeichnung senk-Elemente der Schnittlinie der Oberfläche des Tropfens und der it II wirken dann parallel der Tangente an der Oberfläche die Ober-nnungen, welche wir wie im vorigen Paragraphen mit α'_{12} α'_{13} α'_{23} n.

Fig. 146.



[1]) ... und Du Bois Reymond, Poggend. Ann. **104**. p. 193. 1858; **139**. p. 262. ...ncke, Poggend. Ann. **139**. p. 58. 1870.

Da der Tropfen notwendig in die Flüssigkeit etwas einsinkt, so die in C an die Oberfläche II III gelegte Tangente und damit die tung, nach welcher der Zug α'_{23} ausgeübt wird, die Richtung $C\alpha'_{23}$ l Ebenso sei $C\alpha'_{13}$ die Richtung der Tangente an dem letzten Element Oberfläche des Tropfens in der Flüssigkeit III, nach welcher der Zu wirkt, und die Richtung der Tangente des an C stoßenden Oberfl elements in der Flüssigkeit II, somit auch die Richtung, nach welche Kraft α'_{12} wirkt, sei $C\alpha'_{12}$. Soll zwischen den drei Kräften Gleichge vorhanden sein, so müssen sich die drei Kräfte verhalten wie die drei S eines Dreiecks, dessen Winkel die Nebenwinkel der Winkel sind, w die drei Kraftrichtungen miteinander bilden, wie wir bereits § 75 s Man erkennt, indem wir $\alpha'_{13}F$ parallel $C\alpha'_{12}$ ziehen und $C\alpha'_{23}$ rück bis F verlängern, daß der Seite $\alpha'_{13}F$ des Dreiecks der Nebenwinkel w_{13}, der Seite CF der Nebenwinkel von w_{12} und der Seite $C\alpha'_{13}$ der N winkel von w_{23} gegenüberliegt.

Die Gleichgewichtsbedingung ist somit

$$\frac{\alpha'_{13}}{\sin w_{23}} = \frac{\alpha'_{12}}{\sin w_{13}} = \frac{\alpha'_{23}}{\sin w_{12}},$$

da die Sinus der Winkel gleich dem Sinus der Nebenwinkel sind.

Hieraus folgt zunächst, daß die drei Winkel längs des ganzen fanges der Schnittlinie des Tropfens mit der Flüssigkeit II dieselben müssen, da $\alpha'_{12}\,\alpha'_{13}\,\alpha'_{23}$ überall denselben Wert haben. Der Tropfen daher ein Rotationskörper sein, ein der Oberfläche MN paralleler Sc also auch der durch CD gelegte muß ein Kreis sein. Die Erfahrung stätigt das, ein Quecksilbertropfen auf ganz reiner absolut horizon Ebene, ein Öltropfen auf Wasser, das länger an der Luft gestanden besitzen eine solche Form.

Projizieren wir die Kräfte α'_{13} und α'_{12} auf die Richtung der Kraft so muß die Summe der beiden ersten Projektionen gleich sein der Kraft Nennen wir den Nebenwinkel von w_{13} jetzt ϑ_{13} und setzen den Nebenwi von w_{23} gleich ϑ_{23}, so muß

$$\alpha'_{23} = \alpha'_{13}\cos\vartheta_{13} + \alpha'_{12}\cos\vartheta_{23}$$

oder

$$\cos\vartheta_{13} = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}\cos\vartheta_{23}}{\alpha'_{13}}.$$

Nehmen wir zunächst an Stelle der Flüssigkeit II eine horizon feste Platte, so wird dieselbe vom Tropfen nicht eingedrückt, die l tung α'_{23} fällt also in die Oberfläche der Platte, somit ist der Wink der Randwinkel ϑ, in welchem die Oberfläche des Tropfens die Ober der Platte schneidet. Auch die Richtung von α'_{12} fällt in die Ober der Platte, da der Tropfen auf der ebenen Platte liegt, also die Berühr fläche des Tropfens und der Platte die Oberfläche der Platte ist, somi $\vartheta_{23} = 0$ und wir erhalten für den Randwinkel ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}.$$

Nun ist

$$\alpha'_{23} = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_{23}; \qquad \alpha'_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_{12}; \qquad \alpha'_{13} = \alpha_1 + \alpha_3 - 2\alpha_{13}.$$

Die Flüssigkeit III sei Luft, bezw. der leere Raum, so ist

$$\alpha_3 = 0 \qquad \alpha_{23} = 0 \qquad \alpha_{13} = 0$$

nd

$$\cos\vartheta = \frac{2\alpha_{12} - \alpha_1}{\alpha_1}$$

n Ausdruck, der den von uns früher gefundenen Wert für den Rand-inkel noch näher präzisiert, er ist gleich der Differenz der Anziehung der ten Wand auf die Flüssigkeit und der Oberflächenspannung der Flüssig-it dividiert durch die Oberflächenspannung der Flüssigkeit.

So lange

$$2\alpha_{12} - \alpha_1 > \alpha_1,$$

istiert kein Winkel ϑ, welcher der Gleichgewichtsbedingung Genüge leistet. ie Flüssigkeit kann also auf der festen Unterlage nicht im Gleichgewicht in, sie breitet sich aus.

Ebenso ist keine bestimmte Gleichgewichtslage vorhanden, wenn

$$2\alpha_{12} - \alpha_1 = \alpha_1 \text{ somit } \vartheta = 0,$$

n sowie ein begrenzter Flüssigkeitstropfen vorhanden wäre, würde > 0 sein.

Genau dieselben Gleichungen müssen auch gelten, wenn sich eine ssigkeit auf einer andern ausbreiten soll. Denn wenn die Flüssigkeit I nen auf der Flüssigkeit II schwimmenden Tropfen bildet, so sinkt die-be nicht in die Flüssigkeit II ein — es wird also die Spannung α'_{23} sowie der Oberfläche parallel — und es wird demnach ebenso der spitze inkel ϑ gegeben durch

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}$$

d ist die Flüssigkeit III Luft

$$\cos\vartheta = \frac{2\alpha_{12} - \alpha_1}{\alpha_1}.$$

Da die Ausbreitung verlangt, daß der Winkel ϑ unmöglich oder Null , so ist die Bedingung der Ausbreitung

$$\alpha'_{23} - \alpha'_{12} \geqq \alpha'_{12} \quad \text{oder wenn III Luft ist } 2\alpha_{12} - \alpha_1 \geqq \alpha_1.$$

Nach den Untersuchungen von Quincke ist, wie wir sahen, selbst für ssigkeiten, welche das Glas benetzen, in Luft der Randwinkel ϑ im emeinen größer als Null, nur für Alkohol fanden wir aus den Mes-ngen an großen Blasen den Randwinkel Null. Es dürften sich daher t benetzende Flüssigkeiten außer Alkohol auf Glas nicht ausbreiten. ist das in der Tat, wie Quincke[1]) gezeigt hat, in der Regel auch t der Fall. Jedoch kommt Quincke zu dem Resultate, daß das seinen nd darin habe, daß die Oberfläche des Glases und überhaupt aller fester

1) Quincke, Wiedem. Ann. 2. p. 169, 176. 1877.

Körper, welche von der Flüssigkeit
Schichten einer fremden Substanz
hindert.

Wie sehr selbst sonst unmerk
die Ausbreitung ändern, zeigten u
auf großen Quecksilbertropfen als
keit II und Wasser als Flüssigke
vorigen Paragraphen

$$2\alpha_{12} = 20{,}70 \qquad \alpha_1 = 8{,}2$$

Der Winkel ϑ ist somit unmö
alle in der Tabelle genannten mit
Flüssigkeiten sich auf Quecksilber
fahrung, daß man auf Queck
kann.

Wendet man indes sorgfäl
Spuren einer fremden Flüssigk
Öles enthält, so breitet sich das
Quecksilber her, indem er dasse
zentrierter Schwefelsäure, dem
waren, digerierte, und dann un
unlöslichen Salzen zu trennen, m
papier mit einer nicht zu enge
bar reine Quecksilber läßt m
Schreibpapier, in den man eine
in Schalen fließen, die heißes
Wasser trennt man das Quecks
Schreibpapiertrichter mit enger
des Wassers einen Trichter aus
warme trockne Porzellanschale

Bringt man von diesem Qu
glas einen großen Tropfen, so b
des Quecksilbers aus.

Berührt man die reine Que
nen Glasfaden von 0,1^{mm} oder kle
eine Spur Olivenöl oder Terpenti
zu einem linsenförmigen Tropfen
zeitig ändert der Wassertropfen
von der Seite, wo die Berührun
fortgetrieben. Je mehr Öl man
wird der Durchmesser des Tropfe

Die Erscheinung ist Folge d
silber, die feine Ölschicht ist an
Oberfläche geworden, und der We
tropfen an dieser Seite einen en
daher an dieser Seite des Tropfen
der Seite, wo das Quecksilber no

1) *Quincke,* Poggend. Ann. **139.** p.

weichen. Ist die ganze Fläche des Quecksilbers mit Öl überzogen, so nimmt der Tropfen eine linsenförmige Gestalt an.

Ähnliches zeigt sich auch bei andern Flüssigkeiten. Für Öl als Flüssigkeit I und Wasser als II ist $2\alpha_{12} = 9{,}92$, $\alpha_1 = 3{,}76$. Es muß sich das Öl also ausbreiten; auf ganz reinem Wasser breitet sich in der Tat das Öl aus. Hat das Wasser indes lange Zeit offen an der Luft gestanden, so kann ein Öltropfen auf dem Wasser ruhig liegen bleiben.

Die Beobachtungen über die Ausbreitung von Flüssigkeiten auf andern von Paul Du Bois Reymond[1], Lüdtge[2], Marangoni[3]) und besonders von Quincke[4]) haben, wie Quincke gezeigt hat, die Folgerungen der Theorie im allgemeinen bestätigt.

Ein sehr sicheres Mittel, um die Ausbreitung von Flüssigkeiten auf der Oberfläche einer andern zu erkennen, ist die Herstellung einer Luftblase in einer Flüssigkeit II unter einer Spiegelglasplatte. Bringt man an dieser Blase auf die Oberfläche der Flüssigkeit II eine Spur einer Flüssigkeit I, so erkennt man die Ausbreitung der Flüssigkeit I sofort an der Gestaltsänderung der Blase, da für die Gestalt der Blase jetzt die Oberflächenspannung α'_{12} maßgebend ist. Auf diese Weise konnte Quincke erkennen, daß alle in der Tabelle des vorigen Paragraphen mit Wasser untersuchten Flüssigkeiten sich auf Wasser ausbreiten.

Am leichtesten lassen sich die Verhältnisse für mischbare Flüssigkeiten übersehen. Für diese ist

$$\alpha'_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_{12}$$

gleich Null also $2\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$; damit wird, wenn wir als Flüssigkeit III Luft voraussetzen

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Der Winkel ϑ wird unmöglich, wenn $\alpha_2 > \alpha_1$, somit muß bei mischbaren Flüssigkeiten stets die mit kleinerer Oberflächenspannung sich auf der mit größerer Oberflächenspannung ausbreiten. Im allgemeinen gilt dieser Satz auch für nicht mischbare Flüssigkeiten.

Schichtet man auf eine Flüssigkeit II eine Flüssigkeit III, so kann sich auf der Grenze eine Flüssigkeit ausbreiten. Die Bedingung der Ausbreitung gibt unsere Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}; \quad \alpha'_{23} - \alpha'_{12} > \alpha'_{13}.$$

Man erkennt ohne weiteres, daß eine Flüssigkeit sich an der Grenze zweier anderer ausbreitet, wenn sie sich auf jeder der beiden ausbreitet. Terpentinöl breitet sich auf Wasser und auf Olivenöl aus, schichtet man Olivenöl auf Wasser und bringt in die Grenzfläche Terpentinöl, so breitet sich dasselbe aus.

1) *P. Du Bois Reymond*, Poggend. Ann. **104**. p. 193. 1858; **139**. p. 262. 1870.
2) *Lüdtge*, Poggend. Ann. **137**. p. 362. 1869.
3) *Marangoni*, Poggend. Ann. **143**. p. 337. 1871.
4) *Quincke*, Poggend. Ann. **139**. p. 28, 58. 1870. Wiedem. Ann. **2**. p. 145.

Ebenso breitet sich eine Flüssigkeit notwendig an der gemeinsa Grenze zweier anderer aus, wenn sie sich mit beiden mischt.

Quincke hat die Ausbreitung von Flüssigkeiten an der gemeinsa Grenze zweier anderer zum Gegenstande eines ausführlichen Studiums macht. Von besonderem Interesse sind in der Beziehung periodische wegungen, welche entstehen, wenn man an die Grenze zweier Flüssigke etwa auf die Oberfläche eines in einer andern Flüssigkeit schwebe Tropfens periodisch kleine sich auf der gemeinsamen Oberfläche aus tende Flüssigkeiten bringt. Läßt man z. B. auf die Oberfläche eines tropfens, welcher in einem Gemische von Alkohol und Wasser schwi durch ein enges Glasröhrchen kleine Tröpfchen einer Lösung von kol saurem Natron fallen, so bildet sich eine lösliche Seife, welche auf Oberfläche des Tropfens sich ausbreitet. Es zeigen sich dabei rasch übergehende Zuckungen des Tropfens, Bewegungen, welche an manch der organischen Natur vorkommende Bewegungen erinnern und zu Erklärung führen.[1]) Der Raum gestattet uns leider nicht näher auf Untersuchungen einzugehen.

§ 83.

Bewegungen infolge von Kapillarwirkung. Durch die bisher trachteten Gesetze der Oberflächenspannung erklären sich eine Anzahl fallender Erscheinungen, von denen wir einige Bewegungserscheinu ableiten wollen.

Wenn man zwischen zwei unter einem spitzen Winkel zusam stoßende Platten oder in ein konisches Glasröhrchen einen Flüssigk tropfen bringt, der die Röhrenwände benetzt, so sieht man, daß der Tro sich gegen den Scheitel des Winkels hinbewegt; ein die Röhrenwände n benetzender Tropfen dagegen bewegt sich von dem Scheitel des Wi

Fig. 147.

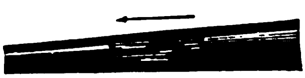
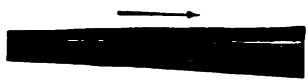


Fig. 148.

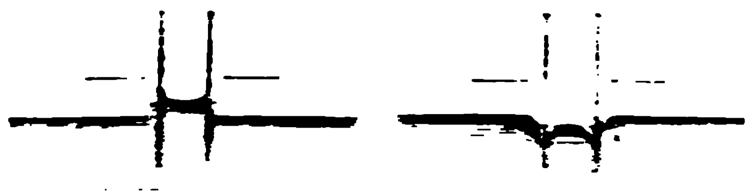


oder der Spitze der Röhre fort. Diese Bewegung erklärt sich unmitt aus den vorhin erkannten Gesetzen der Oberflächenspannung. Die grenzungsflächen der Flüssigkeit sind in dem ersten Falle konkav; an engern Seite der Röhre (Fig. 147), oder gegen den Scheitel des Wi hin ist wegen des kleinern Abstandes der Wände die Krümmung der O fläche stärker als an der entgegengesetzten Seite. Deshalb ist der D gegen das Innere der Flüssigkeit an der weiten Stelle der Röhre gr und diesem Drucke folgend, muß sich der Tropfen gegen das engere E der Röhre hin bewegen.

Umgekehrt ist es im zweiten Falle (Fig. 148); die Oberfläche ist konvex, die Krümmung an der engen Seite, und damit der gegen das In

1) *Quincke,* Wiedem. Ann. 35. p. 580. 1888. Man sehe auch *O. L* Wiedem. Ann. 56. p. 771. 1895; *J. Stark,* Wiedem. Ann. 65. p. 287. 18

[illegible]



[illegible] Nun ist [illegible] demnach [illegible] Konstante bezeichnen, welche kleiner als 1 ist. Die Platte wird somit durch einen Druck P [illegible] und durch einen Druck $P(1-c)$ nach außen getrieben, also durch den Überschuß

$$P - P(1-c) = Pc$$

[illegible] getrieben. Gleiches gilt von der zweiten, der ersten genäherten Platte, so daß also die Platten mit einer Kraft $2Pc$ gegeneinander [illegible] werden.

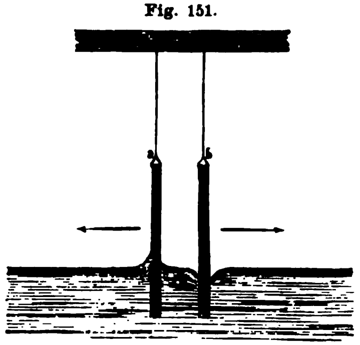
[1]) *La Place*, Théorie etc. Gilberts Ann. 33. p. 293. 1809.

Dasselbe ist in der Anordnung Fig. 150 der Fall. Durch eine ga ähnliche Entwicklung erhält man, daß die über a liegenden Punkte dur die außerhalb höher stehende Flüssigkeit einen nach innen gerichtet Druck erfahren. Unterhalb a sind die Drucke nach innen und außen glei da die Flüssigkeiten innerhalb und außerhalb der Platten im Gleichgewic sind; bei b aber wirkt nach außen der Druck der Luft, nach innen d Seitendruck der Flüssigkeit, welcher gleich ist dem Drucke der Luft, v mehrt um das Gewicht der über b vorhandenen Flüssigkeitsschicht, d letztere Teil des Seitendruckes muß demnach die Platten gegeneinand drücken.

Wäre der nach innen und außen gleich wirkende Druck P der Lu auch nicht vorhanden, so bleibt doch in beiden Fällen der nach in gerichtete Druck übrig, nur daß wir ihn im ersten Falle nicht als d Überschuß des äußern über den innern Druck auffassen müßten, sond als die Anziehung zwischen Wand und Flüssigkeit, welche eben den v innen nach außen wirkenden Druck in unserer vorigen Betrachtungswei vermindert.

Wenn die eine der Platten von der Flüssigkeit benetzt wird, die and nicht, so steigt die Flüssigkeit an der einen auf, an der andern nicht, w in Fig. 151; man beobachtet dann ei Abstoßung. Diese läßt sich aus denselb Prinzipien ableiten. An der benetzt Platte a muß dann die Flüssigkeit auß halb höher ansteigen als im Zwisch raume der beiden Platten, weil die Flü sigkeit außen so hoch steigen muß, d die durch die konkave Krümmung ve minderte Oberflächenspannung durch d gehobene Flüssigkeit äquilibriert wird. I Innern dagegen zwischen a und b ist d Oberfläche der Flüssigkeit doppelt [illegible] krümmt, indem die Flüssigkeit an a [illegible] konkav, an b aber konvex anlegt. [illegible] Oberflächenspannung wird daher in der einen Hälfte der Flüssigkeit [illegible] vermindert, in der andern gegen b liegenden dagegen verstärkt, und [illegible] halb ist die Verminderung an a nicht so groß wie außerhalb; die Flü[illegible] keit kann also im Innern an a nicht so hoch steigen. Aus eben [illegible] Grunde muß sie an b außen eine stärkere Depression erhalten als zwi[illegible] den Platten.

Fig. 151.



Aus dieser Gruppierung ergibt sich dann nach der Entwicklung [illegible] beiden vorigen Fälle, daß sowohl a als auch b einen Antrieb von [illegible] nach außen erfährt, die Platten müssen sich also voneinander ent[illegible]

Eine genauere Untersuchung der gekrümmten, zwischen den Pl[illegible] vorhandenen Oberfläche der Flüssigkeit hat La Place zu dem Res[illegible] geführt, daß bei sehr großer Annäherung der Platten die Abstoßung i[illegible] Anziehung übergeht, ein Resultat, das Versuche von Hauy[1]) besti[illegible]

1) *Hauy,* a. a. O. Gilberts Annalen. 33. p. 308. 1809.

§ 84.

Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte. Die Größe der ntfernung, bis auf welche hin die Moleküle aufeinander einwirken, galt über für unmeßbar klein. Je kleinere Größen die fortschreitenden Meßethoden zu messen gestatteten, um so näher lag die Frage, ob es denn icht doch möglich sei, die Grenze der Wirkungssphäre der Molekularkräfte den uns gewohnten Maßen anzugeben.

Der erste, welcher eine solche Messung wirklich durchzuführen versuchte, war Plateau[1]). Er benutzte dazu den am Schlusse des § 74 beschriebenen Versuch, durch welchen er den Oberflächendruck einer Lamelle n Seifenflüssigkeit direkt maß. Aus einem kleinen Trichter, dessen passend rlängertes Ausflußrohr U-förmig gebogen und mit Wasser gefüllt war, urde durch ein seitlich angesetztes verschließbares Rohr eine Seifenblase blasen und das Ansatzrohr geschlossen. Der Oberflächendruck bezw. der berschuß des auf der konvexen Seite der Kugel vorhandenen Oberflächenuckes gegenüber dem auf der konkaven Seite vorhandenen wurde durch s Wassermanometer gemessen; wie wir § 74 sahen, ist, wenn p die iveaudifferenz am Wassermanometer, R der Radius der Seifenblase ist,

$$pR = 2H,$$

nn H wie immer die doppelte Oberflächenspannung hier in der Seifenmelle bedeutet.

Nun machte Plateau darauf aufmerksam, daß diese Relation nur so nge ihre Gültigkeit habe, als die Dicke der Blasenlamelle mindestens eich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre der Moleküle ist, indem e für den Oberflächendruck abgeleiteten Gleichungen

$$P = K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

r eine flüssige Masse gelten, bei der also sämtliche innerhalb des Radius r Wirkungssphäre liegenden Teilchen ihre Wirkung ausüben.

Bei einer sich mehrere Tage haltenden Blase, welche durch allmähhes Herabrinnen der Flüssigkeit zur Ansatzstelle der Blase und durch rdunsten nach und nach dünner wurde, ließ sich eine Verminderung s Oberflächendruckes bis zu dem Augenblicke, in welchem die Blase zerrang, nicht erkennen, so daß die Dicke der Blase bis zu diesem Augenicke nicht kleiner war als der doppelte Radius der Wirkungssphäre der oleküle. Die Dicke der Blase ergab sich nach einer optischen, in der hre vom Licht zu besprechenden Methode aus der Farbe der Blase[2]) 0,000113,5$^{\text{mm}}$. Daraus würde folgen, daß der Radius der Wirkungshäre keinenfalls größer ist als 0,000057$^{\text{mm}}$. Würde man annehmen, ß die Blase nicht länger bestehen kann, als bis ihre Dicke dem doppel- Radius der Wirkungssphäre gleich ist, so würde diese Größe etwa dem dius der Wirkungssphäre gleich sein.

1 Plateau, Mém. de l'Acad. de Bruxelles. 33. Poggend. Annalen. 114. 597. 1861.

2 Man sehe in der Lehre vom Licht: „Farbe dünner Blättchen“.

Reinold und Rücker[1]) sowie Drude[2]) haben indes gezeigt, daß Lamellen von Seifenlösung noch ganz erheblich dünner werden und sich lange Zeit stabil halten können. Wenn man in der Weise, wie Sondhaus es ausführte, zwischen zwei konzentrischen Platinringen von etwa 33mm Durchmesser aus Plateauscher Seifenflüssigkeit in geschlossenen Glaskästen, welche Seifenflüssigkeit enthalten, 30—40mm hohe zylindrische Lamellen bildet, und diese sich selbst überläßt, so werden die Wände des Zylinders oben dünner und es erscheint ein allmählich sich nach unten ausbreitender schwarzer Ring, d. h. ein Ring, der nicht mehr die Farben dünner Blättchen, sondern das sogenannte Schwarz erster Ordnung der Newtonschen Farbenskala zeigt. An der Grenze des schwarzen Ringes werden die Lamellen plötzlich dicker.

Drude erhielt derartig dünne Lamellen, indem er aus Seifenflüssigkeit auf hohlen vertikal stehenden Glaszylindern horizontale Lamellen bildete; er erhielt so unter geeigneten Versuchsbedingungen, welche das sind, gibt er nicht an, kreisrunde schwarze Flecke von 5cm Durchmesser. Indem Reinold und Rücker die Oberflächenspannungen verschiedener Lamellen mit und ohne schwarzen Ring verglichen, kamen sie zu dem Resultate, daß die Oberflächenspannung bis zu der Dicke des schwarzen Ringes nicht kleiner wurde. Drude kam zu demselben Resultate, indem er durch einen kleinen Überdruck in dem Gefäße, auf dessen obern Rande die Lamelle gebildet war, der Lamelle die Gestalt eines flachen Kugelsegmentes gab und die Krümmungsradien der Lamelle an den verschiedenen Stellen maß. Er bestimmte zu dem Zwecke die Größe des Bildes, welches die konvexe spiegelnde Fläche der Lamelle von einem in bestimmter Entfernung von derselben aufgestellten Gegenstande entwarf. Durch Aufstellen einer Blende konnte er bewirken, daß er das von einem Flächenstücke der Lamelle, welches einem Kreis von 2,5mm Durchmesser entsprach, gespiegelte Bild beobachtete. Wie die Gesetze der Reflexion an kugelförmigen Spiegeln zeigen, wird das Bild kleiner, wenn der Krümmungsradius der Fläche kleiner wird. Es ließ sich keine Änderung des Krümmungsradius erkennen, wenn man von dickern zu dünnern Stellen der Lamelle überging.

Da an Stellen kleinerer Oberflächenspannung der Krümmungsradius hätte kleiner sein müssen, so folgt, daß in der ganzen Oberfläche der Lamellen an dickern und dünnern Stellen die Oberflächenspannung die gleiche war.

Reinold und Rücker finden durch zwei verschiedene Methoden, einer elektrischen und einer optischen, die Dicke des schwarzen Ringes zu 12 Millionteilen, Drude nach einer optischen Methode zu 17 Millionteilen eines Millimeters.

Drude nimmt an, die Dicke der Lamelle in der schwarzen Schicht sei gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre, während Reinold und Rücker der Ansicht sind, daß die Dicke der Schicht erheblich kleiner sei, als der Radius der Wirkungssphäre.

Nach Drude ist nämlich die Lamelle ihrer ganzen Oberfläche nach

1) *Reinold* und *Rücker* geben in Wiedem. Ann. **44**. p. 778. 1891 eine kurze Zusammenstellung ihrer Versuche mit Angabe der einzelnen Abhandlungen.
2) *Drude*, Wiedem. Ann. **43**. p. 158. 1891.

: zähen Oberflächenschicht bedeckt, dort wo dieselbe dicker ist, die obere und untere Schicht noch Flüssigkeit ein, welche nicht berflächenschicht gehört. Das Dünnerwerden der Lamelle tritt icht etwa dadurch ein, daß an den Außenwänden die Flüssigkeit , sondern daß die Flüssigkeit zwischen diesen Schichten hinab- die oberflächlichen Schichten zur Berührung kommen. Darin ler Grund gegeben für das plötzliche Dickerwerden der Lamelle, ritt dort ein, wo die oberflächlichen Schichten noch nicht zur ; gekommen sind.

Auffassung Reinolds und Rückers würde zu der Folgerung ß die schwarze Schicht aus einer Flüssigkeit mit größerer Ober- annung bestehe als der übrige Teil der Lamelle. Würde die La- h Herabrinnen der Flüssigkeit an einer Stelle eine Dicke erhalten, ringer ist als der Radius der Wirkungssphäre, so würde an dieser Oberflächenspannung, wie W. Thomson (jetzt Lord Kelvin) wiesen hat[1]), kleiner werden; die notwendige Folge wäre ein weiteres Dünnerwerden an der Stelle und baldiges Zerreißen, t die Oberflächenspannung durch eine Änderung der Flüssigkeit erfläche zunähme und der Spannung an den dickern Stellen da- der gleich würde. Eine solche Verstärkung der Oberflächen- könnte etwa dadurch eintreten, daß an den dünnern Stellen die des Dampfes kleiner würde, daß somit aus der feuchten Um- h Wasserdampf an den dünnern Stellen niederschlüge und dadurch che dort wasserreicher mache als an den dickern Stellen. Größerer alt würde die Oberflächenspannung vergrößern, es müßte deshalb llung des Gleichgewichtes die Lamelle soweit unter die Dicke lten Radius der Wirkungssphäre verdünnt werden, daß durch die ng die Oberflächenspannung der wasserreichern Oberfläche der- r dickeren aber wasserärmern Lamelle gleich würde.

ist nach einer Entwicklung von Warburg[2]) dieser Zustand . Es ergibt sich nämlich, wie Warburg zeigt, aus einem Satze omson, den wir in der Wärmelehre kennen lernen werden, daß Lamelle, welche dünner ist als der doppelte Radius der Wirkungs- ehr Wasser verdampfen muß, als von der dickern Lamelle, es Oberfläche also nicht wasserreicher werden, somit kann sich er Gleichgewichtszustand mehr entwickeln, die Lamelle muß ab-

ı nicht aus einer andern Ursache als Zunahme des Wassergehaltes ünnern Stellen der Lamelle eine Zunahme der Oberflächenspan- itt, so müssen wir aus den Beobachtungen von Reinold und owie Drude schließen, daß der Radius der Wirkungssphäre in mellen nicht größer ist als 6, oder nach Drude 8,5 Million- Millimeters.

ıcke hat den Radius der Wirkungssphäre in anderer Weise direkt gesucht[3]). Bringt man auf eine Glasplatte sehr dünne keil-

[1]) *Thomson*, Nature. 3. 1870.
[2]) *arburg*, Wiedem. Ann. 28. p. 399. 1886
[3]) *uncke*, Poggend. Ann. 137. p. 402. 1869. Ann. d. Physik. 2. 414. 1900.

förmige Schichten einer andern Substanz, so wird der Randwinkel einer Flüssigkeit an den verschiedenen Stellen verschieden sein, wenn die Dicke der keilförmigen Schicht nicht so groß ist als der Radius der Wirkungssphäre, er wird konstant erst an der Stelle der keilförmigen Schicht, von der ab ihre Dicke gleich ist dem Radius der Wirkungssphäre. Denn der Randwinkel hängt, wie wir sahen, ab von dem Verhältnis der Adhäsion des flüssigen an den festen Körper und der Kohäsion der Flüssigkeit. Ist demnach die Adhäsion der Flüssigkeit an das Glas eine andere als an die auf das Glas gebrachte Schicht, was immer dann der Fall sein wird, wenn die Flüssigkeit die beiden Substanzen nicht vollkommen benetzt, so muß, so lange die Schicht eine so kleine Dicke hat, daß das Glas durch sie noch hindurchwirkt, der Randwinkel ein anderer sein als dort, wo der Abstand der Flüssigkeit vom Glase gleich oder größer ist als der Radius der Wirkungssphäre.

Derartige keilförmige Schichten lassen sich auf Glas sehr gut durch Silber erzeugen[1]), indem man auf eine Glasplatte eine an verschiedenen Stellen verschieden dicke Schicht einer Versilberungsflüssigkeit bringt. Quincke brachte zwischen eine ebene Glasplatte und darauf gelegte Zylinderfläche von Spiegelglas, welche einen Radius von 120^{mm} besaß, Martinsche Versilberungsflüssigkeit, aus welcher eine doppelt keilförmige Silberschicht sich absetzte, welche in der Mitte, dort wo die Zylinderfläche die Glasplatte berührte, am dünnsten war. Zwei solcher Platten wurden vorsichtig abgespült, dann durch dünne Glasplättchen getrennt mit den versilberten Flächen einander gegenüber gestellt, so daß etwa gleich dicke Schichten Silber einander gegenüber lagen. Eine schwache Metallfeder drückte die beiden Platten gegeneinander. Dieselben wurden in einen Trog mit destilliertem Wasser so aufgestellt, daß die Schneiden der Silberkeile vertikal standen. Das Wasser hob sich in dem kapillaren Raum zwischen den parallelen Silberlamellen bis zu einer Höhe h, welche an der dünnsten Stelle des Silbers am höchsten war und sich verminderte, je dicker das Silber wurde. Da der Abstand d der Platten überall der gleiche war, so folgt aus der Gleichung für die Steighöhe zwischen den Platten

$$h = \frac{H}{s} \cos \vartheta \frac{1}{d} = a^2 \cos \vartheta \frac{1}{d}$$

$$\cos \vartheta = \frac{h d}{a^2},$$

daß mit zunehmender Silberdicke der Winkel ϑ immer größer wird.

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quincke; die Dicke der Silberschicht wurde nach einer optischen Methode, wie sie auch von Plateau benutzt wurde, bestimmt. Die Winkel ϑ sind aus obiger Gleichung abgeleitet, in der Quincke a^2, die spezifische Kohäsion des Wassers gleich 15 einsetzte. Die mit x überschriebene Kolumne gibt die Abstände der Stellen, denen die Steighöhe h entspricht von der dünnsten Stelle der Silberschicht, ε ist die Dicke der Silberschicht.

1) Man sehe *Quincke*, Poggend. Ann. **129**. p. 44. 1866.

$d = 0^{mm},633$

x	e	h	ϑ
mm	mm	mm	
0	0,000 0040	13,74	54° 33′
1	0,000 0052	13,58	55° 2′
2	0,000 0080	13,33	55° 44′
3	0,000,0130	13,10	56° 26′
4	0,000 0142	12,82	57° 15′
5	0,000 0200	11,92	59° 48′
6,5	0,000 0284	9,73	65° 38′

Man sieht, wie h mit wachsender Silberschicht ganz beträchtlich abımt. Diese Abnahme dauerte selbst an den dicksten Stellen der Silber:hten, die noch durchsichtig waren, fort, Stellen, welche eine Dicke zu $0^{mm},0000542$ besaßen, so daß der Radius der Wirkungssphäre bei ı-Silber-Wasser noch etwas größer anzunehmen ist.

Mit Quecksilber kann man ähnliche Beobachtungen machen, indem man Silberschicht durch Behandeln mit Schwefelwasserstoff in Schwefelsilber führt, und dann direkt durch Spiegelung die Stelle aufsucht, wo der ıkel, unter welchem das Quecksilber die vertikal gestellte Platte schneidet, ıtant wird, oder wo die Depression des Quecksilbers an der vertikalen ıd einen konstanten Wert erhält. Derartige Versuche lieferten Quincke den Radius der Wirkungssphäre den Wert $0^{mm},0000483$. Nach Überung des Silbers in Jodsilber fand Quincke den Winkel bei einer ·htdicke von $0^{mm},0000059$ konstant werden. Als die Glasplatte mit r Kollodiumschicht überzogen war, fand sich die Dicke der Schicht, wo Randwinkel des Quecksilbers konstant wurde, kleiner als $0^{mm},00008$, genauere Bestimmung war in diesem Falle wegen des optischen Verens der Kollodiumschicht nicht möglich.

Aus Quinckes Versuchen würde man also für den Radius der Wirsphäre zu rund 50 Millionteilen eines Millimeters gelangen, also zu m Werte, der 6mal so groß ist als der aus den Versuchen von Drude :erte.

Noch nach einer dritten Methode hat man die Größe der Wirkungsre zu bestimmen gesucht, und zwar durch Messung der Dicke, welche auf einer andern Flüssigkeit sich ausbreitende Flüssigkeitshaut hat, ·m Augenblicke, in dem sie aufhört kontinuierlich zu sein. Die ersten n zielenden Messungen rühren von Sohnke her[1]).

In dem Augenblicke, in dem man ein am Ende eines Drahtes hängendes kleines Öltröpfchen mit einer reinen Wasserfläche in Berührung bringt, ınt das Öl mit großer Geschwindigkeit sich zu einer zusammenhängenkreisscheibenförmigen Haut auszubreiten. Sie hat innerhalb eines ıen Bruchteils einer Sekunde einen Halbmesser von einigen Zentimetern ırt, ist dabei fast farblos, nämlich ganz gleichmäßig bläulichgrau ge:en und zerfällt sofort in eine große Zahl sehr kleiner Tröpfchen oder ıbchen, welche noch eine kurze Zeit ihre zentrifugale Bewegung beiıten. Das Öltröpfchen muß, wie gesagt, sehr klein und die Wasser-

1) Sohnke, Wiedem. Ann. 40. p. 345. 1890.

fläche hinreichend groß sein, wenn die Erscheinung in der geschilderten Weise erfolgen soll.

Aus der an allen Stellen gleichen Farbe der Ölhaut gleich vor dem Zerfall folgt aus der Theorie der Farben dünner Blättchen, daß die Haut überall dieselbe Dicke hat, und das gleiche läßt sich daraus schließen, daß der Zerfall in Tröpfchen gleichzeitig an allen Stellen der Haut erfolgt, nicht in der Nähe des Randes früher als in der Nähe des Zentrums. Sohnke schließt, daß die Dicke der Haut in dem Augenblicke des Zerreißens gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre sei, denn an der Grenze der zunächst nicht zerrissenen Ölscheibe dauern die Bedingungen der Ausbreitung fort, auf den ganzen Umfang des Ölkreises wirkt ein nach außen gerichteter Zug von derselben Stärke. In dem Augenblicke, in welchem die Dicke der Ölschicht gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre geworden ist, nimmt die Oberflächenspannung des Öles ab und um so mehr, je dünner die Ölschicht wird; es muß also plötzlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit wachsen und infolgedessen die Ölschicht zerreißen.

Zur Bestimmung der Dicke der Ölschicht in dem Augenblicke des Zerreißens bestimmte Sohnke durch Wägung die Menge des auf das Wasser gebrachten Öles. Das auf das Wasser zu bringende Öl befand sich an einem dünnen Platindraht; der Platindraht mit dem daran haftenden Öl wurde gewogen; es wurde dann der Platindraht, bezw. das an ihm haftende Öl mit dem Wasser in Berührung gebracht, und die Menge des auf das Wasser übergegangenen Öles durch den Gewichtsverlust des mit dem Öl bedeckten Platindrahtes bestimmt. Da die Öltröpfchen nach dem Zerreißen der Ölhaut noch einige Zeit in der im Augenblicke der Zerreißung eingenommenen Lage oder nahe derselben verharrten, so konnte der Durchmesser des Ölkreises gemessen werden. Ist r der Radius des Ölkreises, so ist $r^2 \pi d \cdot s$, worin d die Dicke der Ölschicht, s das spezifische Gewicht des Öles ist, gleich dem Gewichte p des Öles. Man erhält daraus unmittelbar die Dicke d der Ölschicht aus dem Quotienten

$$d = \frac{p}{r^2 \pi s}.$$

In dieser Weise fand Sohnke für

Olivenöl . . $d = 111{,}5\ \mu\mu$, $\quad \varrho = 55{,}75\ \mu\mu$
Rüböl . . . $d = 93{,}6\ \mu\mu$, $\quad \varrho = 46{,}8\ \mu\mu$,

worin das Zeichen $\mu\mu$ die milliontel Millimeter bedeuten soll, entsprechend der neuerdings angenommenen Bezeichnung μ für tausendstel und $\mu\mu$ für milliontel Millimeter.

Sohnke gelangt somit ebenso wie Quincke aus ganz andern Beobachtungen zu dem gleichen Werte von etwa 50 $\mu\mu$ für den Radius der Wirkungssphäre. Die Schlüsse Sohnkes sind zweifelhaft geworden durch die Beobachtungen von Lord Rayleigh[1]), Röntgen[2]), Oberbeck[3]) und Fischer[4]), nach welchen Ölschichten von erheblich geringerer Dicke eine Wasserfläche kontinuierlich bedecken können.

1) Lord *Rayleigh*, Proceedings of Royal Society. **48.** p. **281, 364. 1891.**
2) *Röntgen,* Wiedem. Ann. **41.** p. 321. 1890.
3) *Oberbeck,* Wiedem. Ann. **49.** p. 366. 1893.
4) *Fischer,* Wiedem. Ann. **68.** p. 414. 1899.

Bringt man kleine Stückchen Kampfer auf eine reine Wasseroberbe, so nehmen diese eine lebhafte Bewegung an. Wenn man die Oberhe des reinen Wassers mit Öl verunreinigt, so werden die Bewegungen Kampfers träger und hören mit Dickerwerden der auf dem Wasser handenen Ölschicht ganz und gar auf. Nach einem dem Sohnkeschen lichen Verfahren findet Rayleigh, daß die Dicke der Ölschicht, welche Bewegung des Kampfers ganz zum Aufhören bringt, $2\,\mu\mu$ beträgt. könnte hiernach das Wasser von einer zusammenhängenden Ölschicht deckt sein, welche nur 0,02 derjenigen Dicke besitzt, welche Sohnke funden hat.

Zu ganz ähnlichem Resultate gelangte Röntgen aufgrund einer dern Beobachtung. Hält man eine offene mit Äthyläther nicht voll gellte Flasche dicht über einem großen Gefäße mit reinem Wasser und igt die Flasche so, wie wenn man Äther aus der Flasche ausgießen llte, so fließen, ehe der flüssige Äther ausfließt, Ätherdämpfe aus, welche f das Wasser niedersinken. Infolge der Einwirkung der Ätherdämpfe d deren teilweiser Absorption durch das Wasser entstehen auf dem 'asser Wellen.

Schöner wird die Erscheinung, wenn man über dem Wasser einen ichter aufstellt, so daß dessen Mündung sich nahe über der Wasserrfläche befindet, und einen recht lockern mit Äther getränkten Watteusch in den Trichter legt. Stellt man das Wassergefäß so auf, daß n die Oberfläche im reflektierten Himmelslicht beobachten kann, so sieht n, wenn die Wasseroberfläche rein ist, unter der Trichtermündung im asser eine kleine Vertiefung, von welcher sich konzentrische Wellen ausreiten. Bringt man dann eine Spur von Fett oder Öl auf die Oberfläche s Wassers, so hören die Wellen auf. Die Vertiefung unter der Trichterdnung ist geblieben, an Stelle der sich ausbreitenden Wellen zeigt sich er ein scharf begrenzter, von der umgebenden Wasserfläche sich unterheidender Kreis, dessen Durchmesser bei gegebener Ölmenge konstant ist. ie Bewegung des Wassers scheint aufgehört zu haben; verfolgt man er die Bewegung von kleinen im Wasser suspendierten Teilchen, welche fällig im Innern des Kreises an die Oberfläche kommen, so sieht man e diese in genau radialer Richtung nach auswärts geschleudert bis an n Rand der kreisförmigen Fläche getrieben werden. Sind sie dort ankommen, so sinken sie mit wirbelnder Bewegung wieder in die Flüssigit ein. Entfernt man den Trichter, so zieht sich der Kreis rasch zummen. Der Durchmesser des Kreises nimmt mit wachsender Ölmenge ab, dlich verschwindet er ganz und es bleibt nur die kleine zentrale Verfung über

Röntgen deutet die Erscheinung in folgender Weise: die aus der ichteröffnung niedersinkenden Dämpfe durchbrechen die oberflächliche ge Schicht, so lange dieselbe eine gewisse Dicke nicht erreicht hat, und rden dann von dem Wasser teilweise gelöst. Die konzentrierte Ätherung breitet sich auf der Oberfläche des Wassers rasch nach allen Seiten und drängt die Fettschicht zurück. Da aber das Öl sich ebenfalls zubreiten und eine zusammenhängende Schicht zu bilden strebt, so wird der Ausbreitung und der dadurch bedingten Verdünnung der Ätherung in einiger Entfernung von dem Mittelpunkte sich Gleichgewicht

zwischen der Ausbreitung der Ätherlösung und des Öls herstellen, der Durchmesser des von Öl freien Kreises wird konstant.

Mit diesem von ihm als Ätherprobe bezeichneten Verfahren suchte Röntgen die Schichtdicke zu bestimmen, welche auf einer Wasserfläche als zusammenhängende Ölschicht sich verbreiten kann. Er nahm quadratische Wannen, welche er mit Wasser füllte, das eine reine Oberfläche hatte. Um solch reine Wasseroberflächen zu erhalten, genügt es, etwa das Wasser einer Wasserleitung mit kräftigem Strahle einige Zeit in die Wanne fließen zu lassen, daß es über den Rand der Wanne abfließt. Röntgen brachte in der einen Ecke der quadratischen Wasseroberfläche ein abgewogenes, an einem Platindraht hängendes Öltröpfchen mit dem Wasser in Berührung, das dann vollständig an das Wasser überging. In der gegenüber liegenden Ecke war der mit dem Wattebausch versehene Trichter aufgestellt. Röntgen schließt, daß wenn dort der Ätherdampf die Ölschicht nicht mehr durchbrechen konnte, daß dann die Wasserfläche mit einer zusammenhängenden Ölschicht bedeckt war. Er benutzte Knochenöl vom spezifischen Gewicht 0,9, und fand in dieser Weise, daß bei einer Wasserfläche von 1800 cm^2 $0{,}3^{mg}$ Öl genügten, so daß an der andern Ecke der Wasseroberfläche die Ölschicht von den Ätherdämpfen nicht mehr durchbrochen wurde. Als Dicke der das Wasser bedeckenden Ölschicht ergibt sich daraus 1,8 $\mu\mu$.

Oberbeck hat die Dicke der auf Wasser sich ausbreitenden Ölschicht mit Hilfe eines gegen die Oberfläche des Wassers unter einem Winkel von etwa 30^0 geneigten Luftstromes untersucht. Auf die Oberfläche des reinen Wassers wurde etwas Schwefelblumen gebracht. Das Pulver wurde durch den Luftstrom fortgetrieben und sammelte sich in schmaler Zone an der dem Luftstrom entgegenstehenden Wand. Wurde etwas Öl auf die Oberfläche des Wassers gebracht, so wurde zunächst die Ölschicht durch den Luftstrom zerrissen und das Schwefelpulver wurde mit der Ölschicht fortgetrieben, die Zone, in welcher es sich an der dem Luftstrom entgegenstehenden Wand ansammelte, wurde breiter. Bei einer gewissen Dicke der Ölschicht wurde diese nicht mehr zerrissen, es wurde das in der Ölschicht schwimmende Pulver durch den Luftstrom in eine rotierende Bewegung gesetzt, so zwar, daß es in der Mitte der kreisförmigen Oberfläche sich in der Richtung des Luftstromes bewegte, an dem Umfange des Gefäßes in der entgegengesetzten. Bei allen von Oberbeck untersuchten fetten Ölen trat dieser Endzustand ein, wenn die Dicke der Ölschicht etwa 2 $\mu\mu$ erreicht hatte. Bei ätherischen Ölen mußte die Dicke der Ölschicht bis dieser Endzustand eintrat, erheblich größer sein.

Fügt man, nachdem bei den fetten Ölen die Schicht die Dicke von 2 $\mu\mu$ erhalten hat, weiteres Öl hinzu, so verändert sich zunächst das Verhalten der Oberfläche nicht. Ist aber die Ölmenge so groß geworden, daß sie bei gleichmäßiger Ausbreitung eine Schichtdecke von etwa 18 $\mu\mu$ bilden würde, so wird die Verteilung des Öles über die Wasserfläche eine unregelmäßige. An einzelnen Stellen sind oder bleiben größere Ölmengen einige Zeit in Tröpfchen angehäuft, während der größere Teil durch eine dünnere Ölschicht bedeckt ist.

Die Beobachtungen von Rayleigh, Röntgen und Oberbeck würden demnach auf etwa 1 $\mu\mu$ als Radius der Wirkungssphäre führen, wenn n

ıntgen schließt, daß es sich hier um eine zusammenhängende Öl- handelt. Das scheint mir, wie auch Oberbeck hervorhebt, nicht ja nach Versuchen von Lord Rayleigh nicht richtig zu sein. Schon ke hat in seiner mehrfach angezogenen Abhandlung über die Aus- g der Flüssigkeiten darauf hingewiesen, daß auch nicht mischbare keiten sich in begrenzter Menge gegenseitig lösen, er bemerkt[1]), i der Untersuchung flacher Tropfen einer Flüssigkeit in einer andern erflächenspannung an der gemeinsamen Oberfläche gleich nach dem ıgen der Tropfen am größten sei, dann aber die Flüssigkeiten sich n, also an der Grenzfläche auch sich ähnlicher werden, wodurch die chenspannung abnehmen muß. Aus den Messungen ging diese Ab- deutlich hervor. Es ist demnach sehr möglich, daß es sich bei ersuchen von Rayleigh, Röntgen und Oberbeck gar nicht um usammenhängende Ölschicht handelt, sondern daß es sich dort um a der Oberfläche befindliche Lösung von Öl in Wasser handelt.

afür sprechen Messungen der Oberflächenspannung von Rayleigh Öl versehenen Wasserflächen. Wenn in der Tat festgehalten wird, ne zusammenhängende Ölschicht eine Dicke verlangt, die mindestens ist dem Radius der Wirkungssphäre, so muß die Oberflächenspannung mit Öl bedeckten Wasserfläche unabhängig sein von der Dicke der ht und zwar muß sie gleich derjenigen des Öls werden.

ayleigh[2]) hat die Oberflächenspannung von reinem und mit Olivenöl tem Wasser nach der dynamischen Methode von W. Thomson ge- ı: er findet noch eine erhebliche Abnahme der Oberflächenspannung, er auf einer Wasseroberfläche, auf welcher sich kein Kampfer mehr e, noch Olivenöl sich ausbreiten ließ. Die Angaben Rayleighs lgende:

rflächenspannung reinen Wassers	α = 7,55	mllgr.
„ Wasser mit soviel Öl, daß Kampfer sich nicht mehr bewegt	5,44	„
„ Wasser mit Öl gesättigt	4,07	„

ür Olivenöl erhielt Quincke 3,77, Brunner 3,31.

Vir werden darnach schließen müssen, daß die Beobachtungen von igh und Röntgen nicht in dem Sinne gedeutet werden dürfen, daß dort mit einer zusammenhängenden Schicht reinen Öls zu tun somit auch, daß wir aus denselben keinen Schluß über den Radius irkungssphäre ziehen dürfen.

Ian könnte nun noch vermuten, daß die von Oberbeck beobachtete der Schicht, 18 $\mu\mu$ etwa, bei welcher die erwähnte Unregelmäßigkeit Ausbreitung des Öles, es zeigen sich kleine Tröpfchen auf einer unnerer Ölschicht bedeckten Fläche, auftritt, als die doppelte Dicke Wirkungssphäre angesehen werden könnte. Dem gegenüber hat er, der die Ausbreitung von Öl und einigen anderen Flüssigkeiten ecksilber untersuchte, gezeigt, daß eine solche Unregelmässigkeit in erteilung des Öles, er bezeichnet sie als Zerfall der Ölschicht, bei

1) Quincke, Poggend. Ann. 139. p. 18. 1870.
2) Lord Rayleigh, Philos. magazin. 30. (5.) p. 386. 1[…]

jeder Dicke derselben kürzere oder längere Zeit nach Bildung der Sch in ganz ähnlicher Weise eintritt, gleichviel ob die Häutchen nur 2 oder bis etwa 200 $\mu\mu$ dick sind.

Man hat deshalb bei der Ausbreitung einer Flüssigkeit auf ei andern kein Kennzeichen, welche Dicke der Schicht dem Radius Wirkungssphäre entspricht.

Wie dem auch sei, diese Versuche beweisen, daß der Radius Wirkungssphäre nicht unmeßbar klein, sondern daß er eine Größe der Ordnung hunderttausendstel Millimeter hat.

§ 85.

Lösung und Diffusion. Im § 81 sahen wir, daß, wenn die Ob flächenspannung an der gemeinsamen Oberfläche zweier Flüssigkeiten N ist, eine Mischung der beiden Flüssigkeiten bezw. eine Lösung der ein in der andern stattfindet.

Erfahrungsgemäß können auch feste Körper in Flüssigkeiten gel werden; die Bedingung dieses Vorganges ist, daß die Anziehung des fl sigen zum festen größer ist als die Kohäsion des festen. Daß in d Falle kein Gleichgewichtszustand eintreten kann, ergibt sich aus den B trachtungen des § 75. Die Anziehung des flüssigen auf das feste i wesentlich durch die dort als F_3 bezeichnete Kraft gegeben, welche w aber jetzt als auf die Teile der festen Wand wirkend gegen die Flüss keit hin gerichtet einführen müssen. Die in der Grenze der festen W liegenden Teile des festen werden gegen die Wand hin gezogen. Bil wir die zur Wandfläche senkrechten Komponenten, so muß das Teilch in der Grenze sich in die Flüssigkeit hinein bewegen, wenn die zur Wa senkrechte Komponente der Anziehung des flüssigen auf das feste grö ist als die Kraft, mit welcher das feste gegen das Innere des fest Körpers hingezogen wird. Das feste löst sich in dem flüssigen. Hat d gelöste ein größeres spezifisches Gewicht als das Lösungsmittel, so si dasselbe zunächst nieder und legt sich als konzentrierte Lösung unter d Lösungsmittel, so daß eine Schichtung eintritt, bei welcher das spezifi leichtere Lösungsmittel sich über der die gelöste Menge des festen trage Lösung befindet. Eine ebensolche Schichtung erhält man, wenn man z nächst in ein Gefäß eine Lösung schüttet, und dann durch langsa Eingießen das Lösungsmittel, etwa indem man dasselbe an den Wä des Gefäßes herabrinnen läßt, auf die spezifisch schwerere Lösung bri

Ganz in derselben Weise kann man überhaupt zwei mischbare Flüs keiten von verschiedenem spezifischen Gewicht übereinander schichten.

Hat man in dieser Weise zwei Flüssigkeiten übereinander geschich so dauert diese Schichtung nur eine mehr oder weniger kurze Zeit; so nach dem Zusammenschichten findet eine allmähliche Mischung der Flüs keiten statt, indem wegen der stärkern Anziehung der einen Flüssig auf die Moleküle der andern eine Mischung zunächst in der Grenz der beiden Flüssigkeiten eintritt, und aus dieser die Moleküle der Flüssigkeit weiter in die andere verbreitet werden. Man bezeichnet Durchdringen der Flüssigkeiten mit dem Namen der Diffusion. Je dem längere oder kürzere Zeit vergeht, ehe die Mischung der Flüssi

diese Weise vollständig wird, schreibt man ihnen eine kleinere oder ßere Diffusionsgeschwindigkeit zu.

Am genauesten ist die Diffusion gelöster Substanzen untersucht worden. r erste, welcher sich näher damit beschäftigte, war Graham[1]); derselbe llte Gefäße, welche mit verschieden konzentrierten Lösungen der zu tersuchenden Salze gefüllt waren, in größere Gefäße mit Wasser und rglich die Salzquantitäten, welche in gleichen Zeiten in das umgebende asser hinüber gegangen waren. Er fand, daß bei nicht zu konzentrierten ösungen diese Mengen der Konzentration der angewandten Lösungen bzw. n Mengen des in gleichen Volumen derselben gelösten Salzes proportional aren, daß bei gleicher Konzentration indes die Mengen verschiedener Salze hr verschieden waren, so daß man den verschiedenen Salzen eine sehr rschiedene Diffusionsgeschwindigkeit zuschreiben muß.

Bald nach den Versuchen Grahams gab Fick[2]) eine einfache Theorie r Diffusion, durch welche man zu einer präzisen Definition des Begriffes r Diffusionsgeschwindigkeit gelangt. Fick nimmt an, daß die Menge s in der Zeiteinheit aus einer Schicht in die nächstfolgende übergehenden lzes der Konzentrationsdifferenz der beiden Schichten proportional ist. nken wir uns nun ein zylindrisches Rohr, welches unten geschlossen ist d auf seinem Boden eine Schicht Salzlösung von der Konzentration c_0 thalte, wo c_0 die im Kubikzentimeter Lösung vorhandene Menge Salz deuten soll. Über diese Schicht sei zunächst reines Wasser gebracht. ch irgend einer Zeit t wird ein Teil des Salzes in das Wasser diffunrt sein und eine Schicht in der Höhe x über dem Boden hat zu der it die Konzentration c. Eine um dx höhere Schicht hat die Konzentration $-dc$; während der unendlich kleinen Zeit dt ist die aus der ersteren in folgende übergehende Salzmenge nach der Annahme von Fick

$$ds = -\varkappa q\,dc \cdot dt,$$

wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben müssen, il der Salzstrom nach der Richtung der abnehmenden Konzentration ttfindet. Es bedeutet in der Gleichung q den Querschnitt des Gefäßes d $\varkappa$ eine nur von der Natur des Salzes abhängige Konstante, welche die nge des durch die Flächeneinheit übertretenden Salzes sein würde, wenn Differenz der Konzentration zweier benachbarter Schichten gleich der nheit wäre. Anstatt der Konstanten $\varkappa$, welche sehr groß sein würde, da r Konzentrationsunterschied zweier benachbarter Schichten immer sehr in ist und zudem, da wir den Unterschied dc niemals wirklich angeben nnen, nicht bestimmbar wäre, führen wir besser eine andere Konstante k , welche wir dann als das Maß der Diffusionsgeschwindigkeit erhalten. s solche bezeichnen wir die Salzmenge, welche in der Zeiteinheit durch e Querschnittseinheit geht, wenn zwei um die Längeneinheit voneinander

1 Graham, Phil. Trans. of London R. Soc. 1850 part. I. p. 1 Liebigs Ann. . 1851; Phil Trans. of London R Soc. 1850 part. II. p. 85. Liebigs Ann 80. 61; Phil. Trans of London R. Soc. for 1861. 151. p. 183. Liebigs Ann. 121. 1862

2 Fick, Poggend. Ann 94 1855. Die Theorie der Diffusion von Nernst f Grundlage der von van t'Hoff entwickelten Theorie der Lösung werden wir nächsten Kapitel nach Vorführung der kinetischen Gastheorie besprechen. n siehe § 125.

entfernte Querschnitte die Konzentrationsdifferenz 1 haben, voraus daß die Konzentrationsabnahme von Querschnitt zu Querschnitt, um dx voneinander entfernt sind, immer denselben Wert hat. Konzentrationsabnahme in zweien um dx entfernten Querschnitten gl so ist sie in zweien um die Längeneinheit entfernten gleich $\frac{dc}{dx}$, Einführung der Konstanten k erhalten wir für die in der Zeit einem Querschnitte zu dem folgenden übergehende Salzmenge

$$ds = -kq\frac{dc}{dx}dt.$$

Dieser aus der Fickschen Annahme sich ergebende Ausdruck im Zeitelement dt übergehende Salzmenge gestattet uns zunächst d eintretende Konzentrationsänderung zu berechnen. In derselben Z der durch den Querschnitt x diese Salzmenge ds in den Raum zwi und dx tritt, wandert eine andere Salzmenge ds' durch den Que $x + dx$ aus diesem Raum weiter. Nennen wir die Konzentrationsd zwischen dem Querschnitt $x + dx$ und $x + 2dx$ in dem betrachtet moment dc', so erhalten wir für ds'

$$ds' = -kq\frac{dc'}{dx}dt,$$

somit

$$ds - ds' = -kq\frac{dc - dc'}{dx}dt.$$

Diese Salzmenge wandert in den zwischen x und dx vorh Raum mehr zu als aus demselben fort. Nach unserer Definition d zentration ist somit die Konzentrationsänderung, die Zunahme d menge in der Volumeinheit

$$\frac{ds - ds'}{qdx},$$

da qdx der Raum ist, in welchem die Salzmenge um $ds - ds'$ z Bezeichnen wir auch diese in der Zeit dt stattfindende Zunahme d zentration mit dc, so wird

$$\frac{dc}{dt} = -k\frac{dc - dc'}{dx^2} = -k\frac{d^2c}{dx^2},$$

wenn wir die Differenz der beiden Konzentrationsänderungen dc in zwei um dx entfernten Schichten als d^2c bezeichnen. Die Entw zeigt uns, daß die Konzentration c zu einer gegebenen Zeit abhä von dem Abstande x des betrachteten Querschnittes von dem unter des Rohres, daß sie also eine Funktion von x ist. Gleichzeitig än sich aber an allen Stellen mit der Zeit, sie ist also eine Funktion d Nach den Entwicklungen der Einleitung erkennen wir dann, daß Ficksche Annahme eine Beziehung liefert zwischen dem ersten Diff quotienten von c als Funktion der Zeit und dem zweiten Diff quotienten als Funktion des Abstandes des betrachteten Querschnit dem untern Ende des Zylinders.

Die allgemeine Behandlung dieser Gleichung, das heißt di welche Funktion die Konzentration c von der Zeit t und von

aliche Schwierigkeiten[1]). In gewissen einfachen Fällen können wir die- se indes auflösen, und damit Versuchsmethoden erhalten, durch welche die Theorie prüfen können.

Wir bringen auf den Boden des Zylinders eine Menge festen Salzes, daß dort, so lange auch der Versuch dauert, immer eine konzentrierte sung des Salzes ist. Dann setzen wir den Zylinder, dessen Länge l sei, ein großes Gefäß mit Wasser, so daß selbst wenn alles Salz in dieses sser hinüberdiffundiert wäre, die Konzentration doch eine so kleine ist, ß wir sie gleich Null setzen dürfen. Die Konzentration ist so an dem tern Ende des Zylinders für $x = 0$ für die ganze Dauer des Versuches stant und gleich c_0 der Konzentration der konzentriertesten Salzlösung, n obern Ende für $x = l$ dagegen gleich Null. Läßt man die Diffusion reichend lange stattfinden, so muß sich schließlich ein stationärer Zu- nd herstellen, sobald nämlich der letzte Querschnitt des Zylinders in ichen Zeiten ebensoviel an die Umgebung abgibt, als er von den darunter genden Querschnitten erhält. Daß dies nach einiger Zeit eintreten muß, gibt die Überlegung, daß mit Zunahme der Konzentration in der letzten hicht die Menge des in gegebener Zeit an die Umgebung abgegebenen lzes zunimmt, dagegen diejenige des von der tiefern Schicht herkommen- n Salzes abnimmt, da in der Tiefe die Konzentration konstant ist. Ist er der letzte Querschnitt von einer konstanten, sich mit der Zeit nicht hr ändernden Konzentration, so müssen es auch alle tiefer liegenden sein, eben der letzte Querschnitt nur dann eine konstante Konzentration haben nn, wenn auch der vorletzte sie hat und so fort. Ist aber die Konzen- ation in jedem Querschnitte eine mit der Zeit sich nicht mehr ändernde worden, so ist

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

d die Gleichung, welche uns die Abhängigkeit der Konzentration von x bt, wird

$$k\frac{d^2c}{dx^2} = 0.$$

Nach unserer mathematischen Einleitung ist der zweite Differential- otient der erste des ersten Differentialquotienten, oder

$$\frac{d^2c}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dc}{dx}\right)}{dx}.$$

Daraus, daß der zweite Differentialquotient von c nach x gleich Null t, folgt nach E I, daß der erste Differentialquotient eine konstante, von nicht abhängige Größe ist, oder es ist

$$\frac{dc}{dx} = a.$$

Hieraus folgt unter Beachtung von E 1

$$c = ax + b.$$

---

1) Die allgemeine Behandlung geben *Wild* und *Simmler*, Poggend. Ann. . p. 217. 1857.

Die beiden Konstanten a und b ergeben sich daraus, daß für $x = 0$ die Konzentration $c = c_0$ ist, somit

$$b = c_0,$$

ferner, daß für $x = l$, $c = 0$, also

$$0 = al + c_0, \qquad a = -\frac{c_0}{l},$$

somit wird

$$c = c_0 - \frac{c_0}{l}\, x,$$

oder die Konzentration nimmt dem Abstande von dem untern Ende des Zylinders proportional ab.

Man hätte diesen Satz auch einfach aus der Überlegung ableiten können, daß der stationäre Zustand nur eintreten kann, wenn durch jeden Querschnitt in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Salzes wandern, was nur möglich ist, wenn die Konzentrationsdifferenz je zweier aufeinander folgender Querschnitte durch den ganzen Zylinder dieselbe ist. Ist das aber der Fall, so muß auch die Konzentrationsdifferenz je zweier gleich weit entfernter Querschnitte die gleiche sein, oder die Konzentration muß jedesmal um die gleiche Größe abnehmen, wenn wir in dem Zylinder um gleiche Strecken aufsteigen, was eben unsere Gleichung für c darstellt.

Fick hat diese Folgerung der Theorie zu prüfen versucht, indem er in einem in der angegebenen Weise hergestellten Zylinder, dessen Boden kristallisiertes Kochsalz enthielt, den Diffusionsvorgang wochenlang dauern ließ, und dann durch vorsichtig eingesenkte, mit einem äußerst feinen Drahte an einer Wage hängende Glaskügelchen das spezifische Gewicht der Lösung in verschiedenen Höhen x über dem Boden bestimmte. Die aus den gefundenen spezifischen Gewichten sich ergebenden Konzentrationen entsprachen der Gleichung so genau, als es bei der Schwierigkeit dieser Methode, wo das Einsenken des Kügelchens jedenfalls eine geringe Mischung verschiedener Schichten zur Folge hat, nur erwartet werden kann.

Um nach dieser Methode die Diffusionsgeschwindigkeit k zu bestimmen, gehen wir zu der Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -kq\,\frac{dc}{dx}$$

zurück. Die linke Seite bedeutet die in der Zeiteinheit von einer Schicht zur nächstfolgenden wandernde Salzmenge, da ds die in der Zeit dt übergehende Menge ist. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist das einfach die in der Zeiteinheit aus dem Zylinder in das umgebende Wasser austretende Salzmenge. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist

$$-\frac{dc}{dx} = \frac{c_0}{l}.$$

Nennen wir die Menge des in der Zeiteinheit austretenden Salzes S, so wird

$$S = kq\,\frac{c_0}{l},$$

oder es muß die in gleichen Zeiten aus den Röhren austretende Salzmenge der Länge der Röhren umgekehrt proportional sein.

uch diesen Satz fand Fick bestätigt, indem er in der vorhin an-
men Weise drei Röhren sehr verschiedener Länge herstellte und nun
Eintritt des stationären Zustandes die Menge des im Laufe eines
in das äußere Wasser übertretenden Salzes durch eine chemische
se des Wassers, welche an in bestimmten Zeiträumen genommenen
n desselben ausgeführt wurde, bestimmte. Er erhielt für k nach der
ung

$$k = \frac{l \cdot S}{q \cdot c_0}$$

ersuchen mit der

längsten	mittleren	kürzesten Röhre	Temperatur
$= 1{,}071$	$k = 1{,}108$	$k = 1{,}050$	$18^0 - 19^0$

Zahlen, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehlerquellen
Tat als gleich zu betrachten sind.

Die Zahlen bedeuten in Grammen die Salzmenge, welche im Laufe
Tages durch einen Querschnitt von 1^{qcm} geht, wenn zwei um 1^{cm} von-
der entfernte Schichten eine solche Konzentrationsdifferenz haben, wie
m Unterschied von 1^g Salz im Kubikzentimeter Lösung entspricht.

Die Dimensionen des Diffusionskoeffizienten ergeben sich unmittelbar
er ihn definierenden Gleichung

$$k = \frac{lS}{q c_0},$$

eine Anzahl Längeneinheiten, S die in der Zeiteinheit austretende
enge der Quotient aus einer Anzahl Masseneinheiten durch eine An-
eiteinheiten, q ein Querschnitt, Quadrat einer Anzahl Längeneinheiten,
zentration, Gewicht in der Volumeinheit, Quotient aus Gewicht und
itten Potenz einer Länge, also

$$k = z \frac{\lambda \mu \lambda^3}{\lambda^2 \mu \tau} = z \frac{\lambda^2}{\tau}.$$

ie Masse kommt in k nicht vor. Wollen wir die Ficksche Zahl in
CS System übersetzen, so haben wir den Fickschen Wert durch
. die Anzahl der Sekunden für einen Tag zu dividieren. Wir er-

$$k = 1{,}076 \frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}} = 12{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec.}}.$$

Durch Abwarten des stationären Zustandes erreicht man, daß die
ntration in dem Diffusionsgefäß nicht mehr eine Funktion der Zeit,
n nur eine Funktion des Abstandes einer Schicht vom Boden des
s ist; durch eine andere von Jolly angegebene Versuchsanordnung
eilstein[1]) es dahin zu bringen gesucht, daß die Konzentration in
anzen Diffusionsgefäß an allen Stellen die gleiche aber mit der Zeit
nderndе ist. Die Lösung wurde in eine etwa 6^{cm} lange Glasröhre
52) gefüllt, welche unten umgebogen und an ihrer Umbiegung so
hliffen war, daß das Niveau der Mündung möglichst nahe über dem
Punkte der Umbiegung war; am obern Ende war das Gläschen

---

[1]) Beilstein, Liebigs Annalen. 99. p. 165. 1856

etwas ausgezogen und durch einen eingeriebenen Glasstöpsel verschl Um das Gläschen zu füllen, wurde es in ein Becherglas ganz in untergetaucht, und während die obere Öffnung mit der Lösung war, mit dem Stöpsel verschlossen. Das gefüllte Gläschen wurde eines durchbohrten Korkes in ein Brettchen gesteckt, welches a horizontalen Rande eines mit Wasser gefüllten Gefäßes lag, so d die untere Öffnung des Gläschens einige Millimeter unter der Ob des Wassers befand. Es wurde die Konzentration der Lösung v Beginne des Versuches bestimmt, un wieder, nachdem der Versuch eine oder zwei Tage gedauert hatte. Der rat war in einem Kellerraum von kon Temperatur aufgestellt. Die umg Wassermenge war so groß, daß deren zentration stets gleich Null gesetzt konnte.

Fig. 152.

Infolge der Diffusion wurde die L zunächst in der Umbiegung verdün aber die Lösung in dem ganzen Gl konzentrierter, somit spezifisch schwer nimmt Beilstein an, daß stets durc dersinken der konzentrierteren Lösun Mischung stattfände, so daß zu jed innerhalb des Gläschens und an der Ö dieselbe, aber infolge der Diffusion m Zeit abnehmende, Konzentration vor sei. Ganz wird dieser Zustand allerdings nicht erreicht werden k da die in der Biegung befindliche Lösung als die tiefstliegende an Mischung nicht teilnehmen kann. Annähernd wird aber die Vorauss erfüllt sein.

Nennen wir die in einem gegebenen Momente in dem Gläsche der Grenzfläche vorhandene Konzentration c, so können wir die i Zeitelement dt durch den Querschnitt q der Öffnung nach außen wan Salzmenge, da das Wasser die Konzentration Null hat, setzen

$$dS = Kqcdt,$$

worin K der von uns definierten Diffusionsgeschwindigkeit propor nicht derselben gleich ist, da hier nicht die Abnahme c auf Null a Längeneinheit, sondern in einer kleinern allerdings nicht bekannten S stattfindet. Nennen wir das Volumen des Gefäßes V, so können w in dem gegebenen Momente in dem Gefäße vorhandene Salzmenge

$$S = V \cdot c, \qquad dS = -Vdc$$

setzen, wo wir das negative Vorzeichen auf der rechten Seite sch um anzudeuten, daß durch Fortwandern der Salzmenge dS die K tration c des Gefäßes um dc abnimmt. Damit wird

$$-dc = \frac{Kq}{V} cdt; \qquad -\frac{dc}{c} = \frac{Kq}{V} dt.$$

Um die zur Zeit t vorhandene Konzentration zu erhalten, haben wir beiden Seiten die Summen zu bilden von $t = 0$ bis $t = t$. Nennen wir bei Beginn des Versuches in dem Gefäße vorhandene Konzentration c_0, wird

$$-\int_{c_0}^{c}\frac{dc}{c} = \int_0^t \frac{Kq}{V}dt = \frac{Kq}{V}\cdot t$$

Nach E VIII und E 2 wird dann

$$\log c_0 - \log c = \frac{Kq}{V}t$$

$$K_1 = \frac{Kq}{V} = \frac{1}{t}(\log c_0 - \log c).$$

Es muß demnach der Quotient aus der Differenz der Logarithmen Beginn und am Ende des Versuches in dem Gläschen vorhandenen onzentrationen dividiert durch die Dauer des Versuches konstant sein.

In der Tat geben die Beobachtungen Beilsteins dieses Resultat, mit bweichungen, welche hinreichend dadurch erklärt werden, daß die Voraussetzungen der Berechnung, eine in dem ganzen Diffusionsgefäß überall leiche Konzentration, nicht strenge erfüllt sind.

So erhielt Beilstein unter andern folgende Werte von K_1 für verschieden konzentrierte Lösungen, und bei Versuchen, die teils einen, teils wei Tage dauerten. Die Temperaturen waren stets 5—7° C. Als Zeiteinheit ist dabei der Tag angenommen.

Salpetersaures Kali:

c_0	K_1	K'_1	
0,0197	0,184	0,189	Mittel 0,1845.
0,0393	0,192	0,190	
0,0962	0,176	0,176	

Doppeltchromsaures Kali:

c_0	K_1	K'_1	
0,0199	0,146	0,146	Mittel 0,1480.
0,0394	0,153	0,149	

Chlorkalium:

c_0	K_1	K'_1	
0,0394	0,208	0,198	Mittel 0,2010.

Die Werte K'_1 sind aus den Versuchen mit zweitägiger Dauer berechnet.

Später haben Voit[1]) und Johannisjanz[2]) die Richtigkeit der Theorie prüfen und für einige Substanzen die Diffusionsgeschwindigkeiten zu bestimmen gesucht, indem sie auf den Boden eines zylindrischen oder prismatischen Gefäßes Lösung und auf diese Wasser brachten, und dann die Konzentration c in verschiedenen Höhen über der ursprünglichen Trennungsschicht in ihrer Abhängigkeit von der Zeit beobachteten. Wie indes Stefan[3]) gezeigt hat, sind die von diesen beiden Physikern angewandten optischen

1 *Voit*, Poggend. Ann. **130**. p. 227. 1865.

2 *Johannisjanz*, Wiedem. Ann. **2**. p. 24. 1877.

3 *Stefan*, Wiener Berichte. 78. p. 957. 1878; eine optische Methode von ener, Wiedem. Ann. **49**. p. 105. 1893, welche durch Stefans Einwürfe nicht troffen wird, werden wir im 4. Bande bei Besprechung der krummen Strahlen nen lernen.

Beobachtungsmethoden nicht zur Erlangung richtiger Resultate geeignet. Stefan hat dann an den Versuchen Grahams die Theorie bestätigt und aus denselben eine Anzahl Diffusionsgeschwindigkeiten verschiedener Salze berechnet[1]).

Spätere Beobachtungen, zunächst von F. Weber[2]), Schuhmeister[3]) und Long[4]) haben indes doch eine Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der Konzentration ergeben. Weber erhielt nach einer Methode, die wir hier nicht auseinandersetzen können, für Zinkvitriol und die Konzentrationen

$$c = 0{,}214 \quad k = 0{,}2403; \qquad c = 0{,}318 \quad k = 0{,}2299$$

bei der Temperatur 18°, also einen mit steigender Konzentration abnehmenden Wert von k. Die Werte von k sind in den vorhin definierten Einheiten, Tag als Zeiteinheit, gegeben[5]).

Schuhmeister führte entweder über einen mit Salzlösung gefüllten Zylinder einen langsamen Wasserstrom, in den das Salz aus dem Zylinder diffundierte und bestimmte die Menge des ausgetretenen Salzes aus der Konzentration der Lösung vor Beginn und nach Beendigung des Versuches, oder er stellte auf einen mit Salzlösung gefüllten Zylinder einen zweiten von genau gleichem Querschnitt und gleicher Länge, der mit Wasser gefüllt war. Nach Beendigung des Versuches konnten die beiden Zylinder ohne Mischung des Inhaltes voneinander getrennt werden und in jedem einzelnen die Konzentration bestimmt werden. Für die aus dem untern Zylinder in der Zeit t austretende Salzmenge ergibt die allgemeine Gleichung nach den Entwicklungen Stefans[6]) in dem

ersten Falle

$$S = 2 c_0 q \sqrt{\frac{k t}{\pi}}$$

zweiten Falle

$$S = c_0 q \sqrt{\frac{k t}{\pi}},$$

wenn c_0 die anfängliche Konzentration, q den Querschnitt des Zylinders und π die Ludolphische Zahl bedeutet.

So erhielt Schuhmeister z. B. für Chlorkalium bei einer Temperatur 18°,8 C.

$$\text{für } c_0 = 0{,}08409 \quad k = 1{,}319; \qquad c_0 = 0{,}18437 \quad k = 1{,}406$$
$$c_0 = 0{,}28974 \quad k = 1{,}464.$$

Es zeigte sich somit hier, und das gleiche zeigten fast alle Versuche, entgegen der Beobachtung Webers eine Zunahme der Diffusionsgeschwindigkeit mit steigender Konzentration, ein Resultat, das sich auch aus den Versuchen von Long folgern läßt, welche indes die absoluten Werte von k nicht zu berechnen gestatten.

Zum gleichen Schlusse wie Schuhmeister gelangte Wroblewski

---

1) *Stefan,* Wiener Berichte. 79. p. 161. 1879.
2) *F. Weber,* Wiedem. Ann. 7. p. 469. 1879.
3) *Schuhmeister,* Wiener Berichte. 79. 1879.
4) *Long,* Wiedem. Ann. 9. p. 613. 1880.
5) Über die Methode von F. Weber sehe man auch *Seitz,* Wiedem. Ann. 6 p. 759. 1898.
6) *Stefan,* Wiener Berichte. 78. p. 957. 1878.

i der Untersuchung der Diffusion von Kochsalz[1]). Wroblewski stellte eine große Wanne auf einen Untersatz mit Salzlösung bekannter Konstration gefüllte dünnwandige zylinderförmige Glasgefäße von 2—8^{cm} rchmesser und 3,5 – 5^{cm} Höhe. Die Wanne wurde mit Wasser so weit gefüllt, daß die Oberfläche des Wassers ein wenig höher war, als der ere Rand der Zylinder, und beim Einfüllen des Wassers so verfahren, ß die Oberfläche des Wassers sich über der Salzlösung zusammenschloß, ne irgend welche Strömung der Lösung zu bewirken. Der Apparat rde in einem Raume konstanter Temperatur kürzere oder längere Zeit ehen gelassen, darauf das Wasser aus der Wanne herausgenommen und hließlich der Salzgehalt des Zylinders nach beendeter Diffusion bestimmt. ie während der Diffusion fortgewanderte Salzmenge ist dann durch die ste der beiden vorhin angegebenen Gleichungen bestimmt, somit ist

$$k = \frac{S^2 \pi}{4 c_0{}^2 q^2 t}.$$

In dieser Weise findet Wroblewski bei einer Temperatur von 8°,5 C. r k in $\mathrm{cm^2\,sec^{-1}}$

$$c_0 = 0{,}006\,68, \quad k = 7{,}68 \cdot 10^{-6}, \quad c_0 = 0{,}0610, \quad k = 8{,}08 \cdot 10^{-6},$$
$$c_0 = 0{,}2008, \quad k = 8{,}89 \cdot 10^{-6},$$

so erhebliche Zunahme mit wachsender Konzentration.

Während von Wroblewki glaubte, daß seine und Schuhmeisters eobachtungen mit denen Webers in Widerspruch seien, fand Scheffer[2]), ß in der Tat bei einigen Substanzen eine Zunahme der Diffusionsgechwindigkeit mit der Konzentration, bei andern eine Abnahme eintrete. ür Kochsalz und Chlorbaryum findet er den Diffusionskoeffizienten fast onstant, für Natriumhyposulfit und Magnesiumsulfat nimmt, wie Weber für Zinkvitriol fand, der Diffusionskoeffizient mit wachsender Konzentration ab, für Salpetersäure, Salzsäure, Schwefelsäure, Calciumchlorid mit achsender Konzentration zu.

Wiedeburg[3]) hat die Resultate Scheffers bestätigt, er erhielt, indem er nach der Methode von von Wroblewski beobachtete, für Kaliumchromat und Kupfersulfat mit steigender Konzentration abnehmende Werte on k.

Wiedeburg hat deshalb, da die Abhängigkeit des Wertes k von der onzentration nicht mehr zu bezweifeln ist, die einfache Ficksche Gleichung rch eine kompliziertere ersetzt, indem er annimmt

$$k = K(1 + \varkappa c).$$

Die allgemeine Gleichung für die Diffusion nimmt dann folgende Form . Es wird

1) von Wroblewski, Wiedem. Ann. 13. p. 606. 1881.
2) Scheffer, Zeitschr. für physikal. Chemie. 2. p. 390.
3) Wiedeburg, Wiedem. Ann. 41. p. 675. 1890. Man sehe über die Arbeit Wiedeburg die Abhandlung von Arrhenius, Zeitschr. für phys. Chemie. 10. 51 1904, auf welche wir im nächsten Kapitel bei Besprechung der Theorie Diffusion von Nernst zurückkommen. § 124.

$$\frac{ds}{dt} = -Kq(1 + \varkappa c)\frac{dc}{dx},$$

$$\frac{ds'}{dt'} = -Kq(1 + \varkappa(c + dc))\frac{dc'}{dx},$$

$$\frac{dc}{dt} = -K(1 + \varkappa c)\frac{dc - dc'}{dx^2} + K\varkappa\frac{dc}{dx}\frac{dc'}{dx}.$$

Setzen wir $dc - dc'$ wieder d^2c und im letzten Gliede $dc = dc'$, was wegen des kleinen Unterschiedes gestattet ist, so wird

$$\frac{dc}{dt} = -K(1 + \varkappa c)\frac{d^2c}{dx^2} + K\varkappa)\left(\frac{dc}{dx}\right)^2.$$

Die Rechnung liefert für die von von Wroblewski gewählte Anordnung an Stelle der von von Wroblewski benutzten Gleichung

$$S = 2qc_0\sqrt{\frac{K\left\{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\varkappa c_0\right\}^2 t}{\pi}}.$$

Beobachtet man somit für verschiedene Konzentrationen c_0 die Diffusion, so kann man K und $\varkappa$ aus der Gleichung

$$k = K\left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\varkappa c_0\right)^2$$

berechnen.

Für die beiden von ihm untersuchten Salze und aus von Wroblewskis Beobachtungen für Kochsalz fand Wiedeburg für die Temperatur von 18° C.

für $K_2Cr_2O_7$	$K = 121{,}26 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm^2\,sec^{-1}}$	$\varkappa = -13{,}48$
$CuSO_4$	$K = 44{,}79 \cdot 10^{-7}$ „ „	$\varkappa = -3{,}467$
$NaCl$	$K = 102{,}26 \cdot 10_{-7}$ „ „	$\varkappa = +2{,}118.$

Da $\varkappa c_0$ die Dimension einer reinen Zahl haben muß, hat $\varkappa$ die reziproken Dimensionen einer Konzentration, ist also $gr^{-1}\ cm^3$.[1])

Der genauen Messung der Diffusionskoeffizienten bietet die starke Veränderlichkeit derselben mit der Temperatur eine erhebliche Schwierigkeit. Der erste, der eine exakte Messung der Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten von der Temperatur durchführte, war F. Weber[2]), er fand dieselbe für Zinkvitriol bei der Temperatur

$\vartheta = 1^0{,}2$	$18^0{,}55$	$44^0{,}7$
$k = 0{,}1252$	$0{,}2421$	$0{,}4146,$

Werte, welche sich sehr gut darstellen lassen durch

$$k = 0{,}1187\,(1 + 0{,}0557\,\vartheta) = k_0(1 + 0{,}0557\,\vartheta).$$

1) Die Arbeiten von *Arrhenius,* Zeitschr. für physikal. Chemie. 10. p. 51. 1892, *Abegg,* Zeitschr. f. physikal. Chemie. 11. p. 248. 1892, *Kowalki,* Wiedem. Ann. 52. p. 166. 1892; 59. p. 637. 1896, werden wir im 3. Bande bei den Beziehungen zwischen elektrischer Leistungsfähigkeit und Diffusion der Elektrolyte besprechen.

2) *F. Weber,* Wiedem. Ann. 7. p. 549. 1879.

Einige Jahre später hat de Heen[1]) für fünf Salze die Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt. Die von ihm für die Diffusionskoeffizienten gegebenen Gleichungen haben die Form

$$k = k_{60}(1 - \beta\tau),$$

worin k_{60} den Diffusionskoeffizienten bei 60° und τ die Anzahl Grade unter 60° bedeuten, für welche der Wert k angegeben werden soll. De Heen fand für

	$MgSO_4$	KNO_3	$NaCl$	Na_2HPO_4	K_2CO_3
$\beta =$	0,0119	0,0127	0,0121	0,0128	0,0127,

ahlen, die so nahe gleich sind, daß sie zu dem Schlusse berechtigen, die emperaturkoeffizienten seien für alle Salze dieselben, und zwar als Mittel ieser Zahlen in der de Heenschen Schreibweise gleich 0,0125. De Heens ersuche erstrecken sich über die Temperatur 12°—63°. Die Werte stimmen recht gut mit den von F. Weber. Führen wir den Wert k_0 ein und etzen $\tau = 60 - \vartheta$, so können wir schreiben

$$k_0(1 + \alpha\vartheta) = k_0(1 + \alpha 60)(1 - \beta)(60 - \vartheta)),$$

oraus man leicht erhält

$$\alpha = \frac{\beta}{1 - 60\beta}, \quad \text{demnach} = \frac{0{,}0125}{1 - 60 \cdot 0{,}0125} = 0{,}050.$$

Der größte von de Heen gefundene Wert würde auf $\alpha = 0{,}0552$ ihren, also dem Weberschen fast genau gleich werden.

Wir werden hiernach $\alpha = 0{,}051$ setzen können, und zwar für alle alzlösungen gleich.

Ein hohes Interesse bieten die Untersuchungen Voigtländers[2]), welche igen, daß die Diffusion von Salzlösungen nur wenig geändert wird, wenn in durch Hinzufügen geringer Mengen einer gelatinierenden Substanz das asser in eine Gallerte verwandelt, ihm also seinen flüssigen Zustand immt. Voigtländer stellte dieselbe durch Versetzen des Wassers mit gar-Agar, einer im Handel vorkommenden und neuerlich zu vielen Zwecken rwandten längs der Küsten des ostindischen Archipels wachsenden Tangt und Erwärmen des Gemenges auf 100° her. Fügt man zu Wasser ehr wie ½ Prozent der Substanz und erwärmt das Gemenge auf 90°, so starrt die Masse bei dem Abkühlen gleichmäßig zu einer festen Gallerte. ehr als fünf Teile Agar-Agar zu 95 Teilen Wasser werden nicht aufgenommen.

Voigtländer benutzte wesentlich 1 Prozent Gallerte, und es zeigte h, daß Säuren und Salze ebenso gut in dieselbe diffundierten wie in das ...ige Wasser.

Zur Messung der Diffusionskonstanten wurden Glaszylinder mit der allerte gefüllt; da die Gallerte nicht direkt am Glase haftete, wurde nach dem Vorschlage Ostwalds die Innenseite passend langer, an dem einen nde geschlossener Glaszylinder mit Chromgelatine überzogen und dem onnenlichte ausgesetzt, ehe die flüssige Gallerte eingegossen wurde. Die

1) de Heen, Bull. de l'acad. royale de Belgique. 8. p. 219. 1884.
2) Voigtländer, Zeitschr. f. physikal. Chemie. 3. p. 316. 1889.

flüssige Masse wurde durch künstliche Verlängerung des Glaszylinders mi Papier so hoch eingefüllt, daß die erstarrte Masse einige Zentimeter üb dem Röhrenrande hervorsah. Nach dem Erstarren wurde sie an dem offene eben geschliffenen Röhrenrande scharf abgeschnitten, und konnte nun, ohn daß der Gallertzylinder aus der Röhre herausrutschte, mit dem offenen End nach unten, in ein Becherglas gehängt werden. Das Becherglas wurde mi der zur Diffusion dienenden Lösung gefüllt. Die Lösung in dem Becher glas wurde durch stetes Zufließen frischer Lösung und Fortnahme ein entsprechenden Menge auf konstanter Konzentration gehalten und die Diffu sion stets nur solange fortdauern gelassen, daß das obere Ende des Gallert zylinders nicht von dem Salze erreicht war. Man konnte deshalb de Gallertzylinder als von unendlicher Länge ansehen, in welchen aus ein Schicht konstanter Konzentration das Salz übertrat. In dem Falle gil die Gleichung von Stefan

$$S = 2 q c_0 \sqrt{\frac{k t}{\pi}}.$$

Nach Beendigung des Versuches wurde der Gallertzylinder durch Er wärmen flüssig gemacht und mit der sechsfachen Menge Wasser verdünnt, wodurch das Wiedererstarren der Agarmasse verhindert wurde, und der Ge halt an Salz durch Analyse bestimmt.

Voigtländer fand so bei einer Temperatur von 20° folgende Werte von k, wenn er die Salze in Gallerten von verschiedenem Gehalte von Agar diffundieren ließ, die Werte k sind in cm² und Tag angegeben

		k		
Substanz	Konzentration	1% Agar	2% Agar	3% Agar
$NaCl$	0,010	1,04	1,03	1,03
HCl	0,0075	2,04	—	2,04
N_2O_5	0,0093	2,05	—	2,07
$MgCl_2$	0,0086	0,75	—	—

Wie man sieht, nimmt der Diffusionskoeffizient mit wachsendem Ge halt an Agar-Agar nicht ab, er ist jedenfalls sehr annähernd gleich de für Salz und reines Wasser. Für Kochsalz z. B. erhielt Scheffer 1,1, Graham nach Stefans Berechnung 1,25, von Wroblewski, wenn wi dessen mittleren Wert 8,08 · 10⁻⁶ nehmen, 0,700.

Die Zahlenwerte der Diffusionskonstanten sind nach dem dargelegte noch ziemlich unsicher, besonders da man dieselben nur in wenigen Fälle in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration kennt. Es wird daher über flüssig sein noch andere Zahlen, als schon angegeben sind, hier mitzuteilen.

§ 86.

Endosmose. Die Diffusion der Flüssigkeiten beschränkt sich nicht auf den soeben betrachteten Fall, wenn zwei Flüssigkeiten sich direkt be rühren, sondern sie findet auch dann statt, wenn die beiden Flüssigk durch eine poröse Membran voneinander getrennt sind. Füllt man eine Röhre, welche an ihrem untern Ende durch eine tierische Me geschlossen ist, mit Alkohol und taucht sie dann in Wasser, so d

er die Membran berührt, so zeigt sich ein Austausch der beiden Flüssig-
, indem durch die Membran hindurch Wasser zum Alkohol und um-
rt Alkohol zum Wasser übergeht. Ganz dasselbe zeigt sich, wenn
in die Röhre eine Salzlösung bringt und sie dann in Wasser ein-
, es geht Salz zum Wasser und Wasser durch die Membran in die
, so lange, bis die Flüssigkeiten auf beiden Seiten der Membran gleich-
g geworden sind.

In den meisten Fällen beobachtet man dabei an der einen Seite der
ran eine Zunahme der Flüssigkeitsmenge, indem z. B. bei dem Ver-
mit Alkohol und Wasser mehr Wasser durch die Membran zum
ol in die Röhre dringt, als umgekehrt Alkohol zum Wasser; ebenso,
man Wasser und eine Salzlösung durch eine poröse Zwischenwand
, findet man stets, daß eine größere Quantität Wasser zur Salzlösung
rt, als umgekehrt. Enthält deshalb die Röhre Wasser, so sinkt das
n in ihr, enthält sie die Salzlösung, so steigt es.

Dieser Umstand deutet schon darauf hin, daß die Scheidewand von
tlichem Einfluß ist, und daß wir hier nicht eine einfache, nur durch
heidewand verzögerte Diffusion der Flüssigkeiten vor uns haben, denn
n Falle würde eine Veränderung des Niveau in der Weise nicht statt-
können.

Noch deutlicher zeigt sich das bei Anwendung verschiedener Mem-
, indem mit Änderung der porösen Zwischenwand sich die Niveau-
ngen oft geradezu umkehren. So zeigt sich z. B., wenn man Wasser
Weingeist durch eine tierische Membran trennt, daß der stärkere
von dem spezifisch schwerern Wasser zum leichtern Weingeist geht,
as Niveau des Weingeistes steigt, jenes des Wassers fällt. Wird
n Weingeist und Wasser durch Kautschuk getrennt, so zeigt sich
ntgegengesetzte, das Niveau des Weingeistes sinkt, während das des
rs steigt.

Man unterscheidet daher die Diffusion der Flüssigkeiten durch feuchte
ranen von der vorhin betrachteten, und bezeichnet sie mit dem Namen
ndosmose.

Um die Endosmose messend zu verfolgen und die sie bedingenden
ze aufzufinden, bedarf es der Untersuchung, in welchem Verhältnis
ustausch verschiedener Stoffe durch poröse Scheidewände geschieht,
ie, bei Salzlösungen z. B., der Austausch erfolgt, wenn man ver-
n dichte Lösungen derselben Substanz unter sonst gleichen Umstän-
r Endosmose unterwirft.

Die ältern Versuche beschränkten sich darauf, die Volumzunahme zu
, welche auf der einen Seite der Scheidewand eintrat, und glaubten
ser Volumzunahme ein Maß des endosmotischen Vorganges zu er-
. Daraufhin gab Dutrochet[1]) einen Meßapparat, das sogenannte
nometer an, welches in weiter nichts bestand als in einer geteilten,
trichterförmig erweiterten und mit einer Membran geschlossenen
In diese wurde die eine Flüssigkeit, z. B. eine Salzlösung, bis zu
estimmten Höhe eingefüllt und dann die trichterförmige Erweiterung
hre in die zweite Flüssigkeit, z. B. Wasser, getaucht. Die Volum-

1) Dutrochet, Ann. de chim. et de phys. 35. 1827.

zunahme wurde an der Teilung der Röhre abgelesen. Mit diesem oder einem ähnlichen Apparate untersuchten Jerichau[1]), Brücke[2]), Vierordt[3]) die Endosmose verschiedener Stoffe durch verschiedene Membranen.

Indes kann diese Methode nicht zu genauen Resultaten führen, da sie nur die Volumänderung der einen Flüssigkeit, also nur den Diffusionsstrom nach der einen Richtung berücksichtigt. Diese Methode würde z. B. in dem Falle, wo die beiden entgegengesetzt gerichteten Ströme, welche den Austausch der Flüssigkeiten vermitteln, ganz gleiche Stärke haben, also eine Volumänderung nicht eintritt, zu dem ganz falschen Schlusse führen, daß gar keine Diffusion eingetreten sei; in diesem Falle würde sie gar nichts messen können. Aus diesem Grunde waren auch die Resultate dieser Beobachter mehr qualitativer Natur, es ergaben sich aus ihnen die Tatsachen, welche wir vorhin angeführt haben.

Jedoch folgerten Dutrochet und Vierordt schon aus ihren Versuchen, daß die Stärke der Endosmose bei Lösungen unter sonst gleichen Verhältnissen der Dichtigkeit der Lösungen proportional sei, d. h. daß die Wassermengen, welche in gleichen Zeiten durch die Membran in die Röhre dringen, in demselben Verhältnisse zueinander stehen, wie die Dichtigkeit der Lösungen in der Röhre.

Jolly[4]) wandte ein anderes Verfahren an; er maß nicht die Volumänderungen, sondern die Gewichtsänderungen der Endosmometer, denen er dazu auch eine sehr einfache Form gab. Eine zylindrische Glasröhre von vielleicht zwei Dezimeter Länge und $1\frac{1}{2}$ Zentimeter Weite wurde einfach an ihrem Ende mit einem Stücke einer feuchten frischen Blase geschlossen und dann mit einer abgewogenen Menge des zu untersuchenden Stoffes gefüllt und in reines Wasser getaucht. Der leichtern Übersichtlichkeit des Versuches wegen wurde dann dafür gesorgt, daß die äußere Flüssigkeit stets Wasser war, indem die Röhre in ein großes Gefäß mit Wasser getaucht wurde, in welchem das Wasser von Zeit zu Zeit erneuert wurde.

Zunächst ließ Jolly den endosmotischen Vorgang solange dauern, bis im Innern der Röhre nur mehr reines Wasser vorhanden war, indem er so lange die Röhre in Wasser tauchen ließ, bis sich keine Gewichtsänderung der Röhre mehr zeigte. Da dann die Substanz ganz aus der Röhre getreten war, so erhielt er in der Gewichtszunahme der Röhre die Menge Wasser, welche den ausgetauschten Stoff ersetzt hatte.

Jolly schloß aus seinen Versuchen, daß bei gleicher Membran und gleich bleibender Temperatur für eine gewisse Menge des der Endosmose ausgesetzten Stoffes stets die gleiche Menge Wasser eintrat, einerlei ob man ursprünglich in die Röhre trocknes Salz oder die gleiche Menge in konzentrierter oder verdünnter Lösung hineingebracht hatte. So fand Jolly, daß durch eine Schweinsblase für jedes Gramm Kochsalz, welches austrat, etwas über 4^g Wasser in die Röhre hinübertrat.

Die für 1^g austretendes Salz eintretende Wassermenge nennt Jolly das endosmotische Äquivalent des Salzes. Für verschiedene Membranen,

1) *Jerichau*, Poggend. Ann. **34**. p. 613. 1835.
2) *Brücke*, De Diffusione humorum per septa. Berlin 1841. Daraus Poggend. Ann. **58**. p. 77. 1843.
3) *Vierordt* in Archiv von Roser und Wunderlich. **6**. 1847.
4) *Jolly*, Zeitschr. f. die rationelle Medizin von Henle und Pfeufer. 7.

a selbst für verschiedene Stücke einer und derselben Schweinsblase, fällt der Zahlenwert des Äquivalents verschieden aus.

Ferner schloß Jolly aus seinen Versuchen, indem er die Menge des ausgetretenen Salzes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit verfolgte, daß die eschwindigkeit der Endosmose der in der gleichen Wassermenge gelösten alzmenge proportional sei. Bei konstant gehaltenem Salzgehalt der Lösung ollte darnach also die Menge des in gleichen Zeiten austretenden Salzes em Salzgehalte proportional sein.

Die Schlüsse von Jolly haben sich durch die spätern sorgfältigen ersuche von W. Schmidt[1]) und Eckhard[2]) nicht vollauf bestätigt.

Schmidt untersuchte die Endosmose des Glaubersalzes durch den erzbeutel eines Rindes; er wandte, um in kurzer Zeit größere Salzmengen um Austreten zu bringen, Membranstücke von 10,3^{cm} Durchmesser an, nd während er im übrigen wie Jolly verfuhr, bestimmte er die Konzentration seiner Lösungen vor Beginn und am Ende der Versuche. Schmidt ntersuchte gleichzeitig den Einfluß der Temperatur.

Für die Geschwindigkeit der Endosmose findet Schmidt, daß sie bei leicher Membran sehr nahe der Konzentration der Lösung proportional st, wenn er als solche die in 100 Gewichtsteilen Lösung vorhandene Salzmenge, nicht wie Jolly die in 100 Gewichtsteilen Wasser gelöste Salzmenge, bezeichnet. Mit steigender Temperatur nimmt sie stark zu, und war ebenso wie die später zu besprechende Geschwindigkeit des Durchusses von Wasser durch kapillare Röhren.

Das endosmotische Äquivalent ist nicht ganz konstant, sondern steigt ngsam für abnehmende Werte der Konzentration; für sehr geringe Werte er Konzentration steigt es erheblich und ebenso, wenn man auf die Memran kristallisiertes Salz legt.

Zu ähnlichen Resultaten gelangt Eckhard, er findet bei gleichgeltener Temperatur, daß die Menge des in gleichen Zeiten übertretenden alzes nahezu der Konzentration proportional ist, daß sie jedoch nicht ganz schnell zunimmt wie die Konzentration. Die Menge des zu dem Salze bertretenden Wassers wächst dagegen rascher als die Konzentration der ösung und infolgedessen ist das endosmotische Äquivalent für konzenrierte Lösungen größer als für verdünnte. Eckhard hat wesentlich mit ochsalz beobachtet; in bezug auf die Abhängigkeit des Äquivalentes on der Konzentration würde sich demnach Kochsalz anders verhalten als laubersalz.

In neuerer Zeit sind die osmotischen Untersuchungen nach einer ganz dern Richtung geführt worden, man hat wesentlich die Frage in betracht zogen, bis zu welcher Differenz des Druckes auf beiden Seiten der Memran, wobei auf Seiten der Salzlösung der höhere Druck sein soll, das asser noch durch die Membran zur Salzlösung hinüberwandert. Unter nwendung der gewöhnlichen tierischen und pflanzlichen Membranen ist e exakte Beantwortung dieser Frage nicht möglich, da durch solche embranen nicht nur das Wasser zur Salzlösung hinüberwandert, sondern ch umgekehrt das Salz zum Wasser, und da bei einigermaßen hohem

1) *W. Schmidt,* Poggend. Ann. 102. p. 122. 1857.
2) *Eckhard,* Poggend. Ann. 128. p. 61. 1866.

Druck auf Seite der Salzlösung nach Versuchen von Schmidt[1]) die Salzlösung als solche durch derartige Membranen hindurch filtrieren.

Dieser Frage konnte man erst näher treten, als es M. Traube[2]) gelang Membranen herzustellen, welche wohl das Wasser, nicht aber die gelösten Substanzen durchlassen. Derartige Membranen, welche Traube Niederschlagsmembranen nennt, erhält man, wenn man Lösungen gewisser Stoffe, welche Niederschläge miteinander bilden, so zusammenbringt, daß sie übereinander geschichtet sind. An der Grenze bilden sich dann dünne Schichten des Niederschlages, welche das Wasser hindurchlassen, manche gelöste Substanzen aber nicht.

Traube erhielt solche Membranen in folgender Weise. Ein Glasröhrchen, an beiden Seiten offen, wurde an dem einen Ende mit einem luftdicht an das Röhrchen schließenden Kautschukschlauch versehen, der an seinem andern Ende durch einen Quetschhahn verschlossen war. Durch Zusammendrücken des Kautschukschlauches wurde etwas Luft aus dem Röhrchen ausgetrieben, und dann das untere Ende des Röhrchens in die eine der beiden zur Berührung zu bringenden Lösungen eingetaucht. Ließ man den Druck auf den Kautschukschlauch aufhören, so wurde durch den Luftdruck eine gewisse Quantität der Lösung in das Röhrchen hinaufgetrieben. Der Kautschukschlauch wurde dann über das Röhrchen so weit hinabgeschoben, daß die Lösung genau mit der untern Mündung des Röhrchens abschnitt, so daß, wenn jetzt das Röhrchen vorsichtig in die zweite Lösung getaucht wurde, zwischen den beiden Lösungen keine Luftblase vorhanden war. An der Mündung der Röhre bildete sich dann die Niederschlagsmembran.

Um zu prüfen, ob gelöste Substanzen durch diese Niederschlagsmembran hindurchgingen, wurde Lösung derselben zu der ersteren der beiden die Membran bildenden Lösungen hinzugefügt, und nach einiger Zeit untersucht, ob in der zweiten sich diese gelöste Substanz nachweisen ließ.

Derartige Lösungen, welche Membranen bilden, sind z. B. flüssiger Leim und Gerbsäure. Wurde dem flüssigen Leim z. B. Ferrocyankalium zugesetzt und in der oben angegebenen Weise verfahren, so ließ sich in der Gerbsäure selbst nach 20stündiger Dauer des Versuches keine Spur von Ferrocyankalium nachweisen. Chlorammonium zur Leimlösung hinzugefügt diffundierte durch die Membran hindurch.

Ferrocyankalium in das Röhrchen gebracht und dann in der angegebenen Weise in eine Lösung von essigsaurem Kupfer getaucht, bildete eine Niederschlagsmembran. Wurde dem Ferrocyankalium Chlorbarium hinzugefügt, so diffundierte dasselbe nicht in die äußere Lösung hinüber, Chlorkalium dagegen ging hindurch.

Mit Hilfe derartiger Membranen, welche er auf die Innenwand von Tonzellen auflagerte, hat Pfeffer[3]) die osmotischen Verhältnisse untersucht, wenn nur ein Strom des Lösungsmittels zu der Lösung, speziell des Wassers zur Lösung stattfindet. Die Anordnung des von Pfeffer benutzten Apparates zeigt Fig. 153. Die mit der Niederschlagsmembran zu ver-

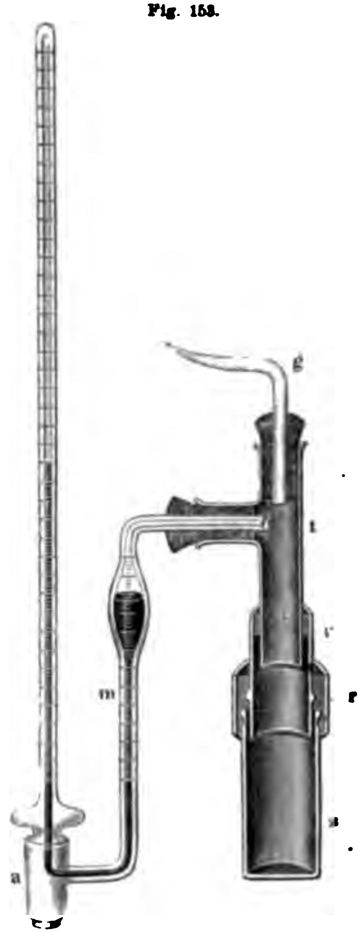
1) *W. Schmidt,* Poggend. Ann. **99**. p. 337. 1856.
2) *M. Traube,* Archiv für Anatomie und Physiologie. p. 87. 1867.
3) *W. Pfeffer,* Osmotische Untersuchungen. Studien zur Zellenmechanik. Leipzig bei Engelmann. 1877.

nzelle z hat eine Höhe von 46^{mm}, einen lichten Durchmesser und eine Wandstärke von 1,25—2^{mm}. In dieselbe ist das Glas- Siegellack eingekittet, und in dieses ebenso das Rohr t. Der wurde zu den Versuchen bei höherer Temperatur umgelegt und zwischen r, der Tonzelle und dem Glasrohr v mit einem in der nperatur nicht schmelzbaren Kitt ausgegossen. In die obere s Rohres t wurde, luftdicht und kapillares Rohr g eingesetzt, einigen Versuchen gerade aufben offen war, bei andern oben sen war, wie es die Figur zeigt. e Öffnung von t diente, wie zigt, zur Aufnahme eines Manoden im Innern des Apparates n Druck zu messen; bei andern wurde dasselbe geschlossen.

onzellen waren, ehe der Appaoengesetzt wurde, zuerst mit Kalilösung und dann mit verpetersäure behandelt und nach swaschen wieder vollkommen

Herstellung der Niederschlagsurde die Tonzelle zunächst in Wasser gesetzt, und indem nern des Apparates wiederholt Luftpumpe die Luft verdünnte, mit Wasser getränkt und dann unden in eine 3prozentige Lö- Kupfervitriol gestellt, während die Zelle mit dieser Lösung urde. Darauf wurde die Tonrt, einigemal mit Wasser ausd durch eingeführte Streifen rpapier inwendig getrocknet ißerlich etwas getrocknet. Man die Zelle einige Zeit an der Luft sie sich eben noch feucht ann wurde in die Zelle eine 3proung von Ferrocyankalium eindie Zelle wieder in die Kupferg hineingestellt. Nach 26 bis 48 Stunden wird der Apparat yankaliumlösung vollständig angefüllt und in der Fig. 153 n Weise geschlossen. Es entsteht ein gewisser Überdruck, da er zum Ferrocyankalium als zum Kupfervitriol strömt. Die so 24 bis 48 Stunden stehen gelassen. Der Apparat wird ffnet und statt der Lösung von Ferrocyankalium mit einer einer 3prozentigen Lösung von Ferrocyankalium und einer gen Lösung von Kalisalpeter gefüllt und, nachdem er wieder

Fig. 153.



geschlossen, erneuert in Kupfervitriollösung gestellt. Jetzt wächst der Druck im Apparat auf 3 Atmosphären und infolgedessen wird die Niederschlagsmembran auf der ganzen Innenwand der Tonzelle gleichmäßig und fest aufgepreßt.

Pfeffer untersuchte zunächst, wie sich die Geschwindigkeit des Wasserstroms änderte bei verschiedener Konzentration der Lösung. Zu diesem Zwecke wurde die das Manometer aufnehmende Öffnung des Apparates Fig. 153 geschlossen und ein gerades, oben offenes Kapillarrohr in g eingesetzt. Die Stärke oder Geschwindigkeit des Wasserstroms wurde gemessen durch die Höhe, um welche das Flüssigkeitsniveau in der kapillaren Röhre g in der Stunde anstieg. Die Menge des eintretenden Wassers war dabei so gering, daß die Konzentration der Lösung dadurch nicht geändert wurde.

Versuche mit Rohrzucker ergaben, daß die Geschwindigkeit des Wasserstromes zunächst mit wachsender Konzentration abnahm, dann bei weiterer Vergrößerung der Konzentration, wie es Eckhard für Kochsalzlösung gefunden, erheblich rascher zunahm als die Konzentration. Folgende Tabelle, das Mittel aus vier Versuchsreihen, läßt diesen Gang deutlich erkennen. Unter c ist die Konzentration in Gewichtsprozenten, Gramm in 100g Lösung, unter e die Stärke des Wasserstromes, jene für die 1 prozentige Lösung als eins gesetzt, unter $\frac{e}{c}$ der Quotient aus der Stärke des Wasserstromes und der Konzentration und unter $\frac{e}{cs}$ der Quotient aus der Stärke des Wasserstromes und der Konzentration, dieselbe ausgedrückt als Gramm in 100ccm Lösung angegeben.

c	e	$\frac{e}{c}$	$\frac{e}{cs}$
1	1	1	1
2	1,95	0,98	0,97
6	5,77	0,96	0,94
10	11,6	1,16	1,11
16	20,0	1,25	1,17
20	25,5	1,27	1,17
32	48,4	1,54	1,35

Ähnlich war der Gang, als in die Zelle Lösungen von Gummi arabicum eingeführt wurden, während für Salpeter die Geschwindigkeit des Wasserstromes mit steigender Konzentration stets abnahm.

Wurde das Rohr g geschlossen und das Manometer m eingesetzt, so ergab sich, daß das Wasser nur bis zu einem bestimmten Überdrucke, dem osmotischen Drucke der Lösung in die Zelle eindringen konnte. Für Zucker und Gummi arabicum, für welche die Niederschlagsmembran ganz undurchgängig war, ergab sich dieser osmotische Druck der Konzentration der Lösung proportional, wie folgende Tabelle für Zuckerlösungen zeigt. Unter c ist die Konzentration der Lösung, unter O die Druckhöhe, welche im Innern der Zelle durch das Eindringen des Wassers entstand, in cm Quecksilber angegeben.

c	O	$\frac{O}{c}$
1	53,8	53,8
1	53,2	53,2
2	101,6	50,8
2,74	151,8	55,4
4	208,2	52,0
6	307,5	51,3
1	53,5	53,5.

ei einer 6prozentigen Lösung stieg somit der Druck im Innern bis
r Atmosphären.

ür Gummi arabicum war die Druckhöhe für eine 1prozentige Lösung
2^{cm} Quecksilber.

ür Salpeter nahm der Druck langsamer zu als die Konzentration;
ses Salz war die Niederschlagsmembran nicht ganz undurchgängig,
mierte nach Pfeffers Ausdrucksweise, die Konzentration wurde dem
m Schlusse des Versuches bestimmt. Es ergab sich

c	O	$\frac{O}{c}$
0,80	130,4	163
1,43	218,5	153
3,3	436,8	132
0,86	147,5	171.

feffer sieht hierin nicht einen Beweis gegen die Folgerung, daß der
che Druck allgemein proportional der Konzentration sei, im Falle
öste Substanz gar nicht diosmiert, er sieht vielmehr den Grund
langsamern Zunahme eben in dem Durchgange des Salpeters durch
mbran. Werden Zucker und Gummi arabicum durch eine Zelle von
entpapier oder eine Tierblase abgesperrt, so steigt für 6prozentige
en bei Pergamentpapier der osmotische Druck bei einer Temperatur
° für Zucker nur auf 29^{cm}, also auf nicht ein Zehntel des früher
nen, bei Tierblase nur auf $14,5^{cm}$; Salpeter erhält in Pergament-
und bei 6prozentiger Lösung 20,4, in Tierblase nur $8,9^{cm}$.

an könnte dem gegenüber einwenden, daß der geringere osmotische
der sich für die gelösten Stoffe bei für sie durchlässigen Mem-
zeigt, nicht in dieser Durchlässigkeit, sondern in der spezifischen
der Membran seinen Grund habe, daß also überhaupt auch für
nen, welche die gelösten Stoffe nicht diosmieren, der osmotische
verschieden sein könne.

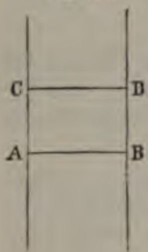
s ist indes nicht möglich, weil das dem Prinzip der Erhaltung der
widersprechen würde, wie Ostwald[1]) durch folgende Betrachtung
hat. Es sei eine Röhre mit zwei Tonplatten AB und CD ver-
welche den Raum $ABCD$ flüssigkeitsdicht absperren. Die Platten
mit verschiedenen Niederschlagsmembranen versehen, welche aber
e in der den Raum $ABCD$ ausfüllenden Lösung vorhandene Sub-
urchaus nicht durchlassen. Der osmotische Druck für AB sei aber

[1]) Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie. 1. p. 661.

P, für CD dagegen $p < P$. Das heißt ist CD mit Wasser in Ber
so fließt so lange Wasser durch die Membrane zur Lösung, bis de
in $ABCD$ gleich p geworden ist, wird der Druck in $ABCD$ grö
p, so fließt Wasser durch die Membran in den Raum über p.

Nun werde das Rohr in Wasser getaucht, so daß AB das
berührt, und sei auch CD mit einer Wasserschicht bedeckt. Es t
lange im Innern der Druck kleiner als p ist, durc
Membranen Wasser in $ABCD$ hinein, sobald der I
erreicht ist, kann durch CD kein Wasser mehr ei
durch AB tritt aber Wasser ein, so lange der Druck
als P ist. Es wird demnach in $ABCD$ der Druck w
Sofort aber tritt durch CD Wasser nach oben, und
ein stationärer Zustand bei einem Drucke p_1 eintre
welchem ebensoviel Wasser durch CD austritt als
AB eintritt. Der Zustand kann sich nicht ändern
wir oberhalb CD das Wasser abfließen lassen, so d
der Druck nicht zunimmt. Es fließt stetig infolge d
schiedenheit der osmotischen Drucke Wasser durch A
CD nach oben hin. Das oben abfließende Wasser würden wir et
Bewegung eines Wasserrades verwenden können; es würde demnach d
Arbeit gewonnen ohne irgend einen Arbeitsaufwand, was dem Prin
der Erhaltung der Arbeit widerspricht.

Fig. 154.



Den Einfluß der Durchlässigkeit der Membran können wir dah
fassen, daß der sich langsam herstellende, einer bestimmten Konzen
entsprechende Druck nicht erreicht werden kann, weil ehe dersel
entwickelt hat die Konzentration schon abnimmt.

Die Schwierigkeit Membranen herzustellen, welche eine größe
zahl verschiedener Salze nicht diosmieren, begründet auch die Sch
keit die Abhängigkeit des osmotischen Druckes von der Natur der g
Salze zu bestimmen.[1])

Dahin gerichtete Versuche sind von de Vries[2]) und Tamman
geführt. Beide maßen nicht direkt den osmotischen Druck der ei
Lösungen, sondern sie bestimmten die Konzentration je zweier Lö
welche den gleichen osmotischen Druck hatten.

Das Verfahren von Tammann war folgendes. Bringt man
Lösung eines Salzes einen Tropfen einer Lösung eines zweiten,
mit dem erstern einen unlöslichen Niederschlag bildet, so überzie
der Tropfen mit einer Niederschlagsmembran, welche mehrfach di
nicht durch sich hindurchläßt, aus welchen sich die Niederschlagsm
gebildet hat. Man erkennt das daran, daß die sofort nach dem Ein
des Tropfens stets durchscheinende Membran bei längerer Dauer ni
durchsichtig wird. Es ist das nach Tammann der Fall, wenn man
cyankaliumlösung in die Lösung eines Kupfer- oder Zinksalzes bri

1) Eine ausführliche Untersuchung über die Durchlässigkeit einer
Anzahl von Niederschlagsmembranen hat *Walden* ausgeführt. Zeitschr. für
Chemie. **10**. p. 699. 1892.

2) *de Vries*, Pringsheims Jahrbücher f. wissenschaftliche Botanik. **14**.
Zeitschrift für physikal. Chemie. **2**. p. 415. 1895|6; **3**. p. 103. 1896|7.

3) *Tammann*, Wiedem. Ann. **34**. p. 299. 1888.

Ist der osmotische Druck der im Innern des Tropfens vorhandenen sung gleich dem der äußern Lösung, so findet kein Übergang des Wassers rch die Membran statt, weder von innen nach außen noch umgekehrt. t aber der osmotische Druck der innern Lösung größer als der der ßern, so tritt eine Wasserströmung von außen nach innen ein, in der ngebung des Tropfens muß also die Lösung konzentrierter werden, ist r osmotische Druck der äußern Lösung ein größerer, so geht der Wasserrom aus dem Tropfen in die äußere Lösung, die Lösung in der Umgebung s Tropfens muß verdünnter werden. Die Konzentrationsänderung läßt ch nach der in der Lehre vom Licht zu besprechenden Schlierenmethode utlich erkennen, indem nach dieser die kleinsten Unterschiede der Brecharkeit des Lichtes in der Flüssigkeit, in welcher der Tropfen schwimmt, ahrnehmbar sind. Man sieht deshalb, wenn die Lösung um den Tropfen rdünnter wird, die verdünntere Lösung in der Umgebung aufsteigen, ird sie konzentrierter, so sieht man die konzentriertere Lösung niederaken. Indem man in die Lösung des Kupfersalzes verschieden konzenrierte Lösungen des Ferrocyankalium bringt, kann man so die Konzenration recht genau bestimmen, bei welcher kein osmotischer Strom voranden ist.

In dieser Weise konnte Tammann zunächst die osmotischen Drucke er verschiedenen Kupfer- und Zinksalze mit denen des Ferrocyankaliums, lso auch miteinander vergleichen. Mit Hilfe derselben Membranen konnte r aber noch einen Schritt weiter gehen. Er fand nämlich noch eine Anahl anderer Substanzen, welche nicht durch diese Niederschlagsmembranen indurchgehen. Es setzte deshalb den Kupferlösungen oder denen der Zinkalze bekannter Konzentration gemessene Quantitäten einer solchen Subtanz, welche gegen das Kupfersalz chemisch indifferent war, hinzu und estimmte die Konzentration der Ferrocyankaliumlösung, welche mit diesem emische gleichen osmotischen Druck hatte. Unter der Voraussetzung, daß e osmotischen Drucke zweier gemischten Salze sich summieren, konnte r dann die Konzentration der Ferrocyankaliumlösung berechnen, welche it dem zugesetzten Salze gleichen osmotischen Druck hatte, wie folgenes Beispiel zeigt. Die Konzentrationen der Lösungen sind in Gramm olekülen pro Liter Wasser angegeben, das heißt die Konzentration der ösung wird gleich 1 gesetzt, wenn in 1000^g Wasser soviel Gramme des alzes gelöst sind, als das Molekulargewicht des Salzes Einheiten hat. Das olekulargewicht des Kupfersulfats ist 159,5; die Konzentration einer upferlösung ist gleich 1, welche diese Anzahl Gramme Salz zu 1000^g asser enthält, die Konzentration ist 0,1, wenn zu 1000^g Wasser 15,95^g alz gefügt sind. In dieser Weise ergab sich z. B., wenn das Gleichheitsichen gleichen osmotischen Druck bedeutet,

$$0{,}125\ CuSO_4 = 0{,}049\ K_4CyFeCy_2$$

$$0{,}058\ MgSO_4 + 0{,}125\ CuSO_4 = 0{,}068\ K_4CyFeCy_2,$$

mit

$$0{,}058\ MgSO_4 = 0{,}019\ K_4CyFeCy_2.$$

Für Gemische von Zinksulfat und Magnesiumsulfat ergab sich

$$0{,}210\ ZnSO_4 = 0{,}080\ K_4CyFeCy_2$$

$$0{,}086\ MgSO_4 + 0{,}210\ ZnSO_4 = 0{,}108\ K_4CyFeCy_2,$$

somit

$$0{,}086\ MgSO_4 = 0{,}028\ K_4CyFeCy_2.$$

Die erste Beobachtung ergibt, daß bei Magnesiumsulfat die Konzentration 3,07, die zweite, daß sie 3,05 der Konzentration des Ferrocyankaliums sein muß, wenn der osmotische Druck der beiden Lösungen derselbe sein soll.

Die Beobachtungen Tammanns bestätigen den Schluß Pfeffers, nach welchem der osmotische Druck einfach der Konzentration der Lösungen proportional sein soll, nicht. Wäre dieser Schluß allgemein gültig, so müßte das Verhältnis der Konzentrationen der Lösungen, welche gleichen osmotischen Druck haben, unabhängig von der Konzentration sein. Das ist im allgemeinen nicht der Fall; nur bei wenigen organischen Substanzen ist das Verhältnis der Konzentration zu der Konzentration des Ferrocyankaliums, welche gleichen osmotischen Druck hat, unabhängig von der Konzentration. Da nach den Versuchen Pfeffers der osmotische Druck der Zuckerlösungen der Konzentration proportional ist, so würde, da für diese das Verhältnis konstant zu sein scheint, auch für Ferrocyankaliumlösung der osmotische Druck der Konzentration proportional sein.

In folgender Tabelle sind einige der Beobachtungen Tammanns zusammengestellt. Für jede Substanz sind zwei Zahlenreihen angegeben, unter n die Konzentration der Substanz, unter $\frac{n}{n_1}$ das Verhältnis der Konzentration der Substanz zu jener der Ferrocyankaliumlösung, welche mit der erstern gleichen osmotischen Druck hat.

$CuSO_4$		$CuCl_2$		$ZnSO_4$		Rohrzucker		Harnstoff		Propylalk.	
n	$\frac{n}{n_1}$	n	$\frac{n}{n_1}$	n	$\frac{n}{n_1}$	n	$\frac{n}{n_1}$	n	$\frac{n}{n_1}$	n	$\frac{n}{n_1}$
0,094	2,6	0,043	1,30	0,101	1,7	0,032	2,5	0,160	1,7	0,045	2,4
0,170	2,6	0,094	1,09	0,266	2,1	0,068	2,5	0,309	1,7	0,113	2,4
0,204	2,6	0,236	1,02	0,425	2,4	0,109	2,7	0,483	2,0	0,225	2,1
0,339	2,9	0,313	0,98	0,851	2,6	0,194	2,4	0,756	2,1	0,451	2,2
0,675	2,8	0,379	0,95	1,022	2,5	0,228	2,5	1,150	2,2	0,677	2,2
0,842	2,7	0,476	0,93	1,280	2,3	0,373	2,4			0,903	2,4

Man sieht, das Konzentrationsverhältnis scheint für Kupfersulfat konstant zu sein, für Kupferchlorid nimmt es mit wachsender Konzentration ab, für Zinksulfat zu. Konstant ist es ebenfalls für Rohrzucker und Propylalkohol, während es für Harnstoff zu wachsen scheint.

Da die den Quotienten $\frac{n}{n_1}$ gleichen Konzentrationen mit der Konzentration 1 des Ferrocyankaliums gleichen osmotischen Druck haben, sowie wir den Druck der Konzentration proportional setzen können, so zeigen obige Zahlen, daß für $CuSO_4$, $ZnSO_4$, Rohrzucker, Harnstoff, Propylalkohol mit großer Annäherung der gleichen Anzahl gelöster Moleküle der gleiche osmotische Druck zukommt. Annähernd gilt das für alle von Tammann untersuchten organischen Substanzen und ebenso für $MgSO_4$, während für $CuCl_2$, $ZnCl_2$, $Cu(NO_3)_2$ bereits bei annähernd der Hälfte der gelösten Moleküle der osmotische Druck der gleiche ist.

Nach De Vries sollen chemisch ähnliche Stoffe bei gleicher molekurer Konzentration denselben osmotischen Druck zeigen; in den Zahlen ammanns findet man für die Sulfate der zweiwertigen Metalle einerseits d für die Chloride und Nitrate derselben andererseits annähernd die ichen Werte der Konzentration für denselben osmotischen Druck.

Nach den Beobachtungen Pfeffers nimmt der osmotische Druck mit igender Temperatur zu; die von Pfeffer für Rohrzucker beobachteten ahmen sind indes zu schwankend, als daß man aus derselben einen mperaturkoeffizienten für die Druckzunahme ableiten kann. Schreibt man n osmotischen Druck bei der Temperatur t in der Form

$$p_t = p_0 (1 + \alpha t),$$

geben Pfeffers Versuche mit Rohrzucker für α Werte zwischen 0,004 d 0,006, für Gummi arabicum 0,002, für zwei Lösungen von weinurem Kali-Natron 0,003 und 0,0035.

Nach Versuchen von Donders und Hamburger[1]) soll der Tempeturkoeffizient für die verschiedenen Substanzen im allgemeinen der gleiche in, indem dieselben fanden, daß Lösungen, welche bei niedriger Tempetur gleichen osmotischen Druck zeigen, dieselbe Gleichheit auch in höhern mperaturen bewahren.

Auf die Theorie der osmotischen Erscheinungen gehen wir an dieser elle nicht ein, wir werden sie im nächsten Kapitel nach Vorführung der etischen Theorie der Gase im Zusammenhange mit der kinetischen Theor der Lösungen und in der Wärmelehre besprechen.

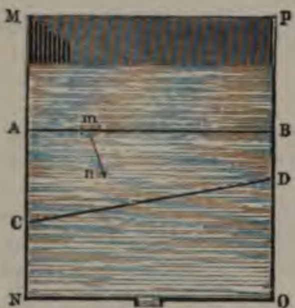
§ 87.

Ausfluß der Flüssigkeiten. Toricellis Theorem. Wenn man in n Boden oder die Seitenwand eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gees eine Öffnung macht, so fließt die Flüssigkeit mit einer gewissen Geswindigkeit daraus hervor, welche um so größer ist, je höher das Niveau r Flüssigkeit über der Ausflußöffnung ist. Um diese Geschwindigkeit bestimmen, wollen wir uns ein Gefäß denken, in welchem trotz des flusses durch regelmäßiges Nachfließen die Flüssigkeit auf demselben veau gehalten wird. Da die unten in der Öffnung ausfließende Flüssig: sofort durch nachsinkende Flüssigkeit wieder ersetzt wird, so muß die nze im Gefäß über der Ausflußöffnung befindliche Flüssigkeit in Bewegung aten und sich mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen die Ausflußnung hin bewegen. Dabei muß sich dann ferner sofort nach Beginn Ausfließens in dem ganzen Gefäße ein stationärer Zustand einstellen, heißt, es muß durch jeden Querschnitt des Gefäßes in gleichen Zeiten gleiche Menge von Flüssigkeit hindurchgehen. Denn ist AB (Fig. 155) Querschnitt durch die Flüssigkeit des Gefäßes $MNOP$ und CD irgend anderer Querschnitt, so ist die zwischen diesen beiden Querschnitten rhandene Flüssigkeitsmenge immer dieselbe; es muß daher in gleichen iten in den zwischen den Querschnitten gelegenen Raum durch AB

1 *Donders* und *Hamburger* nach Angabe von *Ostwald*, Lehrbuch der allmeinen Chemie. 2. Aufl. 1. p. 669.

ebensoviel Flüssigkeit eintreten, wie ihn durch den Querschnitt *CD* verläßt. Nennen wir nun die mittlere senkrecht gegen *AB* g Komponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen im Mom sie *AB* passieren, *u*, und die Größe des Querschnitts *Q*, so ist di Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt *AB* passiert, gl Wir bezeichneten *u* als die mittlere senkrecht gegen *AB* gerich schwindigkeitskomponente, denn in W keit werden sich weder alle Teilchen s gegen *AB*, noch alle mit derselben G digkeit bewegen. Aber welches a Richtung und die Geschwindigkeit e zelnen Teilchen sei, wir können imme der Zeiteinheit durch *AB* hindurch Flüssigkeit durch einen senkrechten darstellen, dessen Basis der Querschn und dessen Höhe *u* ist; diese Höhe *u* die mittlere gegen *AB* senkrechte Ge digkeit der Flüssigkeit, denn wenn al sigkeitsteilchen mit dieser Geschwindig Querschnitt *AB* durchflössen, würde soviel Flüssigkeit durch *AB* hindurchgehen, als wirklich hindurchg

Fig. 155.



Hat u' dieselbe Bedeutung für den Querschnitt *CD*, dessen gleich Q' sei, so ist die in der Zeiteinheit durch diesen hindurch Flüssigkeit gleich $Q'u'$. Es ergibt sich somit

$$Q \cdot u = Q' \cdot u' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

oder die mittleren Geschwindigkeiten, mit welchen die Flüssigkeits die verschiedenen Querschnitte passieren, verhalten sich umgekehrt Größe der Querschnitte.

Der stationäre Zustand ist ferner dadurch charakterisiert, daß seiner Dauer durch irgend ein beliebiges Element eines Querschni Flüssigkeit immer mit derselben Geschwindigk nach derselben Richtung hindurchgeht, daß Flüssigkeitsteilchen sich immer in denselben bewegen; wird also das Element *m* einmal Flüssigkeit mit einer gewissen Geschwindigke der Richtung *mn* durchsetzt, so bewegt sich der ganzen Dauer des stationären Zustandes die keit in der gleichen Weise hindurch. Es f einfach daraus, daß es immer genau dieselbe sind, welche die Flüssigkeit bewegen, und daß wegung immer unter denselben Umständen st Dieser Satz gestattet uns das Gesetz zu be nach welchem sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Innern fäßes ändert und dann mit Hilfe von Gleichung (I) die Geschwi in der Ausflußöffnung zu berechnen.

Fig. 156.

Ist nämlich *AO* der Weg, den ein Flüssigkeitselement von d fläche bis zur Ausflußöffnung zurücklegt, so werden alle bei *O* d fläche verlassenden Flüssigkeitselemente denselben Weg mit dersel

schwindigkeit zurücklegen, es wird also der Kanal stetig mit Flüssigkeit erfüllt sein, die sich in der Richtung dieses Kanals bewegt. Sei nun bei m in der Tiefe h unter der Oberfläche ein Querschnitt des Kanals gleich q, und sei v die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit den Querschnitt durchsetzt, so wird in der Zeit dt ein Flüssigkeitsvolumen $qvdt$ durch diesen Querschnitt durchfließen. Dabei, während also jedes Flüssigkeitsteilchen den Weg vdt zurücklegt oder von dem Querschnitt m zu dem um vdt entfernten Querschnitt n gelangt, nimmt die Geschwindigkeit um dv zu, so daß der Querschnitt n mit der Geschwindigkeit $v + dv$ passiert wird. Diesen Geschwindigkeitszuwachs, den das Flüssigkeitsvolumen $qvdt$ in der Zeit dt erhält, können wir mit Hilfe der die Flüssigkeit bewegenden Kräfte bestimmen. Ist s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so daß also s die Masse der Volumeinheit der Flüssigkeit ist, so ist $sqvdt$ die in der Zeit dt durch m passierende Flüssigkeitsmasse, welche auf dem Wege mn in der Zeit dt den Geschwindigkeitszuwachs dv erhält. Die in der Zeit dt dieser Masse durch die wirksamen Kräfte erteilte Bewegungsgröße ist somit

$$sqvdtdv.$$

Diese Bewegungsgröße muß gleich dem Produkte aus der diesen Geschwindigkeitszuwachs bewirkenden Kraft in die Zeit dt sein. Diese bewegende Kraft ist zunächst die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere der herabsinkenden Masse. Das Gewicht dieser Masse ist $sqvdt$, somit die bewegende Kraft $gsqvdt$; ist α der Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Schnitte m und n mit der vertikalen bildet, so ist die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Kraft

$$gsqvdt \cdot \cos \alpha.$$

Da vdt der Abstand der beiden Schnitte m und n ist, so ist $vdt \cdot \cos \alpha$ der vertikale Abstand des Schnittes n von m, oder der Zuwachs, den die von der Oberfläche gerechnete Tiefe h erfährt, wenn die Flüssigkeit von dem Schnitte m zu dem Schnitte n herabsinkt; setzen wir diese gleich dh, so wird die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere

$$gsqdh.$$

In der Schicht m wirkt ferner auf die Flüssigkeit ein gewisser Druck, der für die Flächeneinheit gleich gp sei; in der tiefer liegenden Schicht n ist dieser Druck ein größerer, setzen wir ihn $g(p + dp)$. Da die Flüssigkeit sich von einer Stelle geringeren zu einer solchen größern Druckes bewegt, so wirkt diese Vergrößerung des Druckes der Bewegung entgegen, und dieser auf die Fläche q wirkende Gegendruck ist $gqdp$. Die während der Zeit dt auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ist somit

$$g(sqdh - qdp).$$

Da die durch diese Kraft der Flüssigkeit erteilte Bewegungsgröße dem Produkte aus der Kraft in die Zeit, in welcher sie der Flüssigkeit die Bewegungsgröße erteilt hat, gleich sein muß, so folgt

$$sqvdvdt = g(sqdh - qdp)dt,$$

oder wenn wir auf beiden Seiten durch $q\,dt$ dividieren,

$$s\,v\,dv = g(s\,dh - dp).$$

Diese Gleichung liefert uns die Zunahme der Geschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit um die Höhe dh herabsinkt. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Oberfläche, in welcher $h = 0$, der Druck $gp = gp_0$ etwa gleich dem Drucke der Atmosphäre ist, verläßt, mit v_0, so erhalten wir die Geschwindigkeit v in der Tiefe h, wo der Druck gleich gp ist, wenn wir für alle zwischen der Oberfläche und der Tiefe h liegenden Schichten den Wert dv bestimmen und dann alle diese Ausdrücke summieren, also in der Summe

$$\int\limits_{v_0}^{v} s\,v\,dv = g\int\limits_{h=0}^{h} s\,dh - g\int\limits_{p_0}^{p} dp.$$

In schon mehrfach gezeigter Weise sind diese Summen

$$\tfrac{1}{2}\,s(v^2 - v_0^2) = g(sh - (p - p_0)) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)},$$

eine Gleichung, welche uns, wenn wir v_0, p und p_0 kennen, die Geschwindigkeit v in der Tiefe h zu berechnen gestattet.

Wir haben bei dieser Entwicklung einen Flüssigkeitsfaden vom Querschnitt q von übrigens beliebiger Lage vorausgesetzt und für ihn nur die Bedingung gemacht, daß er die Bahn eines Elementes der Flüssigkeit von der Oberfläche bis zur Ausflußöffnung sei. Da wir über die Lage dieses Flüssigkeitsfadens keine weitere Voraussetzung gemacht haben, so gilt diese Gleichung für alle Flüssigkeitsfäden, oder für die ganze ausströmende Flüssigkeit, so daß uns obige Gleichung ganz allgemein die Geschwindigkeit v in der Tiefe h unter der Oberfläche liefert.

Ist H die Tiefe der Ausflußöffnung unter dem Niveau, p_1 der Druck in derselben, welcher der Bewegung der Flüssigkeit entgegenwirkt, so erhalten wir die Ausflußgeschwindigkeit v_1 aus der Gleichung

$$v_1^2\left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2gH - 2\,\frac{g}{s}\,(p_1 - p_0).$$

Um in dieser Gleichung noch den Quotienten $\frac{v_0^2}{v_1^2}$ zu bestimmen, dient die Gleichung (I). Ist die Oberfläche horizontal, somit in ihr ein überall gleicher vertikaler Druck vorhanden, so ist die Bewegung dort in allen Punkten eine vertikal abwärts gerichtete, es ist also v_0 gleichzeitig die mittlere senkrecht gegen den Querschnitt der Flüssigkeit gerichtete Geschwindigkeit. Setzen wir weiter eine Ausflußöffnung voraus, deren Querschnitt gegen den des Gefäßes nur klein ist, so werden wir auch in dieser die Geschwindigkeit als senkrecht gegen die Ausflußöffnung gerichtet und als überall gleich ansehen dürfen, einerlei ob die Öffnung im Boden oder in derselben Tiefe H unter dem Niveau der Flüssigkeit in einer Seitenwand sich befindet. Ist dann Q_0 der Querschnitt des Gefäßes in der Oberfläche der Flüssigkeit, q_1 der der Ausflußöffnung, so ist nach Gleichung (I)

$$Q_0 v_0 = q_1 v_1, \qquad \frac{v_0^2}{v_1^2} = \frac{q_1^2}{Q_0^2},$$

$$v_1^2\left(1-\frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)=2gH-2\frac{g}{s}(p_1-p_0).$$

det der Ausfluß in freier Luft statt, und wirkt auf die Oberfläche nur der Druck der Atmosphäre, so ist $p_1 = p_0$, da der Druck osphäre auf die Flüssigkeitsoberfläche und die Ausflußöffnung dann ist, und es wird

$$v_1=\sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)}}.$$

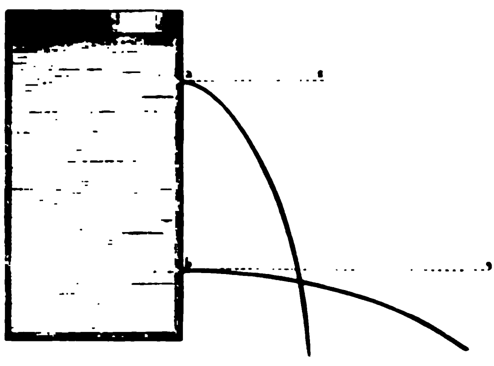
, wie wir voraussetzen, q_1 gegen Q_0 sehr klein, so ist der Nenner m Wurzelzeichen nicht merklich von 1 verschieden, und dann ge- wir zu dem Ausdruck

$$v_1=\sqrt{2gH}.$$

Ausflußgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe sigkeit direkt proportional, oder gleich der Geschwindigkeit, welche die Höhe der Flüssigkeit durchfallender Körper im Niveau der öffnung erlangt hat, ein Satz, der schon von Toricelli erkannt ınd der den Namen des Toricellischen Theorems führt.

ıe wichtige Folgerung dieses Satzes ist die, daß die Ausflußgeschwin- einer Flüssigkeit durchaus unabhängig ist von der Natur derselben, so wie alle Körper gleich schnell fallen, daß dieselbe nur abhängig der Druckhöhe im Diese Folgerung hat uffallendes, wenn man daß bei gleichen hen bei schwereren eiten auch in dem- Verhältnis die Masse bewegenden Flüssig- immt, wie wegen des es der drückenden er Druck zunimmt dieses Gesetz expe- l zu bestätigen, ge- die Flüssigkeit bei er Druckhöhe aus itlichen Öffnung eines ausfließen zu lassen. Da jedes Flüssigkeitsteilchen dann die Öff- it einer konstanten horizontalen Geschwindigkeit verläßt, so verhält gerade wie ein horizontal geworfener Körper. Es gelten daher Gesetze, welche wir § 9 für geworfene Körper entwickelten. Der nde Strahl muß die Gestalt einer Parabel haben (Fig. 157), deren Punkte man für jede Zeit leicht bestimmen kann. Gehen wir von ıkte a oder b aus, und nennen den horizontalen Abstand des Wasser- von der Wandfläche zur Zeit t, y, und den vertikalen Abstand der b, x, so muß zugleich für jedes Wasserteilchen

Fig. 157.



$$y = \sqrt{2gH} \cdot t, \qquad x = \frac{g}{2} t^2$$

sein, das heißt, in einem horizontalen Abstand $\sqrt{2gH} \cdot t$ muß das Teilchen um $\frac{g}{2} t^2$ unter der Öffnung liegen. Die zusammengehörigen x und y erhalten wir dadurch, daß wir t eliminieren

$$t^2 = \frac{y^2}{2gH} \qquad t^2 = \frac{2x}{g}$$

$$y^2 = \frac{4gHx}{g} = 4Hx.$$

Man kann sich bei Unterhaltung eines kontinuierlichen Wasserstrahles davon überzeugen, daß die Gestalt desselben der Theorie entspricht.

Die Gleichung (II) läßt noch eine bemerkenswerte Folgerung zu über die Verteilung des Druckes im Innern einer fließenden Flüssigkeit, sie zeigt, daß der Druck in derselben ein ganz anderer ist, als er in einer ruhenden Flüssigkeit sich nach den Gesetzen der Hydrostatik ergibt. Lösen wir nämlich die Gleichung (II) nach p auf, so erhalten wir für den in der Tiefe h vorhandenen Druck gp

$$gp = gp_0 + gsh - \tfrac{1}{2} s (v^2 - v_0^2).$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite geben den im Niveau h in ruhender Flüssigkeit vorhandenen hydrostatischen Druck, man sieht also unmittelbar, daß der Druck in der fließenden Flüssigkeit kleiner ist, um eine Größe, die dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist. Man bezeichnet diesen Druck gp als den hydraulischen Druck.

Die Größe dieses Druckes läßt sich leicht auswerten in Gefäßen von solcher Form, daß die Geschwindigkeit v gleichzeitig die gegen die Querschnitte senkrechte Geschwindigkeit ist, also in nicht zu engen Röhren etwa, welche aus einem größern Reservoir vertikal absteigen. Ist der Querschnitt des Reservoirs gegen jenen der Röhren hinreichend groß, so können wir zunächst $v_0 = 0$ setzen. Ist dann H die Tiefe der Ausflußöffnung, q_1 der Querschnitt der Ausflußöffnung und q der Querschnitt der Röhre in der Tiefe h unter der Oberfläche, so ist

$$qv = q_1 v_1,$$

somit

$$gp = gp_0 + gsh - \tfrac{1}{2} s \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 v_1^2$$

und wenn die Röhren nicht zu enge sind und der Ausfluß in freier Luft erfolgt,

$$v_1^2 = 2gH$$

$$p = p_0 + sh - s\left(\frac{q_1}{q}\right)^2 H$$

$$p = p_0 + s\left(h - \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 H\right).$$

Je nach dem Verhältnis der Querschnitte q_1 und q kann das zweite Glied auf der rechten Seite positiv, Null oder negativ werden. Ist z.

0,25 H und $q = 2q_1$, so wird das zweite Glied Null, der dort vor-
me Druck ist also einfach gleich dem auf der Oberfläche der Flüssig-
lastenden Drucke. Fließt also die Flüssigkeit in freier Luft aus, so
e man an einer solchen Stelle die Gefäßwand durchbohren können,
daß dort Flüssigkeit austräte, oder daß die Bewegung der Flüssig-
im geringsten gestört wird.

Ist $q_1 = q$, fließt also die Flüssigkeit durch hinreichend weite zylin-
he Röhren, deren unterster Querschnitt die Ausflußöffnung ist, aus
n größern Reservoir aus, so wird

$$p = p_0 - s(H - h),$$

t also in allen Punkten dieser Röhren der Druck kleiner als der auf
Oberfläche der Flüssigkeit wirkende Druck, der Druck wird um so
er, je größer $H - h$ ist. Anwendungen dieses Satzes werden wir im
ten Kapitel in der Sprengelschen Luftpumpe und den dieser ähn-
konstruierten Apparaten kennen lernen.

§ 88.

Ausflußmenge. Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnten, läßt
das Toricellische Theorem durch Beobachtung der parabolischen Bahn
horizontal ausfließenden Wasserstrahls experimentell nachweisen. Auf
ersten Blick scheint es, man könne dieses Theorem noch in anderer
e prüfen, indem man die Menge der aus einer kleinen Öffnung von
antem Querschnitt ausfließenden Flüssigkeit mißt, und diese mit der
ı das Toricellische Theorem gegebenen vergleicht. Ist die Ausfluß-
ıwindigkeit gleich $\sqrt{2gH}$ und der Querschnitt der Öffnung gleich q_1,
tritt in der Zeit t aus der Öffnung ein Zylinder hervor, so ist dessen
men dasjenige der in der Zeit t austretenden Flüssigkeitsmenge m;
lbe ist gleich

$$m = q_1 t \sqrt{2gH}.$$

Bezeichnen wir mit s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist
Gewicht G der ausgeflossenen Flüssigkeit

$$G = sm = sq_1 t \sqrt{2gH}.$$

Sammelt man nun aber die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge in einem
ß von bekanntem Gewicht, und bestimmt man die wirklich ausgeflossene
ge durch Wägung, so findet man dieselbe stets kleiner, und zwar so,
das Gewicht derselben G'

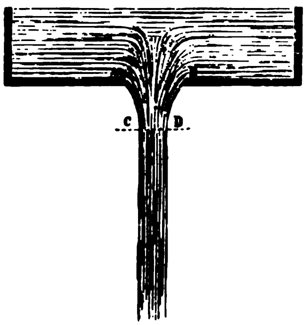
$$G' = 0{,}62 \cdot G,$$

ausgeflossene Menge also nicht ganz $\frac{2}{3}$ der theoretisch berechneten
igt.

Dieses Resultat, welches sich unmittelbar aus den Beobachtungen er-
, steht demnach mit der Theorie in Widerspruch. Jedoch ist dieser
erspruch nur scheinbar, denn die Voraussetzungen, unter denen wir
Ausflußmengen theoretisch entwickelten, sind nicht vollständig; wir
n einige störende Umstände vernachlässigt, welche uns eine genauere
achtung des ausfließenden Strahles kennen lehrt.

Wenn man nämlich den aus einer Bodenöffnung ausfließenden aufmerksam betrachtet, so findet man, daß er nicht, wie wir es v setzten, zylindrisch ist, sondern daß er sich sehr rasch unter der Ö zusammenzieht und eine kegelförmige Gestalt annimmt (Fig. 158) u von CD ab mit nahezu zylindrischer Form weiter herabfällt. Dies traktion haben wir bisher außer acht gelassen. Denn nach unsere herigen Betrachtungen dürfte nur eine g und an dem ganzen Strahle, soweit sammenhängt, regelmäßige Zusammenzi des Strahles stattfinden, die sich leicht bestimmen läßt. Nach dem Verlassen de flußöffnung wird nämlich die Bewegun Flüssigkeit durch die Wirkung der Sc eine gleichmäßig beschleunigte.

Fig. 158.



Eine Schicht, welche die Öffnung m Geschwindigkeit v_1 verlassen hat, durc demnach in der Zeit T die Strecke S

$$S = v_1 T + \frac{g}{2} T^2.$$

Nach der Zeit T verläßt eine Schicht die Öffnung, welche von der ersten um S entfernt ist. Abstand muß sich aber vergrößern; denn betrachten wir ihn nac Zeit t, so ist der Abstand der ersten Schicht von der Öffnung zu $T + t$ gleich $S + S'$

$$S + S' = v_1 (T + t) + \frac{g}{2} (T + t)^2,$$

der Abstand der zweiten Schicht S'' aber

$$S'' = v_1 t + \frac{g}{2} t^2.$$

Der Abstand beider Schichten daher

$$S + S' - S'' = v_1 (T + t) - v_1 t + \frac{g}{2} \{(T + t)^2 - t^2\},$$

$$S + S' - S'' = v_1 T + \frac{g}{2} T^2 + g T t = S + g T t.$$

Der Abstand der Schichten wächst demnach proportional T; so Strahl zusammenhängend sein, so muß er in eben dem Verhältnis werden, also regelmäßig und nahezu in demselben Verhältnis, als e von der Öffnung entfernt. Statt dessen beobachtet man sehr nahe der Öffnung eine sehr rasche Zusammenziehung des Strahles, so zwar der Querschnitt desselben in einem Abstande von der Öffnung, de gefähr dem Halbmesser der Öffnung gleich ist, nur mehr gleich dem Querschnitte der Öffnung ist. Von da an zieht sich der Stra mehr in der Weise zusammen, wie er es nach unseren obigen E lungen tun muß, bis er in Tropfen zersplittert.

Diese anomale Kontraktion des Strahles, welche man als Con venae bezeichnet, vermindert also den Querschnitt desselben so, d

ls $\frac{2}{3}$ der Ausflußöffnung wird; sie ist für größere Öffnungen und rucke sogar noch bedeutender.[1])

st klar, daß dadurch die Ausflußmenge eine kleinere werden die Erfahrung hat ergeben, daß diese sich gerade so verhält, engste Stelle des Strahles dort, wo die Contractio venae auf- wirkliche Ausflußöffnung. Die Erfahrung ergibt nämlich, wie wir die wirkliche Ausflußmenge G' ist

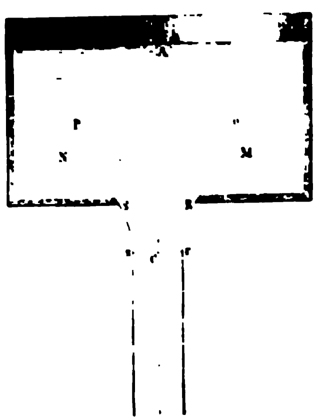
$$G' = 0{,}62\,G,$$

$$G' = 0{,}62\,s q_1 t \sqrt{2gH}.$$

igfache Versuche, die Störungen, welche die Kontraktion ver- mit in Rechnung zu ziehen, und so auch die Menge G' theoretisch nen, haben noch zu keinem befriedigenden Resultate geführt. nen wir uns doch über die Gründe Rechenschaft geben, welche ktion veranlassen. Es ist nicht, wie wir im vorigen Paragraphen ten, die Geschwindigkeit aller die Öffnung passierenden Flüssig- en auch senkrecht gegen die Öffnung gerichtet.

ewegen sich nämlich nicht nur die senkrecht über der Öffnung SR Flüssigkeitsteile (Fig. 159), sondern wegen der freien Beweglich- lben auch die seitlich liegenden gegen die Ausflußöffnung hin. Es aher z. B. die Wasserteilchen rechts von der Öffnung in der Rich- und OC, die Teilchen links in NS und PC sich bewegen. Die M und O, N und P gelegenen Wasserteilchen haben daher eine gegen das Innere des Strahles ge- eschwindigkeit. Der Strahl besteht aus einer konischen Hülle, welche rgierenden Flüssigkeitsfäden gebil- Hierdurch tritt für die Mitte des aus- Strahles eine Verzögerung ein, die schwindigkeit in der Mitte ist kleiner; nem Abstande von der Öffnung der h dem Radius der Öffnung ist, werden windigkeiten im ganzen Querschnitt les die gleichen.[2]) Dort, wo diese gengesetzter Seite kommenden Flüs- len sich treffen, muß die nicht von eunigten Bewegung herrührende tsverminderung, die eigentliche venae, ihr Ende erreichen, indem eitlichen Geschwindigkeiten der von esetzter Seite kommenden Wasser- sich aufheben und eine vertikal herabgehende Resultierende er- Demnach ist eigentlich nicht die Öffnung SR der Querschnitt der

Fig. 159.



1) ...azin findet für quadratische Öffnungen von 20 cm Seitenlänge und ...ge von 20 und 10 cm Durchmesser bei einer Druckhöhe von 1 m · 0,598 für eine rechteckige Öffnung von 80 cm Länge und 20 cm Breite aber ...omptes Rendus. 118. p. 1031. 1894.

2) ...azin, Comptes Rendus. 118. p. 1033. 1894.

Ausflußöffnung, sondern der durch die Kontraktionsstelle C geführte schnitt, da erst von dort an die Flüssigkeit unserer Annahme gemäß vertikal herab bewegt, also von dort erst die Voraussetzungen u Berechnungen stattfinden. Da nun die Kontraktion an dieser Ste stark ist, daß der Querschnitt bei sr gleich ist 0,62 der Öffnung, so auch die Ausflußmenge nur 0,62 der vorhin berechneten sein.

Aus dieser Erklärung läßt sich auch leicht der Einfluß von A röhren an die Ausflußöffnung ableiten. Wenn man nämlich die Flüssi anstatt durch eine einfache Wandöffnung durch kurze Röhren ausf läßt, so wird dadurch die Ausflußmenge je nach der Gestalt der R verschieden modifiziert. Hat die Ausflußröhre eine konische Gestalt, s sie sich der Gestalt des ausfließenden Strahles anschmiegt, so wird durch, wenn wir als Ausflußöffnung die der Wand des Gefäßes ans die Ausflußmenge nicht modifiziert; sehen wir aber als Ausflußöffnung Querschnitt der Röhre an ihrem Ende an, so wird die Ausflußmenge größert, da sie so groß ist, als das Toricellische Theorem ohne we sie von einer solchen Öffnung verlangt.

Wendet man aber eine zylindrische Röhre an, welche von der Flü keit benetzt wird, oder setzt man an das erste konische Rohr ein zw konisches Rohr an, welches sich wieder erweitert und allmählich in Zylinder übergeht von der Weite der Ausflußöffnung, so wird die M der ausfließenden Flüssigkeit bedeutend gesteigert, so daß 0,8—0,9 theoretischen Ausflußmenge ausfließt. Das ist jedoch nur dann der wenn der Strahl rings an den Wänden des Zylinders adhäriert, tut e nicht, so wird die Ausflußmenge nicht geändert.

Durch die konischen Ansatzröhren, welche sich der Gestalt des Str annähern, wird die Bewegung der Flüssigkeiten nicht geändert, höch durch Reibung an der Röhrenwand um ein geringes verzögert; in z drischen Ausflußröhren wird aber durch die Adhäsion der Flüssigkei den Wänden des Zylinders der kontrahierte Strahl wieder verbreitert nahezu zylindrisch gemacht. Dadurch würde der Strahl zerreißen un Innern des Rohres ein leerer Raum entstehen müssen. Dem wirkt aber die Kohäsion des Wassers und der äußere Luftdruck entgegen, der Teil die Flüssigkeit in der Röhre nachtreibt, zum Teil den Ausfluß verzögert. Dadurch aber, daß der ausfließende Strahl nahezu zylind wird, vermehrt sich die Menge der ausfließenden Flüssigkeit.

Wenn man sich auch zum Teil über diese die Ausflußmengen treffenden Tatsachen Rechenschaft geben kann, so sind wir doch noch entfernt, dieselben vollständig verstehen und aufklären zu können. In meisten Fällen, besonders wenn der Ausfluß anstatt aus einfachen W öffnungen aus Röhrensystemen erfolgt, welche noch dazu zum Teil gekrü sind, finden wir uns auf die Resultate der Erfahrung angewiesen, um Mengen der ausfließenden Flüssigkeit zu bestimmen, da die theoreti Behandlung zu viele Schwierigkeiten bietet. Wir verweisen deswegen die Lehrbücher der Hydraulik, z. B. auf das betreffende Kapitel A. Ritter, Ingenieurmechanik. Leipzig, Baumgärtners Verlag. VI. lage 1892.

§ 89.

ng der Flüssigkeiten. Die am Schlusse des vorigen Para-
rvorgehobene Abweichung in dem Verhalten der Flüssigkeiten
len von uns für die einfachsten Fälle abgeleiteten Gesetzen kann
llend sein, da wir bei unserer Ableitung zwei Umstände außer
n haben. Zunächst haben wir die Flüssigkeiten als vollkommen
lich vorausgesetzt, das heißt angenommen, daß die Bewegung
gkeitsfadens durch benachbarte Flüssigkeit nicht alteriert wird,
me, welche nur annähernd richtig sein kann. Denn da die
er Flüssigkeit einander anziehen, so muß eine bewegte an einer
oder langsamer sich bewegenden Flüssigkeit vorüberfließende
e Reibung erfahren, welche ihre Geschwindigkeit verkleinert.
dann gleichzeitig, wegen der sehr leichten Beweglichkeit der
die ruhende Schicht eine Bewegung im Sinne der bewegten
r die langsamer sich bewegende eine Beschleunigung im gleichen
ten, und die Beschleunigung der langsamern wird gleich sein
rung der schneller sich bewegenden Schicht. Die Reibung wirkt
e rascher bewegte Schicht wie eine die Bewegung verzögernde,
gsamer sich bewegende wie eine dieselbe beschleunigende Kraft.
röße dieser Kraft werden wir annehmen dürfen, daß sie der
er parallelen Geschwindigkeiten proportional ist, um so mehr,
hwindigkeitsdifferenz benachbarter Schichten immer nur äußerst
kann. Außerdem wird die Kraft der Flächenausdehnung pro-
in, mit der sich die Schichten berühren; Annahmen über die
r Reibung, welche schon Newton gemacht hat. Weiter nimmt
ß diese Kraft unabhängig ist von dem Drucke, der im Innern
den Flüssigkeit vorhanden ist[1]).

weite von uns bei der Ableitung der Ausflußgesetze außer acht
mstand ist die Reibung, welche die bewegte Flüssigkeit an der
les Gefäßes erfährt. Wir wissen, daß zwischen den festen und
irpern stets molekulare Kräfte tätig sind, infolge deren die
n mehr oder weniger fest an den Körpern haften; infolge-
jedes an einer festen Wand vorüberbewegte Flüssigkeitsteilchen
hung entgegen bewegt werden, es muß somit eine Verzögerung
gung erfahren. Die diese Verzögerung bewirkende Kraft können
schwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit der festen Wand
egt wird, und der Flächenausdehnung proportional setzen, mit
Flüssigkeitsschicht die feste Wand berührt. Bezeichnen wir
ε eine Konstante, so können wir die Verzögerung K, welche
festen Wand mit der Geschwindigkeit v die Wand in der Fläche f
Flüssigkeitsschicht erfährt, setzen

$$K = \varepsilon f v.$$

Konstante ε bezeichnet man als den Koeffizienten der äußeren

1) sehe darüber *Hagenbach*, Poggend. Ann. **109**. p. 385. 1860; *O. E.*
gend. Ann. **113**. p. 55. 1861; *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akade-
607. 1860; *Stefan*, Wiener Berichte. **46**. p. 8. 1862; *Stokes*, Cambridge
l Transactions. 8. 1849.

Reibung; sie bedeutet die in der Flächeneinheit der Schicht wirksame Kraft, wenn die Flüssigkeitsschicht mit der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorübergeht, oder was dasselbe ist, die Kraft, welche erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht mit gleichförmiger Bewegung und der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorüber zu führen; dieselbe hängt nur ab von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, ebenso wie der Randwinkel, unter welchem die Flüssigkeit die feste Wand schneidet. In dem Falle, in welchem die feste Wand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt wird, kann man den Wert dieses Koeffizienten sofort angeben; denn in dem Falle haftet die letzte Schicht einfach fest an der Wand, ohne an der Bewegung der übrigen Flüssigkeit teilzunehmen. Die Geschwindigkeit der Bewegung an der Wand ist also immer gleich Null, die Verzögerung ist unendlich groß, es muß also ε unendlich groß sein.

Ganz derselbe Ausdruck, der die Verzögerung an einer festen Wand darstellt, liefert uns auch die Verzögerung, welche eine Flüssigkeit erfährt, wenn sie sich an einer andern hinbewegt, wie z. B. Wasser über einer Quecksilberschicht, oder Quecksilber unter einer Wasserschicht; die Konstante ε bedeutet dann die Reibung zweier Flüssigkeiten aneinander.

Um ganz ebenso die Verzögerung, welche die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht durch die umgebende mit ihr, jedoch langsamer bewegte Flüssigkeit erfährt, ausdrücken zu können, denken wir uns einen Zylinder, durch welchen die Flüssigkeit fließe. In dem ersten Querschnitt des Zylinders mögen alle Flüssigkeitsteilchen die gleiche der Zylinderachse parallele Geschwindigkeit haben; in einiger Entfernung von diesem Querschnitt hat dann aber die zunächst an der Wand befindliche Schicht eine gewisse Verzögerung erfahren, welche sich somit langsamer bewegt als die nach der Achse des Zylinders zu folgende Schicht; diese erfährt dann ebenso eine Verzögerung und wirkt infolgedessen wieder verzögernd auf die nächstliegende innere Schicht und so fort. Es wird sich somit die Geschwindigkeit in irgend einem zur Achse des Zylinders, also zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitte stetig ändern, sie wird, wenigstens dann wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wahrscheinlich aber immer, von dem Rande gegen die Mitte stetig zunehmen. Daraus folgt dann weiter, daß die Geschwindigkeit zweier benachbarten, das ist nur um die Distanz der Flüssigkeitsmoleküle voneinander entfernten Flüssigkeitsschichten auch nur unendlich wenig voneinander verschieden sein kann. Nennen wir deshalb die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsschicht im Abstande x von der Achse des Zylinders v, die Geschwindigkeit der nächstfolgenden, von der erstern um den Abstand dx zweier Moleküle entfernten Schicht $v + dv$, so würde nach den vorhin gemachten Annahmen die Kraft, welche auf die schneller bewegte Schicht verzögernd einwirkt,

$$K = \varepsilon_1 f dv,$$

wenn f die Fläche ist, in welcher sich die Schichten berühren, und ε_1 eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Konstante bedeutet, welche der die äußere Reibung bedingenden Konstanten ε entspricht.

Die Bestimmung dieser Konstanten ε_1 würde indes nicht ausführbar sein, da man den Wert von dv niemals angeben kann, ebensowenig den Wert von dx, den Abstand der Moleküle. Man definiert deshalb

Konstante der innern Reibung etwas anders. Nach der vorhin gemachten Entwicklung ist die Geschwindigkeit v abhängig von dem Abstande der betrachteten Schicht von der Achse des Zylinders, also eine Funktion von x. Wie wir nun in der Einleitung sahen, läßt sich dann, wenn $v = f(x)$, das Differential dv stets darstellen durch

$$dv = f'(x)\,dx,$$

wenn wir den ersten Differentialquotienten der Funktion mit $f'(x)$ bezeichnen. Setzen wir diesen Wert für dv ein und schreiben gleichzeitig für $f'(x)$ das ihm gleiche $\frac{dv}{dx}$, so wird

$$K = \varepsilon_1 dx \cdot f \frac{dv}{dx}.$$

Da dx den Abstand zweier Moleküle der Flüssigkeit bedeutet, so ist für jede Flüssigkeit $\varepsilon_1 dx$ ebensogut eine Konstante wie ε_1, bezeichnen wir sie mit η, so wird

$$K = \eta \cdot f \frac{dv}{dx}.$$

Diese Konstante η bezeichnet man als den Koeffizienten der innern Reibung oder auch kurz als die Reibungskonstante[1]. Ihre Bedeutung läßt sich leicht angeben, es ist die Kraft, welche auf die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht verzögernd einwirkt, wenn sie die benachbarte langsamer bewegte Schicht in der Flächeneinheit berührt, und wenn $\frac{dv}{dx}$ der Einheit gleich ist. Da nun dv der Unterschied der Geschwindigkeiten zweier um dx voneinander entfernter Schichten ist, so bedeutet $\frac{dv}{dx}$ den Geschwindigkeitsunterschied zweier Schichten, welche um die Längeneinheit voneinander entfernt sind, vorausgesetzt, daß jedesmal, wenn wir von einer Schicht zur nächstfolgenden um dx von ihr entfernten Schicht übergehen, der Geschwindigkeitsunterschied dv derselbe ist. Denn da dx der Abstand zweier Schichten ist, so ist $\frac{1}{dx} = n$ die Anzahl der in der Längeneinheit vorhandenen Schichten, somit ist, wenn dv der Unterschied in der Geschwindigkeit je zweier benachbarter Schichten ist, $dv \cdot \frac{1}{dx} = dv \cdot n$, der Unterschied der Geschwindigkeit der ersten und $n \cdot$ Schicht, also der um die Längeneinheit voneinander entfernten Schichten.

Aus der Definition des Reibungskoeffizienten ergibt sich sofort dessen Dimension im absoluten Maßsystem. Das Produkt desselben mit einer Fläche und dem Quotienten einer Geschwindigkeit dividiert durch eine Länge ist eine Kraft, somit

$$\eta \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{\tau \cdot \lambda} = z\,[\mu \lambda \tau^{-2}]$$

$$\eta = z\,[\mu \lambda^{-1} \tau^{-1}].$$

Man erkennt leicht, daß die innere und äußere Reibung der Flüssigkeiten die von uns berechnete Ausflußgeschwindigkeit verkleinern müssen,

1) O. E. Meyer, Poggend. Ann. 113. 1861.

aber auch gleichzeitig, daß es sehr schwierig ist, dieselben in Rechnung zu ziehen, selbst wenn man die Reibungskonstanten kennt, da man das Gesetz kennen muß, nach welchem sich die einander parallelen Geschwindigkeiten in einem zur Geschwindigkeitsrichtung senkrechten Querschnitt ändern.

In einem Falle lassen sich die Rechnungen vollständig durchführen, nämlich dann, wenn man die Flüssigkeiten durch ein horizontales zylindrisches kapillares Rohr mit kreisförmigem Querschnitt unter konstanter Druckhöhe ausfließen läßt. In dem Falle fließt nämlich die Flüssigkeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch das Rohr hindurch, und wenn das Rohr enge genug ist, so findet überhaupt nur eine der Zylinderachse parallele Bewegung statt. In jedem zur Zylinderachse senkrechten Querschnitt ändert sich die Geschwindigkeit mit dem Abstande des betrachteten Flüssigkeitsteilchens von der Zylinderachse, an allen gleich weit von der Achse gelegenen Punkten der Röhre ist aber die Geschwindigkeit dieselbe. Die Flüssigkeit teilt sich also in der Röhre in konzentrische Hohlzylinder, von denen jeder eine bestimmte, auf seiner ganzen der Länge der Röhre gleichen Länge dieselbe Geschwindigkeit besitzt, welche aber von Zylinder zu Zylinder sich ändert.

Da die Bewegung für jeden dieser Zylinder eine gleichförmige ist, so folgt, daß die Beschleunigung, welche er durch die vorhandenen Kräfte erhält, gleich sein muß der Verzögerung, welche er durch die Reibung erfährt, denn nur wenn die Beschleunigungen und Verzögerungen sich aufheben, kann die Bewegung eine gleichförmige sein.

Wir denken uns einen der Flüssigkeitszylinder in dem Abstande x von der Achse, die Dicke seines Mantels sei dx, von diesem Zylinder betrachten wir ein Stück von der Länge dl, welches sich im Abstande l von dem Beginne der kapillaren Röhre befinde. Ist der hydraulische Druck im Punkte l gleich p, so wird er am andern Ende des von uns betrachteten Zylinderstückes gleich $p + dp$ sein, wo wir dp setzen können, wie vorher

$$dp = \frac{dp}{dl} \cdot dl.$$

Da die Basis des Zylindermantels $2\pi x \cdot dx$ ist, so ist die infolge der Druckänderung um dp forttreibende Kraft

$$k = 2\pi x \frac{dp}{dl} \cdot dl \cdot dx.$$

Der betrachtete Hohlzylinder ist auf seiner innern und äußern Seite mit andern Hohlzylindern in Berührung, welche eine andere Geschwindigkeit besitzen; der der Achse nähere ist um die Breite dx des Zylindermantels, welche einfach gleich ist dem Abstande der Moleküle, der Achse näher, der äußere ist um dieselbe Größe weiter entfernt. Bezeichnen wir die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen dem nächstinnern und dem betrachteten Zylinder mit dv, so ist

$$k_1 = \eta \cdot 2\pi x dl \cdot \frac{dv}{dx}$$

die Kraft, welche infolge der Reibung an dem innern Zylinder die

chwindigkeit des betrachteten Zylinders zu vermehren strebt, da die Geschwindigkeit der Bewegung von der Achse nach außen abnimmt.

Nennen wir die Differenz der Geschwindigkeiten des betrachteten und des nächstfolgenden Zylinders dv', so ist die Kraft, mit welcher der betrachtete Zylinder in seiner Bewegung verzögert wird, da der äußere Umfang des betrachteten Zylinders $2\pi(x + dx)$ ist,

$$k'_1 = \eta \cdot 2\pi(x + dx)\,dl \cdot \frac{dv'}{dx}.$$

Setzen wir nun $dv' = dv + d^2v$, wo d^2v dann angibt, um wieviel mehr oder weniger sich die Geschwindigkeit ändert, wenn man von dem betrachteten Zylinder sich zu dem nächstäußern, als wenn man zu dem nächstinnern übergeht, so wird

$$k'_1 = \eta 2\pi(x + dx)\,dl\left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}dx\right) =$$

$$= \eta 2\pi x\,dl\frac{dv}{dx} + \eta 2\pi\,dx\,dl\frac{dv}{dx} + \eta 2\pi x\,dl\frac{d^2v}{dx^2}dx$$

$$+ \eta 2\pi\,dl\frac{d^2v}{dx^2}dx^2.$$

Das vierte Glied dieses Ausdrucks ist gegen die übrigen, da es mit dem Quadrate von dx multipliziert ist, verschwindend klein, so daß es vernachlässigt werden darf; das erste Glied ist gleich k_1, so daß wir erhalten

$$k'_1 = k_1 + \eta 2\pi\,dx \cdot dl\left(\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}\right).$$

Wie wir oben sahen, folgt daraus, daß die Bewegung in der Röhre eine gleichförmige ist, daß die beschleunigenden und verzögernden Kräfte sich aufheben; da nun k und k_1 die beschleunigenden, k'_1 die verzögernden sind, so ist

$$k + k_1 = k'_1$$

$$2\pi x\frac{dp}{dl}\,dl\,dx = \eta 2\pi\,dx\,dl\left(\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

$$\frac{dp}{dl} = \left\{\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\right\}\cdot\eta,$$

eine Gleichung, welche nach den Regeln der Differentialrechnung die hydraulischen Drucke an den verschiedenen Stellen der Röhre und die Geschwindigkeiten v der einzelnen Schichten zu berechnen gestattet.[1]

Wir gelangen dazu in folgender Weise: Zunächst zeigt die letzte Gleichung, daß die rechte Seite derselben von l unabhängig ist, indem sie nur die Änderung der Geschwindigkeit mit wachsendem Abstande von der Röhrenachse enthält. Der auf der linken Seite stehende Quotient hat also für jeden Wert von l denselben Wert, oder es ist

1) Man sehe *Hagenbach*, Poggend. Ann. **109**. 1860; *Jacobson* in Reichert und Du Bois Reymond, Archiv für Anatomie und Physiologie. Jahrg. 1860. p. 80, der dort die von *Neumann* gegebene Ableitung mitteilt, welche die oben entwickelte Gleichung in ähnlicher Weise liefert: *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie. **40**. 1860.

$$\frac{dp}{dl} = \text{const} = a; \qquad dp = a\,dl$$

und daraus folgt,

$$p = c + al.$$

Die Werte von c und a ergeben sich aus den Drucken am Anfang der Röhre, wo die Flüssigkeit in dieselbe eintritt, p_a für $l = 0$ und am Ende der Röhre, wo die Flüssigkeit austritt, p_e für $l = L$

$$c = p_a; \quad p_e = p_a + aL; \quad a = -\frac{p_a - p_e}{L},$$

somit wird der Druck p im Abstande l vom Anfang

$$p = p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot l.$$

Setzen wir hiernach den Differentialquotienten von p nach l in unsere Gleichung, so wird

$$-\frac{p_a - p_e}{L \cdot \eta} = \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Da die linke Seite unserer Gleichung eine konstante, von den gegebenen Drucken, der Röhrenlänge und dem Reibungskoeffizienten nicht aber von x abhängende Größe ist, so muß v eine solche Funktion von x sein, daß deren erster Differentialquotient dividiert durch x und ebenso der zweite Differentialquotient eine konstante Größe ist. Das ist nur der Fall, wenn wir setzen

$$v = A + Bx^2,$$

denn dann ist

$$\frac{dv}{dx} = 2Bx; \quad \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = 2B; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} = 2B.$$

Damit wird

$$-\frac{p_a - p_e}{\eta L} = 4B; \qquad B = -\frac{p_a - p_e}{4\eta L}$$

und

$$v = A - \frac{p_a - p_e}{4\eta L} x^2.$$

Zur Bestimmung von A muß uns die Geschwindigkeit irgend eines der Flüssigkeitszylinder also für einen Wert von x angebbar sein. Es ist das der Fall für die an der Wand anliegende Schicht, also, wenn wir den Radius der Röhre mit R bezeichnen, für jene Schicht, welche dem Werte $x = R$ entspricht.

Für diesen Hohlzylinder von der Dicke dx ist zunächst

$$k = 2\pi R dx \frac{dp}{dl} dl,$$

ferner k_1, da die den Zylinder beschleunigende Reibung durch den Zylinder erfolgt, dessen Wert $x = R - dx$ ist,

$$k_1 = -\eta 2\pi R dl \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=R}.$$

Die verzögernde Reibung ist gleich dem Produkte des äußern Reibungskoeffizienten mal der Geschwindigkeit v_0 der äußersten Schicht mal dem Flächenstück $2\pi R dl$, also

$$k'_1 = 2\pi R dl \varepsilon v_0 = 2\pi R dl \varepsilon \left(A - \frac{p_a - p_e}{4\eta L} R^2\right)$$

demnach, wenn wir $k + k_1 = k'_1$ bilden und alles durch $2\pi R dl$ dividieren

$$\frac{dp}{dl} dx - \eta \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=R} = \varepsilon \left(A - \frac{p_a - p_e}{4\eta L} R^2\right).$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist, da dort die verschwindend kleine Größe dx vorkommt, gegen die anderen zu vernachlässigen, und wir erhalten, indem wir

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=R} = -\frac{p_a - p_e}{2\eta L} R$$

einsetzen,

$$A = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} R^2 + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon L} R$$

und damit

$$v = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon L} R.$$

Wird die Wandfläche von der Flüssigkeit benetzt, so haftet die letzte Schicht fest an derselben, es ist die äußere Reibung ε unendlich groß; in dem Falle fällt das letzte Glied aus, es wird

$$v = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} (R^2 - x^2).$$

Das in der Zeiteinheit aus der Röhre austretende Flüssigkeitsvolumen erhalten wir in folgender Weise. Es ist v die Geschwindigkeit des Zylinders von der Dicke dx und dem Radius x, somit liefert uns $v \cdot 2\pi x dx$ das diesem Hohlzylinder entsprechende Volumen, das in der Zeiteinheit aus der Röhre austritt. Das gesamte austretende Volumen V erhalten wir in der Summe der in den einzelnen Hohlzylindern, deren Radien zwischen $x = 0$ und $x = R$ enthalten sind, austretenden Volumina, somit in dem Integral

$$V = \int_0^R \left(\frac{p_a - p_e}{4\eta L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon L} \cdot R\right) 2\pi x dx$$

$$V = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} \cdot 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2 + 2\frac{\eta}{\varepsilon} R\right) x dx.$$

Da an der untern Grenze $x = 0$ alle Glieder dieser Summe gleich Null sind, so wird

$$V = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} \cdot 2\pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} + \frac{\eta}{\varepsilon} R^3\right) = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta L} \left(R^4 + 4\frac{\eta}{\varepsilon} R^3\right).$$

Bei solchen Flüssigkeiten, bei denen die Wandschicht in Ruhe also die äußere Reibung ε unendlich groß ist, fällt das zweite Gl der Klammer des letzten Ausdrucks fort und es wird

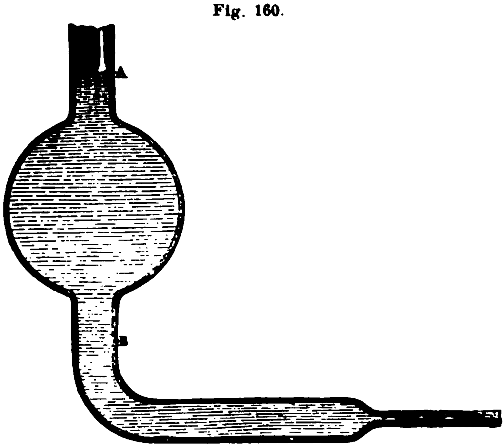
$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta L} R^4 .$$

Das aus der kapillaren Röhre ausfließende Volumen ist dem die sigkeit treibenden Drucke und der vierten Potenz des Radius der direkt, der Länge der Röhre und der innern Reibungskonstante der sigkeit umgekehrt proportional.

Schon die Versuche von Hagen[1]) und besonders von Poiseu welche vor Kenntnis der Theorie Versuche über den Ausfluß von F keiten durch enge Röhren angestellt haben, führten zu einem gan sprechenden Ausdruck für die durch kapillare Rohre fließende Flüssi menge, weshalb auch die durch obige Gleichung gegebene Beziehu Poiseuillesche Gesetz genannt wird.

Das von Poiseuille angewandte Verfahren, welches mit ge Modifikationen zu allen ähnlichen Versuchen benutzt wird[3]), ist fol Eine Glaskugel ist mi Ansatzrohren A und B sehen (Fig. 160), welc A und B eine Marke der Raum zwischen Marken ist genau aus sen. Die Röhre A k Verbindung gesetzt wer einem großen Gefäße, d komprimierter Luft gefü und in welchem man den konstant hält. Die Röhre ist etwas unterl umgebogen und an da derselben werden die laren Röhren angeschl welche zu den Versuch nen sollen, deren Län Durchmesser also genau gemessen sind. Der Apparat wird durc saugen bis über A mit Flüssigkeit gefüllt und dann das Rohr A m mit komprimierter Luft gefüllten Gefäße in Verbindung gesetzt. Die und das kapillare Rohr werden dann in ein Glasgefäß getaucht, d derselben Flüssigkeit gefüllt ist, welche zu den Ausflußversuchen wird, da erfahrungsmäßig nur dann ein regelmäßiges nicht stoßweis fließen stattfindet.

Fig. 160.



Poiseuille beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, da

1) *Hagen*, Poggend. Ann. **46**. p. 423. 1841.
2) *Poiseuille*, Mémoires des Savants étrangers. T. IX. Poggend. A p. 424. 1845.
3) Man sehe unter andern *Wiedemann*, Poggend. Ann. **99**. p. 221 *Ostwald*, Lehrb. der allgem. Chemie. 2. Aufl. 1. p. 549.

ben den Marken A und B enthaltene Flüssigkeit ausfloß, indem er nzahl Sekunden bestimmte, welche erforderlich war, damit die Flüssigvon der Marke A zur Marke B sank.

Da die Zeiten, in denen ein gegebenes Volumen ausfließt, dem in Zeiteinheit ausfließenden Volumen umgekehrt proportional sind, so n die Zeiten, in welchen die Flüssigkeit von A bis B sinkt, dem te $p_a - p_e$ und der vierten Potenz des Radius umgekehrt, dagegen Länge der Röhre direkt proportional sein. Alle diese Beziehungen Poiseuille bei seinen Versuchen. Wir geben folgende mit Wasser ene Werte:

Länge der Röhre $L = 107{,}9^{mm}$. Durchmesser $0{,}135^{mm}$.

Höhe in mm der drückenden Wassersäule	Ausflußzeit in Sekunden. Beobachtet	Berechnet
1984	5664	5664
10 501	1069	1070
20 561	546	546
30 845	365	364
41 381	273	271

öhe der Wassersäule $1472{,}15^{mm}$. Durchmesser $0{,}252^{mm}$.

Länge der Röhre. mm	Ausflußzeit in Sekunden. Beobachtet	Berechnet
108,24	633	633
84,52	492	492
54,00	314	314.

Das Gesetz gilt, wie es auch der Theorie entspricht, welche Röhren olcher Länge voraussetzt, daß die Bewegung eine gleichförmige wird, mehr für kurze Röhren, so ergab eine Röhre von 9^{mm} Länge als ßzeit $71'',5$, nach obigen Zahlen hätte die Zeit $52'',63$ sein müssen. Das Gesetz der Radien zeigen folgende Zahlen:

Höhe der Wassersäule 1981^{mm}. Länge der Röhre $107{,}9^{mm}$.

Durchmesser $D_1 = 0{,}136$ Ausflußzeit $T_1 = 5664''$

" $D_2 = 0{,}252$ " $T_2 = 468'',5$

$$D_1^4 : D_2^4 = 471{,}57 : 5664.$$

erten Potenzen der Durchmesser verhalten sich demnach umgekehrt ie Ausflußzeiten.

ndem Poiseuille den Druck $p_a - p_e = H$ in Millimetern der drückenWassersäule, also in Milligramm pro Quadratmillimeter, die Längen L en Radius R in Millimeter ausdrückte, erhielt er das in einer Sebei der Temperatur 0^0 ausfließende Wasservolumen in mm^3

$$V = 2162{,}40 \frac{HR^4}{L} = \frac{\pi}{8\eta} \frac{(p_a - p_e) R^4}{L}$$

l also

$$2162{,}40 = \frac{\pi}{8\eta}$$

$$\eta = \frac{\pi}{8 \cdot 2162{,}4} = 0{,}000\,1816$$

den Wert für diese beiden Ringe erhalten wir, wenn wir den abgeleiteten Ausdruck mit 2 multiplizieren. Dann gibt uns das Integral

$$\int_0^R \frac{\eta}{M}\frac{d\psi}{dx}4\pi\varrho^3 d\varrho = \pi R^4 \frac{\eta}{M}\frac{d\psi}{dx}$$

die Verzögerung der Bewegung durch den Reibungswiderstand, den die Scheibe erfährt, wenn wir mit R den Radius der Scheibe bezeichnen.

An diesem Ausdrucke ist, im Falle die Dicke der Scheibe nicht außer acht gelassen werden darf, noch eine Korrektion wegen des an dem Umfange der Scheibe angreifenden Widerstandes anzubringen. Für den Umfang ist $\varrho = R$ und, wenn h die Dicke der Scheibe ist, für f einzusetzen $2\pi Rh$, so daß das Korrektionsglied wird

$$2\pi R^3 h \frac{\eta}{M}\frac{d\psi}{dx}.$$

Die sich so ergebende Verzögerung haben wir von der Beschleunigung, welche die bewegenden Kräfte dem System erteilen, abzuziehen, und erhalten dann für die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{2\gamma}{M}\frac{d\varphi}{dt} - \pi R^4 \frac{\eta}{M}\frac{d\psi}{dx}\left(1 + \frac{2h}{R}\right).$$

Bei großen dünnen Scheiben, wie sie zu solchen Versuchen benutzt werden, kann man das Glied $\frac{2h}{R}$ vernachlässigen.

Die ziemlich schwierige Behandlung dieser Gleichung, wegen deren wir auf die Abhandlung von Meyer verweisen[1]), ergibt, daß wir auch in dem Falle eine schwingende Bewegung erhalten, deren Amplituden nach einer geometrischen Reihe abnehmen, die also ein konstantes logarithmisches Dekrement zeigt. Das logarithmische Dekrement ist gerade wie in § 62 das Maß für die Verzögerung, es gibt also gleichzeitig den Widerstand der innern Reibung des Drahtes und den der Reibung in der Flüssigkeit.

Um den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit zu bestimmen, beobachtet man zuerst die Schwingung des Apparates in der Luft und dann jene, nachdem man die Scheibe in die Flüssigkeit gebracht hat. Aus der Differenz der logarithmischen Dekremente erhält man den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit in einem recht komplizierten mathematischen Ausdruck.

Die nach diesem Verfahren gemachten Beobachtungen liefern, nach den Meyerschen Gleichungen berechnet, nicht unerheblich größere Werte der Reibungskoeffizienten als die Methode des Ausflusses durch kapillare Röhren, wie sich sowohl aus den Versuchen von Meyer selbst als denen von Grotrian[2]) und Walter König[3]) ergibt. König[4]) ersetzte deshalb die von Meyer angewandten schwingenden Scheiben durch schwingende

1) *O. E. Meyer,* Crelles Journal. 59. Poggend. Ann. 113. p. 55. 1861.
2) *Grotrian,* Poggend. Ann. 157. p. 130 u. 237. 1876.
3) *Walter König,* Wiedem. Ann. 25. p. 618. 1885.
4) *König,* Wiedem. Ann. 32. p. 193. 1887

geln, für welche Kirchhoff die Bewegungsgleichungen abgeleitet hat, d für welche sich die Theorie vollständiger entwickeln läßt. Indem er n die von Boltzmann noch vervollständigten Kirchhoffschen Auslcke zur Berechnung benutzte, gelangte er zu dem Resultate, daß die ch der Coulombschen Methode erhaltenen Werte der Reibungskoeffizienten njenigen gleich werden, welche man mittels des Ausflusses durch kapillare hren erhält.

Folgende kleine Tabelle stellt die mit drei verschiedenen Kugeln für sser bei der Temperatur 17° erhaltenen Werte mit den aus Ausflußrsuchen abgeleiteten Werten zusammen.

Kugel	η	Ausflußversuche von		
Nr. 1	0,011 15			
„ 2	0,011 09			
„ 3	0,011 12	Poiseuille	Grotrian[1])	König[2])
Mittel	0,011 12	0,010 89	0,011 06	0,011 05

König hat dann auch eine Korrektion der Meyerschen Gleichungen geben, die wir kurz dahin angeben können, daß er statt des Trägheitsmentes M des schwingenden Systems einen größern und zwar von dem ibungskoeffizienten selbst abhängigen Wert einführt. Infolge der Reibung d nämlich auch eine gewisse Flüssigkeitsmenge mit in schwingende wegung gesetzt, so daß infolge der Reibung auch die Masse des wingenden Systems vergrößert wird. Daß infolgedessen die Beziehung schen dem logarithmischen von der Flüssigkeitsreibung herrührenden krement und dem Reibungskoeffizienten noch komplizierter wird, ernt man unmittelbar. Unter Anbringung dieser Korrektion ergeben n nach König bei etwa 17° folgende Werte der Reibungskoeffizienten:

Substanz.	Schwingung.	Ausfluß.
Wasser	0,011 20	0,011 05
Schwefelkohlenstoff	0,003 88	0,003 88
Äthyläther	0,002 56	0,002 54
Leichtes Benzol	0,005 23	0,005 26
Schweres Benzol	0,006 88	0,006 89
Terpentinöl	0,018 65	0,018 86.

Auch O. E. Meyer[3]) hat seine ältern Versuche mit der von König gegebenen Korrektion neu berechnet und erhält aus denselben für Wasser r gut mit den Poiseuilleschen übereinstimmende Werte.

Noch ein drittes Verfahren ist zur Messung des Reibungskoeffizienten n Flüssigkeiten zuerst von v. Helmholtz und Piotrowski[4]) und später n O. E. Meyer und Mützel[5]) angewandt worden. Dasselbe ist gewissermaßen die Umkehr des Coulombschen Verfahrens; während man n diesem Kugeln oder Scheiben in der zu untersuchenden Flüssigkeit wingen läßt, wendet man nach dem Verfahren von v. Helmholtz

1) *Grotrian*, Wiedem. Ann. 8. p. 536. 1879.
2) *König*, Wiedem. Ann. 25. p. 618. 1885.
3) *O. E. Meyer*, Wiedem. Ann. 32. p. 642. 1887.
4) *v. Helmholtz* und *Piotrowski*, Wiener Ber. 40. p. 607. 1860.
5) *O. E. Meyer*, Wiedem. Ann. 43. p. 1. 1891. *Mützel*, ebend. p. 15. 1891.

Hohlkugeln oder flache Hohlzylinder von ziemlich großem Durchmesser in welche die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt wird. Man vers gerade wie bei dem Coulombschen Verfahren den Apparat in Schwingung und bestimmt das logarithmische Dekrement derselben. Bestimmt m gleichzeitig das logarithmische Dekrement, wenn der Apparat ohne Flüs keit schwingt, so erhält man in der Differenz der beiden die von Flüssigkeitsreibung herrührende Dämpfung. Wie dieselbe entsteht, si man leicht. Würde die Flüssigkeit an den Wänden absolut nicht haft so würde dieselbe an der Bewegung nicht teilnehmen, da die beweger Kräfte zunächst nur das Gefäß antreiben. Haftet die Flüssigkeit an Wand, so wird zunächst die Wandschicht mitgenommen und von die infolge der Reibung die nächstfolgende Schicht, die Reibung übertr weiter die Bewegung auf eine dritte Schicht usf., so daß sich die Beweg bis zu einer gewissen Tiefe in der Flüssigkeit fortpflanzt, wobei die G schwindigkeit der Bewegung um so kleiner wird, je weiter die Schich von der Wand entfernt sind. Wir gehen auf die Theorie der Metho welche ebenso schwierig ist als die der Coulombschen und zu einem ni minder komplizierten Zusammenhang des Reibungskoeffizienten mit d Dekrement führt, nicht ein; wir bemerken nur, daß Mützel für 20° d Reibungskoeffizienten des Wassers gleich 0,010 14 findet, während d selbe aus den Beobachtungen von Poiseuille 0,010 09 bei dersel Temperatur ist.

Eine andere Methode wurde von Brodmann[1]) angewandt. einen weitern auf einer drehbaren Achse befestigten Zylinder wurde Zylinder von etwas kleinerem Durchmesser konaxial hineingehängt. I Aufhängung dieses Zylinders war eine bifilare (man sehe § 118), so d eine Drehung des Zylinders um seine Achse ein bifilares Torsionsmom bewirkte, welches den Zylinder in die umgedrehte Lage zurückzudrel strebte. Der Zwischenraum zwischen den beiden Zylindern wurde mit auf ihre Reibung zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt. Wurde d äußern Zylinder eine Rotation mit konstanter Geschwindigkeit erteilt, erhielt der innere Zylinder, wie genau dieselbe Überlegung wie bei Methode von v. Helmholtz ergibt, ein Drehungsmoment um seine Ach welches ihn soweit dreht, bis das durch die bifilare Torsion bewir Drehungsmoment dem dem innern Zylinder durch die Flüssigkeitsreib vermittelten gleich geworden ist. Um hier das Drehungsmoment zu halten, welches nur auf die Zylinderfläche wirkt, um also die Einwirk auf den Boden des Zylinders zu eliminieren, verfährt man so, daß m den Zylinder zunächst bis zu einer Höhe h_1 über der Bodenfläche eintau dann bis zur größeren Höhe h_2. Die Vergrößerung des Drehungsmoment im zweiten Falle ist dann der Reibung an der Zylinderfläche von Höhe $h = h_2 - h_1$ zuzuschreiben. Für das Drehungsmoment μ, welches innere Zylinder durch die Reibung an der Zylinderfläche von der H $h = h_2 - h_1$ erhält, ergibt die Theorie, wenn der äußere Reibungskoeffi zient ε nicht unendlich ist, also eine Gleitung an den Zylinderfläch stattfindet

1) *Brodmann,* Wiedem. Ann. 45. p. 159. 1892. Für konzentrische Ku lassen sich die Rechnungen nicht soweit durchführen, um nach diesem Verfah die Reibung zu messen.

$$\mu = \mu_2 - \mu_1 = \frac{4\pi\sigma_0\eta(h_2 - h_1)}{2\frac{\eta}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1^{3}} + \frac{1}{r_0^{3}}\right) + \left(\frac{1}{r_1^{2}} - \frac{1}{r_0^{2}}\right)}$$

orin σ_0 die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußern Zylinders, r_0 den adius des äußern, r_1 den Radius des innern Zylinders bedeutet. Ist $\varepsilon = \infty$, fällt das erste Glied des Nenners fort.

Brodmann wandte zu seinen Messungen einen Hohlzylinder von ,8985 cm Radius und 17,1 cm Höhe an und drei innere Zylinder, deren adien und Höhen waren

$r_1 = 1{,}2281$ cm	$H_1 = 14{,}321$ cm
$r_2 = 1{,}9079$ „	$H_2 = 14{,}321$ „
$r_3 = 2{,}4026$ „	$H_3 = 14{,}315$ „

Die Zylinder waren aus Messing gefertigt und vergoldet.

Wie es die Theorie verlangt zeigten sich die Drehungsmomente der tationsgeschwindigkeit proportional, die Reibungskoeffizienten also davon abhängig. Für Wasser bei der Temperatur von 15° ergaben sich die ibungskoeffizienten, dieselben berechnet unter der Voraussetzung, daß $= \infty$ ist,

für den Zylinder	1 : 0,011 317
„ „ „	2 : 0,011 143
„ „ „	3 : 0,010 485.

Die gefundenen Reibungskoeffizienten nehmen demnach mit wachsen m Radius des inneren Zylinders merklich ab. **Brodmann** schließt daraus, ß der Reibungskoeffizient ε von Wasser an polierten vergoldeten Flächen ht unendlich ist, daß also die letzte Schicht Wasser nicht an dem Me lle haftet, daß vielmehr Gleitung stattfindet, ein Schluß, den schon **Helmholtz** aus den Versuchen von **Piotrowski** gezogen hatte. In m man die Beobachtungen an zwei Zylindern also an den Zylindern m Radius r_1 und r_2 oder r_3 kombiniert, kann man η und ε gesondert be chnen. In dieser Weise fand **Brodmann** durch Kombination

von 1 und 2	$\eta_{12} = 0{,}01265$	$\varepsilon_{12} = 0{,}2220$	$\frac{\eta}{\varepsilon} = 0{,}0570$
„ 1 „ 3	$\eta_{13} = 0{,}01228$	$\varepsilon_{13} = 0{,}3001$	$\frac{\eta}{\varepsilon} = 0{,}0409$

ährend aus den **Poiseuilleschen** Versuchen sich für η bei 15° der Wert ,01145 ergibt.

Hiernach ergibt sich, daß die Schwingungsmethoden, falls man die echnungen soweit es geht durchführt, Werte ergeben, welche den nach er Ausflußmethode gefundenen gleich werden. Man muß deshalb der usflußmethode entschieden den Vorzug geben, da sie einfacher ist, mit eniger Flüssigkeit ausführbar, und da sie vor allem eine erheblich ge auere Temperaturregulierung und Bestimmung zuläßt. Sie ist deshalb mit Ausnahme der bei Besprechung der Methoden angeführten Versuche fast sschließlich zur Messung der Reibungskonstanten benutzt. Zu beachten st nur, daß die Röhren eine hinreichende Länge haben.[1]

1 Über die Gültigkeitsgrenzen des **Poiseuilleschen** Gesetzes sehe man Grüneisen, Wissenschaftliche Abhandlungen der physikalisch-technischen Reichsanstalt 4 Heft 2 p. 151. 1905.

Messungen über die innere Reibung sind besonders in der letzte Zeit in großer Zahl angestellt, von Rellstab[1]), Hübener[2]), Sprung[3]), Grotrian[4]), Pribram und Handl[5]), Slotte[6]), Wagner[7]), Arrhenius[8]), Noack[9]), Reyher[10]), Gartenmeister[11]), Lauenstein[12]), Heydweiler[13]) und besonders Thorpe nnd Rodger[14]) u. a. Dieselben beziehen sich auf eine große Zahl von Flüssigkeiten und Mischungen, auf Salzlösungen und auf die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur.[15]) Wir gehen auf die Resultate dieser Versuche nicht ein, da sie noch nicht zu allgemeinen Sätzen geführt haben.[16]) Auf die Reibung von Salzlösungen und ihre Beziehung zur elektrischen Leitungsfähigkeit kommen wir in der Elektrizitätslehre zurück.[17])

Die Abhängigkeit der Flüssigkeitsreibung vom Drucke besprechen wir § 118 bei der Reibung der Gase.

Ist die Konstante der Reibung der Flüssigkeiten an den festen Körpern nicht unendlich groß, so ist der Ausdruck für die durch kapillare Röhren ausfließende Menge, wie wir sahen,

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta L} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right),$$

es kommt also unter sonst gleichen Umständen ein von der dritten Potenz des Radius abhängiges Glied hinzu. Da Brodmann bei Wasser an Gold aus seinen Versuchen auf eine Gleitung schloß, so sollte man erwarten, daß für nicht benetzende Flüssigkeiten dieses Glied auch bei Ausströmungsversuchen aus Glasröhren in Rechnung zu ziehen sei. In der Tat glaubte Poiseuille bei dem Ausfluß des Quecksilbers durch gläserne Kapillarröhren zu finden, daß das für benetzende Flüssigkeiten aufgestellte Gesetz

1) *Rellstab,* Inauguraldissertation. Bonn 1868.

2) *Hübener,* Poggend. Ann. **150**. p. 248. 1873.

3) *Sprung,* Poggend. Ann. **159**. p. 1. 1876.

4) *Grotrian,* Poggend. Ann. **157**. p. 130. 1875; **160**. p. 238. 1877. Wiedem. Ann. **8**. p. 530. 1879.

5) *Pribram* und *Handl,* Wiener Ber. **78**. 1878; **80**. 1879.

6) *Slotte,* Wiedem. Ann. **14**. p. 13. 1881.

7) *Wagner,* Wiedem. Ann. **18**. p. 259. 1883. Zeitschrift für physikal. Chemie **5**. p. 31. 1890.

8) *Arrhenius,* Zeitschr. für physikal. Chemie. **1**. p. 285. 1887.

9) *Noack,* Wiedem. Ann. **27**. p. 289. 1886.

10) *Reyher,* Zeitschr. für physikal. Chemie. **2**. p. 524. 1888.

11) *Gartenmeister,* Zeitschr. für physikal. Chemie. **6**. p. 524. 1889.

12) *Lauenstein.* Zeitschr. für physikal. Chemie. **9**. p. 417. 1892.

13) *Heydweiller,* Wiedem. Ann. **55**. p. 561. 1895; **59**. p. 193. 1896; **63**. p. 1897.

14) *Thorpe* und *Rodger,* Phil. Trans. of London R. S. **185**. p. 397. 1894; p. 71. 1897. Über die Beziehungen zwischen der innern Reibung der Flüssigkeiten und ihrer chemischen Natur gibt *Thorpe* eine Übersicht in der Zeitschr. für physikal. Chemie. **14**. p. 361. 1894.

15) Eine Zusammenstellung der beobachteten Reibungskoeffizienten findet man in *Landolt-Börnstein,* Physikalisch-chemische Tabellen. **3**. Aufl. Berlin Springer 1905.

16) *Meyer* und *Rosencranz,* Wiedem. Ann. **2**, p. 387, 1877. Man sehe *Graetz,* Wiedem. Ann. **34**. p. 25. 1888.

17) Man sehe die wenigen allgemeinen für die physikalische Chemie wertbaren Sätze in *Ostwald,* Lehrb. d. allgem. Chemie. **2**. Aufl. **1**. p. 551 ff.

nicht mehr gültig sei. Genauere Versuche von Warburg[1]) haben indes gezeigt, daß auch für Quecksilber und Glas sich die ausgeflossene Menge darstellen läßt durch die Gleichung:

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta \cdot L} R^4,$$

wie z. B. folgende Beobachtung zeigt:

$$L = 871^{mm},5. \quad R = 0{,}223\,46. \quad \text{Temp.} = 17^0{,}25.$$

	$p_a - p_e$		Ausflußmenge in Milligr. pro 1″ beobachtet	berechnet aus 2
1.	$100^{mm},6$	Quecksilber.	126,5	127,1
2.	$193^{mm},3$	„	244,3.	

Setzen wir das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 17,2° gleich 13,55, so ergibt sich η aus der 2. Beobachtung

$$\eta = \frac{\pi \cdot 193^{mm},3 \cdot 13{,}55}{8 \cdot \frac{244{,}3}{13{,}55} \cdot 871{,}5}(0{,}223\,46)^4 = 0{,}000\,163\,29.$$

oder

$$\eta = 0{,}016\,019 \frac{gr}{cm \cdot sec}.$$

Es ergibt sich somit, daß auch bei nicht benetzenden Flüssigkeiten unendlich sein kann.

§ 90.

Konstitution des ausfließenden Strahles. Bisher haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Öffnung, aus welcher die Flüssigkeit ausfließt, eine kreisförmige sei, und daß somit der Strahl von der Stelle der größten Kontraktion an ein merklich zylindrischer sei. Ganz anders werden jedoch die ausfließenden Wasserstrahlen gestaltet, wenn man statt kreisförmiger Öffnungen andere, z. B. viereckige oder kreuzförmige Öffnungen anwendet. Die Gestalten dieser Strahlen sind vorzugsweise von Bidone[2]) und später von Magnus[3]) untersucht worden. Wir lassen hier einige der eigentümlichen Formen der aus eckigen Öffnungen ausfließenden Strahlen folgen, nach der Beschreibung, welche Magnus von ihnen gibt. Fig. 161a gibt die Ansicht eines Strahles, der aus einer viereckigen Öffnung ausfließt, deren eine Seite $2{,}6^{mm}$, deren andere 25^{mm} lang ist, gesehen in einer zur größern Seite senkrechten und Fig. 161b in einer zur kleinern Seite senkrechten Richtung. Fig. 162 zeigt die Gestalt eines aus einer kreuzförmigen und Fig. 163 eines aus einer quadratischen Öffnung $ABDC$ ausfließenden Strahles. Das Wasser zieht sich unter der Öffnung sehr rasch zusammen und es bilden sich rundliche Ränder $AeBt$ (Fig. 161a), die sehr scharf gegen den übrigen Teil der Fläche begrenzt sind. Diese erzeugen, wo sie zusammentreffen, die zur Fläche $ABte$ senk-

1) *Warburg*, Poggend. Ann. **140**. 1870.
2) *Bidone*, Memorie dell' Accademia di Torino. **34**.
3) *Magnus*, Poggend. Ann. **95**. p. 1. 1855.

rechte Fläche *tkGi* (Fig. 161b), die sich nach unten immer mehr sammenzieht und dann die Fläche $Gkh_{,}i_{,}$ entstehen läßt, und so fort, der Strahl zersplittert. Dieselbe Gestalt erhielt der Strahl, als anstatt einfachen Ausflußöffnung eine 20^{mm} lange Röhre von gleichem Quersch an das Gefäß gebracht wurde.

Bei den aus der kreuzförmigen Öffnung (Fig. 162) austretenden Stral geht das Wasser in vier sich kreuzenden Strahlen nieder, $Be_{,}$, $Be_{,,}$, Ce u

Fig. 161.

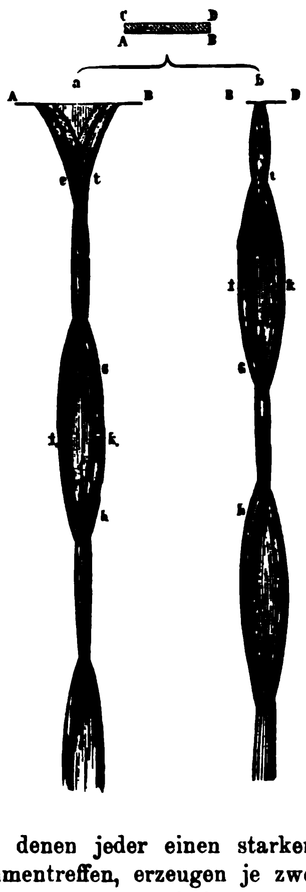


Fig. 162.

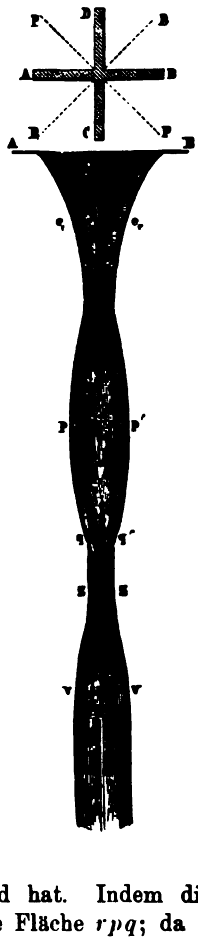
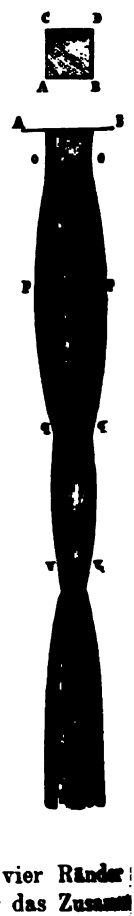


Fig. 163.



von denen jeder einen starken Rand hat. Indem diese vier Ränder sammentreffen, erzeugen je zwei eine Fläche rpq; da aber das Zusam treffen zentral stattfindet, wenn die Arme der kreuzförmigen Öffnung gl gleich sind, so halbiert jede Fläche den Winkel, den die Ränder einander machen, so daß die vier entstehenden Flächen, rpq, $r'p'q'$, Lage der zwischen AB und CD punktierten Linien p und p_1 ha Zwischen ihnen ziehen sich die Ränder Ce bis gegen G hinab. In durch diesen Punkt gehenden Horizontalen haben die Flächen rpq größte Breite. Unterhalb dieser Stelle nehmen sie wieder dicke Rä

durch deren Zusammentreffen neue Flächen zv entstehen. Da auch r die Ränder zentral zusammentreffen, so halbieren die Flächen zv die nkel der vorigen. Ihre Richtung fällt also wieder mit derjenigen der uzesarme zusammen.

Selten treten mehr als zwei solcher Flächensysteme auf, meist beginnt dem zweiten die Zersplitterung des Strahles.

Bei dem aus der quadratischen Öffnung $ABCD$ (Fig. 163) hervorenden Strahle erblickt man unter der Stelle der größten Zusammenürung vier Flächen opq, deren Verlängerungen durch die Mitte der en AB, $BD\cdots$ gehen und auf diesen senkrecht stehen.

Unter diesem liegt ein zweites Flächensystem, welches, wie in dem gen Falle, die Winkel des ersten halbiert, also mit der Richtung der gonalen des Quadrats zusammenfällt. Unter dem zweiten befindet sich drittes, dem ersten gleiches Flächensystem usf., so daß oft neun derger Systeme untereinander liegen.

Diese Formen, welche die Strahlen annehmen, die aus eckigen Öffgen fließen, zeigen auf das deutlichste den Einfluß der seitlichen egung der Flüssigkeit und der Molekularattraktion der Flüssigkeitsben, die wir bei den vorhin betrachteten Ausflußerscheinungen als nde Umstände ansahen. Denn diese beiden Umstände scheinen hinend, um die sonderbaren Gestalten der Strahlen zu erklären.

Die Flüssigkeitsteilchen haben alle bei ihrem Austritt aus der Öffnung horizontale gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit, he noch durch die früher betrachtete Oberflächenspannung an den n Seiten des Strahles vermehrt wird. Daraus ergibt sich die von Seiten nach innen gerichtete Bewegung der Flüssigkeit unmittelbar r der Öffnung: bei kreisförmigen Öffnungen ist die nach innen gete Geschwindigkeit der Flüssigkeit sowohl als der Widerstand, den Innere des Strahls derselben entgegensetzt, nach allen Richtungen h. deshalb zeigt sich dort die Einschnürung von allen Seiten ohne folgende Anschwellung; anders jedoch bei eckigen Öffnungen. Dort he Oberflächenspannung verschieden, und zwar ist sie am stärksten von Ecken aus, weil dort der Krümmungsradius am kleinsten ist, während übrige Fläche des Strahles eben, oder gar wohl konkav sein kann. r der Öffnung müssen daher vorzugsweise die von den Ecken der Öffnung menden Flüssigkeitsteile nach der Mitte zu sich bewegen, und es muß r der Strahl hauptsächlich von den Ecken aus zusammengeschnürt en. Daher treten die von den Seiten der Öffnung herkommenden sigkeitsteile über den Strahl heraus, und der Strahl muß einen der ang entgegengesetzten Querschnitt erhalten, dort seinen kleinsten hmesser haben, wo die Öffnung den größten hat, und umgekehrt. ieser Stelle kehren sich die Verhältnisse um; durch die Oberflächennung in den jetzt stärker gewölbten Teilen des Strahles erhalten die befindlichen Teile des Strahles eine nach innen gerichtete Bewegung, da, wie wir sahen, der Querschnitt des Strahles wegen der beschleun Bewegung abwärts immer kleiner wird, so wird jetzt die Zusammenirung hauptsächlich von den entstandenen Ecken des Strahles aus- und damit ein Heraustreiben der Flüssigkeit an den konkaven n des Strahles eintreten.

Die Erscheinung ist also wesentlich eine Folge der verschiedene
flächenspannung des Strahles, verbunden damit, daß wegen der zun
den, nach unten gerichteten Geschwindigkeit der Bewegung die T
Strahles überhaupt, so lange der Strahl zusammenhängt, das B
haben, sich der Mitte zu nähern, und daß deshalb die von den Ec
Öffnung niedergehenden Teile einen nur geringen Widerstand geg
horizontale Bewegung erfahren[1]).

Auch an Strahlen, welche aus einer kreisförmigen Öffnung hervo
beobachtet man meist Anschwellungen und Erscheinungen ähnlich
Von der Kontraktionsstelle abwärts ist der Strahl zunächst nahezu
drisch, und dabei massiv und ganz klar. In einiger Ent
von derselben ändert er aber sein Aussehen vollständig, er e
gestört, erfährt eine merkliche Anschwellung (Fig. 164) u
trübe, so daß es den Anschein hat, als bilde er keine
nuierliche Flüssigkeitsmasse mehr. Auf diese erste Ansch
folgt dann eine Stelle, wo der Strahl wieder zusammenge
ist, auf diese wieder eine Anschwellung und so fort. I
wechselnden Anschwellungen und Einschnürungen nennt ma
Savart[2]), der sie zuerst genauer untersuchte, Bäuche un
ten. Im Innern des Strahles scheint sich ein kontinui
Kanal herabzuziehen, gleichsam als Fortsetzung des m
Strahles über dem ersten Bauche.

Fig. 164.

Daß diese Anschwellungen und Einschnürungen übrige
anders beschaffen sind und von ganz anderen Ursachen he
als diejenigen, welche bei den aus eckigen Öffnungen
gehenden Strahlen auftreten, läßt sich leicht zeigen.

Zunächst kann man leicht erkennen, daß der Strahl an
unteren Stellen nicht mehr kontinuierlich ist, sondern
trennten Tropfen besteht. Wenn man nämlich ein Kar
horizontal sehr rasch durch einen Bauch des vertikal
gehenden Strahles hindurchführt, so findet man auf de
nicht einfach eine benetzte Linie, sondern statt dessen ein
benetzter Stellen, welche zeigen, daß aufeinander folgende
des Blattes von Tropfen getroffen sind. Hält man einen
oder ein Blech so in der Hand, daß es ein wenig in den
hineinreicht, so fühlt man, so lange es von dem glatten T
selben getroffen wird, einen gleichmäßigen Druck. Wird dasselbe
von einem Bauche getroffen, so fühlt man deutlich eine vibrieren
wegung. Daraus folgt unmittelbar, daß das Aussehen des Stra
dieser Stelle nur eine optische Täuschung sein kann, indem wi
die einzelnen Tropfen sehen, sondern nur den Gesamteindruck de
nacheinander an den einzelnen Stellen erscheinenden Tropfen erhal

Denn die einzelnen aufeinander folgenden Tropfen gehen ein
dem andern sehr rasch vor unserem Auge vorüber, jeder muß da
unserer Netzhaut den Eindruck einer vertikalen Linie machen, ger
eine leuchtende Kohle, wenn sie rasch im Kreise geschwungen wi

1) *Buff,* Poggend. Ann. **100**. p. 168. 1857.
2) *Savart,* Annales de chim. et de phys. **53**. p. 337. 1833.

nes feurigen Kreises macht: oder wie wir an einem rasch sich Rade nicht mehr die einzelnen Speichen sehen, sondern eine den Radkranz ausfüllende Fläche. Wenn nun ein Tropfen am ir gefallen ist, so folgt ihm sofort ein zweiter und der von dem fen hinterlassene Eindruck setzt sich fort und so weiter. Wir ach die Konturen aller aufeinander folgenden Tropfen als einen chen Strahl. Daraus folgt weiter, da wir abwechselnd Bäuche wahrnehmen, daß die Tropfen sich abwechselnd verbreitern ern, daß sie in der Mitte der Bäuche am breitesten und in den schmalsten sein müssen.

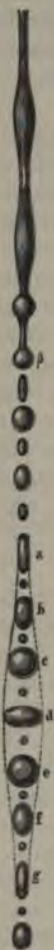
ann dies sehr deutlich wahrnehmen, wenn man den Strahl so daß man ihn immer nur eine sehr kleine Zeit wahrnimmt, so l dieser Zeit die Tropfen ihre Stelle fast gar nicht ändern. n mehrere Mittel, welche wir später kennen lernen werden; ist die Beobachtungsmethode von Magnus[1]. In eine kreis-eibe von 250^{mm} Durchmesser wird ein Spalt von 1^{mm} Breite tung eines Radius eingeschnitten. Die Scheibe wird dann auf ihren Mittelpunkt gehenden Achse befestigt und in eine sehr ion versetzt, so daß sie 20 bis 25 Umdrehungen in der Se-. Man stellt das Auge und die rotierende Scheibe so, daß rahl sieht, wenn die Spalte dem Strahl parallel steht. Man rahl dann nur so lange, aber jedesmal, wenn die Spalte vor ergeht. Da die Spalte nur ein Millimeter breit ist, so beträgt der ganzen Kreisfläche und da die Scheibe 20 bis 25 mal in rotiert, so ist die Spalte nur $\frac{1}{15600}$ bis $\frac{1}{19500}$ Sekunde vor dem ieser kurzen Zeit ändert aber der einzelne Tropfen seine Stelle h und deshalb sehen wir sie einzeln, als wären sie unbeweg-er ferner die Spalte 20 bis 25 mal in der Sekunde an unserem rgeht, so sehen wir das einzelne Bild 25 mal in der Sekunde, es daher ununterbrochen zu sehen.

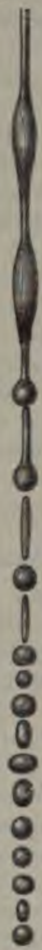
nan auf diese Weise einen mit Bäuchen versehenen Strahl be-erhält man das Bild Fig. 165. Man sieht, wie der Strahl aus nen Tropfen besteht, von denen man aber zwei Arten unter n. Die einen sind sehr klein und kugelrund in der Achse des bilden den erwähnten innern Strahl, um den sich die Bäuche Die andern sind viel größer, sie wechseln mit den ersten, eichen Abständen voneinander stehen, ab und haben eine sehr Gestalt. Man sieht zunächst unter dem kontinuierlichen Teile wie die Tropfenbildung eintritt, der Strahl zeigt Schwellungen lrungen, die bei β in einzelne Tropfen übergehen: die Ein-werden zu den vorhin erwähnten kleinen Tröpfchen, die An-zu den großen. Diese haben zuerst eine in die Länge gezogene ann verkürzen sie sich, indem sie zugleich breiter werden *b*, kugelförmig, bei *d* sind sie in vertikaler Richtung abgeplattet orizontalen am stärksten ausgedehnt, bei *e* wieder mehr kugel-und noch mehr bei *g*, wo man den Knoten wahrnimmt, in die

[1] us, Poggend. Ann. 106. p. 1. 1859.

Länge gezogen. Von da ab wiederholen sich die Gestalten $a - g$,
Strahl unterhalb der Bäuche auseinandergeht, und zwar treten d
Gestalten immer an derselben Stelle auf. Daß die Gestalt des
deshalb die vorher beschriebene sein muß, geht unmittelbar au
Gruppierung der Tropfen hervor. Es fragt si
wie entsteht diese Erscheinung.

Fig. 165. Fig. 166.





Wir erwähnten vorhin, daß nicht immer
aus kreisförmigen Öffnungen hervorfließenden
diese Anschwellungen sich zeigen, sondern daß
Strahl eine nahezu zylindrische Gestalt habe. A
in diesem findet, wie Magnus[1]) nachwies, die T
bildung statt, und zwar etwas tiefer als dort,
dann eintritt, wenn sich Bäuche zeigen. Ein
zylindrischer oder vielmehr schwach konischer
bietet nach Magnus ein Bild, wie Fig. 166. A
sind die Tropfen bald länger, bald breiter, a
Formen wechseln nicht regelmäßig, deshalb ist d
mit Bäuchen versehene Strahl auch an der
Strecke nur breiter als an der obern. Die T
bildung ist daher allen diesen Strahlen gemeins
trachten wir sie zuerst.

Die Tropfenbildung ist Folge der beschleuni
schwindigkeit der herabfallenden Flüssigkeit; inde
soviel Flüssigkeit oben ausfließt, als unten no
ist, um den Strahl als ein Kontinuum zu erhal
splittert der Strahl und dadurch bilden sich inf
Oberflächenspannung Tropfen.

Daß diese Erklärung die richtige sei, folgt
Beobachtung des aus einem mit einer Hahnöffn
sehenen Gefäße tropfenweise ausfließenden Wass
nächst sammelt sich das Wasser an der Hahn
an, verlängert sich dann in einen Tropfen; dar
eine Einschnürung ein und der Tropfen fällt her
herabfallende Tropfen strebt infolge der Oberfläc
nung eine kugelförmige Gestalt anzunehmen u
oscilliert er, so daß er abwechselnd in die Lä
zogen, abwechselnd abgeplattet erscheint.[2]) Die E

---

1) *Magnus* a. a. O.

2) *Lenard* hat die Schwingungsdauer fallender
benutzt, um die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten zu messen. Se
die Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, in welcher der Tropfen aus der
Fig. 165 wieder in dieselbe Form g Fig. 165 zurückkehrt, gleich T, so
Theorie für die Oberflächenspannung α, wenn p das Gewicht des Tropfe
die Fallbeschleunigung ist

$$\alpha = \frac{3}{8}\pi\frac{p}{g\,T^2}.$$

Das Tropfengewicht p bestimmte *Lenard*, indem er aus einer engen Öff
Flüssigkeit in einzelnen Tropfen ausfließen ließ, eine Anzahl Tropfen
untergestellten Fläschchen auffing und das Gewicht der aufgefangenen

ung bildet dann mehrere kleine Tropfen. In diesem Falle, wo die Ausflußmenge von Anfang an nicht so groß ist, um einen kontinuierlichen Strahl zu bilden, tritt die Tropfenbildung von Anfang an auf.

Ferner. Plateau zeigte, wenn man den § 81 beschriebenen in einem Alkoholgemische gebildeten Ölzylinder durch Entfernung der beiden Drahtreise, zwischen denen er gebildet war, verlängert, daß er dann, wenn man eine gewisse Grenze überschreitet, zerreißt. Unmittelbar vorher bilden sich abwechselnde Einschnürungen und Anschwellungen, deren letztere große Tropfen bilden, während an Stelle der Einschnürungen kleine Tropfen auftreten. Also auch hier, wo die Flüssigkeit nicht mehr ausreicht, um einen kontinuierlichen Zylinder zu bilden, diese Tropfenbildung infolge der Oberflächenspannung.

Wenn nun in allen aus kreisförmigen Öffnungen ausfließenden Strahlen die Tropfenbildung das Gemeinsame ist, so müssen noch besondere Umstände auftreten, um einmal die regelmäßige Folge derselben hervorzubringen, ein andermal nicht. Savart[1]) und Magnus[2]) haben diese nachgewiesen; sie zeigten, daß der Strahl die Gestalt Fig. 166 hat, wenn die Ausflußöffnung ganz ruhig ist und keine zitternde Bewegung besitzt, daß aber jedesmal, wenn man derselben eine zitternde regelmäßige Bewegung mitteilt, die Bäuche auftreten. Savart hing, um dieses zu zeigen, das Gefäß an Fäden schwebend auf, so daß es nicht erschüttert werden konnte, und der Strahl hatte die Gestalt Fig. 166; wurde aber durch das Anstreichen eines Violoncells in der Nähe das Gefäß und damit die Bodenplatte in regelmäßige Vibrationen gebracht, so traten sofort die Bäuche in schönster Regelmäßigkeit auf. Magnus zeigte dasselbe durch einen noch entscheidenderen Versuch. Die Ausflußöffnung wurde in eine Messingscheibe eingeschnitten, und diese durch eine Kautschukröhre auf eine Hülse befestigt, welche aus dem Boden des mit Flüssigkeit versehenen Gefäßes herabhing. Die Messingscheibe, in der sich die Ausflußöffnung befand, wurde dann auf ein Paar Kissen von Wolle gelegt, die auf eine feste Unterlage gelegt waren. Wurde nun das Gestell, auf dem das Ausflußgefäß stand, in eine regelmäßig vibrierende Bewegung versetzt, so zeigten sich keine Bäuche, weil die Vibrationen des Gefäßes sich nicht durch den Kautschuk zur Bodenplatte fortpflanzen konnten; wenn aber die Platte, in der die Ausflußöffnung angebracht war, mit dem Gestell in feste Verbindung gebracht war und somit vibrierte, so traten sofort die Bäuche auf.

Wie nun infolge dieser Vibration das regelmäßige Abreißen der Tropfen und damit die Bäuche entstehen, erklärt Magnus folgendermaßen. Indem der Rand der Ausflußöffnung regelmäßig auf- und niedergeht, wird die Geschwindigkeit des ausfließenden Strahles abwechselnd beschleunigt und verzögert. Durch diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen entstehen die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen, die in größerer Tiefe die Trennung in einzelne regelmäßige Tropfen

st bestimmte. Der Quotient aus diesem Gewicht und der Tropfenzahl ist das Gewicht des einzelnen Tropfens. Die Schwingungsdauer ergab sich aus der Fallhöhe des Tropfens, ag Fig. 165, während der Dauer einer Schwingung. Wegen des übrigen verweisen wir auf die Arbeit von *Lenard*, Wiedem. Ann. 30. p. 209. 1887.

1) *Savart* a. a. O.

2) *Magnus* a. a. O.

zur Folge haben. Sind diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen nicht vorhanden, so fehlen die Bäuche und das Abreißen findet in größerer Entfernung von der Öffnung und viel weniger regelmäßig statt. Wahrscheinlich trägt die geringere Entfernung, in welcher, wenn Bäuche vorhanden sind, die einzelnen Massen abreißen, nicht unwesentlich zu jener Regelmäßigkeit bei, da alle Bewegungen in einem Strahl in geringerer Entfernung von der Öffnung regelmäßiger sind als entfernt davon.

Noch auffallender und interessanter zum Teil sind die Formen, welche Flüssigkeitsstrahlen bilden, wenn sie durch feste Körper oder andere entgegenkommende Strahlen gestört werden; man sieht diese Erscheinungen häufig in Gärten als Zierrat benutzt. Das Wasser wird nämlich von den festen Körpern nicht regelmäßig zurückgeworfen, wie wir das bei den festen Körpern fanden, sondern breitet sich in oft höchst sonderbaren Formen aus. Es würde uns jedoch zu weit führen, darauf einzugehen, deshalb verweisen wir auf die Abhandlungen von Magnus[1]) und Savart[2]).

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

§ 91.

Allgemeine Beschaffenheit der Gase. Wir lernten § 47 außer der festen und flüssigen Aggregatform noch eine dritte kennen, in welcher Körper vorkommen können, die gasförmige. Diese definierten wir dahin, daß sie weder eine selbständige Gestalt wie die festen Körper, noch ein selbständiges Volumen wie die flüssigen Körper besitzen, sondern sich so weit ausbreiten, bis ein äußeres Hindernis sie zurückhält.

Wir können uns leicht durch Beobachtung und Versuche davon überzeugen, daß wir überall von einem Körper dieser Aggregatform, der Luft, umgeben sind; wir atmen sie ein, fühlen ihre Strömungen im Winde und ihren Widerstand bei raschen Bewegungen.

Wenn man eine scheinbar leere Glocke so in Wasser taucht, daß ihre ganze Basis zugleich die Wasserfläche berührt, so vermag nur wenig Wasser in die Glocke einzudringen, auch wenn wir sie so tief in das Wasser hineindrücken, so daß sie ganz unter Wasser steht. Wir müssen daraus schließen, daß die Glocke mit etwas erfüllt ist, was dem Eindringen des Wassers sich entgegensetzt. Neigen wir die Glocke, indem wir aber dafür sorgen, daß die Basis derselben stets unter Wasser bleibt, so weit, daß das Niveau der in die Glocke eingedrungenen Flüssigkeit an einer Stelle den Rand der Glocke nicht mehr erreicht, so sehen wir bei fernerem Niederdrücken, wie aus ihr durch das Wasser große Blasen aufsteigen und wie dann das Wasser höher in die Glocke einsteigt. Noch deutlicher wird dieser Versuch, we-

1) *Magnus* a. a. O. und Poggend. Ann. **80**. p. 1. 1850; **105**. p. 1. 1858.
2) *Savart* a. a. O. und Ann. de chim. et de phys. **54**. p. 55 u. p. 113; p. 257. 1833.

wir die Glocke oben mit einem Hahn versehen. Solange der Hahn geschlossen ist, kann das Wasser in die Glocke nicht eindringen, öffnen wir aber denselben, so dringt beim Niederdrücken das Wasser ein, zugleich bemerken wir aber, wie aus der Hahnöffnung die Luft hervordringt, indem wir ihren Stoß fühlen oder sehen, wie leichte Körperchen durch den hervordringenden Luftstrom fortgerissen werden.

Dieser Versuch beweist auf das evidenteste sowohl das Vorhandensein als die Körperlichkeit der Luft, indem er uns beweist, daß in einen mit Luft erfüllten Raum ein anderer Körper nicht eindringen kann.

Durch einen ebenso einfachen Versuch können wir uns überzeugen, daß die Luft eine Flüssigkeit ist, daß ihre Teile frei beweglich sind. Denn kehren wir die Glocke um, so daß ihre Basis nach oben gerichtet ist, so können wir flüssige und feste Körper leicht hineinbringen. Die eingebrachten Körper verdrängen die Luft ebenso leicht, wie eine Flüssigkeit, in die man sie eintaucht, oder wie eine schwerere die leichtere Flüssigkeit verdrängt, mit welcher sie sich nicht mischt. Wir müssen daher die Luft als eine Flüssigkeit betrachten und ihren Teilen dieselbe freie Beweglichkeit zuschreiben, wie den einzelnen Teilen der Flüssigkeiten.

Dasselbe zeigt uns der geringe Widerstand, den die Bewegung der Körper in einem mit Luft erfüllten Raume erfährt, der noch um vieles geringer ist als der Widerstand, den eine Bewegung in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume findet.

Daß die Luft kein selbständiges Volumen besitzt, zeigt folgender Versuch. Man kann eine Blase leicht zum Teil mit Luft anfüllen. Bringt man sie dann in eine Glocke, aus der wir durch einen später zu beschreibenden Apparat, die Luftpumpe, die Luft fortschaffen können, so zeigt die in der Blase enthaltene Luft das Bestreben, sich auszudehnen, indem die Blase sehr bald vollständig gespannt ist, und selbst durch die ausdehnende Kraft der in ihr eingeschlossenen Luft zersprengt werden kann.

Die Luft hat demnach keine selbständige Gestalt, sie dehnt sich aus, bis sich ihrer Ausdehnung ein äußerer Widerstand entgegensetzt. Da nun dieselbe eine Flüssigkeit ist, so nennt man sie dieser Eigenschaft wegen eine ausdehnsame Flüssigkeit, eine expansibele Flüssigkeit, und die bisher betrachteten Flüssigkeiten im Gegensatz dazu tropfbare.

§ 92

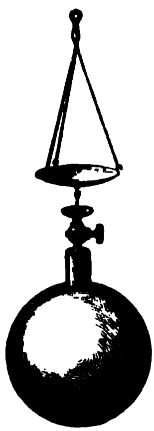
Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam haben. Da die Gase Flüssigkeiten sind, so folgt, daß sie eine Reihe von Eigenschaften besitzen, welche wir an den Flüssigkeiten kennen gelernt haben. Zunächst sind sie schwer wie alle Körper. Um dieses durch einen einfachen ohne weiteres verständlichen Versuch nachzuweisen, nehmen wir eine mit einem Hahne versehene Glaskugel von leichtem Glase, welche vielleicht 5—10 Liter Inhalt hat (Fig. 167), hängen sie an eine empfindliche Wage und bestimmen ihr Gewicht. Wenn wir dann die Kugel auf den bereits vorhin erwähnten Apparat bringen, mittels dessen wir die Luft aus ihr entfernen können, und die Luft aus ihr fortnehmen, so zeigt eine neue Wägung, daß nach Fortnahme der Luft die Kugel leichter ge-

worden ist, und zwar bei einer Kapazität von 10 Liter um ı 10 Gramm.

Die Luft und ebenso alle Gase, welche uns die Chemie kenn(sind demnach schwer wie alle Flüssigkeiten.

Wie bei den Flüssigkeiten nur dann Gleichgewicht war, w Druck auf ein Flüssigkeitselement im Innern von allen Seiten war, so auch bei den Gasen; im Zustande des Gleichgewichts erhl Gasmolekül von allen Seiten den gleichen Druck; ist derselbe : Richtung gestört, so tritt eine Bewegung ein. Dies zeigt sich ı dem zuerst erwähnten Versuche mit der Glocke. Hahn geöffnet wurde, während dieselbe in die Fl eingedrückt war, trat sofort ein Ausströmen der (da der von unten nach oben auf das in der Gl findliche Gas wirkende Druck größer war als der v nach unten gerichtete Druck. Von unten na drückte die über dem Flüssigkeitsniveau unter de erhobene Flüssigkeitschicht, und vielleicht ein äuß der Flüssigkeit lastender Druck; von oben nach u dieser letztere; deshalb drang die Luft aus de öffnung hervor.

Fig. 167.



Wenn wir auf ein in einem Gefäße eingesch Gas durch einen dem Gefäße genau anpassenden einen Druck ausüben, so muß wegen der flüssige der Gase dieser Druck sich nach allen Richtungen mäßig fortpflanzen, es muß demnach jedes Fläc von gleicher Größe auch einen gleichen Druck e Da nun die Gase, wie wir sahen, schwer sind, sich alles das, was wir bei den der Schwere unterworfenen Flüs fanden, auch hier und besonders in der uns uns umgebenden atm schen Luft wiederholen.

Denken wir uns zu dem Ende einen mehrere Meilen hohen : über der Erde erhoben, vollkommen verschlossen und vollständig ı erfüllt, und zerlegen wir dieses Gas in lauter sehr dünne ho Schichten, so können wir diese als ebensoviele Kolben betrachten, auf das darunter liegende Gas drücken. Der Druck wird daher v nach unten zunehmen; in irgend einer Schicht aber auf ein gleiches] stück überall gleich sein müssen, und zwar nach allen Richtungen ebenso nach allen Seiten auf die Wände des Zylinders, als auch na oder nach unten; derselbe ist gleich dem Gewichte der über dies befindlichen Luftsäule. Dieser Druck ist ganz unabhängig von de oder der Größe des Zylinders, vorausgesetzt nur, daß seine Höhe bleibt. Dieser letztere Umstand ist von bedeutender Wichtigkeit, dadurch berechtigt sind, unsere Schlüsse auf die unsere Erde um Atmosphäre auszudehnen. Die Atmosphäre ist eine Luftmasse, wel rings um die Erde als eine Schicht von über 100 Kilometer Dicke he und welche, wie die Chemie uns lehrt, ein Gemenge zweier gas Körper ist, von Sauerstoff und Stickstoff. Nach den vielfachsten A enthält sie um wenig mehr als 79 Teile Stickstoff (79,03) und nahe : Sauerstoff (20,97), und außerdem noch geringe Mengen anderer G

äure, etwas Wasserdampf, und wie man neuerdings gefunden hat, se Argon, Krypton, Neon und Xenon. Man nimmt an, die Atmo- sei von einer letzten Schicht begrenzt, welche wegen ihrer geringen keit und der Zentrifugalkraft auf die darunter liegenden Schichten Druck ausübt. Denn die Luft nimmt an der Umdrehung der Erde ist, Störungen abgerechnet, welche, durch Temperaturdifferenzen , in Luftströmungen sich zeigen, in bezug auf die Punkte der Erd- he unbeweglich. Mit der Höhe über der Erde muß daher die zen- e Beschleunigung zunehmen, und deshalb in einer gewissen leicht chnenden Entfernung von der Erde der Schwere gleich werden.

ir können demnach die Atmosphäre, indem wir von jenen Störungen , als ein im Gleichgewicht befindliches Flüssigkeitsmeer betrachten, sen Boden wir leben, von konstanter Höhe, und welches alle jene gen hervorbringt, welche eine tropfbare Flüssigkeit von geringer hervorbringen würde. Jede Fläche erfährt demnach einen Druck, a Gewichte der über ihr befindlichen Luft gleich ist; derselbe ist t in Schichten, welche mit der Erdoberfläche parallel sind; er ver- sich, wenn wir emporsteigen, nimmt zu, wenn wir uns der Erde An jedem Orte ist der Druck auf gleiche Flächenstücke derselbe, auch gerichtet sind, und bei verschiedenen Flächenstücken ihrer roportional. Er muß ferner derselbe sein im Zimmer wie in freier nd an einer und derselben Stelle bis auf die vorhin erwähnten en konstant sein.

e wir dazu übergehen, diesen Druck zu messen, wird es gut sein, die den Gasen und Flüssigkeiten gemeinsamen Eigenschaften noch zu betrachten.

wie ein in Wasser getauchter Körper an Gewicht verliert, so wird ets ein Teil des Gewichtes der Körper von der Luft getragen; in- r von der Luft umgebene Körper ebenso n seinem Schwerpunkt angreifenden nach richteten Druck erhält, der dem Gewicht ı ihm verdrängten Luft gleich ist. Der entelle Nachweis dieses Satzes ist nicht g, jedoch begnügen wir uns hier damit, eisen, daß überhaupt ein Gewichtsverlust en ist, und sehen die Größe desselben als he früheren Lehren bewiesen an. Wir wen- dem Ende eine kleine Wage an (Fig. 168), alken an der einen Seite eine große hohle von dünnwandigem Glase trägt, während andern Seite ein kleines Gewicht ihr das ewicht hält. Dieses kleine Gewicht ist auf Wagebalken verschiebbar, und man hängt es es der Kugel in der Luft genau das Gleich- hält. Darauf bringt man diesen Apparat unter die Glocke einer npe, und nimmt die Luft unter der Glocke fort. Man sieht dann, ı allmählich der Wagebalken nach der Seite der Kugel neigt, ein daß sie schwerer wird. Die mit dem kleinen Gewicht gleich große Kugel verliert in der Luft, da sie eine größere Menge Luft

Fig. 168.

aus der Stelle drängt, mehr an Gewicht als das kleine Messinggewicht; die Gewichtszunahme, wenn die Luft fortgenommen wird, ist daher bei ihr größer als bei dem kleinen Gewicht.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist die, daß uns die Wage nicht das wahre Gewicht der Körper gibt, sondern nur die Differenz zwischen dem Gewicht des Körpers und dem der verdrängten Luft. Nennen wir das wahre Gewicht eines Körpers X, sein Volumen v und das spezifische Gewicht der Luft s, so ist das Gewicht des Körpers in der Luft $X - vs$. Nennen wir das spezifische Gewicht der Körpersubstanz σ, so können wir schreiben

$$v = \frac{X}{\sigma}, \text{ somit für das Gewicht in der Luft } X\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right).$$

Die auf den Gewichtsstücken, mit denen wir den Körper abwägen, angegebenen Zahlen bedeuten deren Gewicht im luftleeren Raume. Haben wir den Körper mit P Gramm auf der Wage ins Gleichgewicht gebracht, so ist das Gewicht dieser P Gramm in der Luft, wenn γ das spezifische Gewicht des Materials der Gewichtsstücke ist

$$P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right).$$

Zur Berechnung von X haben wir daher die Gleichung

$$X\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) = P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)$$

$$X = P \cdot \frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1 - \frac{s}{\sigma}}.$$

Da $\frac{s}{\gamma}$ und $\frac{s}{\sigma}$ nur kleine Größen sind, so können wir ohne merklichen Fehler schreiben

$$X = P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right) = P\left(1 + s\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\gamma}\right)\right).$$

Man sieht demnach, das wahre Gewicht eines Körpers kann größer sein als das an der Wage gefundene, wenn $\sigma < \gamma$, oder kleiner, wenn $\gamma < \sigma$, also je nachdem das Volumen des abzuwägenden Körpers größer oder kleiner ist als das der Gewichtstücke.

Auch bei der Bestimmung des spezifischen Gewichtes muß diese Reduktion auf den luftleeren Raum vorgenommen werden. Für die Wägung des Körpers in Luft haben wir die eben abgeleitete Gleichung

$$X\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) = P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{a}$$

Nennen wir ω das spezifische Gewicht des Wassers, so erhalten wir unter der Annahme, daß bei der Wägung des in das Wasser eingetauchten Körpers die Dichtigkeit der Luft dieselbe ist, wie bei der Wägung, wird, wenn p das Gewicht ist, welches dem in das Wasser tauchenden Körper das Gleichgewicht hält

$$X\left(1 - \frac{\omega}{\sigma}\right) = p\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{b}$$

ividieren wir die Gleichung (a) durch (b), so wird

$$\frac{\sigma - s}{\sigma - \omega} = \frac{P}{p}$$

$$\sigma = \frac{P\omega - ps}{P - p}.$$

Diese Korrektion, welche wir anbringen müssen, um das wahre Ge-
icht eines Körpers zu erhalten, können wir erst später in der Wärme-
hre vollständig bestimmen, da die Größe s sich sehr bedeutend mit der
emperatur der Luft ändert. Hier sei nur soviel erwähnt, daß bei der
emperatur des schmelzenden Eises und 760^{mm} Barometerstand das Ge-
icht eines Liter (1000 Cent. kub.) Luft nach den Versuchen von Reg-
ault 1^{gr},293 beträgt, das spezifische Gewicht s der Luft also 0,001 293 ist.

Eine weitere wichtige Folge aus obigem Satze ist die, daß in der
uft gerade so wie im Wasser Körper schwimmen können, wenn das Ge-
icht der von ihnen aus der Stelle gedrängten Luft größer ist als ihr
genes Gewicht. Nennen wir s das spezifische Gewicht der Luft, s' das
es Körpers vom Volumen v, so ist gerade wie § 69 $v(s' - s)$ das
ewicht, welches die Körper fallen macht. Ist nun $s' > s$, so fällt der
örper zur Erde nieder, ist $s' = s$, so befindet er sich in der Luft im
leichgewicht, ist $s' < s$, so steigt er in der Luft auf.

Hieraus geht hervor, daß in der Wirklichkeit nicht alle Körper gleich
hnell fallen können, wie wir es im ersten Kapitel des ersten Abschnittes
raussetzten, da die Kraft, mit welcher sie zur Erde niederfallen, durch
e Einwirkung der Luft modifiziert, nicht einfach ihrem Gewichte propor-
onal ist; spezifisch leichtere Körper werden langsamer fallen müssen, als
hwerere.

Wir werden aber in der Luftpumpe ein Mittel kennen lernen, um
äume herzustellen, die keine oder nur sehr wenig Luft enthalten und
igen, daß in diesen ein Stückchen Papier ebenso rasch fällt, als ein
ückchen Platin.

Die letzte Bedingung $s' < s$ kann man herstellen, wenn man große
allons mit dünnen und leichten Wänden mit erwärmter Luft oder einem
ase anfüllt, welches spezifisch leichter ist als Luft, z. B. Wasserstoffgas
er Leuchtgas.

Um die Kraft, mit welcher der Ballon aufsteigt, zu erhalten, haben
r nur von dem Auftrieb des Ballons $v(s - s')$ das Gewicht p aller seiner
standteile abzuziehen, wir erhalten also dafür

$$v(s - s') - p.$$

Ist z. B. das Gas, mit dem der Ballon gefüllt ist, Wasserstoff, so ist

$$s = 0{,}001\,2932$$
$$s' = 0{,}000\,0895$$

i Null Grad Temperatur, und wir erhalten

$$0{,}001\,2037\,v - p$$

die Kraft, mit welcher ein solcher Ballon in der Luft emporgetrieben
rd in Kilogrammen, wenn v in Litern gegeben ist.

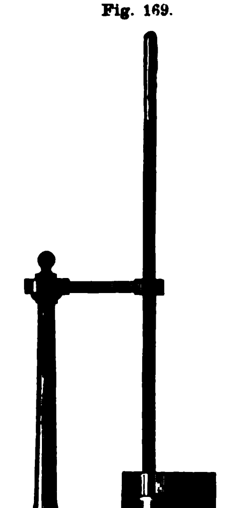
Die in neuerer Zeit vielfach benutzten Luftballons beruhen a Satze. Ein großer Schlauch von leichtem und doch dichtem Ze mit einem leichten Gase gefüllt, so daß selbst nach Anhäng Schiffchens usw. sein Gewicht noch kleiner ist als das der aus d gedrängten Luft. Ein solcher Ballon wird sich daher mit allem in der Luft erheben.

§ 93.

Das Barometer. Wir sahen in dem vorigen Paragraphen, auf dem Boden eines Luftmeeres uns befinden, und daß deshalb je einen ihrer Größe proportionalen Druck auszuhalten hat, der gleich Gewichte der Luftsäule, welche die Fläche zur Basis hat, der gleich ist derjenigen der Atmosphäre. Es bietet keine Schwierigk Tatsache durch den Versuch nachzuweisen und die Größe dieses zu messen.

Füllt man eine Röhre von ungefähr 1^{m} Länge ganz mit Qu an, schließt sie mit dem Finger, stellt sie in ein Gefäß mit Qu wie Fig. 169 und öffnet durch Wegna Fingers die Röhre unter Quecksilber, so Quecksilber in der Röhre, aber nur bis gewissen Punkte, so daß das Quecksilbe nern der Röhre ungefähr 760^{mm} höher außerhalb.

Fig. 169.



Daraus folgt nach den früher erkannte statischen Gesetzen, daß auf der äußern O des Quecksilbers ein Druck lastet, der in der Röhre nicht vorhanden ist und dem di silbersäule von 760^{mm} das Gleichgewicht h erkennen in diesem Drucke auf die äußer des Quecksilbers den Druck der äußern l wir durch die Füllung mit Quecksilber aus der Röhre vertrieben, so ist dort k äußern Luftdrucke gleicher Gegendruck. muß das Quecksilber gehoben werden und weit, daß der Druck der gehobenen Que säule dem Luftdrucke gleich ist. Die Quecksilbersäule mißt also die Schwere an Querschnitt gleichen Luftsäule, deshal man diesen Apparat ein Barometer.

Die Idee, mittels dieses Versuches die Existenz des Luftdruck zuweisen, rührt von Viviani (1644) her. Schon früh kannte Tatsache, daß in Röhren, aus welchen die Luft ganz oder teilwe genommen war, Flüssigkeiten emporsteigen. Man hatte diese Er zur Konstruktion der sogenannten Saugpumpen benutzt. Die E derselben suchte man aber nicht in einem Drucke der äußern Lu dern in dem horror vacui, man nahm an, daß die Natur einen vor dem leeren Raum habe, und daß infolge dieses Abscheues das W den Pumpenröhren aufsteige, wenn durch Hebung des Kolbens in d

rer Raum sich bilde. Auf das Unhaltbare dieser Erklärung wurde ufmerksam, als in Florenz ein Pumpenmacher eine Saugpumpe her- deren Saugrohr unter dem Bodenventil länger als 32 Fuß war; es nicht, mit derselben das Wasser höher als nahe 32 Fuß zu heben. der frühern Erklärungsweise hätte man annehmen müssen, daß die nur bis zu dieser Höhe einen Abscheu vor dem leeren Raume hätte. ei, an den man sich damals wandte, vermochte diese Schwierigkeit aufzuklären; erst sein Schüler Viviani erkannte die Ursache des ns des Wassers. Er schloß weiter, wenn der Luftdruck das Wasser einer Höhe von 32 Fuß oder 10,25^{m} heben kann, so kann er das silber, welches ungefähr 13,5mal schwerer ist, nur bis zu einer al kleinern Höhe oder nur bis ungefähr 28 Zoll = 760^{mm} heben. on Vivianis Freund, Toricelli, ausgeführte Versuch bewies die gkeit dieser Vermutung. Später zeigte dann Pascal in der Tat, ie Höhen, bis zu denen verschiedene Flüssigkeiten in so vorgerichteten n gehoben wurden, ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportio- ien, ein Beweis, daß ein bestimmtes Gewicht einer Flüssigkeit in Röhre von gegebenem Querschnitte gehoben wird, welches dem äußern e gleich ist.

§ 94.

Verschiedene Formen der Barometer. Dient das Barometer nur nauen Versuchen im Laboratorium, so daß es nicht von seiner Stelle ht zu werden braucht, und hat man ein Katheto- zu Gebote, so ist die Einrichtung desselben sehr h. Man wendet als Gefäß einen parallelepipedi- Glaskasten an, den man auf ein in der Zimmer- am besten vor einem Fenster angebrachtes festes tischchen fest aufstellt (Fig. 170). Das Rohr mittels zweier Klammern an einem Brett be- , welches mit dem Tischchen zugleich unten in mmerwand fest eingelassen ist, und welches oben r Stelle, wo sich der leere Raum des Barometers t, einen Ausschnitt erhält, so daß man hinter Barometer die helle Fensterfläche sieht.

Man mißt dann die Niveauunterschiede mittels athetometers. Um diese Messungen mit möglich- enauigkeit auszuführen, ist unten über dem Gefäß ift A angebracht, der mittels einer Schraube in esten Gestell gehoben und gesenkt werden kann. man die Messung machen will, beginnt man da- len Stift soweit herabzulassen, daß seine Spitze e das Quecksilber berührt. Man kann dieses mit rößten Genauigkeit erreichen, denn beim Herab- sieht man das Bild des Stiftes im Quecksilber len Stift selbst sich gegeneinander bewegen. Der berührt in dem Augenblicke das Quecksilber, wo beiden Spitzen genau aufeinander treffen. Schraubt

Fig. 170

man zu weit, so höhlt sich das Quecksilber rings um den Stift aus.] stellt man das Kathetometer zunächst auf die Quecksilberkuppe i Röhre ein, indem man den horizontalen Faden des Fadenkreuzes die Kuppe tangieren läßt. Man bemerkt den Stand des Kathetomete stellt dann unten auf das Niveau im Gefäße ein, indem man die des Stiftes wieder gerade das Fadenkreuz berühren läßt. Die Di beider Stellungen gibt die Höhe des Barometerstandes. Hat man die Länge des Stiftes genau gemessen, so kann man auch so ver daß man anstatt das Niveau des untern Quecksilbers mit dem Ka meter zu visieren, das obere En Stiftes bestimmt. Zur Differen beiden Ablesungen am Kathet fügt man dann, um den Baro stand zu erhalten, die Länge des S

Fig. 171

Fig. 172.

Dieses Barometer ist das ei ste, und diese Messungsmethode i genaueste, denn man kann auf Weise die Niveauunterschiede am s sten erhalten; mag das Baromete tikal stehen oder nicht, man immer den vertikalen Abstand beiden Quecksilberoberflächen. kann leicht die Höhe des Baromet auf ein Fünfzigstel Millimeter erh

Barometer von Fortin. D eben beschriebene Barometer ka doch nur an einem festen Orte b werden. Man bedarf aber in vielen Fällen transportabler Baro teils auf Reisen, um den Luftdru verschiedenen Orten zu messen, wie wir später zeigen werden, zu H messungen. Man muß daher da tragbares Barometer anwenden, welchem der Maßstab ein für al fest ist. Das vorzüglichste Gefäß meter der Art ist das Fortinsc

Das Gefäß desselben (Fig. besteht aus einem Glaszylinder, cher mit einem kupfernen D versehen ist, der in seiner Mitte Öffnung hat, um das Baromete durchzulassen. Der Glaszylinder in einem Zylinder von Buchsbaumholz, der mittels Stangen an dem D festgeschraubt ist. Der Boden dieses Buchsbaumzylinders ist aus e elastischen Sack gebildet, einem Beutel, dessen innere Seite aus nicht kanisiertem Kautschuk, dessen äußere aus Leder besteht, und der übe vorspringenden Rand des Zylinders von Buchsbaum fest aufgebunde Dieser Buchsbaumzylinder ist in einem weiten Metallzylinder fest e

t, durch dessen Boden eine Schraube hindurchgeht, deren oben ab-
ter Kopf gegen ein metallisches Stück drückt, welches in der Mitte
tels befestigt ist und in dessen nach unten gerichtete Höhlung der
er Schraube hineinpaßt.

s Gefäß ist bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt.
man die Schraube dreht, wird der elastische Boden des Gefäßes
mit die Oberfläche des Queck-
in dem Glaszylinder gehoben
senkt. Man ist daher imstande,
reau des Quecksilbers im Ge-
nmer auf gleicher Höhe zu
. Um diese zu markieren,
von dem Deckel des Glaszylin-
Elfenbeinstift *s* in den Zylin-
ab und man hat nur nötig,
so wie bei dem vorigen Baro-
lafür zu sorgen, daß die Spitze
ftes *s* und ihr Bild sich be-
indem man die Oberfläche des
lbers mit Hülfe der Schraube
hebt. Diese Spitze ist der
gspunkt der an dem Baro-
angebrachten Teilung.

s Barometerrohr reicht durch
der Mitte des Deckels ange-
Öffnung in das Gefäß hinein,
n Stück Leder, welches an
ohr und an den über den
hervorragenden Wänden der
angebunden ist, verschließt
soweit, daß kein Quecksilber
reten, aber die äußere Luft
dert mit der des Gefäßes kom-
ren kann. Das Rohr ist voll-
von einer Messinghülse um-
um es gegen Stöße zu schützen,
her nur, um den Stand des
lbers beobachten zu können,
wei gegenüberliegende Spalten
cht sind, die vielleicht zwei
ter unter und über den mittlern
des Barometers von 760^{mm} lang sind. Auf der Messinghülse ist
illimeterteilung angebracht, welche oben neben dem Rande der
steht und deren Nullpunkt die Spitze des Elfenbeinstiftes ist. Der
nd der Spalte ist gezahnt (Fig. 172) und mittels eines Triebes
n ein Nonius auf und ab verschiebbar. Will man eine Ablesung
, so beginnt man damit, unten das Niveau des Quecksilbers im
einzustellen. Dann verschiebt man den Nonius, indem man das
n der durch den untern Rand desselben gehenden Horizontalebene

Fig. 172.

hält, so lange, bis diese Ebene die Quecksilberkuppe tangiert, und hat nur die Stellung des in dieser Ebene liegenden Nullpunktes des Nonius an der Teilung zu bestimmen, um den Stand des Barometers bis auf Zehntel Millimeter genau zu erhalten. Das Barometer wird auf einem dreibeinigen Stativ, welches beim Transport zugleich als Kapsel dient (Fig. 173), so aufgehängt, daß es durch die Schwere des Gefäßes immer vertikal hängt. Dazu ist es mittels einer sogenannten Cardanischen Aufhängung befestigt, das heißt um zwei zu einander senkrechte Achsen drehbar. Das Barometer ist an dem Durchmesser eines Ringes drehbar befestigt, der selbst um einen zu jenem senkrechten Durchmesser drehbar ist.

Dieses Barometer ist sehr leicht transportabel und bietet so einen weitern Vorteil dar. Man schraubt dann das Quecksilber des Gefäßes in die Höhe, soweit, bis nicht nur das Gefäß, sondern auch das Rohr selbst ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Die vorher in dem Gefäße befindliche Luft tritt dann durch das Leder aus. Dann kann man den Apparat legen oder umkehren, ohne daß Luft in das Barometer eindringt, und ohne befürchten zu müssen, daß durch etwaige Stöße Schwankungen des Quecksilbers eintreten, so daß durch den Stoß des Quecksilbers das Glas entzwei geht. Der zusammengelegte Dreifuß schützt als Kapsel das Barometer vor äußern Verletzungen.

§ 95.

Korrektion wegen der Kapillarität. Da in den bisher beschriebenen Barometern das Rohr stets in ein mehr oder weniger weites Gefäß mit Quecksilber taucht, so folgt aus den Sätzen der Kapillaritätslehre, daß in den Röhren wegen der kapillaren Depression das Quecksilber nicht so hoch steht, als es infolge des hydrostatischen Druckes tun würde. Wir müssen daher an den beobachteten Barometerständen eine Korrektion anbringen, indem wir die Depressionsgröße bestimmen und diese der beobachteten Barometerhöhe hinzufügen. Dies ist jedoch sehr schwierig. Wir sahen, daß die kapillare Depression abhängt von der Weite der Röhre und dem Winkel, unter dem die Flüssigkeitsoberfläche die Wandfläche schneidet. Wenn man aber nun den Winkel mißt, den die Quecksilberoberfläche mit der Wand bildet, so findet man denselben, wie wir bereits früher erwähnten, keineswegs konstant; ja die Schwankung ist im Barometer, selbst wenn man durch Klopfen an der Barometerröhre oder durch Neueinstellung des Fortinschen Barometers die Kuppe bewegt, noch viel bedeutender als sonst, es kommt vor, daß der Winkel nahezu ein rechter wird, wo dann gar keine Depression eintritt. Die Depression des Quecksilbers kann demnach in Röhren gleichen Durchmessers sehr verschieden sein, und man kann keine allgemein gültigen Tabellen aufstellen, um die Depression für Röhren von bestimmtem Durchmesser zu bestimmen. Man wird für jedes Barometer den Durchmesser der Röhre und für jede Beobachtung die Höhe des Meniskus messen, daraus den Winkel bestimmen müssen, unter dem die Quecksilberoberfläche die Wandfläche schneidet, und daraus dann die Depression berechnen. Um das leichter zu machen, sind verschiedene Tabellen berechnet, welche nach den Formeln von La Place

ie Depressionen bei verschiedenen Winkeln und Röhrendurchmessern anzugeben. Eine solche von Delcros berechnet findet sich im XIV. Bande der Memoiren der Brüsseler Akademie. Mit den Tabellen von Delcros sind keineswegs die von Mendelejeff und Fräulein Gutkowski neuerdings[1]) äußerst sorgfältig bestimmten Depressionen in Übereinstimmung. Aus den von diesen angegebenen Werten hat F. Kohlrausch[2]) folgende Tabelle abgeleitet, welche für die in der ersten Spalte angegebene Röhrenweite D für die über den folgenden Spalten angegebene Kuppenhöhe die Depressionen angibt.

D mm	Höhe der Kuppe mm							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,64	1,98	2,37	—	—	—
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80	—	—
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,53	—
7	0,18	0,28	0,40	0,58	0,67	0,82	0,97	1,13
8	—	0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9	—	0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10	—	—	0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11	—	—	0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12		—	0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13		—	0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

Man sieht, wie die Depression mit zunehmender Röhrenweite rasch abnimmt, bei einem Röhrendurchmesser von 20^{mm} ist sie selbst bei einer Kuppenhöhe von mehr als 2^{mm} schon innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Wenn man die Röhre noch weiter, bis zu 30^{mm} macht, so ist der Fehler stets verschwindend klein. Deshalb wendet man bei den Normalbarometern, die ein für allemal fest aufgestellt sind, Röhren von solchen Durchmessern an. Bei den transportabeln ist jedoch eine solche Weite wegen des zu großen Quecksilbergewichtes nicht anwendbar. Um an diesen mit größerer Sicherheit als nach den Tabellen die Korrektion anbringen zu können, wird man am besten tun sie längere Zeit mit einem Normalbarometer zu vergleichen, um so für jede vorkommende Kuppenhöhe die kapillare Depression direkt zu bestimmen.

§ 96.

Heberbarometer. Von den bisher beschriebenen Barometern, den Gefäßbarometern, unterscheiden sich die Heberbarometer. Dieselben bestehen aus einer heberförmig gebogenen Glasröhre, deren langer Schenkel oben geschlossen und deren kurzer Schenkel oben offen ist. Sind die Röhren an der Stelle, wo die Quecksilberoberflächen sich befinden, gleich weit, und sorgt man in nachher anzugebender Weise für Gleichheit der

1 *Mendelejeff* und Frl. *Gutkowski*, Journal der Petersburger phys. Gesellschaft. 8. p. 212. Beibl. zu Poggend. Ann. 1. p. 455. 1877.
2 *F. Kohlrausch*, Leitfaden d. prakt. Physik. 7. Aufl. p. 413. Leipzig 1892.

Kuppen, so bedarf es bei ihnen keiner Korrektion wegen der Kap
so daß man bei der Unsicherheit dieser Korrektion mit diesen Bar
weit sicherere Resultate erhält.

Die Barometerhöhe ist, wie wohl nicht weiter abzuleiten is
dem Satze von den kommunizierenden Röhren die Höhendiffer
Quecksilberniveaus in den beiden Schenkeln.

Fig. 174.

Fig. 175.

In dem Falle aber ände
beide Niveaus des Quecksil
gleichem Maße und deshalb m
die Teilung in besonderer W
gebracht werden.

Kann man den Barome
mit dem Kathetometer bestim
bedarf es auch in diesem Fa
keiner Teilung, eine heberförn
bogene Glasröhre wird vor ein
Ausschnitten versehenen starke
befestigt (Fig. 174) und mitt
selben vertikal aufgehängt.
beiden Quecksilberoberflächen
vertikal untereinander zu bring
die Röhre meist noch einmal
gebogen. Eine einfache Ables
dem Kathetometer ergibt da
Barometerstand mit größter G
keit. Hat man kein Katheto
Gebote, so kann man zunäc
Teilung auf dem Glase anbringe
wird der Abstand zweier Punkt
b genau gemessen und der
als Nullpunkt der Teilung be
Sei die Entfernung *ab* gerade
760^{mm}, so wird man den Teil
mit 0 und *b* mit 760 bezeichne
und unter *a* sowie über und
werden dann eine Reihe von
chen gezogen. Um den Barome
zu erhalten, beobachtet man,
Teilstriche die obere und unter
des Quecksilbers über oder un
Nullpunkte steht, und die Diffe
der Ablesungen gibt den Barometerstand. In unserer Zeichnung
z. B. die untere Kuppe am Teilstriche 10 über dem Nullpunkte
obere bei 750 stehen, der Barometerstand wäre dann 750 — 10 =
Beim Ablesen hat man darauf zu achten, daß das Auge sich
Gipfel der Kuppe in der gleichen Horizontalebene befindet. Um
erhalten und zugleich um die Ablesung genauer zu machen, sind be
Apparaten an dem obern, sowie am untern Teile des Barometers v
bare, mit Fadenkreuz versehene kleine Mikroskope angebracht.

Anstatt die Teilung auf dem Barometerrohr selbst anzubringen, kann sie auch neben dem Rohre auf dem Brette angebracht werden. Ist das Rohr ein für allemal fest angebracht, und ebenso die Teilung fest, so erhält man den Barometerstand in gleicher Weise wie in dem vorigen Falle.

Häufig findet man an Barometern, um mittels einer Ablesung den Barometerstand zu erhalten, das Rohr oder die Skala verschiebbar angebracht. Ist wie in Fig. 175 das Rohr vertikal verschiebbar, so befindet sich auf dem Brette, auf welchem die Skala befestigt ist, der Nullpunkt der Teilung markiert. Man stellt dann mit Hülfe der Stellschraube das Rohr so, daß die untere Quecksilberkuppe gerade an dem Nullpunkte ansteht. Die an dem obern Teile des Barometers angebrachte Teilung ist von diesem Punkte aus aufgetragen und eine einmalige Ablesung ergibt den Stand des Barometers.

Ist die Skala verschiebbar, so wird der Nullpunkt derselben auf die untere Kuppe eingestellt.

Man hat den Heberbarometern, um sie besser und sicherer transportieren zu können, mancherlei Formen gegeben, deren Zweck ist, den offenen Schenkel zu verschließen, so daß kein Quecksilber heraus und keine Luft in den leeren Raum des Barometers hinein kann. Die Fig. 174 und 175 dargestellten Barometer werden durch ein mit Baumwolle umwickeltes Holzstäbchen geschlossen, nachdem man durch vorsichtiges langsames Neigen den leeren Raum ganz mit dem Quecksilber gefüllt hat. Das Stäbchen wird soweit herunter gedrückt, daß es ganz auf dem Quecksilber aufsteht, und dann das Barometer umgekehrt, damit das Gewicht des Quecksilbers das Stäbchen nicht heraufdrücke.

Einen vortrefflichen Verschluß bietet die Vorrichtung, welche der Berliner Greiner an seinem Heberbarometer angebracht hat (Fig. 176). Die innern Wände des langen und kurzen Schenkels gehen nicht ununterbrochen ineinander über, sondern der lange Schenkel ist mit dem kurzen durch den künstlichen Glasverband *aa* verbunden. Der längere Schenkel ist konisch ausgezogen und um diesen Konus liegt bei *a* angeschmolzen der ausgeweitete Teil des kürzeren Schenkels. Durch die Öffnung *b*, welche ungefähr 2^{mm} weit ist, kommuniziert der längere Schenkel mit dem kürzeren; der sie umgebende Raum ist stets mit Quecksilber gefüllt. Zum Transport wird das Barometer verschlossen, indem der Stopfen in die Verengerung *c* des kürzeren Schenkels hinabgeschoben und dessen Stil in der Messingfassung *d* des kürzern Schenkels festgeklemmt wird.

Fig. 177 *A* und *B* zeigt das Gay-Lussacsche Barometer, welches ebenfalls sehr leicht und sicher transportiert werden kann. Es besteht aus zwei Stücken einer gut zylindrischen Röhre, welche durch eine mehrfach gebogene enge Röhre so verbunden sind, daß die Quecksilbersäulen in den beiden Röhren gerade untereinander liegen. Das Gefäß des Barometers hat nur eine sehr kleine Öffnung bei *O*, die dadurch erhalten wird, daß man in die vor der Glasbläserlampe erweichte Röhrenwand hineinsticht. Zum Transport neigt man das Barometer langsam, bis der leere Raum ganz mit Quecksilber erfüllt ist, und kehrt dann das Barometer vollständig um. Dann füllt das Quecksilber den langen Schenkel bis *r* und das überschüssige fällt in den kürzeren Schenkel unter die Öffnung *O*, durch

welche es wegen der kapillaren Depression des Quecksilbers im Glase n austreten kann. Man sieht, daß das umgekehrte Barometer, da es v ständig bis r mit Quecksilber erfüllt ist, beim Transport keine Stöße leiden kann, und zugleich, daß durch die enge Röhre nicht wohl Luft den leeren Raum des Barometers gelangt.

Das Barometer von Bunten (Fig. 178) ist vor dem Eindringen von L noch mehr gesichert, indem über der untern Biegung der engern Rö eine weitere Röhre angebracht ist, in welche sich der obere Teil der en

Fig. 176.

Fig. 177.

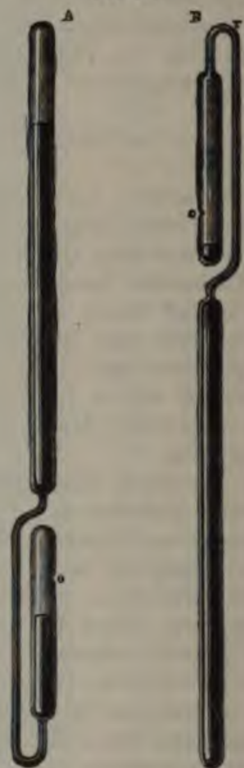


Fig. 178.

Röhre fortsetzt und in der er in einer feinen Spitze endigt; wenn nun eine Luftblase eindringen sollte, so legt sich dieselbe in den Raum, der Fortsetzung der engen Röhre umgibt, bei R und dringt nicht in den le Raum des Barometers.

Die drei letzten Barometer sind im übrigen gerade so wie die zu beschriebenen einfachen Barometer auf einem Brette oder an einem pas den Stativ befestigt; die Skala befindet sich meist auf dem Barometerr Gut ist es die Barometer stets in geneigter Stellung zu halten, und wenn man beobachten will, sie vertikal zu stellen. Die im kurzen Sche an der Luft stehende Oberfläche des Quecksilbers oxydiert sich näm mit der Zeit; infolgedessen wird die Kuppenbildung dort ganz unre

mäßig und es gelingt auch nicht durch Bewegen der Quecksilberoberfläche die Kuppenbildung regelmäßiger zu machen. Das gebildete Oxyd legt sich nämlich zum Teil an der Wand an und das Quecksilber adhäriert an dem mit Oxyd bedeckten Glase ganz anders als am reinen Glase. Ist das Barometer geneigt, so ist die Quecksilberoberfläche an einer tieferen Stelle des Rohres und das Oxyd setzt sich dort an; wird das Barometer senkrecht gestellt, so kommt die jedesmal sich frisch bildende Quecksilberoberfläche stets an reine Stellen der Glasröhre und die Kuppenbildung ist regelmäßig, sodaß bei Gleichheit der Röhrenweite im offenen und geschlossenen Schenkel es keiner Korrektion wegen der Kapillarität bedarf.

Da sehr häufig, trotz aller Vorsicht, etwas Luft in den leeren Raum des Barometers hineinsickert, so ist für genaue Beobachtungen das Barometer darauf hin zu untersuchen und eventuell dafür eine Korrektion anzubringen. Man tut das, indem man die Höhe des Barometers mit dem Kathetometer abliest, wenn das Barometer senkrecht steht und ein zweites Mal, nachdem dasselbe geneigt ist, so daß der leere Raum des Barometers verkleinert ist. Befindet sich Luft in demselben, so ergibt die zweite Beobachtung einen niedrigern Barometerstand, hat man durch Neigung den leeren Raum gerade auf die Hälfte gebracht, so ist zu dem zuerst beobachteten Stande die Differenz der in vertikaler und geneigter Stellung gemessenen Barometerhöhen hinzuzufügen, wie sich aus dem nachher zu besprechenden Mariotteschen Gesetz ergibt.

An den beobachteten Barometerhöhen ist, wenn nicht die Beobachtung gerade bei der Temperatur Null Grad gemacht ist, eine Korrektion wegen der Temperatur anzubringen. Das Quecksilber dehnt sich wie alle Körper beim Erwärmen aus und wird dadurch leichter; dem gleichen Gewichte der Luft hält daher vom kalten Quecksilber eine kürzere Säule das Gleichgewicht als vom warmen. Die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Barometerstände sind daher nicht vergleichbar. Man muß deshalb die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Barometerstände auf eine Normaltemperatur und somit auf eine Normaldichtigkeit des Quecksilbers reduzieren. Als solche Normaltemperatur ist diejenige des schmelzenden Eises eingeführt, von welcher ab als Nullpunkt die Grade unserer Thermometerskala gerechnet sind.

Ist der Barometerstand mit einem Kathetometer abgelesen, dessen Teilung für die gewöhnliche Temperatur unserer Laboratorien richtig ist, oder befindet sich die Teilung auf dem Barometerrohr und ist ebenfalls bei der gewöhnlichen Temperatur der Laboratorien 18—20° ausgeführt, so ist nur die Ausdehnung des Quecksilbers zu beachten, wenn wir ebenfalls voraussetzen, daß die Barometerhöhe bei gewöhnlicher Temperatur beobachtet ist. Ist B der bei der Temperatur t beobachtete Barometerstand, so ist der auf Null Grad reduzierte

$$B_0 = \frac{B}{1 + 0{,}0001814\, t}$$

Sind die Maßstäbe bezw. die Teilung auf dem Barometerrohre für die Temperatur 0° aufgetragen, so tritt an die Stelle der Zahl 0,0001814 die Differenz der Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers und des Maßstabes. Ist die Teilung wie bei den meisten Kathetometern aus Silber, so wird

die Zahl 0,000162, ist die Teilung auf Glas 0,000174. Wir k
der Wärmelehre auf diese Korrektionen zurück[1]).

§ 97.

Aneroidbarometer. Auf einem ganz andern Prinzip als
silberbarometer beruhen die Aneroid- oder Metallbarometer. Das
selben wurde von Vidi[2]) konstruiert; das Prinzip desselben ist
fach, eine flache zylindrische Metalldose, deren Deckel aus einem
Bleche verfertigt ist, wird, nachdem sie luftleer gepumpt ist,
verschlossen. Der biegsame Deckel nimmt dann eine gewisse Gleic
stellung an, welche von seiner Elastizität, dem gerade vorhande
Luftdruck und dem Drucke der noch in der Dose vorhandene
dingt ist. Letzterer, konstante Temperatur vorausgesetzt, blei
wie die elastische Beschaffenheit des Deckels ungeändert. Wird
Luftdruck ein anderer, so muß die Lage des Deckels eine ande
steigt der Luftdruck, so wird der Deckel nach innen gedrückt,
selbe, so wölbt sich der Deckel mehr nach außen. Die durch
druck bewirkte Bewegung des Deckels wird durch einen auf
desselben angebrachten Stift auf ein in dem Kasten, auf dessen
Dose befestigt ist, angebrachtes Hebelwerk übertragen. Das
dreht einen Zeiger, der, wie es Fig. 179 für das Bourdonsche
angibt, auf eine Teilung zeigt.
Luftdruck, so bewegt sich der Zeige
einen, sinkt derselbe, so bewegt sich
nach der andern Seite.

Fig. 179.

Auf einem ähnlichen Prinzip
kurze Zeit nachher von Bourdon
Metallbarometer.[3]) Das Barometer
die Biegung eines Rohres, dessen B
Zunahme der biegenden Kraft zun
Abnahme derselben abnimmt.
elastische kreisförmig gebogene Röhr
Enden fest verschlossen wird, so k
sich demnach stärker oder schwäc
bei konstantem innern Druck der
zunimmt oder abnimmt. In dem
schen Barometer ist eine solche dü
sche Röhre bei F befestigt und be
frei; im Innern der Röhre ist die Luft sehr stark verdünnt.
Druck in der Atmosphäre zunimmt, so nähern sich die Enden

1) Eine Beschreibung und Theorie der in neuerer Zeit auf de
logischen Observatorien vielfach als Registrierapparat benutzten Wag
würde hier zu weit führen und liegt als von speziell meteorologische
unsern Zwecken zu fern. Man findet eine ausführlichere Besprechun
in: *Schreiber*, Theorie und Praxis des Wagebarometers. Carls Reperto
gang 1872. Man sehe auch *Sprung*, Zeitschrift für Instrumentenkund
1886; **7**. p. 17. 1887.

2) *Vidi*, Comptes Rendus. **24**. p. 975. 1847. Poggend. Ann. **73**. p

3) *Bourdon*, Comptes Rendus. **37**. p. 656. 1853.

ä ein um die feste Achse drehbarer Winkelhebel $ADCEB$ dreht sich d überträgt die Bewegung mittels des gezähnten Radstückes bei G f einen Zeiger, der auf einer am Umfange des Barometers angebrachten ilung einspielt. Nimmt der Luftdruck ab, so gehen die Enden der hre A und B wieder auseinander, und der Zeiger bewegt sich nach tgegengesetzter Richtung. Der Zeiger ist mit einer Stellvorrichtung unhängig von dem Rade drehbar und wird so eingestellt, daß er bei ttlerem Luftdrucke auf der Mitte der Skala bei F steht, steigt der ftdruck, so geht der Zeiger nach der einen, fällt derselbe, nach der dern Seite.

Aus der Beschreibung der Aneroid- oder Metallbarometer ergibt sich, ß die Teilung nur empirisch nach einem Quecksilberbarometer hergestellt rden kann.

Die Aneroidbarometer haben den großen Vorteil, leicht transportabel sein, sie können ferner sehr empfindlich hergestellt sein, bedürfen aber i ihrer Benutzung großer Vorsicht, da sie im Laufe der Zeit sich ändern, s heißt, bei demselben Luftdruck nicht dieselbe Angabe machen, indem i Laufe der Zeit sich die Biegung der Deckel oder der Röhre ändert. se Änderungen, die an den verschiedenen Exemplaren sehr verschieden d im allgemeinen um so kleiner sind, einen je kleinern Spielraum man r Bewegung der Deckel gibt, sind zum Teil stetig. Man muß die eroidbarometer deshalb von Zeit zu Zeit und um so öfter, eine je größere nauigkeit man von ihnen verlangt, mit dem Quecksilberbarometer verichen. Es kommen Barometer vor, besonders in der von Naudet gebenen Form, wo die Änderung im Jahr kein Millimeter beträgt, andere er, wo eine solche Änderung in einem Monat und in noch kürzerer Zeit folgt. Hierzu kommen, was noch schlimmer ist, unstetige Änderungen, e darin bestehen, daß bei starken besonders rasch erfolgenden Änderungen s Luftdrucks das Barometer nicht auf den früheren Stand zurückkehrt, nn der Luftdruck wieder der frühere geworden ist. Ich habe ein solches rometer drei Monate lang mit dem Quecksilberbarometer verglichen und ch Luftdruckschwankungen von $10-12^{mm}$ Änderungen in den Angaben s zu 2^{mm} gefunden; bei diesem Exemplar hatten sich in den drei Monaten e Änderungen so summiert, daß die Angaben an der Skala um 23^{mm} lsch waren.

Bei den Metallbarometern ist ebenso wie bei den Quecksilberbarometern eine Korrektion wegen der Temperatur anzubringen, die ebenfalls r empirisch gefunden werden kann, indem man ein solches Barometer auf verschiedene Temperaturen erwärmte Räume einführt und seinen ng mit dem des Quecksilberbarometers vergleicht.

§ 98.

Schwankung und Größe des Luftdrucks. Eine fortgesetzte Beachtung des Barometers gibt uns, wie schon vorhin erwähnt wurde, zu kennen, daß der Luftdruck keineswegs zu allen Zeiten am gleichen Ort d zu derselben Zeit an verschiedenen Orten der gleiche ist. Die hwankungen des Luftdrucks stehen in inniger Beziehung zu den itterungserscheinungen, die Beobachtung dieser Schwankungen ist des-

halb eine wesentliche Aufgabe der meteorologischen Stationen, wir begnügen uns hier damit, die wichtigsten Resultate dieser Beobachtungen mitzuteilen, soweit sie uns zur Kenntnis der Größe des Luftdrucks erforderlich sind.

Beobachtet man an einem und demselben Orte das Barometer regelmäßig, am besten mit Hilfe eines Registrierapparates, so findet man, daß der Luftdruck unaufhörlichen Schwankungen unterworfen ist, daß er höchst selten auch nur für eine Stunde konstant ist. Bei einer genauern Untersuchung der Schwankungen unterscheidet man bald zwei Klassen derselben, periodisch regelmäßige und unregelmäßige. Erstere betragen nur wenige Millimeter, letztere gehen in unsern Breiten bis zu 60^{mm}. In tropischen Gegenden sind fast nur die regelmäßigen Schwankungen vorhanden. Infolge dieser regelmäßigen Schwankungen hat das Barometer zweimal des Tages einen höchsten und zweimal einen tiefsten Stand. Die höchsten Stände sind kurz vor Sonnenuntergang und des Morgens zwischen 9 und 10 Uhr, die tiefsten einige Zeit vor Sonnenaufgang und des Nachmittags gegen 4 Uhr. Die Zeiten, an denen diese Maxima und Minima auftreten, ändern sich im Laufe des Jahres etwas, der tiefste Stand am Nachmittag und der höchste des Abends tritt im Sommer später, der tiefste Stand am Morgen dagegen im Sommer früher ein als im Winter, nur der höchste Stand am Morgen fällt Winter und Sommer ungefähr auf die gleiche Zeit.

Ebenso ergibt sich auch eine jährliche Periode der Schwankungen, die Barometerstände sind im Winter im allgemeinen höher, der Luftdruck ist also im Winter größer als im Sommer.

Nimmt man aus möglichst vielen längere Jahre fortgesetzten Beobachtungen das Mittel, und bestimmt so den mittlern jährlichen Barometerstand, so findet man denselben für die verschiedenen Jahre merklich gleich groß, so daß wir schließen müssen, daß der Luftdruck im großen und ganzen, jene Schwankungen abgerechnet, immer derselbe bleibt.

Ein Vergleich der so erhaltenen Jahresmittel, welche uns also den mittlern Luftdruck eines Ortes geben, für verschiedene Orte zeigt, daß der Luftdruck auch örtlich verschieden ist. Zunächst zeigt sich die Höhe über dem Meeresniveau von maßgebendem Einfluß, der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe nach einem bestimmten demnächst (§ 105) abzuleitenden Gesetze ab. Mit Hülfe dieses Gesetzes können wir alle an verschiedenen Orten, deren Höhe bekannt ist, beobachteten Barometerstände auf das Meeresniveau reduzieren. Eine derartige Reduktion zeigt, daß auch dort der Barometerstand keineswegs an allen Orten derselbe ist, daß er vielmehr sich mit der Länge und Breite eines Ortes ändert. Um die Änderungen des Barometerstandes mit der Länge eines Ortes auch nur annähernd zu bestimmen, dazu reicht das vorhandene Beobachtungsmaterial keineswegs aus. Für die Änderungen mit der Breite eines Ortes scheint aber ganz allgemein das Gesetz zu herrschen, daß der Barometerstand vom Äquator bis gegen den 30. Breitegrad zunehme, von dort bis zum 65. Breitegrad abnehme und in höheren Breiten wieder wachse. Um ein Bild dieser Änderungen zu geben, führen wir Schouws Angaben hier an, der aus den Beobachtungen verschiedener Orte auf Inseln und an den Gestaden des atlantischen Ozeans folgende Übersicht zusammengestellt hat:

Breite nördlich	Barometerstand	Breite nördlich	Barometerstand
0	762,2	50	762,2
10	763,7	60	758,9
20	765,5	65	753,4
30	766,6	70	755,6
40	764,4	75	758,9

Die Barometerstände am Meeresufer, schließt Schouw, scheinen räum-ch das nebeneinander darzubieten, was in zeitlicher Reihenfolge die täg-chen und jährlichen Schwankungen zeigen.

Von viel bedeutenderer Größe als die periodischen Änderungen des rometerstandes sind die nicht periodischen. Daß aber auch diese einer wissen Regelmäßigkeit folgen, hat Dove auf das sicherste nachgewiesen, lem er den Begriff der barometrischen Windrose aufstellte und zeigte, ß die Barometerschwankungen auf das innigste mit den Änderungen der indesrichtung zusammenhängen.

Der Luftdruck ist im allgemeinen bei Nordostwind am höchsten, sinkt Ost-, Südost-, Südwind, ist bei Süd- und Südwestwind am tiefsten und igt bei West-, Nordwest- und Nordwind.

Den innern Zusammenhang dieser Tatsache weist die Meteorologie ch, sie zeigt, daß die Luftströmungen, welche ein Sinken des Barometers wirken, uns warme und diejenigen, welche ein Steigen hervorrufen, uns te Luft zuführen. Die Wärmelehre gibt uns den physikalischen Grund ser Tatsache.

Mit der Änderung des Windes hängt auf das innigste die Änderung Wetters zusammen; im mittlern Europa bringt Süd- und Südwestwind allgemeinen Regen, dagegen Nordostwind heiteres und klares Wetter, daß der Barometerstand selbst mit dem Wetter parallel geht. Bei em Barometerstand haben wir sogenanntes gutes Wetter, bei niedrigem gen und Wind. Der mittlere Barometerstand entspricht dem Übergange n guten zum schlechten, wenn er bei sinkendem, vom schlechten zum ten, wenn er bei steigendem Barometer erreicht wird. Deshalb eben rd auch das Barometer als sogenanntes Wetterglas benutzt, und neben entsprechenden Barometerstände die Bezeichnung gutes Wetter, ver-lerlich usw gesetzt. Betreffs des nähern über den Zusammenhang des rometerstandes mit dem Wetter verweisen wir auf die neuern Lehrbücher Meteorologie von Mohn, von Bebber, Sprung u. a.

Wir haben schon mehrfach erwähnt, daß man den Druck einer Atmo-häre als Maßeinheit des Druckes nimmt; aus dem gesagten geht hervor, ß man bei den starken örtlichen und zeitlichen Schwankungen des ckes einen bestimmten Druck als den der Atmosphäre definieren muß. üher wählte man als den normalen Druck einer Atmosphäre jenen, der Pariser Zoll entsprach, in England nahm man 30 Zoll englisches Maß. ch Einführung des Metermaßes wird jetzt allgemein bei physikalischen tersuchungen als Druck einer Atmosphäre jener bezeichnet, welcher er Quecksilberhöhe von 760^{mm} bei 0^{0} entspricht. Der Barometerstand 0^{mm} ist gleich 28,075 Zoll Pariser Maß und 29,722 Zoll englisch, so ß also der jetzt angenommene Normalwert des Atmosphärendrucks etwas ßer ist als der frühere Pariser und etwas kleiner als der englische.

Alle Zahlen, in welche der Luftdruck eingeht, und derselben sind, wie wir schon sahen und noch sehen werden, recht viele, sind auf diesen Normaldruck von 760^{mm} bezogen.

Die Größe dieses Druckes ergibt sich aus der Überlegung, daß auf dem Quadratzentimeter ein Druck gleich dem von 76^{cc} Quecksilber lastet. Nach Regnault ist das spezifische Gewicht des Quecksilbers gleich 13,5959, demnach ist das Gewicht dieser Quecksilbersäule gleich $1033{,}288^{gr}$ oder abgerundet $1{,}0333^{kg}$. In absolutem Maße, *GCS* ist somit der Druck der Atmosphäre

$$1013667{,}3 \frac{gr}{cm\ sec^2}.$$

In der praktischen Maschinentechnik wird jetzt vielfach der Druck eines Kilogramm pro Quadratzentimeter als Atmosphärendruck genommen; es entspricht das einer Barometerhöhe von $735{,}5^{mm}$.

§ 99.

Boyle-Mariottesches Gesetz. Da die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben, so haben sie auch eine bestimmte von dem äußern Drucke, dem sie unterworfen sind, nur in geringem Grade abhängige Dichtigkeit.

Bei den Gasen ist das jedoch durchaus anders, da wir sahen, daß ihr Volumen nur von dem äußern Drucke abhängt. Es fragt sich nun, wie hängt das Volumen und die Dichtigkeit der Gase von dem äußern Drucke ab.

Diese Frage ist schon frühzeitig untersucht und zwar zuerst von dem englischen Physiker Boyle[1]) und einige Jahre später von dem französischen Physiker Mariotte[2]). Beide gelangten zu demselben Resultate, das sich in folgendem, nach dem letztern meist das Mariottesche, neuerdings aber auch vielfach das Boylesche oder auch das Boyle-Mariottesche genannten, Gesetze aussprechen läßt.

Wenn man eine gegebene Gasmenge in einem Gefäße abschließt und dieselbe dann verschiedenen Drucken P und P' aussetzt, so verhält sich das Volumen des Gases in beiden Fällen, v und v' umgekehrt wie die Drucke oder

$$v : v' = P' : P.$$

Anstatt dieses Ausdrucks können wir auch setzen

$$v' P' = v P,$$

oder das Produkt aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Druck, unter dem sie steht, ist konstant.

Da nun, wie wir früher sahen, die Dichtigkeit eines Körpers bei gleichem Gewicht dem Volumen desselben umgekehrt proportional ist, oder

$$v : v' = d' : d,$$

---

1) *Boyle,* Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris elastica. London 1662.

2) *Mariotte,* De la nature de l'air. Paris 1679.

us dem obigen, daß die Dichtigkeit einer Gasmenge den Drucken, lieselbe ausgesetzt, direkt proportional ist, oder

$$d : d' = P : P'.$$

Versuche, mittelst welcher Mariotte dieses Gesetz nachwies, waren Er nahm eine lange Glasröhre, welche vor einem festen Brette und nahe ihrem Ende umgebogen war, so daß ein kürzerer auf- Schenkel entstand, wie bei dem Heberbarometer. Der kürzere war oben geschlossen, der längere oben offen (Fig. 180). Man n zunächst eine kleine Menge Quecksilber in , so daß es in beiden Röhren bis zum Null- r Teilung reicht. Dieses schließt dann die in rn geschlossenen Schenkel enthaltene Luft voll- b. Das Volumen der abgesperrten Luft wird durch die hinter der Röhre angebrachte Tei- as Gas erfüllt jetzt den abgesperrten Raum ı Drucke der äußern Luft, welche auf der Ober- Quecksilbers im offenen Schenkel lastet, und rch den früher erkannten hydrostatischen Ge- die geschlossene Röhre sich überträgt.

Fig. 180

uf gießt man durch den Trichter in das offene Quecksilber nach. Das Niveau desselben steigt n Seiten, aber in dem geschlossenen Schenkel n weniger als in dem offenen, und man findet, Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel bis striche 5 angestiegen ist, die eingeschlossene nur mehr die Hälfte ihres frühern Volumens wenn der Unterschied der beiden Quecksilber- erade die Höhe des Barometers beträgt. Dann auch das Gas den Druck zweier Atmosphären en, indem außer dem Drucke der äußern Luft Druck einer dem Gewichte der Luft an Größe Quecksilbersäule auf das abgeschlossene Gas Wenn man weiter Quecksilber hinzufügt, bis der terschied gleich 2, 3, 4 ... Barometerhöhen wird, an dadurch einen Druck von 3, 4, 5 ... Atmo- ıus, und man findet dann, daß das Volumen sperrten Luft auch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ... des ursprüng- lumens beträgt.

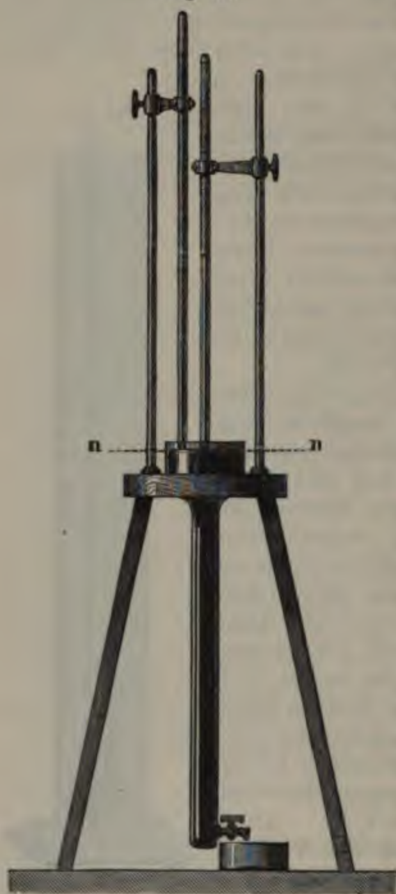
die Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes für Drucke zu prüfen, einer sind als der Druck der äußern Atmosphäre, kann man sich Verfahrens bedienen, welches im wesentlichen schon Mariotte Eine möglichst zylindrische Barometerröhre wird ihrer ganzen ch in Millimeter geteilt und durch Kalibrieren der zwischen zwei en enthaltene Raum bestimmt. Zu dem Ende bringt man gleiche Quecksilber nacheinander in die Röhre.

erste füllt die Röhre bis zum Teilstriche n, das erste und zweite Teilstriche n', durch Hinzufügen des dritten fülle sich die Röhre

bis zum Teilstriche n'' usf., so folgt daraus, daß sich die Räume bis zu den Teilstrichen n, n', n'' reichen, verhalten wie 1 : 2 : 3

Hat man auf diese Weise das Kaliber der Röhre an allen bestimmt, so füllt man dieselbe vollständig so, als wenn man e meter herstellen wollte, und kehrt dann das fertige Barometer in fäß (Fig. 181) um. Dasselbe besteht aus einer weiten Röhre oder noch besser von Gußeisen unten verschlossen und mit ein versehen ist und oben in einer Gefäß von Glas endet. Dies in einem Dreifuß vertikal a und bis nn mit Quecksilber ge unten angebrachte Hahn die um das Quecksilber leichter zu können.

Fig. 181.



Hat man das fertige Roh Gefäß umgekehrt, so bringt ma eines Zuleitungsrohres etwas Luft in dasselbe. Dieselbe ste das Quecksilber in den leer auf, und sofort sieht man, Quecksilberniveau durch de dieser Luft sinkt. Man drück Röhre zunächst in das Gefäß so weit, daß die Oberflächen d silbers im Innern der Röhre u halb von gleicher Höhe sind: strich, neben welchem das Q steht, gibt uns dann den Ra chen die Luft unter dem Dru Atmosphäre einnimmt. Zieht rauf das Rohr weiter aus de silber heraus, so vermehrt ma das Volumen der abgesperrt aber zugleich steigt auch d silber infolge des äußern Lu in der Röhre empor und d schied zwischen der Quecksilb dieser Röhre und der Baro gibt uns den Druck, unter sich das Gas befindet. Denn auswärts lastet auf dem Quecks Druck der ganzen Atmosphäre oder ein Druck gleich dem eine silbersäule von der Höhe des Barometers, im Innern hält diesen zum Teil die gehobene Quecksilbersäule das Gleichgewicht; der U der Barometerhöhe über diese Quecksilbersäule drückt also das Gas z diesem Drucke hält die Elastizität des Gases, der Druck, den es i Bestrebens, sich auszudehnen, auf die Wände ausübt, das Gleichg

Um diese Unterschiede zwischen dem Barometerstande un unserer Röhre gehobenen Quecksilbersäule zu messen, ist neben

n festes Barometer angebracht. Man mißt dieselben mittels des Kathetometers.

Vergleicht man die von dem Gase angefüllten Räume und die Drucke P, unter welchen es steht, so findet man stets

$$P \cdot v = P' \cdot v'.$$

Füllt z. B. das Gas, wenn das Rohr so tief eingetaucht ist, daß die Oberfläche des Quecksilbers innerhalb und außerhalb der Röhre von gleicher Höhe ist, die Röhre bis zum Teilstriche n, so füllt es die Röhre bis zum Teilstriche n', das Volumen des Gases ist also doppelt so groß, wenn die Höhe des Quecksilbers in der Röhre gerade die Hälfte der Barometerhöhe beträgt usf.

Mittels dieser schon von Mariotte angestellten Versuche kann man das aufgestellte Gesetz nachweisen; indes können sie keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen, da es besonders äußerst schwierig ist, die Temperatur konstant zu erhalten. Das ist aber durchaus erforderlich, da bei einer Temperaturänderung das Gas ebenfalls sein Volumen ändert, das Mariottesche Gesetz also nur bei konstanter Temperatur der Gase gültig sein kann.

Überdies kann man bei diesen Methoden die Drucke, denen das Gas ausgesetzt ist, nur zwischen verhältnismäßig engen Grenzen variieren lassen. Bei der Wichtigkeit dieses Gesetzes fragt es sich jedoch, ob es strenge und allgemein gültig ist.

Seit Mariotte und Boyle sind deshalb sehr vielfach Versuche darüber angestellt, ob dieses Gesetz für alle Gase und für alle Drucke gültig sei. Die älteren Versuche von Musschenbroek[1]) Sulzer[2]), Robinson[3]) gelangten zu keinem entscheidenden Resultate; der erstere schloß in Übereinstimmung mit Boyle, daß unter Drucken, welche größer waren als vier Atmosphären, die Luft weniger, die letzteren, daß sie mehr zusammengedrückt würde, als das Gesetz verlangt.

Im Jahre 1826 publizierten dann Oersted und Schwendsen[4]) Versuche nach einer der beschriebenen ähnlichen Methode, aber mit besseren und genaueren Apparaten, und nach einer zweiten ganz verschiedenen Methode. Sie komprimierten Luft in dem Kolben einer Windbüchse und bestimmten mittels einer Wage das Gewicht und somit die Dichtigkeit der in dem Kolben enthaltenen Luft. Den Druck, unter welchem die Luft stand, bestimmten sie mit Hülfe eines Sicherheitsventiles aus dem Drucke, den dieselbe auf die Wände des Kolbens ausübte. Das Ventil wurde mit einem einarmigen Hebel festgedrückt, und das Gewicht auf demselben so lange verschoben, bis die eingeschlossene Luft es gerade zu heben imstande war. Mit der ersten Methode dehnten Oersted und Schwendsen ihre Versuche bis zu einem Drucke von 8, mit der letztern bis auf 68 Atmosphären aus. Sie schlossen aus ihren Versuchen, daß für Luft das Mariottesche Gesetz bis zu diesen Drucken strenge gültig sei; bei der

1 *Musschenbroek*, Cours de physique. Tome III Paris 1759.
2 *Sulzer*, Mémoires de Berlin 1753.
3 *Robinson*, System of Mech. Phil. III.
4 *Oersted* und *Schwendsen*, Edinburgh Journal of science. 4. p 224.

unvermeidlichen Ungenauigkeit der letztern Methode darf man dara doch nur schließen, daß es mit großer Annäherung unter so hohen D noch besteht.

Für andere Gase als die atmosphärische Luft fanden die gen Physiker das Gesetz jedoch nicht bestätigt, besonders wenn die Gase Kompression flüssig zu machen sind. Sie fanden z. B., daß sich s lige Säure bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären gerade so v wie atmosphärische Luft, daß aber bei höheren Drucken das Gas komprimiert wurde.

Gleiche Resultate erzielten die Versuche von Despretz[1]). Er b mehrere graduierte oben geschlossene Röhren, deren eine Luft, die ü andere Gase enthielten, in einen Oerstedschen Kompressionsa (Fig. 76 § 64), nachdem er die offenen Enden der Röhren in ein mit Quecksilber eingesetzt hatte (Fig 182). Bei einer Kompressio Wassers in dem Apparate wurde auch das Gas der Röhren kompr Der Druck war in dem ganzen Apparate derselbe, u die Röhren alle ein gleiches Volumen hatten und daf sorgt war, daß das Niveau des Quecksilbers beim B des Versuches in allen Röhren gleich war, so hätte e in allen Röhren dasselbe bleiben müssen, wenn die Ga dem Mariotteschen Gesetze folgten. Es war das nicht der Fall, als die eine Röhre atmosphärische Lu zweite Ammoniakgas, die dritte Schwefelwasserstoff u vierte Cyangas enthielt. Das Volumen dieser Gase nahm bei einem Drucke, welcher wenig größer war als der Atmosphären, schneller ab, als die Drucke zunahmen, ler, als das Volumen der atmosphärischen Luft abnah

Fig. 182.

Despretz schloß ferner, daß Wasserstoffgas und sphärische Luft bis zu einem Drucke von 15 Atmos dem Mariotteschen Gesetze folgen, daß aber bei Drucke von 20 Atmosphären und darüber die Luft zusammengedrückt werde, als das Gesetz von Mariotte es verlang

Durch Despretzs Versuche wurde also die exakte Gültigkeit setzes von Boyle-Mariotte auch für atmosphärische Luft wie Frage gestellt, deshalb nahmen auf Aufforderung der französischen Ak Arago und Dulong[2]) die Frage wieder auf.

Dieselben verfolgten mit ihren Versuchen die Kompression der sphärischen Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären nach Methode, die sich im Prinzipe durchaus nicht von der Mariottes schied, die aber durch die Sorgfalt, mit welcher die einzelnen Te Apparates gearbeitet waren, und die Genauigkeit, mit welcher dies siker beobachteten, Resultate ergab, welche das höchste Vertraue dienen. Die zu komprimierende Luft war in einer sorgfältig ausgem Röhre von $1^{m},70$ Länge und 5^{mm} lichtem Durchmesser eingesc Diese Röhre war von einem weitern Zylinder umgeben, durch

---

1) *Despretz*, Annales de chim et de phys. **34**. 1827.
2) *Arago* und *Dulong*, Mémoires de l'Académie des sciences de l de France. **10**. p. 193. 1830.

nierlich Wasser derselben Temperatur hindurchlief, um die in der eingeschlossene Luft auf konstanter Temperatur zu erhalten. Die sser Röhre kommunizierende offene Röhre hatte eine Länge von 27^{m}. der nähern Details der Apparate und der einzelnen Vorsichtsmaß-, welche diese Physiker anwandten, müssen wir auf die Originallung verweisen.

Dulong und Arago unternahmen drei Versuchsreihen; in jeder der wurde der kurze geschlossene Schenkel ihrer Röhre mit Luft unter Drucke der Atmosphäre angefüllt, und diese dann immer stärker imiert. Nach jeder Erhöhung des Druckes wurde das Volumen der hlossenen Luft und die Niveaudifferenz des Quecksilbers in der gesenen und offenen Röhre gemessen. Bei jeder Versuchsreihe wurde uck bis auf 27 Atmosphären verstärkt. Folgende Tabelle enthält n ihnen erhaltenen Zahlen in einer Versuchsreihe, bei der die Tem-r genau auf 13° erhalten war. Die erste Kolumne enthält den Druck limeter Quecksilberhöhe, die zweite das Volumen der Luft in der ossenen Röhre, die dritte das Volumen berechnet nach dem Mariotte-Gesetze von dem Anfangsvolumen und dem Anfangsdrucke aus, und rte endlich die Unterschiede zwischen dem so berechneten und dem hteten Volumen.

Tabelle der von Dulong und Arago erhaltenen Zahlen.

Druck in mm Quecksilber	Beobachtetes Volumen	Berechnetes Volumen	Differenz
mm			
760,00	501,3	-	
3612,48	105,247	105,470	0,230
3757,18	101,216	101,412	0,206
4625,18	82,286	82,380	0,094
5000,78	76,095	76,198	0,103
5737,38	66,216	66,417	0,201
8596,23	44,008	44,320	0,312
9992,36	37,851	38,132	0,281
12620,00	30,119	30,192	0,073
13245,06	28,664	28,770	0,106
14667,36	25,885	25,978	0,093
16534,9	22,968	23,044	0,076
16584,4	22,879	22,972	0,093
18488,5	20,547	20,665	0,118
20236,6	18,833	18,872	0,039
20498,6	18,525	18,588	0,063

ergleicht man die beobachteten mit den berechneten Zahlen, so findet dieselben sehr nahe gleich. Man muß daraus schließen, daß die he Kompression der Luft, wenn überhaupt, sich nur sehr wenig von ch dem Mariotteschen Gesetze berechneten unterscheidet. Mehr an jedoch daraus nicht schließen, da die Unterschiede nicht gleich sind, und da die beobachteten Volumina immer kleiner sind als rechnete Volumen. Es kann das seinen Grund haben entweder in cht vollkommenen Richtigkeit des Gesetzes oder auch in Ungenauig-

keiten der Messungen. Die Art der Abweichungen spricht jedoch fü Erstere.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, ist man ni imstande, ganz vollkommene Messungen zu machen; wenn die Abweichu zwischen den Beobachtungen und den nach einem vermuteten Gesetz gestellten Berechnungen nur sehr klein sind, so ist man zu der Ann berechtigt, daß die Unterschiede gleich Null sein würden, wenn Messungen ganz vollkommen wären, und kann auf die Richtigkeit Gesetzes schließen. Indes wird in dem Falle der Unterschied zwi Beobachtung und Rechnung bald positiv, bald negativ sein, das heißt, wird die beobachtete, bald die sich aus den Rechnungen ergebende größer sein, da es ebenso wahrscheinlich ist, daß die unvermeidl Beobachtungsfehler, bei einer sonst richtigen Methode, die Resultate größern als verkleinern. Abweichungen, welche immer in demselben erfolgen, und seien sie auch noch so klein, lassen entweder einen konst Fehler in der Methode oder eine Ungenauigkeit des Gesetzes verm Da ersterer nun nicht aufzufinden ist, so dürfen wir durch diese Ver das Gesetz nicht als bewiesen ansehen; müssen vielmehr annehmen, die sich zeigenden Abweichungen zum Teil allerdings in den Beobacht fehlern, zum Teil jedoch in einer Ungenauigkeit des Mariottescher setzes ihren Grund haben.

Arago und Dulong schlossen anders; sie glaubten, wie man haupt im Anfange des neunzehnten Jahrhunderts geneigt war anzune daß die Naturerscheinungen einfachen Gesetzen folgen, daß der mathema Ausdruck derselben stets wenig kompliziert sein müsse. Deshalb über diese Physiker es, daß die Abweichungen stets in demselben Sinne fanden, und hielten bei der geringen Größe der Unterschiede das (für bewiesen.

Arago und Dulong konnten ihre Versuche nicht über andere als die atmosphärische Luft ausdehnen, da die französische Regierung die Benutzung der Gebäude entzog, in denen ihre Apparate aufgestellt w

Diese Lücke suchte Pouillet[1]) auszufüllen. Pouillet nahm f Luft nach den vorhergegangenen Versuchen das Boyle-Mariott Gesetz als richtig an, und verglich mit den Kompressionen der Luft der andern Gase. Seine Versuchsmethode war derjenigen von Des ähnlich; die Röhren, in welchen er die Gase komprimierte, hatten Länge von zwei Meter.

Die Resultate Pouillets sind folgende:

1) Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenox folgen bis zu 100 Atmosphären dem Kompressionsgesetz der atmos schen Luft.

2) Die Gase, schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure und oxydulgas, welche bei relativ geringen Drucken schon in die tr flüssige Form übergehen, werden merklich stärker komprimiert a atmosphärische Luft, sobald ihr Volumen auf $^1/_3$ oder $^1/_4$ komprimie

3) Das Gleiche gilt für leichtes und schweres Kohlenwassers welche bei einem Drucke von 100 Atmosphären noch nicht flüssig w

1) *Pouillet,* Éléments de Physique. 4. édit. Tome I. p. 327.

Folgende Tabelle enthält die von Pouillet mitgeteilten Resultate. Die erste Kolumne enthält die Drucke, die zweite die theoretischen Volumina, die folgenden die Quotienten $\frac{v'}{v}$ der beobachteten Volumina v' und der theoretischen v für die darüber stehenden Gase.

Druck in Atmosphären	Theoretisches Volumen v	$\frac{v'}{v}$ Kohlensäure	$\frac{v'}{v}$ Stickoxydul	$\frac{v'}{v}$ Leichtes Kohlenwasserstoffgas	$\frac{v'}{v}$ Schweres Kohlenwasserstoffgas
1	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,50	1,000	0,996	0,998	0,994
4	0,25	1,000	0,988	0,995	0,989
5	0,20	0,989	0,983	0,992	0,986
6,67	0,15	0,980	0,971	0,989	0,983
10	0,10	0,965	0,956	0,981	0,972
15,38	0,065	0,934	0,923	0,949	0,962
20	0,050	0,919	0,896	0,956	0,955
25	0,040	0,880	0,849	0,951	0,948
33,3	0,030	0,808	0,787	0,951	0,931
40	0,025	0,739	0,732	0,940	0,919
50	0,020	—	—	0,907	0,899
83	0,012	—	—	—	0,850

Lange Zeit nahm man mit Arago und Dulong an, daß die atmosphärische Luft so wie Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff dem Mariotteschen Gesetze vollständig folgen, bis Regnault die Frage 1845 wieder aufnahm. Er war durch gewisse Erscheinuungen beim Ausdehnen der Gase durch die Wärme auf die Vermutung geführt worden, daß das Gesetz von Mariotte auch für diese Gase nur ein annähernd richtiges sei. Da nun das Gesetz über die Kompression der Gase ein Fundamentalgesetz der Physik ist, indem es in fast alle Bestimmungen über die Gase eingeht, so stellte Regnault eine Reihe neuer Versuche über diesen Punkt an[1].

Die Apparate, welche Regnault anwandte, waren im wesentlichen, dieselben, welche auch Arago und Dulong angewandt hatten, auch er benutzte die Methode von Mariotte, ein abgeschlossenes Gasvolumen durch Quecksilbersäulen zusammendrücken zu lassen, und maß dann zugleich das Volumen des Gases und den zugehörigen Druck.

Eine Verbesserung der Methode ließ jedoch eine bedeutend größere Genauigkeit in den Messungen erzielen.

Arago und Dulong waren bei ihren Versuchen stets davon ausgegangen, die kurze geschlossene Röhre mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre zu füllen und diese nach und nach bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären zusammenzupressen. Da nun das Anfangsvolumen des Gases unter dem Drucke einer Atmosphäre gleich 1 war, so war es unter dem Drucke von 5 Atmosphären nur $^1/_5$, bei 10 $^1/_{10}$, bei 20 nur $^1/_{20}$ usf.

1 Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. 21 p. 329.

So wurde bei den hohen Drucken das Volumen sehr klein und dadurch war es unmöglich, es mit der nötigen Genauigkeit auszumessen, besonders wenn man beachtet, daß es äußerst schwierig ist, das Volumen der einzelnen Teile der Röhre genau zu erhalten, und daß der Meniskus des Quecksilbers nicht genau seine Gestalt beibehält.

Die sich hieraus unvermeidlich ergebenden Ungenauigkeiten der Messung vermied Regnault folgendermaßen:

Eine Glasröhre von 8—10^{mm} lichtem Durchmesser und 3^m Länge wurde vertikal aufgestellt. Die Röhre, an ihrem obern Ende durch einen Hahn verschlossen, kommunizierte an ihrem untern Ende mit einer zweiten vertikal aufgestellten, oben offenen Röhre von 36^m Länge, welche die Quecksilbersäule enthielt, welche das in der ersten Röhre abgeschlossene Gas zusammendrücken sollte. Auf der oben verschlossenen Röhre von 3^m Länge waren zwei Marken gezogen, die eine an ihrem untern Ende, welche das Volumen der ganzen Röhre bestimmte, indem zu Anfang jedes Versuches dafür gesorgt war, daß das Quecksilber in dieser Röhre bis zu dieser Marke stand; die zweite Marke war in der Mitte der Röhre gezogen, so daß sie genau das halbe Volumen der Röhre von ihrem obern Ende bis zur untern Marke bestimmte.

Man füllt nun zunächst die Röhre mit trockener Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre bis zur untern Marke, dann drückt man, indem man die Quecksilbersäule in der langen Röhre verlängert, die Luft so weit zusammen, bis sie gerade das halbe Volumen annimmt, bis also das Quecksilber in der verschlossenen Röhre bei der zweiten Marke steht. Ist das Mariottesche Gesetz genau richtig, so muß jetzt die Höhe der Quecksilbersäule in der offenen Röhre über der in der verschlossenen genau die Höhe des Barometers sein, der Druck muß genau gleich 2 Atmosphären sein.

Man füllt nun zu einem zweiten Versuche die ganze geschlossene Röhre bis zur untern Marke mit trockner Luft unter dem Drucke zweier Atmosphären und komprimiert wieder auf die Hälfte; der Druck muß dann gleich 4 Atmosphären sein.

Füllt man dann das Volumen 1 mit trockner Luft unter dem Drucke von 4 Atmosphären und komprimiert diese auf das Volumen $^1/_2$, so muß jetzt der Druck 8 Atmosphären sein usf.

Kurz, man untersucht auf diese Weise, ob der Druck, der ein Volumen Luft, welches unter dem Drucke h steht, auf die Hälfte reduziert, gleich $2h$ ist. Die Gasvolumina sind bei diesen Versuchen stets sehr groß und deshalb der genauesten Messung fähig.

Wegen der Einzelheiten des Apparates und der Vorsichtsmaßregeln bei den Messungen müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen, nur müssen wir kurz erwähnen, wie die geschlossene Röhre mit Luft unter höheren Drucken angefüllt wurde. Die Röhre kommunizierte mittels des an ihrem obern Ende befindlichen Hahnes mit einer Pumpe, durch welche man bei geöffnetem Hahn Luft in die Röhre pumpen konnte. Man füllte auf diese Weise die Röhre bis zur untern Marke mit Luft an und bestimmte den Druck, unter welchem die Luft sich befand, aus der Höhe der Quecksilbersäule in der langen Röhre. Man hatte es auf diese Weise in der Hand, die Röhre, in welcher das Gas komprimiert wurde, bis zur untern Marke mit Luft unter beliebigem Druck anzufüllen.

Um zu zeigen, wie Regnault aus diesen Versuchen die Resultate erhielt, wollen wir zunächst eine Versuchsreihe mit atmosphärischer Luft folgen lassen, bei welcher das Volumen 1 mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre angefüllt wurde. Die geschlossene Röhre kommunizierte beim Beginne des Versuches frei mit der atmosphärischen Luft; als sie bis zur untern Marke mit Luft angefüllt war, wurde der Hahn geschlossen und durch Einfüllen des Quecksilbers in die lange Röhre das Volumen möglichst genau auf $^1/_2$ reduziert.

Spalte 1 enthält die Volumina V_0 und V_1 beim Beginne des Versuches und nach der Kompression, Spalte 2 die entsprechenden Drucke in Millimeter Quecksilberhöhe, Spalte 3 die Temperaturen der Luft, Spalte 4 das Verhältnis der Volumina $\frac{V_0}{V_1}$, Spalte 5 das Verhältnis der Drucke $\frac{P_1}{P_0}$ und Spalte 6 das Verhältnis $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$.

Volumina V_0 und V_1	Drucke P_0 und P_1	Temperatur °C.	$\frac{V_0}{V_1}$	$\frac{P_1}{P_0}$	$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$
1939,69 969,26	738,72 1476,25	4,44	2,001 215	1,998 389	1,001 414
1939,69 969,86	738,99 1475,82	4,40	1,999 990	1,997 076	1,001 448
1940,21 970,10	739,07 1476,34	4,40	2,000 010	1,997 565	1,001 224
1939,47 969,39	739,19 1476,80	4,43	2,000 701	1,997,863	1,001 421

Wäre das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müßten die in einer Horizontalreihe befindlichen Zahlen der Kolumnen 4 und 5 genau gleich sein, da nach dem Mariotteschen Gesetz

$$V_0 : V_1 = P_1 : P_0;$$

und da ebenso

$$V_0 \cdot P_0 = V_1 \cdot P_1,$$

so müßten die Zahlen der letzten Kolumne gleich 1 sein.

Man sieht aber, während $\frac{V_0}{V_1}$ fast genau gleich 2 ist, daß $\frac{P_1}{P_0}$ stets kleiner als 2 und somit $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$ ist.

Es folgt also aus diesen Versuchen, daß die atmosphärische Luft schon bei einer Druckdifferenz von einer Atmosphäre von dem Gesetze Mariottes abweicht. Gleiches fand Regnault bei allen übrigen Gasen.

In der folgenden Tabelle sind die von Regnault erhaltenen Zahlen für atmosphärische Luft, Stickgas, Kohlensäure und Wasserstoffgas zusammengestellt.

Für jedes Gas sind zwei Kolumnen verzeichnet; die erste enthält die Drucke P_0 beim Beginne der Versuche, die zweite das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$, wo V_1 stets fast genau $^1/_2$ V_0 war und P_1 der dem Volumen V_1 entsprechende Druck ist.

Tabelle von Regnaults Versuchen über die Kompression der Gase.

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
738,72	1,001 414	753,62	1,000 788	764,03	1,007 725	—	—
2112,53	1,002 765	1159,26	1,000 996	1414,77	1,012 313	—	—
4140,82	1,003 090	2159,60	1,001 381	2164,81	1,018 973	2211,18	0,998 584
4219,22	1,003 495	3030,22	1,001 955	3186,13	1,028 494	3989,47	0,996 961
6770,15	1,004 286	4953,92	1,002 860	4879,77	1,045 625	5845,18	0,996 121
9336,41	1,006 366	5957,96	1,003 271	6820,22	1,066 137	7074,96	0,994 697
		7297,06	1,003 924	8393,68	1,084 278	—	—
		8628,54	1,004 768	9620,06	1,099 830	9175,25	0,993 126
		9775,38	1,004 881			10361,78	0,992 327
		10981,42	1,006 456				

Man sieht, daß bei diesen vier untersuchten Gasen das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ nur sehr wenig von der Einheit abweicht, so daß also das Boyle-Mariottesche Gesetz, wenn es auch nicht genau richtig ist, doch nur wenig von der Wahrheit abweicht. Wir werden es deshalb in den meisten Fällen als richtig annehmen dürfen, ohne fürchten zu müssen, große oder auch nur merkliche Ungenauigkeiten zu erhalten, besonders da wir in den meisten Fällen nur kleinere Drucke anzuwenden haben, und wie die Tabelle zeigt, für Drucke, welche nur wenig von dem der Atmosphäre verschieden sind, das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ sich der Einheit immer mehr nähert.

Bei aufmerksamer Betrachtung jener Tabelle findet man, daß die drei ersten Gase, Luft, Stickstoff, Kohlensäure, alle in demselben Sinne von dem Mariotteschen Gesetze abweichen, daß bei allen $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$, also bei allen das Volumen in rascherem Verhältnisse abnimmt, als der Druck wächst, oder das beobachtete Volumen V_1 kleiner ist, als es nach dem Mariotteschen Gesetze sein sollte. Dasselbe Resultat enthielten schon die Versuche von Arago und Dulong. Die neuen Versuche indes zeigen weiter, daß das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ wächst, wenn der anfängliche Druck, unter dem das dem Versuche unterworfene Gas steht, größer ist, daß also die Abweichungen zwischen dem wirklichen Verhalten der Gase und dem Mariotteschen Gesetze um so größer werden, je mehr die Zusammendrückung des Gases wächst. Wenn nun auch die Regelmäßigkeit dieser Zahlen auf das entschiedenste dafür spricht, daß die beobachteten Abweichungen nicht Folge der Beobachtungsfehler sind, sondern einer Ungenauigkeit des Gesetzes zugeschrieben werden müssen, so ist es doch gut, nachzuweisen, daß sie größer sind als die Beobachtungsfehler, welche wir annehmen dürfen. Sei deshalb der beobachtete Wert

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \alpha,$$

und nehmen wir V_1 genau $= \frac{1}{2} V_0$, so ist

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \frac{2 \cdot P_0}{P_1} = \alpha,$$

er

$$\frac{2 \cdot P_0}{\alpha} = P_1 .$$

Wäre nun das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müßte

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1'} = \frac{2 P_0}{P_1'} = 1,$$

ler

$$P_1' = 2 P_0$$

in. Der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung ist demnach

$$P_1' - P_1 = 2 P_0 - 2 \frac{P_0}{\alpha} = 2 P_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Dieser Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung läßt sich nun rechnen, wenn wir in diesen Ausdruck die Werte P_0 und α unserer Talle einsetzen, man erhält so den Unterschied in der Höhe der Quecklbersäulen, wie sie beobachtet wurden, und wie sie nach dem Gesetze von ariotte hätten sein sollen. Für Luft erhalten wir

P_0	$P'_1 - P_1$
738mm,72	2mm,08
2112 53	11 65
4140 82	25 50
4219 05	29 36
6770 15	57 68
9336 41	118 01.

Diese Differenzen sind offenbar zu groß, als daß man sie den Beobachngsfehlern zuschreiben könnte. Das Boyle-Mariottesche Gesetz ist demich nicht strenge richtig, wenn auch die Abweichungen so unbedeutend nd, daß wir sie im allgemeinen nicht zu beachten haben werden.

Stickstoff, Kohlensäure und Sauerstoff verhalten sich wie atmosphäsche Luft, sie werden stärker zusammengedrückt, als das Mariottesche esetz verlangt. Sie bilden also mit den von Despretz und Pouillet ntersuchten Gasen, Ammoniak, schweflige Säure, Cyan usf. eine Gruppe; le diese Gase besitzen eine Zusammendrückbarkeit, welche mit dem äußern rucke zunimmt.

Anders jedoch das Wasserstoffgas; für dieses ist das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ ets kleiner als 1. Dieses Gas wird also bei steigenden Drucken weniger rk zusammengedrückt, V_1 nimmt nicht in demselben Verhältnisse ab, P_1 wächst; und da bei immer größern Anfangsdrucken der Wert $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ mer kleiner wird, so folgt, daß mit wachsendem Drucke die Kompresilität abnimmt.

Folgende Tabelle, welche Zahlen enthält, welche Regnault aus seinen rsuchen berechnete, zeigt, wie die Kompressibilität wächst bei den drei ten und abnimmt bei dem letzten Gase. Sie gibt die Drucke an, welche rderlich sind, um ein Gas, welches unter dem Drucke 1m Quecksilber Volumen 1 hat, auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ... zu komprimieren.

Volume	Luft		Kohlensäure		Stickgas		Wasserstoff	
	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz
	m	m	m	m	m	m	m	m
1	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	— 0,0000
1/2	1,9978	+ 0,0022	1,9829	+ 0,0171	1,9986	+ 0,0014	2,0011	— 0,0011
1/4	3,9874	+ 0,0126	3,8973	+ 0,1027	3,9919	+ 0,0081	4,0068	— 0,0068
1/8	7,9456	+ 0,0543	7,5193	+ 0,4807	7,9641	+ 0,0359	8,0339	— 0,0339
1/10	9,9162	+ 0,0838	9,2262	+ 0,7738	9,9435	+ 0,0565	10,0560	— 0,0560
1/12	11,8823	+ 0,1177	10,8632	+ 1,1368	11,9191	+ 0,0809	12,0844	— 0,0844
1/16	15,8044	+ 0,1956	13,9260	+ 2,0740	15,8597	+ 0,1403	16,1616	— 0,1616
1/20	19,7198	+ 0,2802	16,7054	+ 3,2946	19,7885	+ 0,2115	20,2687	— 0,2687

Um diese Erscheinungen zusammenzufassen, kann man sich ein Gas denken, welches genau dem Mariotteschen Gesetze folgt und welches die Grenze bildet zwischen den beiden Gruppen, deren eine, Luft, Stickgas, Kohlensäure, stärker komprimiert wird, deren andere, allein durch den Wasserstoff repräsentiert, jedoch in geringerm Grade zusammengedrückt wird als jenes angenommene Gas. Das Mariottesche Gesetz ist demnach ein Gesetz, dem sich die verschiedenen Gase mehr oder weniger annähern. Die Abweichungen hängen ab von der Natur des Gases, von den anfänglichen Drucken und andern Umständen; im § 103 werden wir ableiten, in welcher Weise die Differenz zwischen dem beobachteten Werte von $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ und dem theoretischen Werte, der gleich 1 ist, oder

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} - 1 = \beta$$

von diesen Umständen abhängt.

Man kann aus den Beobachtungen in übersichtlicher Weise eine die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetz darstellende Interpolationsformel ableiten. Für eine gegebene Gasmenge hat das Produkt PV für jeden Druck oder auch für jedes Volumen einen bestimmten Wert, und nach dem Mariotteschen Gesetz sollte dieses Produkt für jeden Druck oder jedes Volumen denselben Wert haben. Die Abweichung der Gase von diesem Gesetz besteht nun darin, daß mit steigendem Druck oder abnehmendem Volumen dieses Produkt kleiner wird; man kann dieselbe deshalb darstellen, indem man die Veränderung dieses Produktes durch eine Gleichung wiedergibt, welche die Abhängigkeit desselben von dem Drucke P oder dem Volumen V ausdrückt. Gehen wir von irgend einem Drucke P_0 aus und nennen das zugehörige Volumen V_0, so können wir entweder setzen

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + B\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2 \ldots\ldots\ldots$$

oder auch

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A_1\left(\frac{P}{P_0} - 1\right) + B_1\left(\frac{P}{P_0} - 1\right)^2 \ldots\ldots\ldots$$

Daß wir in den Klammern den Überschuß der betreffenden Quotienten über 1 setzen müssen, erkennt man daraus, daß für $V = V_0$ oder $P = P_0$ die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung gleich 1 werden müssen

Man erkennt weiter leicht, daß in der ersten Formel V im Nenner, in der zweiten P im Zähler stehen muß, da die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetze um so größer werden, je kleiner das Volumen oder je größer der Druck wird. Setzen wir $P_0 = 1$, etwa 1^m Quecksilber und V_0 ebenfalls gleich 1, nehmen also etwa an, daß sich unsere Werte auf 1 Liter Gas unter dem Drucke 1^m Quecksilber beziehen, so können wir obige Formeln schreiben

$$PV = 1 - A\left(\frac{1}{V} - 1\right) + B\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2 \quad \dots\dots \quad \text{Ia}$$

$$PV = 1 - A_1(P - 1) + B_1(P - 1)^2 \quad \dots\dots \quad \text{IIa}$$

Die erste Form der Interpolationsgleichung wurde von Regnault selbst benutzt[1], während Jochmann[2] und Schröder van der Kolk[3] die zweite wählten. Der letztere zeigte, daß für keines der untersuchten Gase sich alle beobachteten Werte von PV mit der von Regnault bei seinen Beobachtungen angenommenen Genauigkeit mit einem Paare von Konstanten darstellen ließ, er benutzte deshalb die Gleichung nur für kleinere Intervalle. Wir begnügen uns indes hier damit, die von Regnault aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Konstanten anzuführen, da wir doch noch im § 103 und später in der Wärmelehre auf diese Rechnungen zurückkommen müssen.

Die durch ihre Logarithmen gegebenen Konstanten für die vier von Regnault untersuchten Gase sind:

Luft	$\log A = 0{,}043\,5120 - 3$	$\log B = 0{,}287\,3751 - 5$
Stickstoff	$\log A = 0{,}838\,9375 - 4$	$\log B = 0{,}847\,6020 - 6$
Kohlensäure	$\log A = 0{,}931\,0399 - 3$	$\log B = 0{,}862\,4721 - 6$
Wasserstoff	$\log A = 0{,}738\,1736 - 4$	$\log B = 0{,}925\,0787 - 6$.

Für den Wasserstoff ist zu beachten, daß PV stets größer als 1 ist, es ist deshalb in der Gleichung das zweite Glied positiv zu setzen. Die Konstanten leitete Regnault aus den für 8^m und für 16^m Druck beobachteten Werten von PV ab.

Später hat Regnault[4] noch einige andere Gase bis zu einem Drucke von etwa 8 Atmosphären untersucht. Die von ihm für dieselben berechneten Interpolationsformeln haben die Gestalt

$$\frac{V_0 \cdot 0{,}76}{V \cdot P} = 1 + A(P - 0{,}76) + B(P - 0{,}76)^2,$$

wenn die Drucke ebenfalls in Meter Quecksilber gegeben sind. Die Logarithmen der Konstanten haben folgende Werte:

Sauerstoff	$\log A = 0{,}269\,9060 - 3$	$\log B = 0{,}664\,6643 - 5$
Kohlenoxyd	$\log A = 0{,}780\,5656 - 3$	$\log B = 0{,}848\,9327 - 4$
Stickoxydul	$\log A = 0{,}814\,6743 - 3$	$\log B = 0{,}667\,0487 - 4$
Stickoxyd	$\log A = 0{,}446\,5181 - 3$	$\log B = 0{,}439\,5015 - 4$.

1) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. 21. p. 418. 1847.
2) *Jochmann*, Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik etc. 5. p. 101. 1860.
3) *Schröder van der Kolk*, Poggend. Ann. 116. 1862.
4) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. 26. p. 229. 1862.

In der Gleichung für Stickoxydul ist B negativ, also das dritte Gli positiv zu setzen.

Für eine Anzahl anderer Gase hat Regnault das Verhalten geg über dem Mariotteschen Gesetze bis zu einem Drucke von zwei Atm sphären verfolgt. Folgende Tabelle enthält die Resultate; in dieselbe si auch die vorher erwähnten Gase aufgenommen, sie ist geordnet nach de Grade, in welchem die Gase vom Mariotteschen Gesetze abweichen, d Abweichung ist um so größer, je größer der Quotient $\frac{P_0 V_0}{P \cdot V}$ ist. Die Zahl gelten für eine Temperatur von $7^0,9$ C.

	P_0	P	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Luft	702,78	1457,61	2,074	1,002 15
Stickoxyd	720,08	1416,33	1,967	1,002 85
Kohlenoxyd	703,18	1457,28	2,072	1,002 93
Grubengas	706,53	1383,73	1,958	1,006 34
Stickoxydul	703,10	1448,63	2,060	1,006 51
Kohlensäure	774,03	1550,63	2,003	1,007 22
Chlorwasserstoff . . .	708,93	1460,03	2,059	1,009 25
Schwefelwasserstoff .	722,53	1409,93	1,951	1,010 83
Ammoniak	703,53	1435,33	2,040	1,018 81
Schweflige Säure . .	697,83	1341,58	1,922	1,020 88
Cyan	703,48	1428,58	2,031	1,023 53.

Die Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze, stets im Sinne ein stärkern Kompressibilität, sind zum Teil sehr beträchtlich, sie sind, wie w später zeigen werden, im allgemeinen um so größer, je leichter die Ga zu Flüssigkeiten kondensiert werden.

§ 100.

Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetze bei se kleinem und hohem Drucke. Die Regnaultschen Versuche ergeb uns das Verhalten der Gase von etwa 1 bis 30 Atmosphären. Sowohl f Drucke, welche kleiner sind als derjenige einer Atmosphäre, als für größ Drucke hat er die Gase nicht verfolgt. Für erstere Drucke glaubte daß die Beobachtungsfehler zu groß seien, um einige Sicherheit über d Verhalten der Gase erhalten zu können. Da indes die Gase nach Re naults Beobachtungen mit steigendem Drucke immer weiter vom Mario teschen Gesetze abweichen, nahm man an, daß sie in ihrem Verhalten si demselben um so mehr nähern, je kleiner der Druck wird.

Es sind nun in neuerer Zeit Versuche über das Verhalten der Ga bei Drucken, die kleiner sind als der Druck einer Atmosphäre, mehrfa durchgeführt worden, und zwar zunächst von Siljeström[1]), Mendelejeff und Amagat[3]). Der erstere schließt aus seinen Versuchen, daß in d

1) *Siljeström,* Poggend. Ann. **151**. 1873.
2) *Mendelejeff* und *Kirpitschoff,* Ann. de chim. et de phys. **2**. (5.) p. 1874, und *Hemilian,* **9**. (5.) p. 111. 1876.
3) *Amagat,* C. R. **82**. p. 914. 1876.

ß mit abnehmendem Drucke das Produkt aus Druck und Volumen stets nehme, daß sich dasselbe aber nicht einer bestimmten Grenze annähere, ß also selbst bei großer Verdünnung die Gase nicht dem Mariotteschen Gesetze folgen. Die Versuche von Siljeström sind indes von Mendelejeff einer scharfen Kritik unterzogen, und da Siljeström selbst anibt, daß die von ihm beobachteten Abweichungen vom Mariotteschen setze durch Änderungen des beobachteten Druckes verschwinden, die im lgemeinen kleiner sind als die von ihm zugegebenen Beobachtungsfehler r einzelnen Beobachtungen, so kann man trotz der zahlreichen Versuche, e von Siljeström angestellt sind, seine Folgerungen nicht für begründet halten.

Mendelejeff kommt bei seinen mit Kirpitschoff und später mit milian angestellten Versuchen zu dem entgegengesetzten Resultate: er det, daß, wenn man von dem Drucke einer Atmosphäre aus den Druck Gases vermindert, das Produkt PV wieder abnimmt, so daß dasselbe o bei dem Druck einer Atmosphäre ein Maximum hätte. Die unten an ter Stelle genannte Publikation, welche die mit Kirpitschoff angellten Versuche mitteilt, ist als eine vorläufige bezeichnet, die zweite blikation gibt nur die Resultate der Versuche, nicht die Beobachtungen bst, welche auch seitdem nicht veröffentlicht zu sein scheinen. Die nigen in der ersten Mitteilung angegebenen Zahlen zeigen bei kleine Drucken eine sehr starke Abnahme des Produktes PV. Bezogen auf Produkt PV bei 646^{mm} Druck als Einheit erhält Mendelejeff bei $,628^{mm}$ 0,99306, bei $16,395^{mm}$ 0,97114 und bei $14,555^{mm}$ gar nur 6551.

Zu andern Resultaten gelangen die Versuche von Amagat; derselbe let, daß bei kleinen Drucken die Gase dem Mariotteschen Gesetze gen, oder doch nur so wenig von demselben abweichen, daß die Abchungen durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler verdeckt werden. s von Amagat bei seinen Versuchen benutzte Verfahren war folgendes. ei Kugeln dickwandigen Glases, jede von etwas mehr als 100^{cc} Inhalt, ren durch ein enges Rohr miteinander verbunden. An der unteren bed sich ein langes Rohr, welches in ein tiefes, auf und nieder verstelles Gefäß mit Quecksilber tauchte. Die obere Kugel trug ein Ansatzr, welches durch einen Tförmig durchbohrten Hahn mit einer gegabelten hre in Verbindung stand, deren einer Arm zu einer Luftpumpe, deren lerer zu einem Manometer führte.

Während nun das untere Ende des langen Rohres in Quecksilber chte, wurde aus den Kugeln die Luft soweit ausgepumpt, daß das Queckber an eine Marke stieg, die sich an dem die beiden Kugeln verbindenden gen Rohr befand, und dann am Manometer der Druck des noch in der rn Kugel vorhandenen Gases abgelesen. Darauf wurde das Quecksilberß so weit gesenkt, daß das Quecksilber aus der untern Kugel bis zu er an dem untern langen Rohr befindlichen Marke hinabsank, und wieder Druck des jetzt nahezu auf das doppelte Volumen gebrachten Gases gelesen.

Die beiden Kugeln befanden sich, um die Temperatur konstant zu alten, in einem Wasserbade, und es schwankte infolgedessen die Temperatur nur etwa um $^1/_{30}$ Grad.

Bei sieben Versuchsreihen, bei denen die Temperaturen stets zwischen 10° und 12° waren, ergaben sich folgende Resultate:

Reihe	Zahl der Einzelversuche	Anfangsdruck P_0^{mm}	$\frac{PV}{P_0 V_0}$
1	5	6,541	1,0018
2	5	6,546	1,0035
3	8	10,499	1,0000
4	6	10,516	0,9998
5	6	10,552	1,0022
6	4	6,538	1,0011
7	7	6,536	1,0018.

Die Abweichungen der Zahlen der letzten Reihe sind kleiner als die möglichen Beobachtungsfehler, so daß in der Tat diese Zahlen eine Abweichung der Luft vom Mariotteschen Gesetz nicht erkennen lassen.

Von van der Ven[1]) angestellte Versuche gelangen zu ähnlichen Resultaten wie Mendelejeff. Die Methode van der Vens war die von Siljeström. Zwei eiserne, in schmelzendem Eise liegende Zylinder A und B stehen durch eine mit einem Hahn verschließbare Röhre in Verbindung. Der Zylinder A hat andererseits ein Ansatzrohr, in welches ein Trockenapparat eingesetzt ist, durch welches, wenn es geöffnet ist, Luft aus der Atmosphäre in die Zylinder A und B eintreten kann. Der Zylinder B ist mit der Luftpumpe und dem Manometer verbunden.

Zunächst werden A und B mit trockner Luft vom Drucke der Atmosphäre gefüllt; dann wird in beiden der Druck bis auf eine gewisse Größe P vermindert; darauf wird der Hahn zwischen A und B geschlossen und der Druck in B weiter bis zum Drucke P_1 vermindert. Schließlich wird der Hahn zwischen A und B geöffnet und der Druck P_2 gemessen, der dann vorhanden ist. Ist V das Volum des Zylinders A, V_1 das des Zylinders B und v_1 der Raum in dem Manometer bis zur Oberfläche des Quecksilbers, wenn der Druck P_1, dagegen v_2, wenn der Druck P_2, so muß bei genauer Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes

$$PV + P_1(V_1 + v_1) = P_2(V + V_1 + v_2).$$

Zur Prüfung des Gesetzes berechnete van der Ven aus den beobachteten Drucken P, P_1, P_2, und den bestimmten Volumen v_1 und v_2, das Verhältnis der beiden Räume V und V_1. Ist das Mariottesche Gesetz strenge richtig und sind die Versuche genau, so muß sich aus der Kombination aller Versuche derselbe Wert des Verhältnisses $V_1 : V$ ergeben. Führt man den Versuch so, daß $v_1 = v_2$ und setzt man dann für $V_1 + v_1 = V_1 + v_2 = V^1$, so wird die Beziehung

$$\frac{V}{V^1} = \frac{P_2 - P_1}{P - P_2}.$$

Der Versuch ergab den Wert dieses Quotienten um so kleiner, je kleiner P genommen wurde. Es wurde P_1 immer nahezu 7^{mm} und P gleich 24

1) *Van der Ven,* Archive du Musée Teyler (Haarlem 1890) 2. Reihe. 3. Bd. 4. Teil. p. 349. Beiblätter zu Wiedem. Ann. 14. p. 867. 1891.

58 — 31 — 16^{mm} gewählt. Den vier Anfangsdrucken entsprechend er- sich

$$\frac{V}{V_1} \text{ zu } 1{,}026 - 1{,}051 - 1{,}064 - 1{,}080 .$$

Es folgt daraus, daß das Produkt PV mit abnehmendem Drucke iner wird, und zwar findet van der Ven, wenn man PV für 248^{mm} ck gleich 1 setzt, dasselbe für

$$58^{mm} \text{ zu } 0{,}9875 - 31^{mm} \text{ zu } 0{,}9815 - 16^{mm} \text{ zu } 0{,}9745,$$

len, welche denen von Mendelejeff nahe kommen.

F. Fuchs[1]) hat nach einer wesentlich der von Amagat benutzten ichen Methode das Verhalten von Luft, Kohlensäure und Wasserstoff enüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetze zwischen einem Drucke von 0 und 250^{mm} Quecksilber verfolgt. Für Wasserstoff gelangt er zu dem lusse, daß sich unter diesem Drucke eine Abweichung vom Mariotte- n Gesetze nicht erkennen lasse; für Luft findet er, wie vor ihm Men- lejeff, daß das Produkt pv in der Nähe des Druckes einer Atmosphäre, auer bei 700^{mm} ein Maximum hat und bei weiterer Druckabnahme iner wird. Wird das unter dem Drucke von 1^{m} Quecksilber genommene lumen gleich 1 gesetzt, so ist pv bei 0,7^{m} gleich 1,0001 und geht bis 50^{m} auf 0,9988 zurück.

Für Kohlensäure und schweflige Säure wächst das Produkt mit ab- mendem Drucke stets von 1 bei 1^{m} Quecksilberdruck für Kohlensäure 1,0063, für schweflige Säure bis 1,0251 bei 0,25^{m} Druck.

Bohr[2]) hat das Verhalten des Sauerstoffs bei sehr kleinen Drucken, er 15^{mm} Quecksilber, untersucht. Er stellte zwei gleiche Barometer neben- ander in ein und dasselbe Gefäß; das Quecksilberniveau in dem Gefäße nte beliebig gehoben und gesenkt, und somit der leere Raum der Baro- ter beliebig vergrößert oder verkleinert werden. In das eine Barometer, sen oberer Teil sorgfältig kalibriert und geteilt war, ließ er geringe gen Sauerstoff eintreten, und beobachtete die Differenz der Barometer- ade, wenn dieser Sauerstoff ein kleineres oder größeres Volumen aus- lte. Für sehr kleine Drucke fand er eine starke Zunahme des Druckes zu 0,7^{mm} Quecksilberdruck. War dieser Druck erreicht, so nahm bei er Verminderung des Volumens von 1,023 auf 1 der Druck gar nicht erst bei weitergehender Volumverminderung wächst der Druck, und r zunächst so, daß das Produkt pv zunimmt, aber langsamer wie vorher, l sehr bald nahe konstant wird. Unter 0,7^{mm} Druck ist die an die lle des Mariotteschen Gesetzes tretende Gleichung

$$(p + 0{,}070)\,v = K,$$

schen 0,70^{mm} und 15^{mm} ergab sich

$$(p + 0{,}109)\,v = K_1 .$$

Bohr ist geneigt, das eigentümliche Verhalten bei 0,7^{mm} Druck einer ociation des Sauerstoffs zuzuschreiben, durch welche bei konstantem

1) F. Fuchs, Wiedem. Ann. 35. p. 430. 1888.
2) Bohr, Wiedem. Ann. 27. p. 459. 1886.

Druck eine Volumzunahme des Sauerstoffs eintrete, welche bei V
rung des Volumens wieder rückgängig wird.

Die Versuche über das Verhalten der Gase bei geringen
wurden später von Campetti[1]), Battelli[2]), Lord Rayleigh u
sen wieder aufgenommen. Sämtliche Beobachter kamen zu dem I
daß die von Mendelejeff gefundenen Abweichungen von dem Bo
Gesetze nicht existieren, Campetti und Battelli glaubten indes
Bohr aus seinen Versuchen geschlossene Anomalie des Sauerstoffs l
zu können[3]). Die Versuche von Thiesen[4]) hatten wesentlich d
zu prüfen, ob bei dem Sauerstoff die Bohrsche Anomalie vorh
oder nicht.

Das Verfahren war folgendes. Das Entwicklungsgefäß des S
eine Röhre von schwer schmelzbarem Glase, deren in stumpfe
schräg abwärts gebogenes und verschlossenes Ende Quecksilberoxy
mündete in ein etwa 10 Liter haltendes Glasgefäß, von welchem
durch einen Hahn abgesperrt werden konnte. Das Innere des Ge
dauernd mit dem einen Schenkel eines Manometers verbunden.
Gefäß war mittels einer Röhre, welche durch einen Hahn ver
war, ein zweites von gleicher Größe angeschlossen; auf dieses
drittes Gefäß von etwa 0,8 Liter Inhalt, das ebenfalls von dem
durch einen Hahn absperrbar war. Mit dem dritten Gefäße w
eine absperrbare Leitung eine automatische Quecksilberluftpumpe
der Sprengelschen (man s. § 110) verbunden.

Der Gang der Versuche war folgender. Zunächst wurde d
Apparat luftleer gepumpt, dann der erste Ballon oder die beid
aus dem Entwicklungsapparat mit Sauerstoff gefüllt und der I
messen. Dann wurde der Sauerstoff durch Öffnen des Hahne
Leitung zwischen dem zweiten und dritten Gefäß, während die
vom dritten Gefäß zur Luftpumpe geschlossen war, auf die dr
verteilt, und wieder der Druck gemessen.

Nehmen wir an, es seien zuerst die beiden großen Gefäße u
Drucke p_1 gefüllt, das Volumen derselben sei V_1, dann sei nach
teilung des Gases auf die drei Gefäße der Druck p_2, das Volumen
das Boylesche Gesetz gültig, so muß

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Da der Quotient $\frac{V_2}{V_1}$ konstant ist, so muß $\frac{p_1}{p_2}$ konstant sein, von
Werte p_1 man auch ausgeht.

Ein einfaches Verfahren läßt ohne Ausmessung des Volum
Folgerung prüfen. Man pumpt nach der ersten Beobachtung
Gefäß, nachdem es von dem zweiten abgesperrt ist, wieder luf
den beiden ersten Gefäßen bleibt der Druck p_2, durch Verbin

1) *Campetti,* Atti di Torino. **31.** p. 52. 1895.

2) *Battelli,* Nuovo Cimento. **1.** (5.) p. 5 u. 81. 1901.

3) Man sehe auch die Kritik der Versuche Battellis von *Thiese*
d. Physik. **6.** p. 280. 1901.

4) *Thiesen,* Ann. d. Physik. **6.** p. 280. 1901.

dem dritten Gefäß sinkt der Druck auf p_3 und es muß $\frac{p_2}{p_3}$ denselben Wert haben wie $\frac{p_1}{p_2}$.

Indem man das Verfahren wiederholt, kann man zu immer kleiner werdenden Drucken übergehen. Thiesen ging so in einer Versuchsreihe von einem Anfangsdruck $0{,}897^{mm}$ in den ersten zwei Gefäßen bis auf $0{,}543^{mm}$ zurück. Für die Quotienten der aufeinander folgenden Drucke ergab sich 1,039 und die mit diesem Qnotienten aus dem Anfangsdrucke $0{,}897^{mm}$ berechneten Drucke weichen von dem beobachteten Drucke um höchstens $0{,}005^{mm}$ ab; die Abweichungen zeigten gar keinen bestimmten Gang, so daß man in diesen und in weitern Messungen Thiesens keine Abweichungen vom Boyleschen Gesetz und ebenso keine Anomalie, wie Bohr bei $0{,}7^{mm}$ gefunden zu haben glaubte, erkennen kann.

Lord Rayleigh hat in gesonderten Untersuchungen die Gültigkeit des Boyleschen Gesetzes geprüft zwischen 75^{mm} und 150^{mm} Druck[1]) und zwischen etwa $1{,}5^{mm}$ und $0{,}01^{mm}$ Druck[2]). Die ersterwähnten Versuche wurden nach der Methode von Amagat ausgeführt; es wurde ein aus zwei durch eine enge Röhre verbundenen Kugeln bestehendes Gefäß mit Gas unter dem Druck von 75^{mm} gefüllt. Darauf wurde das Gas in die obere Kugel gedrückt, mit welcher eine Vorrichtung verbunden war, durch welche das Volumen des in die obere Kugel gedrückten Gases etwas reguliert werden konnte. Das Volumen des Gases wurde so reguliert, daß der Druck genau der doppelte wurde. Die Volumina, welche das Gas in beiden Fällen einnahm, waren genau gemessen. Wegen der Einzelnheiten der Anordnung verweisen wir auf die Abhandlung von Rayleigh.

Als Resultat gibt derselbe an, daß wenn man als Genauigkeitsgrenze für den Quotienten $\frac{pv}{p_1 v_1}$ annähme 0,0002, bei Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff keine Abweichung vom Mariotteschen Gesetz zu erkennen sei; bei Stickstoffoxydul zeige sich auch bei diesen geringen Drucken, daß es etwas stärker zusammendrückbar sei als es das Gesetz verlangt.

Zur Prüfung des Gesetzes bei sehr kleinen Drucken hat Lord Rayleigh ein eigenes Manometer konstruiert, daß er Neigemanometer nennt. In die beiden Schenkel des Manometers, deren einer mit dem Raume, der das zu untersuchende Gas enthielt, einer Meßröhre, in Verbindung stand, der auch mit einer Quecksilberluftpumpe durch Öffnen eines Hahnes in Verbindung gesetzt werden konnte, mit welcher der andere Schenkel des Manometers verbunden war, waren Glasstäbchen mit feinen Spitzen eingeführt. Wenn der Druck auf beiden Seiten genau gleich war, so berührten die Spitzen gerade die Quecksilberoberfläche. Wurde durch Verbindung mit dem Gasbehälter auf der einen Seite des Manometers, während auf der andern Seite durch die Pumpe Luftleere gehalten wurde, ein Druck wirksam, so wurde dort das Quecksilber herabgedrückt, die Oberfläche entfernte sich von der Spitze. Durch Neigen des Manometers um eine Achse, senkrecht zu der vertikalen die beiden Achsen der Manometerschenkel auf-

1) Lord *Rayleigh*, Transact. of London Royal Soc. 198 p. 417. 1902; Zeitschr. f. physikal. Chemie 41 p. 71. 1902.

2) Lord *Rayleigh*, Transact. of London Royal Soc. 196 p. 205. 1901. Zeitschr. f. physikal. Chemie. 37. p. 713. 1901.

nehmenden Ebene senkrecht war, wurde dann das Quecksilber mi Spitzen wieder in Berührung gebracht. Aus der Größe der Neigun sich die Druckdifferenz berechnen. Die Neigung wurde in einem mi Manometer fest verbundenen Spiegel mit Fernrohr und Skala abg Für 1^{mm} Druckdifferenz betrug die Neigung an der Skala abgeles Teilstriche.

Zur Prüfung des Gesetzes wurde folgendermaßen verfahren. Zu wurde der ganze Apparat luftleer gepumpt, dann die Verbindung dem Gasbehälter führenden Röhre mit der Pumpe abgesperrt, das silber in der Meßröhre durch eine Vorrichtung, wie wir sie spät Beschreibung der Quecksilberluftpumpe kennen lernen werden, bis zu Teilstriche gehoben und der Raum über dem Quecksilber bis zur silberoberfläche im Manometer mit dem zu untersuchenden Gase einem Drucke von höchstens $1{,}5^{mm}$ oder auch zu kleinerem Druck gefüllt und der Druck gemessen. Darauf wurde das Quecksilber i Meßröhre gesenkt, somit das Volumen des Gases um eine gemessene geändert und wieder der Druck gemessen. Ist das Volumen zwisch Oberfläche des Quecksilbers im Manometer und dem Nullpunkte de lung der Meßröhre V und das Volumen zwischen dem Nullpunkt Teilung und der Oberfläche des Quecksilbers in der Meßröhre be ersten Füllung gleich v_1, der Druck des Gases gleich p_1, ist fern Vergrößerung des Volumens in der Meßröhre auf v_2 der Druck worden, so muß, wenn das Mariottesche Gesetz gültig ist

$$p_1 (V + v_1) = p_2 (V + v_2).$$

Das Volumen V wurde durch eigene Versuche zu $45{,}6^{cc}$ bestimmt.

Wir geben in folgender Tabelle eine Versuchsreihe mit Stickst

Volumen in cc	Druck in Skalent.	Logarithm. des Produkt	Druck in mm Hg	$\frac{pv}{p_m v_m}$	Fehler in mm
45,6 + 0	344,9	4,1966	1,49	1,0007	+ 0,0
45,6 + 10	282,3	4,1958	1,22	0,9988	− 0,0
45,6 + 20	239,5	4,1962	1,04	0,9998	− 0,0
45,6 + 40	183,3	4,1956	0,79	0,9983	− 0,0
45,6 + 60	148,8	4,1963	0,64	1,0000	0,0
45,6 + 80	125,2	4,1966	0,54	1,0007	+ 0,0
45,6 + 110	101,1	4,1968	0,44	1,0012	+ 0,0
45,6 + 150	80,2	4,1955	0,35	0,9982	− 0,0
45,6 + 190	66,9	4,1976	0,29	1,0030	+ 0,0

$\overline{p_m v_m} = 4{,}1963$

Wie man sieht, weichen die Produkte pv so wenig voneinander die Quotienten von pv und dem Mittelwerte des Produktes $p_m v_m$ so von 1 ab, daß an der Gültigkeit des Boyleschen Gesetzes nicht zu zw ist. Gleiches wie für Stickstoff zeigte sich bei Wasserstoff und Sau Von der Bohrschen Anomalie war bei letzterm nichts zu erkennen.

Diese Versuche bestätigen somit, was man nach den Messungen naults schon erwarten mußte, daß die Gase bei wachsender Verdü sich dem Boyle-Mariotteschen Gesetz immer mehr annähern.

man die Gase stärkern als den von Regnault angewandten erwirft, so tritt bei der Mehrzahl, wie schon erwähnt wurde, g in die flüssige Form ein, bei einigen, den sogenannten persen, Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenoxyd indes tens dann nicht, wenn man die Kompressionen bei der gewöhneratur unserer Umgebung vornimmt. Wir beschränken uns Besprechung des Verhaltens der Gase bei gewöhnlicher Temwerden erst im zweiten Bande, wenn wir die Kontinuität des l gasförmigen Zustandes besprechen, auf das Verhalten der verschiedenen Temperaturen zurückkommen.

ersuchung des Verhaltens der permanenten Gase in weit höhern zu 2000 Atmosphären, ist zuerst von Natterer[1]) vorgenome komprimierte die Gase in der Flasche seines § 111 beKompressionsapparates und maß den Druck, ähnlich wie Oersted idsen bei ihren vorhin erwähnten Versuchen, indem er gegen Flasche angebrachtes Ventil einen Hebel wirken ließ und die stimmte, welche den Hebel im Gleichgewicht hielten. Das Gas ließ er dann durch eine Röhrenleitung unter eine in tischen Wanne stehende Glocke treten, deren Kubikinhalt genau roß war als der Kubikinhalt der Flasche des Kompressions-Wenn nun die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, so il, wenn die Glocke einmal aus der Flasche unter dem Drucke häre gefüllt wird, der Druck in der Flasche um 10 Atmobmen, sind die Gase weniger kompressibel, als es das Maiesetz verlangt, so muß der Druck bei jeder Füllung der Glocke 10 Atmosphären abnehmen, und zwar um so mehr, je mehr dem Sinne von dem Gesetze abweichen. Es zeigte sich, daß ıcken die Druckabnahme bis zu mehr als dem 10fachen wuchs; z. B bis auf 2790 Atmosphären komprimiert war, sank bei Austreten von 10 Volumen Gas der Druck um 136, dann um hären, erst als der Druck auf 75 Atmosphären herabgegangen r für jede zehn Volume heraustretenden Gases um 10 Atmo-

Natterer in dieser Weise die Flasche allmählich entleerte und aligem Ausfließen von 10 Volumen den Druck beobachtete, ließ ckwärts bestimmen, wieviel Volume Gas in der Flasche bei mten Drucke komprimiert waren. Da nun der reziproke Wert lasche enthaltenen Anzahl Volumina das Volumen der in der r dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Gases angibt, auf diese Weise das Produkt $P \cdot V$ für jeden Druck angeben, Atmosphäre Druck gleich 1 gesetzt. In dieser Weise sind in belle einige von Natterers Angaben zusammengestellt, die r jedes Gas angegebenen Spalten enthält die Drucke P in . die zweite die Anzahl der in der Flasche unter diesen Drucken n Volumina der Gase, deren reziproker Wert das Volumen

[1]) rer, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 5. 1850; 6. 1851; 12. d Ann 62. 1844; 94. 1855. Die hier angeführten Versuche finden Ann 94 p. 436 1855

jener Gasmenge ist, welche unter dem Drucke einer Atmosphäre die Fl ausfüllt, die dritte Kolumne enthält den Quotienten $\frac{P_0 V_0}{P V} = \frac{1}{P V}$, d Abweichung von der Einheit den Grad der Abweichung vom Mariotte Gesetze in derselben Weise angibt wie bei den Zahlen von Regnau

Wasserstoff			Sauerstoff		
P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$	P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$
2790	1008	0,3613	1354	657	0,4582
2347	958	0,4081	1106	617	0,5578
1781	848	0,4761	923	577	0,6251
1508	778	0,5159	764	537	0,7028
1259	708	0,5615	563	467	0,8294
1015	628	0,6187	463	417	0,9006
751	528	0,7030	370	347	0,9378
505	398	0,7881	276	267	0,9674
365	308	0,8438	243	237	0,9753
248	218	0,8790	210	207	0,9857
100	98	0,9800	188	187	0,9947
78	78	1,0000	177	177	1,0000

Stickstoff			Kohlenoxyd		
P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$	P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$
2790	705	0,2527	2790	727	0,2606
2046	645	0,3152	2088	677	0,3242
1640	605	0,3680	1674	637	0,3805
1458	585	0,4012	1416	607	0,4286
1228	555	0,4519	1196	577	0,4824
1035	525	0,5072	1016	547	0,5383
801	475	0,5930	814	507	0,6228
600	415	0,6917	599	447	0,7462
403	335	0,8312	408	367	0,8999
206	195	0,9466	204	197	0,9657
107	105	0,9813	138	137	0,9928
85	85	1,0000	127	127	1,0000

Für geringere als die zuletzt in den Tabellen angegebenen Dru erhält Natterer für die Produkte PV den Wert 1, da diese Met selbstverständlich nicht imstande ist, die kleinen Abweichungen der vom Mariotteschen Gesetze in geringeren Drucken erkennen zu la

Die Versuche Natterers sind wiederholt von Cailletet[1]); das ihm angewandte Verfahren ist dem ähnlich, welches er bei Untersuch der Kompression der Flüssigkeiten anwandte. Das Gas befand sich in unten offenen und mit dem offenen Ende in Quecksilber tauchenden röhre von etwa 50^{cc} Inhalt; an das obere Ende der Röhre war ein vergoldetes Kapillarrohr angesetzt, welches oben geschlossen war.

1) *Cailletet,* Comptes Rendus. 70. p. 1131. 1870.

…htung war in einen mit Wasser angefüllten Kompressionsapparat …t. Ließ man nun auf das Wasser den durch ein Desgoffesches …meter (§ 66) gemessenen Druck wirken, so pflanzte sich derselbe auf …ecksilber fort, und dieses stieg, wenn der Druck groß genug war, in …kapillare Rohr und löste das Gold an den Wänden soweit auf, als es …as Rohr eingedrungen war. Der Raum des kapillaren Rohres, an …en Wandung das Gold nicht aufgelöst war, gab dann das Volumen …komprimierten Gases, welches nach Beendigung der Kompression be…mt wurde. Die von Cailletet auf diese Weise bei einer Temperatur … 15° erhaltenen Zahlen gibt folgende Tabelle, zusammengestellt mit …Zahlen von Natterer.

Druck in Atmosphären	Wasserstoff Cailletet	Natterer	$\frac{V_0 P_0}{V P}$ Luft Cailletet	Natterer
60	0,9810	—	1,0137	—
80	"	—	1,0118	—
100	0,9552	0,9800	1,0098	1,0000
200	0,9158	0,9050	0,9990	0,9502
300	0,8761	0,8600	0,9405	0,9200
400	0,8374	0,8312	0,8672	0,8628
605	0,7580	0,7533	0,7215	0,7185

Fig. 183.

Später hat Cailletet[1]) Messungen über die Kom…ssibilität des Stickstoffes angestellt, bei welchen er …t die Höhe der drückenden Quecksilbersäule maß. …Einrichtung des Kompressionsgefäßes zeigt Fig. 183. …ner starken Röhre von Stahl, 1,8 m lang und 25 mm … befindet sich das oben in eine enge Röhre ver…erte mit dem Gase gefüllte Gefäß R. Die Glas…e ist wieder auf ihrer innern Seite vergoldet. Die …hlröhre ist oben durch den eisernen Konus D und …Schraube C verschlossen; sie ist vollständig mit …ksilber gefüllt. An dem untern Ende ist die …hlröhre, wie die Figur zeigt, mit einer 3 mm weiten …re TT von weichem Stahl verbunden, welche eine …e von 250 m hat, und welche um eine Holztrommel … 2 m Durchmesser gewickelt ist, die sich um eine …kale Achse drehen kann. Das Gefäß hängt selbst …einem 4 mm dicken, ebenfalls um eine Holztrommel …ckelten Stahldraht. Die Stahlröhre ist vollständig …mit großer Sorgfalt mit Quecksilber gefüllt, so … die Quecksilbersäule nirgendwo durch eine Luft… unterbrochen ist. Die ganze Vorrichtung war …dem 500 m tiefen artesischen Brunnen zu Butte…ailles aufgestellt. Durch Drehen der den Draht …die Stahlröhre tragenden Holztrommeln wird dann … Apparat vorsichtig und langsam in den Brunnen …gelassen, bis zu einer Tiefe, die genau durch die

1) Cailletet. D'Almeida Journal de physique. 8. 1879.

Länge des abgewickelten Stahldrahtes gemessen wird, der dann auch d Höhe der drückenden Quecksilbersäule entspricht. Die an dem Appara angebrachten Maximumthermometer gestatten nach dem Herausziehen de selben die Temperatur zu bestimmen, welche der Apparat im Brunn hatte. Dieselbe war bis zu einer Tiefe von 84^m 15^0 und stieg dann b dem Hinablassen bis 182^m auf 17^0.

Das Volumen der komprimierten Luft ergab sich gerade wie bei de vorhin beschriebenen Versuchen aus der Strecke, bis zu welcher in de Glasröhre das Gold aufgelöst war.

Folgende Tabelle gibt einige der von Cailletet erhaltenen Resultate; die Drucke sind in Meter Quecksilber, die Volumina in Volumteilen des Kompressionsgefäßes angegeben.

Druck. P	Volum. V	PV	Druck. P	Volum. V	PV
39,359	207,93	8184	89,388	97,97	8267
44,264	184,20	8153	99,188	86,06	8536
49,271	162,82	8022	114,119	76,69	8751
59,462	132,86	7900	144,241	62,16	8966
64,366	123,53	7951	154,224	54,97	9023
69,367	115,50	8011	174,100	52,79	9191
79,234	103,00	8162	181,985	51,27	9330

Das Minimum von PV, also die stärkste Kompressibilität des Stick-stoffs, ergibt sich somit hier bei $59{,}46^m$ Quecksilberdruck, von da al nimmt die Kompressibilität in immer steigendem Maße ab.

Amagat[1]) hat die Kompressibilität der Gase noch weiter verfolg und seine Versuche auf sämtliche sogenannte permanente Gase ausgedehnt Die Versuche wurden in einem Schachte von 400^m Tiefe in der Nähe vo Saint-Etienne ausgeführt, auf dessen Boden der Kompressionsapparat auf gestellt war. Das Verfahren, welches Amagat anwandte, war demjenige von Regnault gleich, jedoch mußte er, wie Biot und Arago, die Kom pressionen mit einer und derselben Gasfüllung vornehmen. Um die kleine Volumina mit Genauigkeit zu messen, war deshalb dem Gasbehälter ein ebensolche Form gegeben, wie sie auch von Cailletet gewählt war. Di Manometerrohr war ein enges Stahlrohr von 2^{mm} Durchmesser im Licht und einer Wandstärke von $1{,}5^{mm}$. Dasselbe war aus einzelnen Stücke zusammengesetzt und wurde nach Bedürfnis verlängert, wenn zu höhe und höhern Drucken übergegangen wurde. Bei jedem einzelnen Versuch endigte das Manometer in einer Glasröhre, in welcher das obere Nivea des Quecksilbers beobachtet wurde. Die Höhe der Quecksilbersäule wurd an einem mit Marken versehenen Stahldrahte gemessen, welcher neben de Manometer im Schacht herabhing, indem ein Gehilfe in einem Fahrst in dem Schacht emporstieg und durch Einfüllen oder Herausnehmen vo Quecksilber aus der Glasröhre bewirkte, daß das obere Niveau des Queck silbers in gleicher Höhe mit einer Marke des Drahtes war.

Auf die Details dieser begreiflicherweise mit den größten Schwierig keiten verknüpften und deshalb um so verdienstvolleren Versuche könne

1) *Amagat*, Ann. de chim. et de phys. 29. (5.) 1880.

wir hier nicht eingehen; wir müssen deshalb auf die Abhandlung von Amagat verweisen, in welcher die zur Überwindung aller Schwierigkeiten angewandten Maßregeln vortrefflich beschrieben sind.

In folgender Tabelle sind die Resultate der Messung für Stickstoff von Amagat zusammengestellt.

Druck P Meter Hg	PV	Druck in Atmosphären	Druck ber. nach dem M. G.	Differenzen
20,740	50 989	27,289	27,289	0,000
35,337	50 897	46,496	46,580	+ 0,084
47,176	50 811	62,034	62,251	+ 0,217
55,481	50 857	73,001	73,181	+ 0,188
61,241	50 895	80,580	80,728	+ 0,140
69,140	50 987	90,975	90,978	+ 0,003
82,970	51 226	109,171	108,665	− 0,506
96,441	51 602	126,896	125,388	− 1,508
128,296	52 860	168,810	162,835	− 5,975
158,563	54 214	208,635	196,224	− 12,411
190,855	55 850	251,129	229,271	− 21,855
221,103	57 796	290,934	256,669	− 34,275
252,353	59 921	332,039	282,544	− 49,495
283,710	62 192	373,302	306,005	− 67,247
327,388	65 428	430,773	335,707	− 95,066

Den kleinsten Wert erhält das Produkt PV hier bei einem etwas eneren Drucke, als bei den Versuchen von Cailletet bei einem Druck a 47ᵐ Quecksilber.

Die Kompressibilität der übrigen Gase verglich Amagat dann mit r des Stickstoffs nach dem Verfahren von Despretz und Pouillet. Aus r beobachteten Volumverminderung des Stickstoffs wurde nach den in r vorigen Tabelle angegebenen Zahlen der Druck in Meter Quecksilber rechnet.

In folgender Tabelle sind die von Amagat erhaltenen Resultate zummengestellt, wobei nur zu bemerken ist, daß die Drucke auf die erste zimale abgerundet sind, da die von Amagat für die verschiedenen Gase gegebenen Drucke in der zweiten Dezimale etwas verschieden sind. Die ste Spalte enthält so die Drucke in Meter Quecksilber, für welche die den folgenden Spalten angegebenen Werte von PV erhalten wurden.

P	Luft	Sauerstoff	PV für Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
4,1	26 968	26 843	27 381	27 147	26 325	21 473
4,9	26 908	26 614	27 618	27 102	25 596	18 352
5,2	26 791		27 652	27 007	24 998	12 263
5,5	26 789	26 185	27 960	27 025	24 433	9 772
4,0	26 778	26 050	28 129	27 060	24 074	9 370
2,2	26 792	25 858	28 323	27 071	23 724	9 703
4,2	26 840	25 745	28 533	27 158	23 318	10 675
1,5	27 041	25 639		27 420	22 951	12 210
3,9	27 608	25 671	29 804	28 092	22 915	15 116

P	Luft	Sauerstoff	PV für Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
177,6	28 540	25 891	30 755	29 217	23 739	18 962
214,5	29 585	26 536	31 625	30 467	25 054	22 115
250,2	30 572	—	32 426	31 722	26 742	25 065
303,0	—	28 756	—	—	—	29 333
304,0	32 488	—	33 887	33 919	29 289	—

Mit Ausnahme des Wasserstoffs, bei welchem entsprechend dem schon von Regnault gefundenen Verhalten das Produkt PV stetig zunimmt, zeigen alle Gase ein Minimum des Produktes PV, welches aber bei jedem Gase bei einem anderen Drucke eintritt. Am auffallendsten ist das Verhalten des Äthylens, bei welchem der Wert des Produktes bei dem Minimum weniger als ein Drittel des Wertes bei 300^{m} Druck beträgt, und bei welchem dann ein so rapides Ansteigen des Produktes eintritt, daß die Kompressibilität dieses Gases in höhern Drucken ohne Zweifel kleiner wird, als das aller übrigen Gase. Überall findet man aber das zuerst von Natterer gefundene Resultat bestätigt, daß je weiter ein Gas komprimiert wird, um so mehr dasselbe vom Mariotteschen Gesetze abweicht, daß das Volumen ganz erheblich langsamer abnimmt, als es nach diesem Gesetze der Fall sein müßte.[1])

Das Mariottesche Gesetz ist somit nur ein ideales Gesetz, dem sich die wirklichen Gase bei geringen Drucken mehr oder weniger anschließen, bei Drucken von weniger als drei Atmosphären so nahe, daß wir es in den meisten Fällen unbedenklich bei Gasmessungen anwenden dürfen, das heißt, wenn wir Gasquantitäten durch Messung des Volumens unter solchen Drucken bestimmen oder vergleichen wollen, daß wir sie mit Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf das bei einem Normaldrucke, etwa dem Drucke einer Atmosphäre von ihnen ausgefüllte Volumen reduzieren dürfen.

§ 101.

Kinetische Theorie der Gase. Die Gase sind gegenüber den festen und flüssigen Körpern dadurch charakterisiert, daß sie kein selbständiges Volumen haben, daß eine bestimmte Quantität Gas nur unter einem bestimmten Druck auch ein bestimmtes Volumen ausfüllt, wobei dann die Gase auf die Wände des Raumes, in dem sie eingeschlossen sind, einen dem sie in dem Raum haltenden genau gleichen Gegendruck ausüben. Der Analogie nach liegt es nahe, in diesem Drucke der Gase wie bei den festen und flüssigen Körpern eine elastische Gegenwirkung gegen den äußern Druck zu sehen, also eine gegenseitige Abstoßung der Moleküle des Gases. Da indes die Gase stets, ihr Volumen mag so klein oder so groß sein, wie es will, einen bestimmten Druck erheischen, um in einem bestimmten Volumen gehalten zu werden und den diesem gleichen Gegendruck ausüben, so müßte man schließen, daß die Moleküle der Gase sich gegenseitig

1) Die späteren Versuche von *Amagat*, bei denen er bis zu Drucken von 3000 Atmosphären vorgeschritten, Ann. de chim. et de phys. **29.** (6.) 1893, werden wir in der Wärmelehre behandeln, bei Untersuchung der Abhängigkeit des Volumens einer gegebenen Gasmenge von Druck und Temperatur.

stets und unter allen Umständen abstoßen, eine Annahme, die man auch vielfach und lange Zeit gemacht hat. Unter Annahme, daß die Abstoßung der Gasmoleküle mit einer Kraft stattfindet, die mit wachsender Entfernung abnimmt, läßt sich in der Tat das die Gase wenigstens ideal charakterisierende Mariottesche Gesetz ableiten. Wir werden indes in der Wärmelehre bei Besprechung der innern Arbeit bei Ausdehnung der Gase Erscheinungen kennen lernen, welche den Beweis liefern, daß eine solche Abstoßung zwischen den Gasmolekülen nicht vorhanden ist.

Schon Daniell Bernoulli[1] sprach es aus, daß man sich auch eine ganz andere Vorstellung von der Natur des gasförmigen Zustandes machen kann, daß die Annahme genüge, daß die Gasmoleküle sich ganz unabhängig voneinander frei im Raume bewegen, bis sie aneinander oder an eine feste Wand treffen, wo sie dann nach den Gesetzen des elastischen Stoßes zurückgeworfen werden. Diese Ansicht wurde mehr als ein Jahrhundert kaum oder nur ganz vereinzelt beachtet und geteilt, bis sie vor etwa fünfzig Jahren infolge unserer neuern Auffassung über das Wesen der Wärme kurz nacheinander von drei Physikern, von jedem selbständig und ohne Kenntnis der frühern vereinzelt ausgesprochenen Vorstellung, wieder neu gebildet wurde, von Joule[2], Krönig[3] und Clausius[4]. Besonders Clausius führte diese Auffassung des Gaszustandes in der glücklichsten Weise durch und leitete für eine Reihe von Erscheinungen die Gesetze des Verhaltens der Gase ab. Wenn auch die ganze Fruchtbarkeit dieser Theorie der Gase erst in der Wärmelehre hervortreten wird, so ergeben sich doch eine Reihe von Erscheinungen, die uns an dieser Stelle zu betrachten obliegen, so unmittelbar aus dieser Theorie, daß wir dadurch veranlaßt werden, dieselbe jetzt vorzuführen, ihre Vervollständigung in der Lehre von der Wärme uns vorbehaltend.

Nach dieser Theorie existiert in den Gasen kein eigentlicher Gleichgewichtszustand, die Moleküle sind vielmehr immerfort in einer geradlinig fortschreitenden Bewegung, bis sie an eine feste Wand stoßen und von dieser als vollkommen elastische Körper zurückgeworfen werden, oder bis zwei Moleküle in geradem oder schiefem Stoße aneinander prallen. Man denke sich, sagt schon Bernoulli, ein zylindrisches senkrecht stehendes Gefäß und darin einen beweglichen Stempel, auf welchem ein Gewicht liegt. Die Höhlung möge äußerst kleine Körperchen enthalten, welche sich mit großer Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin bewegen; dann würden diese Körperchen, welche gegen den Stempel anprallen und ihn tragen, eine elastische Flüssigkeit darstellen.

Um die Möglichkeit einer solchen stetig fortdauernden Bewegung zu veranschaulichen, stellt sich Krönig einen Kasten vor, in welchem eine

1 In seiner Hydrodynamik, sectio decima, aus dem Jahre 1738. Nach einer Bemerkung von *P. du Bois Reymond*, Poggend. Ann. 107. 1859.

2 *Joule*, Mem. of the Manch. Soc. 9. 2. 1850; Philos. Mag. 14. 4. 211. 1857.

3 *Krönig*, Poggend. Ann. 99. 1856.

4 *Clausius*, Poggend. Ann. 100. 1857. In Poggend. Ann. 115. p. 2. 1862 gibt Clausius an, wie weit man sich in frühern Zeiten dieser Hypothese angeschlossen hat. Mit der Theorie von Clausius stimmt im wesentlichen die Theorie von *Maxwell*, Phil. Mag. 19. 4. und 20. 4. 1860. Eine andere Theorie entwickelte Maxwell später Phil. Mag. 32. 4. 1866 u. 35. 4. 1868.

Anzahl absolut elastischer Kugeln sich befinden, deren Volumen jedoch gegen den ganzen innern Raum des Kastens nur klein ist. Wenn man diesen Kasten lebhaft auf und ab und hin und her schüttelt, so erhalten die Kugeln eine Bewegung, wie sie für die Gasmoleküle angenommen ist, und wenn diese Kugeln sowie die Wände des Kastens als absolut elastisch angenommen werden, so dauert die Bewegung ohne Ende fort.

Außer dieser geradlinig fortschreitenden Bewegung müssen, wie Clausius hervorgehoben, die Moleküle zunächst noch eine rotierende Bewegung haben, da im allgemeinen die Stöße, mit denen die Moleküle aufeinander prallen, nicht lediglich zentrale sein werden; jeder schiefe Stoß bringt aber, wie wir sahen, eine Rotation der Moleküle um eine in ihnen liegende Achse hervor. Dadurch ist, bei den zusammengesetzten Molekülen wenigstens, sofort auch die Wahrscheinlichkeit oszillierender Bewegungen der einzelnen Teile der Moleküle gegeben. Diese rotierende und oszillierende Bewegung nennt Clausius im Gegensatze zu der fortschreitenden Bewegung derselben die Bewegung der Bestandteile. Bei einem bestimmten Gase und gegebener Temperatur müssen die lebendigen Kräfte dieser beiden Bewegungen in einem konstanten Verhältnisse stehen. Es folgt das einfach aus der Überlegung, daß in einem eine äußerst große Anzahl von Molekülen enthaltenden Raume in jedem Zeitelemente alle überhaupt nur möglichen Arten von Stößen stattfinden müssen; da nun die Bewegung der Bestandteile nur von der Art, wie die Moleküle aufeinander prallen und der Beschaffenheit bezw. den elastischen Verhältnissen der Moleküle, bei einer gegebenen Zahl von Stößen abhängig ist, so wird sie in jedem Zeitelemente in der gleichen Weise erzeugt; es muß sich daher die gesamte Bewegung in einem stationären Zustande befinden, in welchem die lebendigen Kräfte beider Bewegungen in einem bestimmten und bei ungeänderter Temperatur für immer gleich bleibenden Verhältnisse stehen.

§ 102.

Mittlere Wegelänge der Moleküle. Um über den durch diese Auffassung gegebenen Gaszustand nähern Aufschluß zu erhalten, untersuchen wir zunächst die Wegestrecken, welche die einzelnen Gasmoleküle im Mittel zurücklegen zwischen je zwei Stößen. So schwierig diese Aufgabe zu sein scheint, in so einfacher Weise ist dieselbe von Clausius durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst worden[1]).

Die Moleküle stoßen einander und ändern ihre Bewegungsrichtung, wenn sie sich bis zu einem gewissen Abstande genähert haben; diese Entfernung ist durch den Radius einer Kugelfläche gegeben, welche wir uns um den Schwerpunkt der Moleküle gelegt denken. Diesen Radius nennt Clausius den Radius der Wirkungssphäre, und den von jener Kugelfläche umschlossenen Raum die Wirkungssphäre. Diese soll demnach so bestimmt sein, daß, wenn der Schwerpunkt eines andern Moleküls in diese Kugel-

1) *Clausius* hat diese Frage zuerst Poggend. Ann. **105**. 1858, Abhandlungen zur mechanischen Wärmetheorie (Braunschweig bei Vieweg 1864—1867). Abh. p. 272 behandelt. Später nochmals in etwas anderer Weise Sitzungsberichte der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1874. Poggend. Erg.-Bd. VII. 1876. Obige Ableitung schließt sich an die zweite.

fläche eintritt, der Stoß zwischen beiden Molekülen selbst stattfindet. In welchem Verhältnisse der Radius der Wirkungssphäre zur Größe des Moleküles selbst steht, darüber läßt sich nur aufgrund von Hypothesen etwas aussagen. Nimmt man z. B. an, die Moleküle haben Kugelform und die Stoßwirkung trete wie bei elastischen Kugeln ein, wenn die Oberflächen sich berühren, so erkennt man, daß der Radius der Wirkungssphären gleich dem Durchmesser der Moleküle ist, denn in dem Falle tritt der Stoß ein, wenn die Mittelpunkte der Moleküle, also deren Schwerpunkte um die Summe der beiden Radien voneinander entfernt sind.

Um die zwischen zwei Stößen zurückgelegte Wegestrecke zu berechnen, denken wir uns zunächst einen irgendwie durch eine beliebige unregelmäßige Oberfläche begrenzten Raum und in diesem einen beweglichen Punkt. Der Punkt befinde sich an einer beliebigen Stelle des Raumes, so daß für alle gleich großen Teile des Raumes die Wahrscheinlichkeit den Punkt zu enthalten gleich groß sei. Der Punkt mache dann eine unendlich kleine Bewegung von der Länge dl nach irgend einer beliebigen Richtung, so daß alle möglichen Richtungen gleich wahrscheinlich sind. Wir untersuchen zuerst die Frage, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt bei dieser unendlich kleinen Bewegung die Oberfläche treffe.

Zu dem Zwecke suchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit auf, daß der Punkt irgend ein Element ds der Oberfläche treffe. Man denke sich den Punkt ruhend und statt dessen das betrachtete Flächenelement ds nach der der vorher angenommenen Bewegung des Punktes entgegengesetzten Richtung um die Strecke dl bewegt. Dadurch beschreibt das Flächenelement einen unendlich kleinen prismatischen Raum und die Wahrscheinlichkeit, daß der ruhend gedachte Punkt in diesem Raume liege, ist ganz dieselbe wie diejenige, daß der bewegte Punkt das Flächenelement trifft.

Für alle diejenigen Fälle, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes von dem begrenzten Raume nach außen geht (welche jener Bewegung des Punktes entsprechen, bei denen er sich von dem Flächenelement entfernt), so daß also der von dem Flächenelemente beschriebene kleine Raum außerhalb des gegebenen Raumes liegt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt in dem kleinen Raume liegt, gleich Null. Für solche Fälle dagegen, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes nach innen geht, so daß der von demselben beschriebene kleine Raum einen Teil des gegebenen Raumes bildet, wird die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich gerade in diesem Teile des gegebenen Raumes befindet, gleich einem Bruche, dessen Zähler dieser Teil des Raumes und dessen Nenner der ganze Raum ist.

Sei ϑ der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Elementes mit der auf dem Elemente nach innen gerichteten Normalen macht, so wird die Größe des kleinen Raumes dargestellt durch den Ausdruck

$$ds \cos\vartheta \cdot dl,$$

denn der Raum ist ein schiefes Prisma von der Länge dl, dessen zur Achse senkrechter Querschnitt $ds \cdot \cos\vartheta$ ist. Der Raum ist positiv, wenn der kleine Raum im Innern des gegebenen, negativ, wenn er außerhalb liegt.

denn im letztern Falle ist der Winkel ϑ ein stumpfer. Für negative Werte des Ausdruckes ist somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit Null. Nennen wir den ganzen gegebenen Raum U, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei der gedachten Bewegungsrichtung der Punkt sich in dem kleinen Raume befinde

$$\frac{ds \cos \vartheta dl}{U}.$$

Damit ist indes die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich in dem betrachteten Raume befinde, respektive die Wand treffe, nur gegeben, wenn die Bewegungsrichtung mit der Normalen des Elementes ds den Winkel ϑ bildet. Um die Wahrscheinlichkeit überhaupt zu finden, daß der Punkt in dem kleinen Raume sich befinde, müssen wir erst noch die Wahrscheinlichkeit aufsuchen, daß der Punkt sich in dieser Richtung, die wir die Richtung ϑ nennen wollen, bewege.

Zu dem Ende denken wir uns um den Punkt eine Kugel beschrieben mit dem Radius eins. Die möglichen Bewegungsrichtungen sind dann sämtliche Radien der Kugel. Denken wir uns jetzt durch den Punkt, also den Mittelpunkt der Kugel die Richtung der Normale zu dem Flächenelement gelegt, so liegen alle Richtungen ϑ auf einem Kegelmantel, der die Kugeloberfläche in einem Kreise schneidet, nicht in zwei Kreisen, da wir nur den Winkel ϑ mit der nach innen gezogenen Normalen des Elementes in betracht zu ziehen haben. Der Radius des Kreises, in welchem der Kegel die Oberfläche schneidet, ist $\sin \vartheta$, somit der Umfang des Kreises $2\pi \sin \vartheta$. Multiplizieren wir den Umfang $2\pi \sin \vartheta$ mit dem Bogenelement $d\vartheta$, so erhalten wir eine kleine Zone auf der Kugelfläche, deren Flächeninhalt $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ ist. Die Wahrscheinlichkeit nun, daß der Punkt bei seiner Bewegung eine Richtung habe, die zwischen ϑ und dem davon unendlich wenig verschiedenen $\vartheta + d\vartheta$ liegt, ist gleich dem Quotienten aus dem Flächeninhalt dieser Kugelzone und dem Flächeninhalt der Kugel. Denn die zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegenden Richtungen schneiden die Kugelfläche sämtlich in dieser Zone, während die Durchschnittspunkte sämtlicher möglicher Richtungen mit der Kugelfläche die ganze Kugelfläche geben. Da der Radius der Kugel gleich eins angenommen wurde, ist die Oberfläche der Kugel 4π. Die Wahrscheinlichkeit somit, daß die Bewegungsrichtung mit der Innenseite der Normalen einen spitzen Winkel bilde, der zwischen ϑ und $d\vartheta$ liegt, ist

$$\frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich in der Richtung ϑ bewege und bei der Bewegung das betrachtete Oberflächenelement ds treffe, ist dann gleich dem Produkte aus den beiden berechneten Wahrscheinlichkeiten. Denn unter den Fällen $\frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2}$, in denen sich der Punkt in der verlangten Richtung bewegt, sind es nur die Fälle $\frac{ds \cos \vartheta dl}{U}$, in denen er das Flächenelement ds trifft, die Wahrscheinlichkeit, daß beides zusammen eintritt, ist somit

$$\frac{ds \cos \vartheta dl \sin \vartheta d\vartheta}{2U}.$$

Da wir nun über die Lage des Oberflächenelementes gar keine nähere raussetzung gemacht haben, so gilt die gleiche Wahrscheinlichkeit für s Element der Oberfläche; ist s ein Stück der Oberfläche, so ist die hrscheinlichkeit, daß dieses unter dem Winkel ϑ von dem nach einer iebigen Richtung durch die Strecke dl bewegten Punkte getroffen wird, dem Verhältnis größer als die eben berechnete Wahrscheinlichkeit, in lchem s größer ist als ds. Um diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, en wir somit die vorhin berechnete mit $\frac{s}{ds}$ zu multiplizieren, sie wird

$$\frac{s \cos\vartheta\, dl \sin\vartheta\, d\vartheta}{2U}.$$

Um dann die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß die Oberfläche des ßes überhaupt an irgend einer Stelle unter dem Winkel ϑ getroffen d, haben wir nur s durch die ganze Oberfläche S zu ersetzen, dieselbe d also

$$\frac{S \cdot \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{2U}\, dl.$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt bewege sich nicht nur durch kleine Strecke dl, sondern habe eine gewisse Geschwindigkeit u, mit er sich fort bewegt, bis er die Oberfläche trifft und von dieser nach Elastizitätsgesetzen abpralle, worauf er nach einer andern Richtung derselben Geschwindigkeit weiter geht. Dabei soll vorausgesetzt werden, die Wechselwirkung zwischen Oberfläche und Punkt nur in unmittel- er Nähe stattfinde, so daß die Änderung der Bewegungsrichtung bei Stoße in unmerklich kleiner Zeit vor sich gehe, und demnach die Ge- windigkeit trotz der während der Stoßzeit stattfindenden Abweichung konstant betrachtet werden dürfe. Dann ist die Zeit dt, in der der kt den Weg dl zurücklegt, immer dieselbe, und wir können für dl en $dl = u\,dt$. Setzen wir das für dl ein, so erhalten wir für die Wahr- einlichkeit, daß das Stück s der Oberfläche in der Zeit dt von dem kte unter dem Winkel ϑ getroffen wird,

$$\frac{s \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot u}{2U}\, dt;$$

die ganze Oberfläche haben wir nur s mit S zu vertauschen.

Hieraus erhalten wir die Anzahl von Stößen, welche das Flächenstück s der Zeit einer Sekunde unter dem Winkel ϑ erhält, durch folgende Über- ung. Nennen wir den Faktor von dt für einen Augenblick x; obiger sdruck sagt dann, daß das Flächenstück s durchschnittlich einen Stoß er dem Winkel ϑ in einer solchen Zeit $n\,dt$ bekommt, daß

$$n x\, dt = 1, \qquad n\, dt = \frac{1}{x};$$

n im Verlaufe dieser Zeit wird die Wahrscheinlichkeit des Stoßes gleich 1. Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles aber ch 1 ist, so bedeutet das, daß der Fall wirklich eintritt; denn die hrscheinlichkeit wird mathematisch durch den Quotienten aus der Zahl zutreffenden und der Zahl der möglichen Fälle definiert. Ist aber dieser

Quotient gleich 1, so heißt das, die Zahl der zutreffenden Fälle ist gleich der Zahl der möglichen, oder die vermutete Erscheinung tritt ein.

Findet nun in der Zeit $n\,dt$ ein Stoß statt, so ist die Zahl der Stöße in der Zeit einer Sekunde

$$\frac{1}{n\,dt} = x = \frac{su\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{2U}.$$

Das ist also die Zahl der Stöße, die das Flächenstück s der Oberfläche unter einem Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ erhält im Laufe einer Sekunde; ersetzen wir s durch S, so erhalten wir die Zahl der Stöße, welche die ganze Oberfläche in der Richtung ϑ während einer Sekunde erhält.

Um daraus die Zahl von Stößen zu berechnen, welche die Oberfläche in einer Sekunde überhaupt erhält, haben wir den zuletzt gefundenen Ausdruck für jeden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Wert von ϑ zu bilden, da der Winkel ϑ nur ein spitzer sein darf, und dann die Summe aller dieser Ausdrücke zu bilden. Die Zahl Z der Stöße, welche die ganze Oberfläche in der Sekunde erhält, ist somit nach E IV, E 5 und E VIII

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Su}{2U}\cdot\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = -\frac{Su}{2U}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - \cos^2 0\right) = \frac{Su}{4U}.$$

Die Zahl der Stöße ist also gleich dem Produkte aus der Geschwindigkeit des Punktes und der Größe der Oberfläche dividiert durch den vierfachen Raum, in welchem sich der Punkt bewegt.

Aus der Zahl der Stöße in der Sekunde erhalten wir den zwischen zwei Stößen zurückgelegten Weg, indem wir die in der Sekunde zurückgelegte Strecke durch die Stoßzahl dividieren, sie wird

$$l = \frac{u\cdot 4U}{Su} = \frac{4U}{S}.$$

Der hier abgeleitete Satz über die Zahl der Stöße Z und über den zwischen zwei Stößen im Mittel zurückgelegten Weg führt uns nun unmittelbar zur Lösung unserer Aufgabe der Bestimmung der mittleren Weglänge der Moleküle.

Der Raum V sei mit Gas gefüllt; er enthalte die sehr große Zahl N der Moleküle von der von uns vorhin angenommenen Beschaffenheit; der Radius der Wirkungssphäre sei gleich ϱ. Um auch jetzt wieder vom einfachern Fall auszugehen, denken wir uns zunächst, daß nur eines der Moleküle sich in der für die Gasmoleküle angenommenen Bewegung befinde, alle übrigen seien fest, das heißt sie ändern ihren Ort im Raume nicht. Die Anordnung dieser Moleküle sei eine ganz beliebige, jedoch so, daß immer in gleich großen meßbaren Stücken des betrachteten Raumes die gleiche Anzahl von Molekülen vorhanden sei. Der in unsern Entwicklungen angenommene bewegliche Punkt repräsentiert uns dann den Schwerpunkt des beweglichen Moleküls. Derselbe bewegt sich so lange fort, bis er in die Wirkungssphäre eines festen Moleküles oder an der Wand des Raumes ankommt, welche das Gas einschließt. Wir haben demnach, die Zahl der Stöße, die das bewegliche Molekül in der Zeiteinheit erfährt

in dem vorhin für Z entwickelten Ausdrucke nur für S die Summe der Oberflächen aller Wirkungssphären der im Raum vorhandenen Moleküle und der Wandungen des Gefäßes einzusetzen. Denn die Summe aller dieser Flächen gibt uns die Begrenzung des Raumes, in welchem sich unser Punkt frei bewegen kann. Da wir bei unserer Entwicklung die Form der Begrenzung des betrachteten Raumes ausdrücklich als ganz beliebig angenommen haben, gilt unsere Entwicklung für den in dieser Weise begrenzten Raum unmittelbar.

Der Raum V', in welchem sich der Punkt bewegen kann, ist der von der gegebenen Gasmenge ausgefüllte Raum, vermindert um den Raum, welchen die Wirkungssphären der Moleküle ausfüllen, denn in die Wirkungssphären kann der Punkt nicht eindringen.[1])

Die Oberfläche der Wirkungssphäre jeden einzelnen Moleküls ist $4\rho^2\pi$, die Summe der Oberflächen für N Moleküle somit $N \cdot 4\rho^2\pi$. Setzen wir die Größe der Gefäßwand, welche das Gas einschließt, gleich Σ, so wird

$$S = N 4 \rho^2 \pi + \Sigma.$$

Ist V der von der gegebenen Gasmenge eingenommene Raum, so wird, da $\frac{4}{3}\rho^3\pi$ der von der Wirkungssphäre jedes einzelnen Moleküls eingenommene Raum ist,

$$V' = V - N \cdot \tfrac{4}{3}\rho^3\pi.$$

Damit erhalten wir, wenn u die Geschwindigkeit des bewegten Moleküls ist,

$$Z_1 = \frac{N 4 \rho^2 \pi + \Sigma}{4(V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi)}\, u,$$

und für die mittlere Wegelänge des Moleküls, die zwischen je zwei Stößen im Mittel zurückgelegte Strecke,

$$l_1 = 4\, \frac{V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi}{N 4 \rho^2 \pi + \Sigma}.$$

Bei der Bestimmung dieses Wertes l_1 ist noch die Voraussetzung gemacht, daß die Moleküle mit Ausnahme des einen betrachteten in Ruhe seien. Nach unserer Gastheorie sind nun alle Moleküle in Bewegung; die Geschwindigkeit der Bewegung ist im Mittel für alle dieselbe, wir setzen sie also für alle gleich u.

Zunächst sieht man, daß die Zahl der Stöße, welche das Molekül der festen Wand erteilt, dadurch nicht geändert werden kann, da die feste Wand an der Bewegung der Moleküle nicht teilnimmt, die Verhältnisse des Moleküls der festen Wand gegenüber somit nicht geändert werden. Schreiben wir daher

$$Z_1 = \frac{N \cdot 4\rho^2\pi \cdot u}{4(V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi)} + \frac{\Sigma\, u}{4(V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi)},$$

so kann nur das erste Glied des Ausdrucks für Z_1 geändert werden.

---

1) Darauf, daß bei Berechnung der mittlern Wegelänge der von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllte Raum in betracht gezogen werden müsse, hat zuerst *Van der Waals* in seiner Abhandlung: „Over de Continuiteit van den Gas- en Vloeistoftoestand Academisch Proefschrift, Leiden 1873", hingewiesen.

Die Änderung desselben ergibt sich auf folgende Weise; die Zahl dieser Stöße ist bei ruhenden Molekülen der Geschwindigkeit u des bewegten proportional, denn sie ist, wenn wir den Faktor von u der Kürze halber mit a und das erste Glied des Ausdruckes für Z_1 mit Z_1' bezeichnen,

$$Z_1' = au.$$

Für die zwischen zwei Stößen im Mittel verstreichende Zeit τ erhalten wir dann

$$\frac{1}{Z_1'} = \frac{1}{au} = \tau.$$

Sind nun außer dem betrachteten auch alle übrigen Moleküle in Bewegung, so ist, wenn wir zunächst annehmen, daß während der Zeit τ die Bewegung aller Moleküle außer dem betrachteten dieselbe Richtung habe, die zwischen zwei Stößen stattfindende Zeit in dem Maße kleiner oder größer als τ, in welchem die Moleküle durch ihre Bewegung sich dem betrachteten genähert oder von demselben entfernt haben. Für die Berechnung dieser geänderten Stoßzeit τ' gelangen wir zu demselben Resultate, wenn wir auch jetzt noch uns alle Moleküle als ruhend denken, dagegen dem betrachteten Moleküle eine in dem Maße größere oder kleinere Geschwindigkeit beilegen, daß es den bei ruhenden Molekülen vorhandenen Abstand in derselben Zeit τ' zurücklegt, wie den durch die Bewegung der Moleküle verkleinerten Abstand mit der Geschwindigkeit u. Wir haben also einfach anstatt der Geschwindigkeit u die relative Geschwindigkeit des Moleküles gegenüber derjenigen der anderen Moleküle zu setzen. Bewegen sich z. B. alle Moleküle mit dem betrachteten in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v, so entfernt sich ein in der Bahn des Moleküls liegendes anderes Molekül in der Zeit τ um die Strecke $v\tau$, das Molekül hat also außer dem frühern Wege noch den Weg $v\tau$ zurückzulegen, um an das folgende anzustoßen. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir dem betrachteten Molekül die Geschwindigkeit $(u - v)$ beilegen, während die anderen ruhen, auch dann hat es nach der Zeit τ noch den Weg $v\tau$ zurückzulegen, um zum Stoß zu gelangen. Ebenso wie bei gleichgerichteter Geschwindigkeit haben wir auch, wenn die Geschwindigkeit v eine andere Richtung hat, anstatt u die relative Geschwindigkeit des betrachteten Moleküls zu setzen, das heißt also jene Geschwindigkeit, mit welcher es sich zwischen den als ruhend gedachten andern Molekülen bewegen müßte, um gegen dieselben die gleiche Bewegung zu erhalten, welche durch die Bewegung aller Moleküle bewirkt wird. Bildet die Geschwindigkeit v mit derjenigen u den Winkel φ, so ist nach dem Satz von dem Parallelogramm der Bewegungen diese relative Geschwindigkeit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cdot \cos\varphi},$$

oder wenn wir voraussetzen, daß die Geschwindigkeit aller Moleküle dieselbe u des betrachteten sei

$$r = u\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\varphi}.$$

Haben die Moleküle nicht alle die gleiche Richtung der Bewegung welche mit der des betrachteten Moleküls den Winkel φ bildet, sondern haben deren Bewegungen alle möglichen Richtungen, so daß für je

Molekül jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist, so ist die relative Geschwindigkeit des Moleküls gegen jedes der andern Moleküle eine andere. Nehmen wir aber aus allen diesen relativen Geschwindigkeiten das arithmetische Mittel, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Molekul an ein anderes stößt, also auch im Mittel die zwischen zwei Stößen verstrichene Zeit, dieselbe als wenn das Molekül diese mittlere Geschwindigkeit besäße, alle übrigen aber in Ruhe wären.

Zur Berechnung dieser mittlern relativen Geschwindigkeit $\bar{r}$ haben wir dieselbe Betrachtung anzustellen wie vorhin, als wir die Zahl der Stöße berechneten, welche die Oberfläche unter dem Winkel ϑ treffen. Die Anzahl der Moleküle, deren Bewegungsrichtung mit derjenigen des betrachteten Moleküls Winkel bilden, welche zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegen, verhält sich zur Gesamtzahl der Moleküle wie die Zone $2\pi \sin \varphi d\varphi$ zur Oberfläche der Kugel 4π, sie ist somit, da wir die Anzahl der in dem Raume vorhandenen Moleküle N genannt haben,

$$N \tfrac{1}{2} \sin \varphi d\varphi .$$

Denn auch jetzt sind sämtliche Bewegungsrichtungen die Radien einer Kugel, die zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ gelegenen die zu der entsprechenden Zone gehörigen Radien. Nach dem Begriffe der mittlern Geschwindigkeit als der Summe aller Geschwindigkeiten dividiert durch die Anzahl der Moleküle, müssen wir zur Berechnung von $\bar{r}$ die Summe aller möglichen relativen Geschwindigkeiten, und zwar jeder einzelnen so oft, als Moleküle mit ihr begabt sind, bilden, und dann die Gesamtsumme durch N dividieren. Die vorhin berechnete Geschwindigkeit r besitzt die Anzahl $N \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$. Das Produkt

$$N u \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi$$

ist somit, wenn wir auch jetzt u als die mittlere absolute Geschwindigkeit aller Moleküle bezeichnen, den Anteil, den die mittlere Geschwindigkeit r an der Gesamtsumme hat. Bilden wir nun den gleichen Ausdruck für alle zwischen 0 und π liegenden Werte, so erhalten wir in der Summe aller dieser Ausdrücke dividiert durch N die gesuchte mittlere Geschwindigkeit $\bar{r}$. Dieselbe wird somit

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \int_0^{\pi} N u \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi .$$

Da nun

$$\sqrt{1 - \cos \varphi} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}; \qquad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

wird, wenn wir gleichzeitig die konstanten Faktoren vor das Summenzeichen setzen,

$$\bar{r} = 4 u \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2} .$$

Nach den schon oft benutzten Sätzen der Einleitung ist

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2} = \tfrac{1}{3} \left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0 \right) = \tfrac{1}{3} .$$

demnach wird

$$\bar{r} = \tfrac{4}{3} u .$$

Für die zwischen zwei Stößen innerhalb der Moleküle im Mittel verstrichene Zeit ergibt sich darnach

$$\tau' = \frac{1}{a \bar{r}} = \frac{1}{a \frac{4}{3} u},$$

somit für die Stoßzahl

$$Z = \frac{1}{\tau'} = \tfrac{4}{3} a u = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{N 4 \varrho^2 \pi u}{4 (V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi)},$$

oder für die Stoßzahl Z, welche das Molekül im Mittel in der Sekunde innerhalb der Moleküle und an der Wand des Gefäßes erhält,

$$Z = \frac{\frac{4}{3} N 4 \varrho^2 \pi + \Sigma}{4 (V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi)} u,$$

und daraus für die von dem Molekül im Mittel zwischen zwei Stößen zurückgelegte Wegestrecke

$$l = 4 \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{\frac{4}{3} N 4 \varrho^2 \pi + \Sigma} .$$

Da wir in den letzten Entwicklungen die mittlere Geschwindigkeit des nach beliebiger Richtung mit der Geschwindigkeit u zwischen der nach beliebigen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit u sich bewegenden Molekülzahl N berechnet haben, gilt dieser unser Ausdruck für jedes der N Moleküle, so daß also der gefundene Wert für l uns die mittlere Wegelänge irgend eines Moleküles in dem mit Gas gefüllten Raume V liefert. Die mittlere Wegelänge hängt demnach einigermaßen von der Ausdehnung der Wandflächen des Gefäßes ab, das heißt, denken wir uns einen Kubikmeter Luft in der äußern Atmosphäre ohne Wandfläche, so ist die Wegelänge etwas größer, als wenn wir ihn durch eine feste Wand umgrenzen. Indes, wenn auch die Wirkungssphäre eines Moleküles eine sehr kleine Oberfläche hat, so ist doch, wenn die Gase nicht sehr verdünnt sind, die Zahl der Moleküle eine so große, daß wir in dem Ausdrucke für l im Nenner Σ gegen das erste Glied vernachlässigen und schreiben dürfen

$$l = \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{\frac{4}{3} N \varrho^2 \pi},$$

oder

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi} .$$

Das Verhältnis der mittlern Wegelänge zu dem Radius der Wirkungssphäre ist also gleich dem Verhältnisse des von den Wirkungssphären der Moleküle freien von dem Gase eingenommenen Raumes zu dem von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Raume. Dieses letztere Verhältnis können wir auch als den für jedes Molekül vorhandenen freien Raum bezeichnen, das heißt denken wir uns den gegebenen Raum in so viel Würfel geteilt, als derselbe Moleküle enthält, so ist der Quotient aus der mittlern Wegelänge und dem Radius der Wirkungssphäre gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalt eines solchen Würfels weniger dem Raum

inhalt einer Wirkungssphäre und dem Rauminhalt der letztern. Nennen wir also λ die Seite eines solchen Würfels, so daß $N\lambda^3 = V$, so wird

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{\lambda^3 - \frac{4}{3}\varrho^3\pi}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi},$$

$$l = \left(\frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} - 1\right)\varrho;$$

die mittlere Wegelänge ist also gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalte eines der Würfel dividiert durch den Rauminhalt einer Wirkungssphäre weniger eins multipliziert mit dem Radius der Wirkungssphäre. Dieselbe ist jedenfalls eine sehr kleine Größe, so daß wir erkennen, daß die Entwicklung unserer Auffassung über den Gaszustand dahin führt, daß die Bewegung der Gasmoleküle wesentlich eine oszillierende ist, wobei sie aber nicht bei jeder Oszillation denselben Weg hin und her zurücklegen, und wobei die Oszillationsweiten nicht immer dieselben sind.

Um das letztere zu erkennen, müssen wir noch einmal auf die Bedeutung der mittleren Wegelänge zurückkommen. Dieselbe ist nicht etwa, daß jedes Molekül zwischen je zwei Stößen den Weg l zurücklegt. Die in Wirklichkeit zurückgelegten Wege sind sehr verschieden, sie sind aber bald größer bald kleiner als l, und im ganzen so, daß wenn wir die zwischen einer großen Zahl Stößen zurückgelegten Wege durch die Zahl der Stöße dividieren, diese Länge herauskommt. Oder auch, zählen wir die von sämtlichen Molekülen N, die den Raum V erfüllen, zwischen je zwei Stößen zurückgelegten Wege zusammen, so ist diese Summe dividiert durch die Zahl der Moleküle gleich der mittlern Wegelänge; die von sämtlichen Molekülen zurückgelegten Wege sind also so groß, als wenn jedes den Weg l zurückgelegt hätte.

Um den Gaszustand vollständig zu übersehen, wollen wir deshalb die Frage noch untersuchen, welche Wegestrecken die Moleküle wirklich zurücklegen; wir berechnen deshalb zunächst nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit die Anzahl Moleküle, welche einen Weg von x Wegelänge zurücklegen, keinen größern und keinen kleinern. Sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül die mittlere Wegelänge l zurücklegt, ohne anzustoßen, gleich a, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es nochmals den Weg l zurücklegt ohne anzustoßen, gleich $a \cdot a = a^2$, die Wahrscheinlichkeit, daß es den Weg $3l$, ohne vorher anzustoßen, a^3, also diejenige, daß es den Weg $x \cdot l$ zurücklegt, ohne vorher anzustoßen, a^x. Schreiben wir nun, da a ein echter Bruch ist, $a = e^{-\alpha}$, so können wir diese Wahrscheinlichkeit schreiben

$$W = e^{-\alpha x}.$$

Enthält unser Raum N Moleküle, so bedeutet der Satz, die Wahrscheinlichkeit, daß jedes Molekül den Weg $x \cdot l$ zurücklegt, sei gleich W, nichts anderes, als daß von der ganzen Zahl N eine solche Zahl n diesen Weg zurücklegt, ohne schon vorher anzustoßen, daß

$$\frac{n}{N} = W$$

ist. Die Zahl n der den Weg xl, ohne vorher anzustoßen, zurücklegenden

Moleküle ist somit

$$n = NW = Ne^{-\alpha x}.$$

Alle übrigen Moleküle werden schon nach Zurücklegung kleinerer Wege gestoßen. Um nun aber die Zahl der Moleküle zu bestimmen, welche gerade den Weg $x \cdot l$ zurücklegen und keinen größern, müssen wir ausrechnen, wie viele am Ende dieses Weges einen Stoß erhalten. Wir finden diese Anzahl, wenn wir von der eben gefundenen Zahl diejenige abziehen, welche ohne anzustoßen den von x unendlich wenig verschiedenen Weg $(x + dx)l$ zurücklegen; denn die Differenz dieser Zahlen ist eben jene Anzahl von Molekülen, welche keinen größern Weg als $(x + dx)l$, wofür bei der vorausgesetzten Kleinheit von dx auch $x \cdot l$ gesetzt werden darf, ohne Stoß zurücklegen kann. Diese Differenz ist

$$Ne^{-\alpha x} - Ne^{-\alpha(x + dx)} = Ne^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha dx}).$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von dx können wir setzen

$$e^{-\alpha dx} = 1 - \alpha dx,$$

und erhalten somit für die Zahl der Moleküle, die gerade den Weg x ohne Stoß zurücklegt, keinen größern und keinen kleinern

$$Ne^{-\alpha x} \cdot \alpha dx.$$

Hiermit sind wir imstande den Koeffizienten α zu bestimmen, indem wir die Summe aller von den Molekülen zwischen je zwei Stößen zurückgelegten Wege berechnen, die, wie wir sahen, gleich Nl ist.

Da die eben berechnete Molekülzahl gerade den Weg xl zurückgelegt hat, so ist das Produkt

$$lxNe^{-\alpha x} \cdot \alpha dx$$

der in Summe von diesen Molekülen zurückgelegte Weg. Den von allen N Molekülen zurückgelegten Weg erhalten wir dann, wenn wir für jeden Wert von x zwischen Null und Unendlich den gleichen Ausdruck bilden und alle diese summieren, also in der Summe

$$l \int_0^\infty x N e^{-\alpha x} \alpha dx.$$

Für diese Summe gibt die Integralrechnung den Wert

$$l \frac{N}{\alpha};$$

da nun die Summe der von allen Molekülen zurückgelegten Wege gleich Nl ist, so folgt

$$l \frac{N}{\alpha} = Nl; \qquad \alpha = 1.$$

Mit dem so bestimmten Werte von α ergibt sich somit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül den Weg xl zurücklegt, zu e^{-x}, und hiernach die Zahl der Moleküle, welche den Weg xl zurücklegt, zu Ne^{-x}. Die Zahl der Moleküle, welche also die mittlere Wegelänge ohne vorher gestoßen zu haben zurücklegt, ist

$$Ne^{-1} = 0{,}3679\,N,$$

also nur etwa 37%; alle übrigen haben schon nach Zurücklegung eines kürzern Weges einen Stoß erhalten. Für den doppelten Weg findet man so 13,5%, für den dreifachen 4,9%, für den zehnfachen 0,0045%, so daß also von einer Million Moleküle im Durchschnitt nur 45 ungestört die 10fache mittlere Wegelänge zurücklegen.

§ 103.

Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes. Die Entwicklungen des letzten Paragraphen führen uns sofort zu der Beziehung, welche zwischen dem Druck eines Gases und dem von demselben eingenommenen Raum bestehen muß. Nach unserer Theorie kann der Druck, den das Gas auf die Wandungen des Gefäßes ausübt, in welches es eingeschlossen ist, nur herrühren von den Stößen, welche die an die Wand prallenden Moleküle der Wand erteilen.

Wenn ein Raum von der Größe V ein mit der Geschwindigkeit u sich bewegendes Molekül enthält, so erhält das Flächenstück s der Wand im Durchschnitt pro Sekunde (p. 574)

$$\frac{su\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{2V}$$

Stöße in der Richtung ϑ. Enthält der Raum N Moleküle, so ist für jedes dieser N Moleküle die Stoßzahl dieselbe, die in der Richtung ϑ von allen diesen Molekülen ausgeübten Stöße haben somit die Zahl

$$\frac{Nsu\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{2V}.$$

Das an die Wand anprallende Molekül wird nach den Gesetzen des elastischen Stoßes von der Wand zurückgeworfen, das heißt also die gegen die Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit wird in die entgegengesetzte verwandelt. Die zur Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit für die in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegenden Moleküle ist $u\cdot\cos\vartheta$, indem diese in die entgegengesetzte verwandelt wird, ist es dasselbe, als wenn dem Molekül in der von der Wand fortgewandten Richtung die Geschwindigkeit $2u\cos\vartheta$ erteilt würde. Nennen wir nun m die Masse des einzelnen Moleküls, so ist die dieser Geschwindigkeit entsprechende Bewegungsgröße $m\cdot 2u\cos\vartheta$. Die gesamte Bewegungsgröße, welche die in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an das Stück s der Wand in der Zeit einer Sekunde erhalten, ist demnach, da jedes in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegende Molekül bei jedem Stoße dieselbe Bewegungsgröße $2mu\cos\vartheta$ erhält,

$$2mu\cos\vartheta\cdot\frac{Nsu\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{2V}=\frac{smNu^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{V}.$$

Hieraus erhalten wir in schon oft abgeleiteter Weise die Bewegungsgröße, welche sämtliche in allen möglichen Richtungen gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an die Wand in einer Sekunde erhalten, in der Summe

$$\frac{sNmu^2}{U}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta,$$

denn die möglichen Richtungen entsprechen allen Werten von ϑ zwischen 0, entsprechend dem senkrechten Anprall, und $\frac{\pi}{2}$ entsprechend einer der Wand parallelen Bewegung. Diese Summe ist, da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = -\tfrac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 o\right) = \tfrac{1}{3}$$

ist, gleich

$$\tfrac{1}{3}\frac{sNmu^2}{U}.$$

Denken wir uns jetzt die Wandfläche s vollkommen frei beweglich, so muß, damit sie nicht durch die Stöße der Moleküle zurückgetrieben wird, von der andern Seite auf die Wand ein Druck ausgeübt werden, und zwar muß wegen der großen Zahl von Stößen, die in stetiger Folge stattfinden, dieser Druck ein stetiger sein. Die Größe dieses Druckes ist dadurch gegegeben, daß er, die Zeit einer Sekunde wirkend, der Masse der gegen die Wandfläche s prallenden Moleküle dieselbe Bewegungsgröße erteilen muß. Nennen wir diesen Druck für die Flächeneinheit p, so muß nach dem § 11 abgeleiteten Satze, daß der Antrieb einer Kraft in der Zeit t gleich der in dieser Zeit t erreichten Bewegungsgröße sein muß, und da die hier in betracht gezogene Zeit die Zeit einer Sekunde ist,

$$ps = \tfrac{1}{3}\frac{sNmu^2}{U},$$

oder

$$p = \tfrac{1}{3}\frac{Nmu^2}{U}, \quad pU = \tfrac{1}{3}Nmu^2$$

Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, ist U der von den Wirkungssphären der Moleküle freie Raum des mit dem Gase gefüllten Gefäßes, so daß wir also zu dem Satze gelangen, daß das Produkt des Druckes, den ein Gas auf die Flächeneinheit ausübt in den von den Wirkungssphären freien Raum, den das Gas einnimmt, gleich einem Drittel der doppelten lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der in dem Raume bewegten Moleküle ist[1]). Für die Größe U erhielten wir im vorigen Paragraphen

$$U = V - N\tfrac{4}{3}\varrho^3\pi.$$

Bei den jedenfalls sehr kleinen Werten von ϱ können wir, wenn das Gas nicht eine sehr große Dichtigkeit hat, den von den Wirkungssphären ausgefüllten Raum vernachlässigen, und erhalten dann

$$pV = \tfrac{1}{3}Nmu^2.$$

1) *Krönig*, Poggend. Ann. **99**. 1856. Genauer abgeleitet zuerst von *Clausius*, Poggend. Ann. **100**. 1857.

Da für eine gegebene Gasmasse die Zahl der Moleküle konstant ist, o die Masse m jedes Moleküls und, wie wir schon hier hervorheben n, für eine konstante Temperatur, auch die Geschwindigkeit u, so ist etzte Gleichung der Ausdruck des Mariotteschen Gesetzes, daß das ukt aus dem Drucke und dem Volumen bei einer gegebenen Gasmenge gegebener Temperatur konstant ist.

Die Entwicklung läßt aber zugleich erkennen, daß das Gesetz nur nähert richtig sein kann, und daß die Gase um so mehr davon abhen müssen, je kleiner der von dem Gase eingenommene Raum ist, stens dann, wenn der von den Wirkungssphären eingenommene Raum verschwindend klein ist. Setzen wir in die Gleichung den richtigen für V ein, so wird:

$$p(V - N\tfrac{4}{3}\varrho^3\pi) = \tfrac{1}{3} Nmu^2.$$

Da für eine gegebene Gasmasse der von den Wirkungssphären der üle ausgefüllte Raum eine konstante Größe ist, so können wir, wenn denselben mit b bezeichnen und die Konstante der rechten Seite mit R, Gleichung auch schreiben

$$p(V - b) = R; \quad pV = R + pb.$$

Wir erkennen demnach [1], daß die dynamische Gastheorie anstatt zu Mariotteschen Gesetze, zu dem Satze gelangt, daß das Produkt aus Drucke und Volumen eines Gases nicht konstant ist, sondern daß es wachsendem Drucke wachsen muß und zwar um so mehr, je größer Druck p ist, unter welchem das Gas steht. Weiter aber erkennt man, iese Beziehung mit ungeändertem Werte von b nur so lange gültig kann, wie die Bewegungen, die in der Theorie vorausgesetzten sein . Das ist höchstens so lange möglich, als der Abstand der Schwer- zweier Moleküle nicht kleiner als der doppelte Radius der Wirkungs- ist, denn nur dann könnte noch ein Molekül zwischen zwei andern hgehen; es wird demnach in der Gleichung ein kleinerer Wert von usetzen sein, sobald der ganze von dem Gase angefüllte Raum nicht r ist als der doppelte Raum, den die Wirkungssphären der Gase llen [2].

Von den von Regnault untersuchten Gasen entspricht indes nur Wasserstoff dieser Beziehung, denn nur bei diesem wächst das Pro- pV mit wachsendem Drucke, bei allen übrigen Gasen dagegen nimmt wachsendem Drucke zunächst das Produkt pV ab, um dann, erst wenn Druck auf 60–70 Atmosphären gewachsen ist, wieder zuzunehmen, ch übereinstimmend aus den Versuchen von Cailletet und Amagat.

Wir müssen daraus schließen, daß unsere Theorie noch nicht ganz wirklichen Verhältnissen entspricht; in der Tat haben wir bei Ent- g derselben eine Voraussetzung gemacht, die nicht strenge richtig

[1] Dieser Ausdruck ist zuerst von *van der Waals* in der schon erwähnten lung Over de continuiteit van den Gas- en Vloeistofftoestand, Leiden 1873 abgeleitet.

[2] Man sehe *van der Waals* in der eben zitierten Abhandlung bezw. in der tzung derselben von *Roth*, Leipzig 1881 bei Barth, p. 55 u. p. 81.

sein kann[1]), die Voraussetzung nämlich, daß die zwischen den Molekülen tätigen Kräfte nur im Augenblicke des Stoßes wirksam seien, und daß die Dauer dieser Wirkungen so klein sei, daß der Einfluß, den sie auf die Geschwindigkeit der Bewegung haben, vernachlässigt werden dürfe. Ist das nicht der Fall, wird die Geschwindigkeit durch den Stoß für eine gegen die Zeit der freien Bewegung erhebliche Zeit geändert, so muß die Geschwindigkeit u, die wir als mittlere der Moleküle für ein gegebenes Gas und gegebene Temperatur bezeichneten, einigermaßen von der Zahl der Stöße abhängen, somit, da die Stoßzahl von dem Volumen der gegebenen Gasmenge abhängt, mit dem Volumen des Gases sich etwas ändern.

Anstatt die Änderung der Geschwindigkeit zu berechnen, kann man, wie van der Waals[2]) gezeigt hat, den Einfluß der Molekularkräfte durch eine etwas andere Betrachtung in Rechnung ziehen. Wir erhielten für den Druck des Gases für die Flächeneinheit der Wandfläche

$$p = \frac{R}{(V - b)}.$$

Sind zwischen den Gasmolekülen anziehende Kräfte tätig, so muß dadurch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle gegen die Wand fliegen und damit der Druck p kleiner werden. Der Effekt ist also derselbe, wie wenn die gegen die Wand fliegenden Moleküle eine gegen das Innere des Gases wirkende Anziehung erhalten, durch welche der Druck p nicht gleich dem berechneten, sondern kleiner, also

$$p = \frac{R}{(V - b)} - \alpha$$

sein muß. Jedes auf die Wand drückende Molekül erfährt diese Druckverminderung, dieselbe muß also zunächst proportional sein der in einem gegebenen Momente in der Wandschicht vorhandenen Moleküle. Diese ist aber der Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also der Dichtigkeit des Gases proportional. Außerdem muß die auf jedes einzelne Molekül wirkende, gegen das Innere des Gases gerichtete Anziehung, wie wir das bei allen ähnlichen Wirkungen finden, der Anzahl der auf das in der Grenzschicht befindliche wirkenden Moleküle proportional sein.

Denken wir uns um ein solches Molekül mit dem größten Abstande, bis auf welchen die Moleküle anziehend auf dasselbe wirken, eine Kugel gelegt, so wird jedes innerhalb der in das Gas fallenden Halbkugel liegende Molekül auf das betrachtete anziehend wirken. Die Zahl der in dieser Halbkugel liegenden Moleküle ist wieder der Dichtigkeit des Gases proportional, so daß also die Größe α dem Quadrate der Dichtigkeit proportional ist. Da nun bei einer gegebenen Gasmenge die Dichtigkeit dem Volumen umgekehrt proportional ist, können wir schreiben

$$\alpha = \frac{a}{V^2}$$

und

$$p = \frac{R}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

1) *Clausius,* Poggend. Ann. **100**. p. 353. 1857; Wiedem. Ann. **9**. p. 337. 1880.
2) *van der Waals,* a. a. O. p. 54.

oder auch

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R.$$

In der Form

$$pV = R - \frac{a}{V} + pb + \frac{ab}{V^2}$$

erkennt man, daß der Gang der Werte pv wesentlich von dem Verhältnisse a und b abhängig ist, daß, wenn der Wert von a hinreichend groß ist, der Wert von pv mit abnehmendem Volumen zuerst bis zu einem Minimum abnehmen kann und dann erst bei wachsendem Volumen zunimmt.

So lange das Volumen nicht zu klein ist, können wir in dem Gliede pb den Druck p nach dem Mariotteschen Gesetze durch

$$p = \frac{R}{V}$$

ersetzen und dann

$$pV = R - \frac{a - bR}{V} + \frac{ab}{V^2}$$

schreiben. In dieser Form erkennt man, daß die aus der Theorie sich ergebende Gleichung mit der empirischen Gleichung zusammenfällt, welche Regnault zur Darstellung seiner Beobachtungen gewählt hat. Dieselbe war (§ 100 Ia)

$$pV = 1 - A\left(\frac{1}{V} - 1\right) + B\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2$$

$$pV = 1 + A + B - \frac{A + 2B}{V} + \frac{B}{V^2},$$

so daß

$$R = 1 + A + B, \quad a - bR = A + 2B, \quad ab = B.$$

Die Regnaultschen Beobachtungen zeigen somit, daß bis zu einem Drucke von 20m Quecksilber das Verhalten der Gase ganz der entwickelten Theorie entspricht.

An den Messungen von Cailletet und Amagat läßt sich dann prüfen, ob auch bei größern Drucken die Volumabnahme der Theorie entspricht. Ich habe zu diesem Zwecke die Versuche Amagats mit Stickstoff gewählt. Amagat gibt die Produkte pV in Metern Quecksilber und in willkürlichen Volumeinheiten seines Apparates an. Um die Produkte in denselben Einheiten, wie sie Regnault zur Darstellung seiner Versuche zugrunde legt, bei denen das Volumen des Gases bei dem Drucke von 1m Quecksilber gleich 1 gesetzt wird, auszudrücken, habe ich zunächst nach den Regnaultschen Angaben (§ 99) das Volumen V für den kleinsten von Amagat angewandten Druck 20,740m berechnet. Dasselbe ergibt sich zu 0,0477. Dann wurde aus den von Amagat gegebenen Werten von pV und p das von demselben beobachtete Volumen berechnet. Das Volumen bei 20,740m $= p$ ergab sich so zu 2458 in den Amagatschen Einheiten. Durch Multiplikation mit $\frac{0,0477}{2458}$ wurden dann sämtliche Volumina auf die Regnaultsche Einheit reduziert. Es wurden dann aus den Regnaultschen Konstanten A und B

$$A = 0,0006901$$
$$B = 0,00000701$$

die Konstanten a und b der Gleichung bestimmt. Dieselben ergaben sich

$$a = 0{,}003\,03 \qquad b = 0{,}002\,325.$$

Schließlich wurden aus den Amagatschen Beobachtungen nach der Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R$$

die Konstanten R berechnet, da dieselben, wenn die Beobachtungen mit der Theorie stimmen, einen konstanten Wert von R liefern müssen. Folgende Tabelle enthält einige Werte zur Vergleichung von Theorie und Beobachtung:

p	$\frac{a}{V^2}$	V	$V - b$	R
20,740	1,331	0,047 7	0,045 37	1,0012
47,176	6,936	0,020 9	0,018 57	1,0049
69,140	14,794	0,014 3	0,011 97	1,0049
96,441	28,105	0,010 38	0,008 06	1,0032
128,296	47,400	0,007 995	0,005 67	0,9963
158,563	68,745	0,006 64	0,004 315	0,9811
221,103	117,760	0,005 07	0,002 570	0,9319

Die bis zu einem Drucke von 128$^{\mathrm{m}}$ berechneten Werte entsprechen der Theorie, so genau es sich erwarten läßt, wenn man erwägt, daß die Konstanten a und b aus den Beobachtungen Regnaults abgeleitet sind, die nur bis zu einem Drucke von etwas über 20$^{\mathrm{m}}$ gehen. Eine Ableitung der Konstanten der theoretischen Gleichung aus Regnaults und Amagats Beobachtungen würde ohne Zweifel Werte geben, welche eine noch bessere Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und der Theorie liefern würden. Die beiden letzten Beobachtungen geben schon zu kleine Werte von R, so daß wir schließen müssen, daß schon wenn V zwischen zwei und drei b liegt, die Bewegungen der Moleküle unsern Voraussetzungen nicht mehr entsprechen.

Wir werden auf die Vergleichung von Theorie und Beobachtung in der Wärmelehre bei Gelegenheit der Besprechung der Ausdehnung der Gase durch Erwärmung nochmals zurückkommen und dann auch den Einfluß der Temperatur auf die von der Theorie gelieferten Konstanten kennen lernen. Überhaupt können wir erst in der Wärmelehre die kinetische Gastheorie vervollständigen.

Für die drei andern von Regnault ausführlicher untersuchten Gase ergeben sich aus den § 99 angeführten Konstanten folgende Werte von a und b:

Luft	$a = 0{,}005\,01$	$b = 0{,}003\,87$
Wasserstoff .	$a = 0{,}002\,65$	$b = 0{,}003\,17$
Kohlensäure .	$a = 0{,}009\,33$	$b = 0{,}000\,78$

Schließlich wollen wir noch hervorheben, daß durch die Bestimmung des Wertes b sich auch in Zahlen das Verhältnis zwischen der mittleren Wegelänge und dem Radius der Wirkungssphäre der Moleküle angeben läßt. Für die mittlere Wegelänge hatten wir

$$l = \frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{N\frac{4}{3}\varrho^3\pi} \cdot \varrho = \frac{V - b}{b}\,\varrho.$$

Bei der Berechnung der Konstanten der Regnaultschen Gleichungen [und] damit auch der aus denselben abgeleiteten Werte von a und b ist [das] Volumen des Gases unter dem Drucke 1^m Quecksilber als 1 gesetzt. [Die] Werte b geben also etwa in Litern den Raum an, den die Wirkungssphären der Moleküle ausfüllen, welche sich unter dem Drucke von 1^m Quecksilber in einem Liter befinden. Für diese erhalten wir dann den Koeffizienten von ϱ, indem wir $V = 1$ setzen, also

$$l = \left(\frac{1}{b} - 1\right)\varrho$$

Darnach werden für

Stickstoff	$l = 429\,\varrho$	Wasserstoff	$l = 314\,\varrho$
Luft . . .	$l = 259\,\varrho$	Kohlensäure	$l = 1281\,\varrho$.

Es bedarf demnach nur noch der Bestimmung der absoluten Werte [von] l, um auch die Größe der Wirkungssphäre der Moleküle zu berechnen. Sutherland[1] hat darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn wir in [der] Zustandsgleichung der Gase zu dem Resultate gelangen, es sei eine Anziehung der Moleküle der Gase vorhanden, durch diese Anziehung auch [die] Stoßzahl der Moleküle und damit die mittlere Wegelänge eine etwas andere sein muß, als wir sie im vorigen Paragraphen berechneten. Für [die] mittlere Wegelänge fanden wir

$$l = \left(\frac{\lambda}{4\varrho^2\pi} - 1\right)\varrho$$

[oder,] wenn wir in der Klammer 1 gegen das erste Glied vernachlässigen

$$l = \frac{\lambda}{4\varrho\pi},$$

[und] für die Stoßzahl

$$z = \frac{u}{l} = u\,\frac{4\varrho\pi}{\lambda}.$$

Wie sich durch die Anziehung die Stoßzahl ändert, ergibt sich nach [O. E.] Meyer[2] durch folgende einfache Erwägungen. Fliegt ein Molekül nahe einem andern, so daß es ohne diese Anziehung vorüberfliegen [würde], so wird infolge dieser Anziehung das Molekül aus seiner Bahn [gegen] das anziehende Molekül hin abgelenkt. Die Ablenkung muß um so [größ]er sein, je stärker die Anziehung der Moleküle im Verhältnis zur lebendigen Kraft des fliegenden Moleküls ist, da das Beharrungsvermögen des [fliegend]en Moleküls in seiner Bahn der lebendigen Kraft desselben proportional ist. Ist die Ablenkung aus der Bahn groß genug, so kann das [ohne] Anziehung vorüberfliegende Molekül zum Stoße kommen. Die Zahl [der] Stöße muß also größer werden. Ist ε der Anziehung der Moleküle [propo]rtional und $\varkappa$ eine Proportionalitätskonstante, so können wir die ver[meh]rte Stoßzahl Z_1 setzen

$$Z_1 = Z\left(1 + \varkappa\,\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}mu^2}\right) = u\,\frac{4\varrho^2\pi}{\lambda}\left(1 + \varkappa\,\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}mu^2}\right)$$

1) Sutherland, Phil. Mag. (5) 36. p. 507. 1893.
2) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. 2. Aufl. Breslau 1899.

werden wir nachweisen, daß bei steigender Temperatur die Dichtigkeit der Gase, und zwar für alle sehr nahe gleichmäßig, abnimmt, so daß wir bei einer nach der Zentesimalskala genommenen Temperatur t das Gewicht von ccm Gas schreiben können

$$\frac{0{,}001\,293 \cdot \delta}{1 + 0{,}003\,67\,t}.$$

Deshalb wird bei der Temperatur t die Geschwindigkeit

$$u = 48\,496{,}4 \sqrt{\frac{1 + 0{,}003\,67\,t}{\delta}} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

worin für Luft $\delta = 1$ zu setzen ist.

Für einige Gase werden hiernach die Werte von u für die Temperatur $t = 0$ des schmelzenden Eises abgerundet in Meter ausgedrückt:

Sauerstoff . . .	$\delta = 1{,}105\,66$	$u = 461^{\text{m}}$
Stickstoff . . .	$\delta = 0{,}971\,3$	$u = 492^{\text{m}}$
Wasserstoff . .	$\delta = 0{,}069\,2$	$u = 1844^{\text{m}}$
Kohlensäure .	$\delta = 1{,}529\,0$	$u = 392^{\text{m}}$.

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die so berechneten Werte von u nicht die arithmetischen Mittel der Geschwindigkeit der Moleküle sind: es sind vielmehr jene Werte der Geschwindigkeit, welche alle Moleküle haben müßten, damit der Druck dem wirklichen gleich ist; u bedeutet also die Quadratwurzel aus dem mittlern Quadrate der Geschwindigkeit, welch letzteres nicht mit dem Quadrate der mittlern Geschwindigkeit zusammenfällt. Um die mittlere Geschwindigkeit zu bestimmen, bedarf es erst einer Untersuchung, wie die verschiedenen Geschwindigkeiten auf die Moleküle verteilt sind, eine Untersuchung, welche Maxwell[1] durchgeführt hat, auf welche hier einzugehen hier zu weit führen würde. Wir begnügen uns mit Angabe des Resultates, daß hiernach die mittlere Geschwindigkeit etwas kleiner ist als der Clausiussche Wert, und zwar daß

$$u_1 = u \sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Bei den Molekülen kommen alle Geschwindigkeiten vor von sehr kleinen bis zu sehr großen; etwa 1,5 Prozent der Moleküle hat eine Geschwindigkeit, die weniger als ein Viertel der mittlern, etwa 0,5 Prozent eine solche, die mehr als das Doppelte der mittlern beträgt.

§ 105.

Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe. Barometrische Höhenmessungen. Nachdem wir in den letzten Paragraphen die Bedeutung des Mariotteschen Gesetzes für unsere Kenntnis der Natur des Gaszustandes kennen gelernt haben, gehen wir zunächst dazu über, das Mariottesche Gesetz zur Ableitung einiger aus demselben sich ergebenden Erscheinungen

1 *Maxwell*, Phil. Mag. 29 (4) 1860 und 35 (4) 1868; *Boltzmann*, Wiener Berichte 58 1868; 63, 1871; 66, 1872; 72, 1875. Man sehe auch *O. E. Meyer*, Kinetische Gastheorie 2. Aufl. Breslau 1895/99. p. 45 und math. Zusätze p. 17

zu benutzen. Wir beginnen mit Ableitung des Gesetzes, nach welchem der Luftdruck abnehmen muß, wenn wir uns in der Atmosphäre emporheben. Eben weil die Dichtigkeit der Gase mit dem Druck sich ändert, muß das Gesetz der Druckabnahme bei vertikaler Erhebung in der Atmosphäre ein anderes sein, als wenn wir uns in einer tropfbaren Flüssigkeit emporheben.

Um das Gesetz abzuleiten, nehmen wir an, die Luft habe überall dieselbe Temperatur und sei im Gleichgewicht. Sei der Barometerstand in der Höhe h über dem Meeresniveau gleich b. Ist g die Beschleunigung beim freien Fall in der Höhe h, und σ die Dichtigkeit, d. i. das Gewicht der Volumeinheit Quecksilber, so ist der durch den Barometerstand b angegebene bezw. durch die Quecksilbersäule von der Höhe b ausgeübte Druck

$$p = g\sigma b.$$

Die Größe g hängt, wie wir wissen, von der Höhe h über dem Meeresniveau und von der geographischen Breite φ ab. Ist g_0 der Wert von g am Meeresniveau unter derselben geographischen Breite, so ist nach § 40

$$g = g_0 \left(1 - \left(2 - \frac{3\delta'}{2\delta}\right)\frac{h}{R}\right) = g_0 \left(1 - a\frac{h}{R}\right).$$

wenn wir annehmen, wir befinden uns auf einer Hochebene, und auch ein Berg kann als solche angesehen werden, und δ' ist die Dichtigkeit der Schichten der Hochebene, δ die mittlere Dichtigkeit der Erde. Für g_0 in seiner Abhängigkeit von der Breite fanden wir § 41

$$g_0 = 978 + 5{,}19 \sin^2 \varphi$$

in Zentimetern ausgedrückt. Drücken wir g_0 durch den Wert von g_{45} aus, welcher der geographischen Breite von 45^0 entspricht, so erhalten wir leicht

$$g_0 = g_{45}(1 - 0{,}002\,64 \cos 2\varphi).$$

Demnach wird der Druck

$$p = g_{45}(1 - 0{,}002\,64 \cos 2\varphi)\left(1 - a\frac{h}{R}\right)\sigma \cdot b.$$

Ist die Dichtigkeit der Luft an derselben Stelle s, so ist der Druck, den eine Luftschicht von der unendlich kleinen Höhe dh an jener Stelle ausübt, gleich

$$g s dh,$$

worin für g derselbe Wert einzusetzen ist. Die Dichtigkeit s der Luft erhalten wir nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze. Ist s_0 die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke p_0, so ist

$$s : s_0 = p : p_0; \qquad s = \frac{s_0}{p_0} \cdot p.$$

Setzen wir als Druck p_0 den Druck des normalen Barometerstandes $b_0 = 76^{\text{cm}}$ am Meeresniveau und unter 45^0 Breite, so ist

$$p_0 = \sigma g_{45} b_0$$

und

$$s = \frac{s_0}{b_0}(1 - 0{,}002\,64 \cos 2\varphi)\left(1 - a\frac{h}{R}\right) b,$$

nimmt, wenn wir den $\cos\varphi$ enthaltenden Klammerausdruck mit A bezeichnen, ist der Druck der Schicht von der Höhe dh

$$g\cdot dh = g_{45}\frac{s_0}{b_0}A^2\left(1-a\frac{h}{R}\right)^2 b\,dh = dp \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{a)}$$

Steigen wir um die Höhe dh empor, so muß der Druck um diese Größe abnehmen, der Barometerstand wird $b - db$, und der Druck dieser Quecksilbersäule in der Höhe $h + dh$ wird

$$p - dp = g_{45}\sigma(b - db)A\left(1 - a\frac{h+dh}{R}\right)$$

oder

$$dp = g_{45}\sigma\,db\,A\left(1 - a\frac{h}{R}\right) + g_{45}\sigma b A a\frac{dh}{R} - g_{45}\sigma\,db\,A\frac{dh}{R}.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist gegen die beiden andern wegen des Produktes $db\,dh$ unendlich klein und kann deshalb fortgelassen werden. Wir erhalten demnach die Abnahme db des Barometerstandes aus der Gleichung

$$g_{45}\sigma\,db\,A\left(1 - a\frac{h}{R}\right) = dp - g_{45}\sigma b A a\frac{dh}{R}.$$

Setzen wir den vorhin (Gleichung a) für die Abnahme des Druckes gefundenen Wert ein, so wird

$$-g_{45}\sigma\,db\,A\left(1 - a\frac{h}{R}\right) = g_{45}\frac{s_0}{b_0}A^2\left(1 - a\frac{h}{R}\right)^2 b\,dh - g_{45}\sigma b A a\frac{dh}{R},$$

wenn wir auf der linken Seite das negative Vorzeichen setzen, um auszudrücken, daß db eine Abnahme des Barometerstandes ist, wenn wir aufsteigen, also dh eine positive Größe ist. Darnach wird

$$-db = \frac{s_0}{b_0\sigma}\cdot b\cdot A\left(1 - a\frac{h}{R}\right)dh - b\,\frac{a}{1 - a\frac{h}{R}}\cdot\frac{1}{R}\,dh$$

oder

$$-\frac{db}{b} = \left\{\frac{s_0}{b_0\sigma}A\left(1 - a\frac{h}{R}\right) - \frac{a}{1 - a\frac{h}{R}}\cdot\frac{1}{R}\right\}dh,$$

was wir auch schreiben können

$$-\frac{db}{b} = \left\{1 - \frac{b_0\sigma}{s_0}\,\frac{a}{A\left(1 - a\frac{h}{R}\right)^2}\,\frac{1}{R}\right\}\frac{s_0}{b_0\sigma}A\left(1 - a\frac{h}{R}\right)dh$$

$$-\frac{db}{b} = F\cdot\frac{s_0}{b_0\sigma}A\left(1 - a\frac{h}{R}\right)dh,$$

wenn wir den ersten Faktor, den wir als konstant ansehen können, da das zweite Glied in der Klammer sich außerordentlich wenig mit h und mit φ ändert, mit F bezeichnen, so daß

$$F = 1 - \frac{b_0\sigma}{s_0}\,\frac{a}{R}.$$

Die Gleichung für db gibt schon das Gesetz an, nach welchem der Luftdruck mit steigender Höhe abnimmt, denn sie zeigt, daß jedesmal,

wenn dh denselben Wert hat, db immer nahezu derselbe Bruchteil von b ist, das heißt also, der Luftdruck bezw. die ihn messende Barometerhöhe nimmt sehr nahe in einer geometrischen Reihe ab, wenn die Höhen in arithmetischer Reihe wachsen. Bis zu Höhen, bis zu denen die Änderung der Schwerkraft außer acht gelassen werden kann, würde das Gesetz genau gelten.

Das ergibt sich noch deutlicher, wenn wir aus dieser Gleichung für db den Barometerstand in einer Höhe H berechnen; sei derselbe b_n, so erhalten wir denselben, wenn wir die Summen bilden

$$-\int_b^{b_n} \frac{db}{b} = \int_h^H F \frac{s_0}{b_0 \sigma} A dh - \int_h^H F \frac{s_0}{b_0 \sigma} \frac{Aa}{R} h dh.$$

Diese Summen sind nach E VIII, E 2 und E 1

$$-\{\log b_n - \log b\} = F \frac{s_0}{b_0 \sigma} A (H-h) - F \frac{s_0}{b_0 \sigma} \cdot \frac{Aa}{2R} (H^2 - h^2)$$

oder

$$\log b - \log b_n = F \frac{s_0}{b_0 \sigma} A \left(1 - a \frac{H+h}{2R}\right) (H-h),$$

worin die Logarithmen natürliche sind. Wollen wir Briggische Logarithmen nehmen, so müssen wir die rechte Seite mit dem zur Verwandlung von natürlichen in Briggische erforderlichen Faktor M gleich dem Briggischen Logarithmus von der Zahl e multiplizieren.

Die Gleichung zeigt, daß, wenn wir von der Änderung der Schwere absehen, jedesmal, wenn wir in der Atmosphäre um dieselbe Höhe $H-h$ emporsteigen, die Differenz der Logarithmen der Barometerstände an der untern und obern Grenze denselben Wert hat, oder daß der Quotient aus den Barometerständen denselben Wert hat.

Dieses Gesetz gestattet unmittelbar aus den an einer untern und obern Station beobachteten Barometerständen die Höhendifferenz $H-h$ der beiden Orte zu bestimmen. Lösen wir die Gleichung nach $H-h$ auf und setzen $H-h=D$, $H+h=2h+D$, so wird

$$D = \frac{b_0 \sigma}{M s_0} \frac{1}{F} \frac{1}{A} \frac{1}{1 - a\frac{2h+D}{R}} (\log b - \log b_n),$$

worin nur noch die Koeffizienten auszuwerten sind.

Für b_0 haben wir den normalen Barometerstand 76^{cm} einzusetzen, σ ist die Dichtigkeit des Quecksilbers 13,595 93 bei 0^0, die Zahl M ist gleich 0,434 29. Für s_0 ist die Dichtigkeit der Luft bei normalem Barometerstande unter der geographischen Breite 45^0 einzusetzen. Ist die Temperatur der Luftschicht $H-h$ gleich der Temperatur 0^0 des schmelzenden Eises, so ist s_0 die Dichte der Luft bei dieser Temperatur; ist die Temperatur der Luftschicht t^0, so ist die Dichte s_0 für die Temperatur zu nehmen. Diese ist, wie wir in der Wärmelehre zeigen werden,

$$s_0 = \frac{0{,}001\,292\,73}{1 + 0{,}003\,67}$$

Mit diesen Zahlen wird

$$\frac{b_0 s}{M s_0} = 1\,840\,520\,(1 + 0{,}003\,67\,t)\,\mathrm{cm}.$$

Für die Temperatur t müßte man die mittlere Temperatur der Luftschicht D einsetzen. Da man indes nicht angeben kann, wie die Temperatur in der Luftschicht verteilt ist, so begnügt man sich in Ermangelung eines bessern die mittlere der an beiden Stationen beobachteten Temperaturen $\frac{1}{2}(t + t_n)$ einzusetzen.

Der für s_0 angegebene Wert setzt weiter voraus, daß die Luft ganz trocken ist, und in der ganzen Höhe von h bis H dieselbe Temperatur t habe. Beides ist nicht der Fall. Feuchte Luft ist leichter als trockene, und da die Feuchtigkeit in der Luft mit steigender Temperatur zunimmt, wird die Dichtigkeit der Luft mit steigender Temperatur etwas kleiner, als sie es nur durch die Ausdehnung würde. Da die Temperatur der Luft bei Höhenmessungen in der Regel höher ist als 0°, so genügt es, zur Berücksichtigung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit den Koeffizienten 0,003 67 durch den Wert 0,004 zu ersetzen.

Um den in unserer Formel vorkommenden Wert

$$a = 2 - \frac{3\delta'}{2\delta}$$

bestimmen, machen wir die im allgemeinen zutreffende Annahme, daß $\delta' = 0{,}5\,\delta$; damit wird $a = 1{,}25$. Dann wird, da $R = 636\,942\,000^{\mathrm{cm}}$ ist,

$$\frac{1}{F} = 1 + \frac{b_0 \sigma}{s_0} \cdot \frac{a}{R} = 1{,}001\,5685$$

$$\frac{1}{A} = 1 + 0{,}002\,64 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\frac{1}{1 - a\,\dfrac{2h + D}{R}} = 1 + 1{,}25\,\frac{2h + D}{R}.$$

Setzen wir das alles ein, und berücksichtigen, daß auch die Barometerstände auf 0° zu reduzieren sind, so wird in Zentimetern

$$D = 1\,843\,410 \cdot 1{,}001\,5686 \times$$

$$\left(1 + 0{,}004\,00\,\frac{t + t_n}{2}\right)(1 + 0{,}002\,64 \cos 2\varphi)\left(1 + 1{,}25\,\frac{2h + D}{R}\right) \times$$

$$\left\{\log \frac{b}{1 + 0{,}000\,18\,t'} - \log \frac{b_n}{1 + 0{,}000\,18\,t'_n}\right\},$$

wenn wir mit t' und t'_n die Temperatur des Quecksilbers an beiden Orten bezeichnen. Zur Berechnung von D vernachlässigt man zunächst den letzten Faktor, und erhält so einen sehr nahe richtigen Wert, mit welchem man den fünften Faktor ausrechnet und zur schließlichen Auswertung von benutzt.[1]

1) Ausführlichere Behandlung der Gleichung für barometrische Höhenmessungen gibt *La Place*, Mécanique céleste. Livre X. chap. 4; *Poisson*, Traité de mécanique. Tome II. Livre IV. chap. 5; *Rühlmann*, Die barometrischen Höhen-

Hierbei liegt nun noch die Voraussetzung zugrunde, daß die Atmosphäre im Gleichgewicht sei, was nach den Bemerkungen des § 98 nicht der Fall ist. Um die dort erwähnten Variationen des Luftdruckes zu beachten, muß man entweder den mittlern Barometerstand an beiden Stationen anwenden, oder wenn das, wie es meist der Fall ist, an der obern Station auf der Spitze eines Berges nicht möglich ist, muß man eine Zeit wählen, in welcher die Atmosphäre möglichst ruhig ist, damit sie möglichst nahe im Zustande des Gleichgewichtes ist, den unsere Rechnung voraussetzt. Man muß dann ferner gleichzeitige Beobachtungen an beiden Stationen anstellen lassen. Da die Änderungen des Luftdruckes meist nicht so lokal sind, daß derselbe in nahe liegenden Orten sehr verschieden ist, so kann man dann ziemlich sicher sein, korrespondierende Barometerstände zu erhalten. Unsere Formel ergibt dann die Höhe der zweiten Station mit dem Barometerstande b_n über der ersten bis auf einige Meter genau.

Kennt man die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche und zugleich den Barometerstand b an demselben, so kann man mit Hilfe dieser Formel den Barometerstand b_0 erhalten, welcher in dem Niveau des Meeres unter der Breite und Länge des Ortes vorhanden sein würde. Auf diese Weise werden die an den verschiedenen Orten beobachteten mittlern Barometerstände auf das Niveau des Meeres reduziert.

§ 106.

Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer. Die Druckmesser, welche wir bisher kennen gelernt haben, beruhen auf dem hydrostatischen Grundgesetze, daß in kommunizierenden Röhren nur dann Gleichgewicht ist, wenn der Druck auf die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten von beiden Seiten gleich groß ist. Bei diesen wird also der Druck des Gases, die Expansivkraft desselben, durch eine Flüssigkeitssäule gemessen, welche in der einen der beiden kommunizierenden Röhren über dem Niveau der Flüssigkeit in der andern erhoben ist. Bei hohen Drucken müssen diese aber immer eine bedeutende Länge haben, wie z. B. die von Arago und Dulong oder Regnault eine Länge von 36^m besaßen. Man hat deshalb auf das Mariottesche Gesetz eine andere Art von Manometern gegründet, welche den Druck eines Gases durch die Kompression eines abgeschlossenen Luftvolumen bestimmen. Da die Luft fast genau dem Mariotteschen Gesetze folgt, so erhalten wir mit Zugrundelegung des Gesetzes nur wenig von der Wahrheit abweichende Resultate.

Die gewöhnlichste Form der Manometer ist die folgende. Eine oben geschlossene mit trockener Luft gefüllte Glasröhre (Fig. 184) taucht in ein Gefäß, welches zum Teil mit Quecksilber gefüllt ist. Das Gefäß steht in einem festen Zylinder von Eisen, durch dessen Deckel die geschlossene Röhre luftdicht hindurchgeführt ist. Die Röhre ist in dem Deckel fest-

---

messungen. Leipzig 1870. Man sehe auch *Baeyer*, Poggend. Ann. **98**. p. 371. 1856; *Pernter*, Carls Repertorium. **24**. p. 161. 1888. Wegen genauerer Berücksichtigung der Feuchtigkeit der Luft *Hann*, Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie. **9**. p. 192; **19**. p. 228.

ittet und der Deckel luftdicht und fest auf den Zylinder aufge-
bt. Durch eine mit einem Hahn verschließbare Röhre kann das
mit dem Raume in Verbindung gesetzt werden, in welchem das
ngeschlossen ist, dessen Druck gemessen werden soll.

lei dem äußern Druck der Atmosphäre steht das
ilber in der Röhre und dem Gefäße gleich hoch;
urch den Hahn das zusammengedrückte Gas in das
und drückt auf die äußere Quecksilberfläche, so
das Quecksilber in die verschlossene Röhre ein und
olumen des abgesperrten Gases gibt die Größe des
s an.

Fig. 184.

Ian graduiert den Apparat auf folgende Weise.

t der Radius der Röhre gleich r und ihre Länge
h, so ist bei dem anfänglichen Drucke von 760^{mm}
lumen des abgesperrten Gases v

$$v = r^2 \pi h.$$

Venn nun der äußere Druck bis zu $n \cdot 760^{mm}$ wächst,
gt das Quecksilber um x in der Röhre in die Höhe
r dann von der Luft eingenommene Raum ist

$$v' = r^2 \pi (h - x).$$

Während das Quecksilber in der Röhre um x steigt,
s in dem Gefäße um y. Nennen wir den Radius
enfalls als zylindrisch vorausgesetzten Gefäßes R,
en wir

$$\pi r^2 x = \pi R^2 y,$$

in der Röhre aufgestiegene Quecksilber vorhin in dem Gefäße den
$\pi R^2 y$ einnahm.

ie Spannung oder der Druck der eingeschlossenen Luft auf die Ober-
des Quecksilbers ist gleich dem äußeren Drucke $n \cdot 760^{mm}$, jedoch
dert um die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, also

$$p' = n \cdot 760 - x - y$$

$$p' = n \cdot 760 - x\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right).$$

nd da die Volumina v und v' sich verhalten umgekehrt wie die
, so haben wir

$$\pi r^2 h : \pi r^2 (h - x) = n\, 760 - x\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) : 760,$$

tzen wir

$$\frac{1}{760}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) = k,$$

$$h : h - x = n - kx : 1$$

$$\frac{h}{h - x} = n - kx.$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst gibt

$$x = \frac{1}{2k}\left\{n + kh \pm \sqrt{(n + kh)^2 - 4\,kh\,(n - 1)}\right\},$$

wo wir zur Berechnung von x dem Wurzelausdruck das negative Vorzeichen geben müssen.

Denn für $n = 1$ ist $x = o$, unser Ausdruck gibt

$$x = \frac{1}{2k}\left\{1 + kh \pm \sqrt{(1 + kh)^2}\right\},$$

und machen wir den Wurzelausdruck negativ

$$x = o.$$

Zur Graduierung eines solchen Manometers bedarf es also nur einer genauen Messung der Radien r und R; daraus wird die Größe k und mit dieser dann x berechnet für $n = 1, 2, 3 \ldots.$ Die so gefundenen Höhen x werden, von dem Niveau des Quecksilbers im Gefäße aus, neben der Röhre aufgetragen und mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Die Quecksilberstände geben dann unmittelbar die Größe des Druckes in Atmosphären an.

Ist die Röhre sehr enge, das Gefäß, in welches sie taucht, aber sehr weit, so kann man die Niveauveränderung im Gefäße vernachlässigen. In unserer Formel ist dann $R = \infty$, $\frac{r^2}{R^2} = o$, $k = \frac{1}{760}$, und wir erhalten

$$x = \frac{760}{2}\left\{n + \frac{h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{h}{760}\right)^2 - 4\,\frac{h}{760}\,(n - 1)}\right\}.$$

Fig. 185.

Oft gibt man diesen Manometern eine U-förmige Gestalt (Fig. 185). Der offene Arm erhält den Druck, der gemessen werden soll, und der geschlossene Arm enthält in dem Raume NA über dem Quecksilber trockne Luft. Unter dem Drucke der Atmosphäre steht das Quecksilber in beiden Röhren gleich hoch. Steigt der Druck auf $n \cdot 760^{\mathrm{mm}}$, so sinkt das Quecksilber in dem offenen Schenkel bis N' und steigt in dem geschlossenen Schenkel um ebensoviel bis N'. Um den Apparat zu graduieren, dient unsere obige Formel, indem wir $r = R$ und somit

$$k = \frac{2}{760}$$

setzen, wodurch wir erhalten

$$x = \frac{760}{4}\left\{n + \frac{2h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{2h}{760}\right)^2 - 8\,\frac{h}{760}\,(n - 1)}\right\}.$$

Es ist übrigens zu bemerken, daß bei dieser Art des Graduierens vorausgesetzt wird, daß die Röhren genau zylindrisch sind, also r überall denselben Wert behält. Es wird das nur selten mit aller Strenge richtig sein und deshalb ist es im allgemeinen besser, die Röhren durch den Versuch zu graduieren. Man bringt sie dann mit einem Quecksilbermanometer in Verbindung, wie es zum Beweise des **Mariotteschen** Gesetzes

dt wurde, und vergleicht die Volumina der abgesperrten Luft mit ren Drucken.

den Druck zu messen, welchen ein Gas in einem abgeschlossenen twa einem größeren Behälter, ausübt, hat Regnault[1]) ein Mano-agegeben, welches bis zu Drucken von etwa 30 Atmosphären iemlichkeit der zuletzt beschriebenen Manometer mit der Genauig- einfachen Quecksilbermanometer verbindet. Die Einrichtung lanometers zeigt Fig. 186. Es besteht aus einem dickwandigen ohr AB, welches durch den T-förmig durchbohrten Hahn R und enleitung C mit dem Behälter in Verbindung gesetzt werden kann, das komprimierte Gas enthält. Neben der Röhre AB befindet sich den kommunizierenden Röhren DE und FG bestehende einfache bermanometer. Diese beiden Röhren kommunizieren durch den in der Bodenplatte arates eingesetz-enstücke befind-benfalls T-förmig irten Hahn R'', bei um 90° ge-Stellung (Fig. en innern Raum res DE mit der usflußöffnung in ing setzt. Die Röhren DE und l möglichst zy- und beide mit Millimeterteilung Das oben et-sgezogene Rohr in den vertikal iden Teil des mit ine R kommuni-Rohres RO ein-Unmittelbar über e ED findet sich itwinklig durch-Iahn R', durch Innere des Roh-entweder mit der Luft in Verbin-etzt (Fig. 186a), ch Drehung um 90° (Fig. 186b) mit dem Hahne R in Kommu-gebracht werden kann. Die drei Röhren sind von einem in einer der Bodenplatte eingekitteten Glaszylinder MM' umgeben, welcher ser gefüllt wird, um den Apparat während des Gebrauches auf er Temperatur zu halten.

Fig. 186a. Fig. 186b.

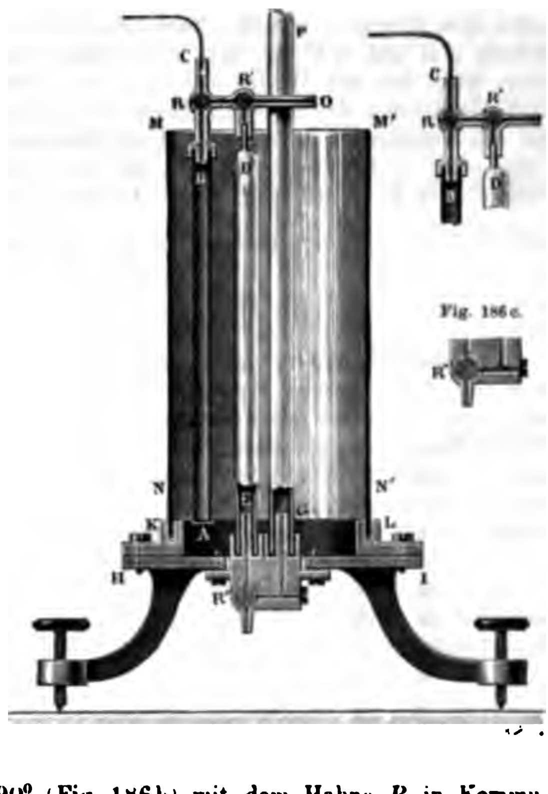


Fig. 186c.

[1]) Regnault, Mémoires de l'Acad. 26. p. 580. 1862. Poggend. Ann. 148. 1871.

Zum Gebrauche des Apparates wird zunächst das Rohr AB mit dem mit Gas gefüllten Behälter in Verbindung gesetzt, durch Stellung des Hahnes R wie in Fig. 186a und dann durch Einfüllen von Quecksilber durch das Rohr FG das Rohr ED soweit mit Quecksilber gefüllt, daß es aus der Öffnung O hervortritt. Darauf wird der Hahn R in die Stellung Fig. 168b gedreht und dann der Hahn R' langsam so gestellt, daß der innere Raum von AB mit der Röhre DE in Verbindung steht (Fig. 186b). Die in AB komprimierte Luft tritt zum Teil in DE über. Man stellt gleichzeitig den untern Hahn R'' so, daß sowohl aus der Röhre DE als aus GF das Quecksilber ausfließen kann, und läßt so lange unten Quecksilber ausfließen, bis in den beiden letzteren Röhren die Quecksilberniveaus eine bequem zu messende Höhendifferenz h zeigen.

Der gesuchte Druck x der in dem Behälter vorhandenen Luft ergibt sich folgendermaßen. Durch die Verbindung des Rohres AB mit dem betreffenden Behälter hat sich das Volumen V dieses Rohres mit Gas unter dem Drucke x gefüllt. Nach Herstellung der Verbindung der beiden Röhren AB und DE hat sich dann dieses Gasvolumen ausgedehnt, und zwar, wenn wir mit W das Volumen im Rohre DE bezeichnen, welches nach Herstellung der Niveaudifferenz h von dem Gase mit angefüllt ist, auf das Volumen $V+W$. Ist H der Barometerstand zur Zeit, als das Volumen $V+W$ hergestellt war, so steht dieses Gas jetzt unter dem Drucke $H+h$. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist deshalb

$$xV = (V+W)(H+h),$$
$$x = \frac{V+W}{V}(H+h).$$

Zur Bestimmung von x ist deshalb außer der Kenntnis von H und h noch jene der Volumina V und W erforderlich. Zur Bestimmung von W füllt man zunächst ED wieder mit Quecksilber vollständig, bis es also bei O auszufließen beginnt, stellt dann den Hahn R' in die Stellung Fig. 186b und den Hahn R so, daß der Raum von ED durch die beiden Hähne R' und R und die Röhre C, welche jetzt in die freie Luft mündet, mit der äußern Luft kommuniziert. Man stellt dann den Hahn R'' in die Stellung Fig. 186c und läßt aus dem Rohre ED das Quecksilber ausfließen. Das ausgeflossene Quecksilber sammelt man in eine Flasche und wägt es. Man bestimmt so direkt durch das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers den Rauminhalt der Röhre bis zu den verschiedenen Teilstrichen, und hat dann zur Bestimmung des Volumens W jedesmal nur nötig, den Teilstrich zu beobachten, bis zu welchem das Quecksilber in der Röhre ED herabgedrückt ist.

Um schließlich V zu bestimmen, wird AB mit Luft unter dem Druck der Atmosphäre gefüllt und das Manometer gerade wie zur Bestimmung des Druckes x hergerichtet. Verfährt man nun gerade so wie zur Untersuchung des Druckes x, so wird auch jetzt Luft in DE übertreten, wenn man aus R'' Quecksilber austreten läßt, es wird aber in GF das Quecksilber jetzt rascher sinken als in DE. Ist in DE ein Volumen W' eingetreten, und in GF das Quecksilber um h' tiefer gesunken, so ist jetzt, wenn wieder H die Höhe des Barometers ist,

$$HV = (V + W')(H - h')$$
$$V = W' \frac{H - h'}{h'}.$$

Indem man so die Luft aus AB bis zu verschiedenen Volumen $V + W'$ ch ausdehnen läßt, erhält man eine Reihe von Werten V, die sich gegenitig kontrollieren.

Weitere Werte von V kann man erhalten, indem man zunächst das hr AB und das Rohr DE bis zu einem Volumen v' mit Luft füllt, d dann durch Einfüllen von Quecksilber in GF diese Luft komprimiert. t man sie soweit komprimiert, daß in DE noch ein Volumen W_1 mit ft gefüllt ist, und steht infolgedessen das Quecksilber in FG um h_1 her, so ist

$$(V + v')H = (V + W_1)(H + h_1)$$
$$V = \frac{v'H - W_1(H + h_1)}{h_1}.$$

Regnault gab bei seinem Manometer den Röhren AB und DE die nge von 1^m und ersterer einen Durchmesser von 5^{mm}, letzterer von 1^{mm}, so daß also der Querschnitt des letztern Rohres 16mal so groß r als der von AB. Wurde also AB mit Gas unter einem Drucke von ! Atmosphären gefüllt, so konnte man $V + W'$ leicht so herstellen, daß gleich 16 V war, es wurde dann die Niveaudifferenz h gleich dem rometerstande.

Man sieht leicht, wie man durch Verkleinerung von V und Vergrößeng von W' auch stärkere Drucke mit nicht größeren Niveaudifferenzen essen kann; es ist dann nur auf die Bestimmung von V und W' die größte rgfalt zu verwenden, da je kleiner V ist, ein kleiner bei der Bestimmung ses Volumens begangener Fehler von sehr großem Einfluß ist.

Zur Messung sehr großer Drucke ist das § 66 beschriebene Manoeter von Desgoffe wohl das genaueste.

Nur erwähnt seien die in der Technik viel benutzten Metallmanoeter, die zuerst von Bourdon konstruiert gewissermaßen das umgekehrte s Metallbarometers sind. Der innere Raum der in dem Bourdonschen nometer vorhandenen gebogenen Röhre wird mit dem Raum in Verbinng gesetzt, in welchem der Druck gemessen werden soll. Je nach der ärke des Druckes biegt sich die Röhre mehr auf; die Teilung, auf welr der Zeiger einsteht, wird durch Vergleichung mit einem offenen Quecklbermanometer bestimmt. Diese Metallmanometer haben sehr verschiedene rmen und in den Einzelheiten verschiedene Konstruktion.

§ 107.

Volumenometer. Eine andere Anwendung des Mariotteschen Gesetzes ist die Messung der Volumina von Körpern und so die Bestimmung er Dichtigkeit, ohne einer Wägung in Wasser zu bedürfen. Der erste parat der Art wurde von Say[1]) unter dem Namen Stereometer und

1) Say, Annales de chimie par Guyton, Lavoisier etc. 23. 1797. Auch Gilt, Annalen. 2 1799.

etwas später von Leslie[1]) beschrieben. Regnault[2]) gab demselben folgende Form (Fig. 187 und 188). Eine Glaskugel A von 300^{ccm} Rauminhalt ist mittels einer Metallfassung auf ihrem Hals durch vier Schrauben und Zwischenlegung von eingefettetem Leder luftdicht mit dem manometrischen Apparat $abcd$ verbunden. Das Manometer besteht aus zwei 14^{mm} weiten Glasröhren b und c, welche in ein eisernes mit einem T-förmig durchbohrten Hahn r versehenes Röhrenstück eingekittet sind. Fig. 189 und 190 zeigen einen Durchschnitt des Röhrenstückes mit zwei verschiede-

Fig. 187.

Fig. 188.

Fig. 189.

Fig. 190.

nen Stellungen des Hahnes. In Fig. 189 kommunizieren die beiden Manometerröhren miteinander, in Fig. 190 b mit der äußern Luft, c ist geschlossen. In einer andern Stellung würde c ohne b und in einer vierten beide mit der äußern Luft in Verbindung stehen. Die Röhre cd ist gerade und oben offen; die Röhre b, welche oben mit der Kugel durch das enge Rohr aA in Verbindung steht, hat nahe unter der Krümmung a eine Kugel B

1) *Leslie,* Ann. of Philosoph. No. LXIV.

2) *Regnault,* Ann. de chim. et de phys. **14.** (3.) 1845. Auch Poggend. Ann. **66.** p. 445. 1845.

und zwei Marken mn und pq, die eine über, die andere unter B. Durch einen Hahn s kann man auch die Röhre ab oben mit der freien Luft in Verbindung setzen.

Man muß das Volumen der einzelnen Teile der Röhre ab, von da, wo sie in die Kugel A tritt, bis zur Marke mn, und des zwischen den beiden Marken enthaltenen Teiles genau kennen, ebenso das Volumen der Kugel A. Um den zwischen den Marken enthaltenen Raum zu erhalten, öffnet man den Hahn s, stellt r so, daß ab und cd kommunizieren (Fig. 189) und füllt in cd Quecksilber ein, bis es an mn steht. Darauf dreht man den Hahn r in die Stellung (Fig. 190) und läßt soviel Quecksilber in ein untergestelltes Gefäß abfließen, daß die Quecksilbersäule in ab gerade bis pq steht.

Man schließt den Hahn, so daß die Röhren nicht mehr mit der äußern Luft in Verbindung stehen und erhält aus dem Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers das zwischen pq und mn enthaltene Volumen. Dies Volumen sei v. Die beiden andern Volumina, das der Kugel und der Verbindungsröhre, bestimmt man zusammen, da man nur die Summe der Volumina zu kennen braucht. Diese sei V. Man füllt dazu bei geöffnetem Hahn s und in Stellung des Hahnes r, wie in Fig. 189, beide Röhren bis zur Marke pq. Darauf schließt man s, und füllt in cd soviel Quecksilber nach, bis das Quecksilber in ab bis mn steht. Das Quecksilber steht dann in cd um eine Länge h, die man mit dem Kathetometer mißt, höher als in ab. Die Luft in der Röhre ab über dem Quecksilber und in der Kugel A ist nun komprimiert durch die Quecksilbersäule h. Unter dem atmosphärischen Druck bei geöffnetem Hahn s füllte sie den Raum $V+v$ aus; unter dem verstärkten Drucke nur mehr den Raum V. Nennen wir den Barometerstand H, so haben wir nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V+v : V = H+h : H$$

$$V(H+h) = (V+v)H$$

$$V = v \cdot \frac{H}{h}.$$

Somit kennt man den Rauminhalt der einzelnen Teile des Apparates, dessen man bedarf, um das Volumen x eines Körpers zu bestimmen.[1])

Man legt den Körper, dessen Volumen x gefunden werden soll, in die Kugel. Derselbe verdrängt dadurch eine ihm an Volumen gleiche Luftmenge. Wenn man nun bei geöffnetem Hahn s wieder Quecksilber bis zur Marke pq einfüllt und den Hahn s schließt, so ist jetzt das Volumen der abgesperrten Luft nicht mehr $V+v$, sondern $V+v-x$. Füllt man dann in cd wieder Quecksilber nach, bis es in ab bei mn steht, so wird jetzt das Volumen $V+v-x$ auf das Volumen $V-x$ komprimiert und man beobachtet in cd eine Quecksilbersäule h', welche diese Kompression bewirkt. Nennen wir wieder H den Barometerstand, so ist

1) Eine sehr vereinfachte und bequeme Form des Regnaultschen Volumenometers beschreibt *Paalzow*, Wiedem. Ann. 13. p. 332. 1881; in bezug auf ein von *Baumhauer* schon früher beschriebenes Volumenometer sehe man *Paalzow*, Wiedem. Ann. 14. p. 176. 1881.

$$V + v - x : V - x = H + h' : H$$
$$H(V + v - x) = (H + h')(V - x)$$
$$x = \frac{Vh' - vH}{h'}.$$

Eine zweite Bestimmung von x erhält man auf dem umgekehrten Wege. Man füllt bei geöffnetem Hahn s soviel Quecksilber in das Manometer, daß es in ab bis zur Marke mn steht. Bei geschlossenem Hahn ist dann das Luftvolumen $V - x$ abgesperrt. Darauf stellt man den Hahn r so, daß beide Röhren miteinander und mit der äußern Luft in Verbindung stehen und läßt soviel Quecksilber abfließen, daß es in ab bis zur Marke pq steht. Das Luftvolumen $V - x$ hat sich dann auf das Volumen $V + v - x$ ausgedehnt, und zugleich beobachtet man, daß das Quecksilber in der Röhre cd um eine Strecke h'' tiefer steht als in ab. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist wieder

$$V + v - x : V - x = H : H - h''$$
$$H(V - x) = (H - h'')(V + v - x)$$
$$x = V - \frac{v(H - h'')}{h''}.$$

Kombiniert man beide Methoden, so kann man sogar die Beobachtung des Barometers unterlassen. Die erste Gleichung für x gibt

$$H = \frac{(V - x)h'}{v},$$

die zweite

$$H = \frac{(V - x)h''}{v} + h'' = \frac{(V + v - x)h''}{v},$$

und aus beiden

$$\frac{V + v - x}{V - x} = \frac{h'}{h''}$$
$$x = V - v \cdot \frac{h''}{h' - h''}.$$

Kopp[1]) hat schon früher ein anderes Volumenometer konstruiert, welches vor dem Regnaultschen den Vorzug der größern Einfachheit hat, so daß es jeder sich leicht selbst herstellen kann; Fig. 191 stellt dasselbe dar. In einem zum Teil mit Quecksilber gefüllten Zylinder K bewegt sich ein quecksilberdicht schließender Kolben mit schwacher Reibung.

Der Zylinder ist unten mit einer Korkplatte geschlossen, und ein gekrümmtes Rohr p läßt ihn mit einem unten und oben geschlossenen Zylinder ii kommunizieren. Der Deckel des letzteren Zylinders ist von zwei Röhren durchbohrt, cd und q.

Die Röhre cd ist gerade, an ihren beiden Enden offen, und gegen eine willkürliche Teilung gelegt, deren Nullpunkt etwas über dem Zylinder liegt. Die Röhre q, gekrümmt, wie die Figur zeigt, tritt durch den Boden in ein zylindrisches Gefäß r ein. Von dem Deckel des Zylinders reichen mehrere Platinspitzen von verschiedener Länge a, b in den Zylinder

1) *Kopp*, Annalen der Chemie und Pharmazie von Liebig. 35. 1840.

Das zylindrische Gefäß r kann ein anderes Gefäß aufnehmen, den zu untersuchenden Körper enthält. Eine Scheibe m von mattnem Glase wird durch die Schraube t und einen zwischengelegten en Körper u auf den abgeschliffenen obern Rand des Zylinders nd verschließt ihn luftdicht. Die Zylinder K und ii sind bis zu wissen Höhe mit Quecksilber gefüllt.

n zieht zunächst den Kolben in K so auf, daß die Luft frei durch cd in ngen kann. Sei bei dem Barometer- V das Volumen der Luft, welches in d r abgesperrt ist, wenn das Quecksrade bei c die Röhre cd verschließt,

Fig. 191.

ückt man nun den Kolben herab, so s Quecksilber in ii, und man kann ; dahin bringen, daß es gerade die berührt. Dabei wird das Quecksilber öhre cd um eine Höhe h steigen, und h mißt jetzt den Druck, unter wel- komprimierte Luft steht. Diese Höhe verschiedenem Barometerstand ver- sein, da mit H die Dichtigkeit der h abgesperrten Luft sich ändert.

V' das Volumen der abgesperrten nn das Quecksilber bei a steht, so ir

$$V : V' = H + h : H$$

$$V : V - V' = H + h : h$$

$$V - V' = \frac{h}{H + h} \cdot V.$$

nun das Volumen V zu bestimmen, bedarf es noch einer weitern tung; man legt dazu in das Gefäß r einen Körper von bekanntem , und verfährt gerade wie vorhin. Man erhält dann das Volum V ende Weise. Das Volum der anfänglich abgesperrten Luft ist jetzt beim Hinaufdrücken des Quecksilbers bis a ist es $V' - v$; in der d ist das Quecksilber dann bis zu einer Höhe h' gestiegen. Wir emnach

$$V - v : V' - v = H + h' : H,$$

n wir wieder gerade wie vorhin verfahren

$$V - v : V - V' = H + h' : h',$$

en wir für $V - V'$ den soeben erhaltenen Ausdruck ein und bringen enden Transformationen an:

$$V = \frac{h'}{H} \cdot \frac{H + h}{h' - h} \cdot v.$$

V so ein für allemal bestimmt, so erhält man aus einem dem ganz gleichen Versuche das Volumen x eines zu untersuchenden

Körpers. Man legt den Körper in den Zylinder r und kompri Luft, bis das Quecksilber die Spitze a berührt. In der Röhre das Quecksilber bis zu einer Höhe h'', und es ist

$$V = \frac{h''}{H} \cdot \frac{H+h}{h''-h} \cdot x,$$

und daraus, wenn wir die Gleichung nach x auflösen,

$$x = \frac{H}{h''} \cdot \frac{h''-h}{H+h} \cdot V.$$

Der Apparat ist mit mehreren Platinspitzen versehen, um mehrere Werte für x erhalten zu können, welche sich gegenseitig lieren, und aus denen man das Mittel nimmt, wenn die einzelnen kleine Abweichungen zeigen.

Man kann diese Apparate sehr gut anwenden, um das spezi wicht von Körpern zu bestimmen, bei denen man die gewöhnliche des Eintauchens in eine Flüssigkeit nicht anwenden kann. Man das Gewicht des Körpers in Grammen und das Volumen mitt Apparates in Kubikzentimetern. Der Quotient beider gibt das s Gewicht.

Um sich von der Genauigkeit der Methode zu überzeugen, l Kopp zunächst das spezifische Gewicht von Blei, Zinn und einige es stimmt, wie folgende Zahlen zeigen, sehr genau mit den vo Beobachtern gefundenen spezifischen Gewichten dieser Substanzen

Es ist das spezifische Gewicht von

Blei	nach	Kopp	11,404,	nach	gewöhnlicher	Methode	11,
Zinn	„	„	7,363,	„	„	„	7,
Salmiak	„	„	1,50,	„	Wollaston		1,

Für eine Reihe anderer Substanzen hat Kopp dann folgend erhalten:

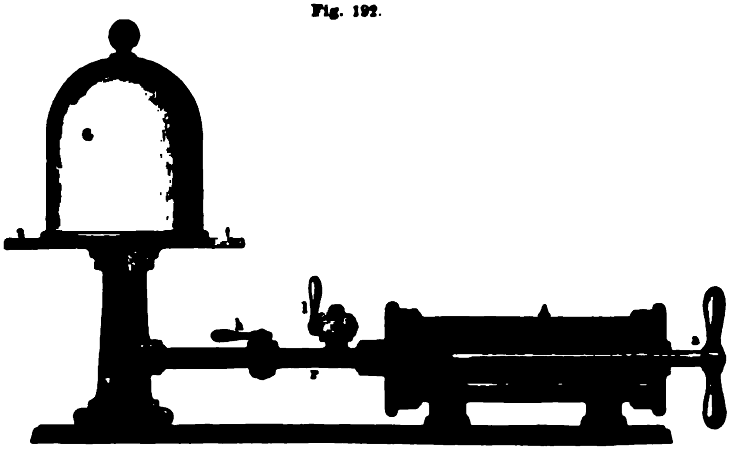
Substanzen	Sp. Gew.	Substanzen	S
Bimstein (gepulvert)	2,15	Korkrinde	
Asche von Buchenholz	2,85	Faser von Lindenholz	
Zucker (weiss., gepulvert) .	1,58	„ „ Tannenholz . . .	
Kochsalz (gepulvert)	2,15	„ „ Nußbaum	
Weizenmehl	1,49	„ „ Apfelbaum . .	
Stärkemehl	1,56	„ „ Zwetschenbaum	
Flachsfaser	1,45	„ „ Birnbaum . . .	
Seide (Coconfaden)	1,56	„ „ Eichenholz	
Baumwolle	1,27	„ „ Buchenholz	
Schafwolle (verarbeitet) . .	1,29		

§ 108.

Die Luftpumpe. Auf der zweiten Fundamentaleigenschaft dem Bestreben, jeden ihnen dargebotenen Raum auszufüllen, ber der für den Physiker wichtigsten Apparate, die Luftpumpe, durc man imstande ist, aus einem Raume die Luft herauszuschaffen.

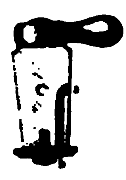
Der einfachste Apparat dieser Art ist die Hahnluftpumpe, wie sie der finder derselben, Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, nstruierte. (Experimenta nova Magdeburgica de spatio vacuo. Amstelod. 672 fol.) In einem hohlen, gut gearbeiteten Zylinder *A* kann ein lufticht schließender Kolben *k* hin und hergeführt werden. Der Boden des ylinders ist durchbohrt und eine Röhre *rr*, welche in der Mitte eines llers *tt* mündet, setzt den durch die Glocke *G* umgebenen Raum mit m Innern des Zylinders in Verbindung.

Fig. 192.



In der Röhre *rr* sind überdies zwei einfach quer durchbohrte Hähne gebracht *h* und *l*. Wenn man die beiden Hähne so stellt, daß der inre Raum des Zylinders weder mit der Glocke *G*, noch mit der äußern uft in Verbindung steht, und nun den Kolben gegen *a* hin bewegt, so tsteht im Zylinder ein luftverdünnter Raum, da sich die vorher in einem einen Teile des Zylinders befindliche Luft jetzt in dem ganzen Zylinder rbreitet. Dreht man den Hahn *h*, so wie die Zeichnung es zeigt, daß e Glocke mit dem Zylinder *A* in Verbindung steht, so römt die dichtere Luft aus der Glocke durch die Röhre *rr* den luftverdünnten Raum des Zylinders, und die Luft unter r Glocke ist dünner wie vorher. Schließt man dann durch die Glocke wieder vom Zylinder ab, so kann man durch rückschieben des Kolbens bei geöffnetem Hahn *l* die Luft s dem Zylinder herausdrücken. Durch mehrfache Wiederlung dieser Operationen kann man dann allmählich die uft unter der Glocke bis auf einen gewissen Grad verdünnen.

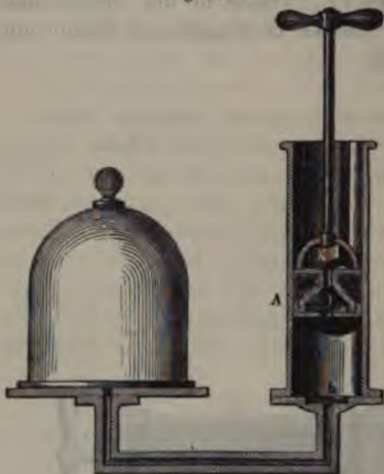
Fig. 193.



Diese Luftpumpe ist nun zwar die einfachste, aber auch die unbeste, da man bei jeder Verdünnung drei Operationen vornehmen muß, s Herausziehen und Hineinschieben des Kolbens und die Stellung zweier hne. Die nächste Verbesserung, welche an den Maschinen angebracht rde, war die, daß man statt zweier Hähne nur einen doppelt durchrten Hahn (Fig. 193) anwandte. Die eine Durchbohrung geht wie bei n einfachen Hähnen quer durch denselben, und verbindet in der ent-

sprechenden Stellung die Glocke mit dem Zylinder. Die zweit einen rechtwinkelig gekrümmten Kanal ab, sie setzt das Innere de ders mit der äußern Luft in Verbindung, sie dient also dazu, bei Zurückführen des Kolbens aus dem Zylinder zu entlassen.

Fig. 194.



Um der Stellung der Häh überhoben zu sein, hat man sp selben durch Ventile ersetzt (Fi Der in dem Zylinder A be Kolben K ist durch ein zentral durchbohrt, welches durch e unten nach oben sich öffnende verschlossen werden kann. Ei liche Klappe ist am Boden de ders vorhanden, die ebenfalls v nach oben sich öffnet. Wenn n den Kolben K in die Höhe zieht, sich das Kolbenventil l; dur stärkern Druck der Luft in de öffnet sich dann aber das Vent die Luft dringt aus der Glock Zylinder. Wird der Kolben l drückt, so schließt sich das V da dann die in K enthalte welche sich vorher mit der Luft der Glocke ins Gleichgewicht geset stärker von oben nach unten drückt. Bald öffnet sich dann a Ventil l des Kolbens und die linder A enthaltene Luft ström die Kolbenöffnung aus, bis de wieder auf dem Boden des Z aufsteht.

Fig. 195.

Indes würde bei dieser ein Ventilluftpumpe die Verdünn Luft unter der Glocke bald ihr erreichen, da die Luft nur d der Glocke in den Zylinder K kann, wenn sie das Ventil h he Luft wird also aufhören, in den einzuströmen, sobald der Druck in der Glocke so klein gewo daß er nicht mehr imstande Ventil zu heben. Deshalb hat der Maschine weitere Veränderu gebracht, und bewirkt, daß steigende Kolben das Ventil der niedergehende es schließt.

Zweistiefelige Pumpen. einstiefeligen Pumpen ist unvermeidlich jedesmal ein toter Gang beim Herabdrücken des Kolbens nur die Luft aus der Pumpe in Luft, nicht aber aus dem Rezipienten in die Pumpe geschafft wird.

aben sie noch eine andere Unbequemlichkeit. Wenn nämlich die ast vollständig ausgepumpt ist, so muß man bei Hebung des Kolicht nur die Reibung des Kolbens an den Wänden des Stiefels überı, sondern auch den Druck der Luft, welcher auf dem Kolben lastet im kein Gegendruck das Gleichgewicht hält. Dieser Druck ist bei Größe des Kolbens sehr bedeutend, er überschreitet 100^{kg}, wenn ıerschnitt des Kolbens einem Quadratdezimeter gleich wird. Dieser der bei dem Anfang der Operation gleich 0 ist, wächst sehr rasch ıacht das Auspumpen von Luft bald sehr schwierig, wenn nicht unh. Um diesen beiden Übelständen zu begegnen, hat man zweistiefeıftpumpen (Fig. 195) konstruiert, bei denen man zwei solcher Pumpen elbar nebeneinander stellt und mit demselben Rezipienten in Verg bringt. Die Kolben sind an Zahnstangen befestigt, deren Zähne eines gezähnten Rades eingreifen. Das Zahnrad sitzt auf einer schen Achse, an der zugleich ein zweiarmiger Hebel befestigt ist. ıßt den Hebel an den an seinen beiden Enden angebrachten Handund hebt und senkt die Kolben durch Drehung des Rades. Man wie hier immer der eine Kolben steigt, wenn der andere herabgeht, ie somit beide vormerkte Übelstände ıllt sind. Denn jetzt der Luftden aufsteigenden ., so befördert er ız gleichem Maße edergehenden; der Luftdruck ist also lemnis der Operaıie geht am Ende ıst leerer Glocke leicht als im AnÜberdies ist aber ler tote Gang verı, denn geht der lolben nieder, um ft aus dem Körper mpe fortzuschaffen, gt der andere Kolf und pumpt Luft m Rezipienten.

Fig. 196.

'erbindung der en mit dem Rezipienten. Um mit den Pumpen leicht die vernsten Apparate in Verbindung setzen zu können, sind sie auf einem Tische befestigt (Fig. 196) Die Kanäle, welche die Pumpenstiefel m Rezipienten in Verbindung setzen, vereinigen sich gleich hinter mpen in einen einzigen Kanal, der dann horizontal über dem Tische ihrt ist, in einiger Entfernung vertikal aufsteigt und in der Mitte Tellers von mattgeschliffenem Glase endigt. Das hervorstehende Ende ınals ist mit einem Schraubengewinde versehen, auf welchem man

die Apparate aufschrauben kann, in denen man einen luftleeren Ra stellen will. Diese sind zu dem Zwecke mit einer Schraubenmut sehen, welche auf das Gewinde paßt. Überdies sind bei einer Luftpumpe stets einige Glocken mit abgeschliffenem Rand, welche Teller gesetzt und ausgepumpt werden können. Um den Verschl solchen Glocke vollkommen luftdicht zu machen, bestreicht man d derselben dann noch mit einer dünnen Schicht Fett.

Manometer. Um zu bestimmen, wie weit die Verdünnung in den Apparaten vorgeschritten ist, besitzen alle Luftpumpen ei meter (Fig. 197). Dasselbe ist von einer Glasglocke umgeben, w eine Messingfassung eingekittet ist, die durch eine Röhrenleitung vom Rezipienten zu den Pumpen führenden Kanal in dung steht. So wird zugleich aus dem Rezipienten un Glocke die Luft ausgepumpt. Man sieht daher, wie be Kolbenhub das Quecksilber in dem einen Schenkel de meters fällt, so lange bis die Verdünnung der Lu höchsten Grad erreicht hat, und das Niveau des Que im Barometerrohr nur wenig mehr über das in dem Schenkel erhoben ist. Der Druck der noch im Rez vorhandenen Luft und somit ihre Dichtigkeit wird i Moment durch den Unterschied der Quecksilberniveau geben. Gewöhnlich wendet man anstatt eines ganzen gekürztes Barometer an von 30 bis 40$^{\mathrm{cm}}$ Länge. Das silber in dem geschlossenen Schenkel beginnt dann ni zu fallen, als bis der Druck der Luft auf die Hälfte und somit die Luft zur Hälfte ausgepumpt ist. W die Verdünnung schon früher, ja überhaupt genau me verbindet man mit der Pumpe ein einfaches U-förmige silbermanometer, dessen einer Schenkel durch einen Ka pfropf geschlossen ist, der von einer zur Luftpumpe g Glasröhre durchbohrt ist. Der andere Schenkel ist o Röhren sind zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. W die Luft in dem mit dem Rezipienten der Luftpumpe bindung gesetzten Schenkel verdünnt, so steigt das Qu in demselben, sinkt in dem andern und die Niveau gibt den Überschuß des äußern Luftdruckes über de der Luft im Rezipienten. Zieht man demnach den Niveauun vom Barometerstande ab, so erhält man den Druck der Luft zipienten.

Fig. 197.

Der Niveauunterschied wird mit dem Kathetometer gemessen

Grad der Verdünnung. Bis zu welchem Grade man m einer Luftpumpe die Luft im Rezipienten verdünnen kann, ergibt Überlegung. Sei das Volumen des Rezipienten bis zu dem in den stiefel führenden Hahn oder Ventil gleich A und der Raum des Pumpenstiefels gleich B. Nehmen wir an, es stehe der Kolben Boden, so zwar, daß zwischen Kolben und Hahn absolut kei mehr vorhanden sei, so ist das Volumen A der Luft abgesperrt der Kolben aufgezogen, so verbreitet sich die Luft aus dem Raum den Raum $A + B$, und die Dichtigkeit der Luft ist im Verhältni

$$1 : \frac{A}{A + B}$$

ner geworden. Die im Stiefel vorhandene Luft wird jetzt fortgeschafft, m der Kolben zum Boden zurückgeführt wird. Wiederholt man die ration, so nimmt die Dichtigkeit der Luft im Rezipienten wieder in selben Verhältnis ab, sie ist gegen die anfängliche Dichtigkeit

$$1 : \left(\frac{A}{A + B}\right)^2$$

orden. Nach n maliger Wiederholung des Pumpens hat demnach die tigkeit im Verhältnis

$$1 : \left(\frac{A}{A + B}\right)^n$$

enommen.

Die Dichtigkeit würde darnach niemals Null werden können, da der elbe angebende Bruch nur für ein unendlich großes n gleich Null wird, würde sich aber mit wachsendem n der Grenze Null nähern.

Es sind indes wesentlich zwei Gründe, welche der Verdünnung eine blich von Null entfernte Grenze geben, nämlich die schädlichen Räume die Undichtigkeiten. Zunächst ist die vorhin gemachte Voraussetzung, zwischen dem Kolben und Ventil oder Auslaßhahn gar kein Raum anden wäre, nicht erfüllt, es ist immer ein gewisser sogenannter schäd-er Raum vorhanden, der am Schlusse jeder einzelnen Operation, das t, wenn der Kolben bis zum Boden zurückgeführt ist, mindestens mit t von der Dichtigkeit der Atmosphäre gefüllt ist, da, um die Luft aus Stiefel fortzuschaffen, dieser Raum mit der äußern Atmosphäre in bindung gesetzt werden muß. Ist b die Größe dieses schädlichen Raums, st $\frac{b}{B}$ die Grenze der durch fortgesetztes Pumpen erreichbaren Dichtig-. Denn wenn man, ohne die Verbindung des Stiefels mit dem Rezi-ten herzustellen, den Kolben aus der tiefsten in die höchste Lage bringt, würde die Dichtigkeit 1 der im schädlichen Raume vorhandenen Luft $\frac{b}{B}$ hinabgehen. Wird jetzt die Pumpe mit dem Rezipienten in Ver-lung gesetzt, so kann aus dem Rezipienten keine Luft mehr in die npe abströmen, die Grenzdichte ist damit erreicht.

Babinets Hahn. Um diesen störenden Umstand auf ein Minimum ickzuführen, hat Babinet zur Luftpumpe einen besondern nach ihm annten Hahn hinzugefügt. Derselbe befindet sich in der Achse der Röhre, che die von beiden Pumpenstiefeln kommenden Kanäle verbindet, un-telbar unter denselben. Dieser Hahn hat zunächst eine T-förmige Durch-rung, so daß die Querdurchbohrung der beiden Pumpenstiefel mit der ler Achse des Hahnes geführten Längsdurchbohrung, und da diese die tsetzung des zur Glocke führenden Kanals ist, mit diesem in Verbin-g setzt. In der Stellung Fig. 198a, sie ist auf dem Hahn gewöhnlich 2 bezeichnet, ist also die Verbindung der innern Teile der Maschine bisher von uns angenommene. Anders aber, wenn man den Hahn um dreht, ihn in die Stellung Fig. 198b bringt. Die Durchbohrung des nes ist dann so, daß der eine Pumpenstiefel noch mit der Glocke in

Verbindung steht, der andere jedoch nicht mehr. Dafür steht durch eine andere Durchbohrung des Hahnes, die in der Figur durch die punktierten Linien angedeutet ist, dieser Stiefel mit dem ersten Stiefel in Verbindung. Geht nun der Kolben in dem ersten Stiefel in die Höhe, so tritt die Luft aus dem Rezipienten in ihn hinein; geht er herab und der Kolben des zweiten Stiefels in die Höhe, so pumpt der letztere nicht Luft aus dem Rezipienten, sondern die Luft aus dem ersten Stiefel in diesen. Dadurch wird also die Luft aus dem schädlichen Raume des mit dem Rezipienten in Verbindung stehenden Stiefels ausgepumpt und die theoretisch erreich-

Fig. 198 a.

Fig. 198 b.

bare Grenzdichte wird $\left(\frac{b}{B}\right)^2$. Wir erkennen das, wenn wir die Kolben als nacheinander sich bewegend denken. Es sei in beiden Stiefeln die ohne Babinetschen Hahn mögliche Grenze erreicht, und der Kolben rechts stände auf dem Boden. Im Stiefel links ist dann die Dichte $\frac{b}{B}$, im Stiefel rechts der Raum b mit Luft von der Dichte 1 erfüllt. Wird jetzt der Babinetsche Hahn in die Stellung Fig. 198b gelegt, so wird der Raum b rechts mit dem Raum B links in Verbindung gesetzt und die Dichte 1 geht in die Dichte $\frac{b}{B+b}$ oder $\frac{b}{B}$, wenn wir im Nenner b gegen B vernachlässigen, über. Geht jetzt der Kolben rechts in die Höhe und macht den Raum B frei, so wird die im Raum b vorhandene Luft von der Dichtigkeit $\frac{b}{B}$ auf den Raum B gebracht, die Dichtigkeit wird $\frac{b^2}{B^2}$ und es kann so lange dem Rezipienten Luft entströmen, bis in demselben die gleiche Verdünnung erreicht ist.

In der Praxis ist indes diese Grenze doch nicht zu erreichen, denn es ist unmöglich, die aus verschiedenen Teilen zusammengesetzte Pumpe und besonders die Kolben gegen die äußere Luft derart abzudichten, daß nicht von außen in die Pumpe Luft einsickert. Dieses Einsickern ist um so stärker, je weiter die Verdünnung getrieben ist, man muß deshalb, sobald die äußerste Verdünnung erreicht ist, durch passende Stellung des gleich zu besprechenden Hahnes den Rezipienten von der Pumpe absperren.

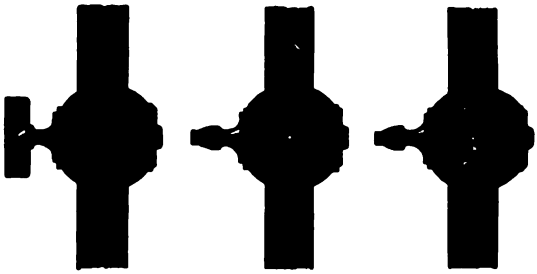
Die mit derartigen Pumpen zu erreichende Verdünnung läßt in den ausgepumpten Räumen noch etwa 1^{mm} Quecksilberdruck.

Hahn zum Wiedereinlassen der Luft. Ist unter der Glocke der Luftpumpe der verdünnte Raum hergestellt, so wird dieselbe durch den Druck der äußern Luft so fest gehalten, daß es nicht möglich ist, sie abzuheben. Es ist deshalb nötig, eine Vorrichtung anzubringen, um die L

dieselbe wieder einlassen zu können. Dazu dient der unter dem Teller Fig. 196) angebrachte Hahn. Derselbe hat ebenfalls mehrfache Durchbohrungen, um den Teller der Luftpumpe vollständig absperren zu können, zugleich aber in die Pumpe Luft einlassen zu können.

Zunächst ist er quer durchbohrt und setzt in der Stellung (Fig. 199) die Glocke mit der Pumpe in Verbindung. Außer dieser Durchbohrung hat er noch eine zweite (Fig. 200), welche im Innern des Kanales rechtwinklig umbiegt, und die in einem zu dem in Fig. 199 gezeichneten senkrechten Durchschnitt liegt. Dieser Kanal mündet in der äußern Luft und kann durch einen Stift luftdicht geschlossen werden, damit in der Stellung Fig. 199 keine Luft durch diesen Kanal eintreten kann. In der Stellung Fig. 200 setzt der Hahn die Glocke der Luftpumpe mit der äußern Luft in Verbindung; er dient also zum Einlassen der Luft in die Glocke. In der Stellung Fig. 201, in welcher der Hahn gegen Fig. 201 um 180° gedreht ist, ist die Glocke, der Rezipient, sowohl von der äußern Luft als von der Pumpe abgesperrt, dagegen kommuniziert jetzt die Pumpe mit der äußern Luft.

Fig. 199. Fig. 200. Fig. 201.



Auf dem Griffe des Hahnes sind die Stellungen durch ein den Bohrungen parallel gezogenes T gezeichnet.

Ebenso wie zweistiefelige Ventilluftpumpen werden auch zweistiefelige Hahnluftpumpen angewandt. Die Verbindung des Tellers mit den Pumpenstiefeln ist dieselbe wie bei den Ventilluftpumpen, die wir bisher beschrieben haben; die Kolben in diesen Pumpen sind ganz massiv und der wesentlichste Unterschied zwischen diesen und den Ventilpumpen besteht in der Einrichtung des Hahnes, der an der Stelle des Babinetschen

Fig. 202.

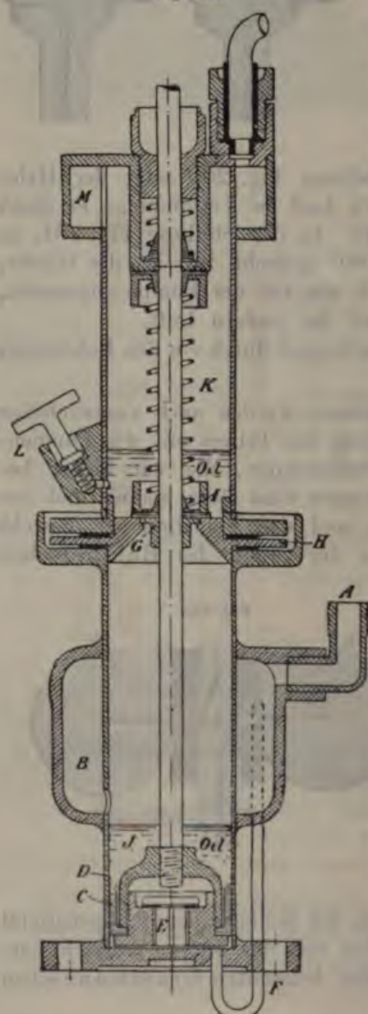
Fig. 203.

Hahnes angebracht ist, um beim Aufsteigen des Kolbens den Pumpenstiefel mit dem Rezipienten, beim Niedergang aber mit der äußern Luft in Verbindung zu setzen, des nach seinem Erfinder benannten Grassmannschen Hahnes.

Die Einrichtung dieses Hahnes und seine Verbindung mi
zeigen Fig. 202 und 203. Von dem Boden der beiden Stie
führt, gerade wie bei der Ventilpumpe, eine Durchbohrung z
lern Kanal, der den Hahn in sich aufnimmt.

An der Stelle, wo das von dem Teller der Pumpe herkor
in den Kanal mündet, ist der Hahn quer ganz durchbohrt, b
Mitte dieser Querdurchbohrung geht durch den Hahn schräg
Kanal *hi*, der in der Lage Fig. 202 dort aus dem Hahn he
die von dem Stiefel *L* herkommende Durchbohrung mündet.
schräge Durchbohrung des Hahnes *kl*, welche in dem Griffe
in die äußere Luft mündet, verbindet dann den von dem S
kommenden Kanal mit der äußern Luft.

Fig. 204.



Zieht man den Kolbe
Höhe, wobei gleichzeitig d
hinabgedrückt wird, so tritt i
aus dem Rezipienten, während
kl die Luft herausgedrückt
man jetzt den Hahn um 180
(Fig. 203), so ist durch den
Verbindung des Stiefels *R*
zipienten, durch *kl* die des S
der äußern Luft hergestellt.

Um schließlich den Ha
Babinetschen zum Auspump
Stiefels durch den andern g
können, hat man den Hahn
oben angedeuteten Stellunge
drehen, die dritte Durchbohru
einfach quer durch den Hah
bindet dann die beiden Stie
der, während weder eine Ve
dem Rezipienten noch mit de
vorhanden ist.

Bei den Hahnluftpump
allerdings nach jedem Kol
Hahn umlegen, also eine Op
vornehmen, als bei der Vent
man indes jetzt Stiefel von
Größe nimmt, ist dieser Üb
sehr groß. Die Hahnluftpu
dagegen den Vorzug der ein
struktion und gestatten desw
gemeinen die Verdünnung wei
als die Ventilpumpen.

Jetzt werden statt der z
vielfach doppelwirkende ein
wohl Hahn- als Ventilpumpe
bei welchen der Stiefel bei
des Kolbens unten, beim Nied

Rezipienten in Verbindung steht. Bei diesen Pumpen wird gleich- Auf- und Niedergehen des Kolbens durch die kontinuierliche eines Rades erzeugt, durch einen Mechanismus, der demjenigen ich ist, den wir später bei dem Nattererschen Apparat beschreiben

eigentümliche doppelwirkende einstiefelige Ventilluftpumpe hat m Deleuil konstruiert[1]), welche sich von den eben erwähnten unterscheidet, daß der Kolben nicht dicht an dem Stiefel anliegt, aß zwischen ihm und der Stiefelwandung ein Zwischenraum von ist, es sind die sogenannten Pumpen à piston libre. In dem Zwischenraum zwischen Kolben und Stiefel zirkuliert die Luft langsam; indem man nun den Kolben recht lang nimmt, gleich elten Durchmesser des Stiefels, und da auf dem größten Teile des len der Kolben zurücklegt, die Luft an beiden Seiten desselben wenig verschiedene Dichtigkeit hat, kann man trotz des nicht nliegens des Kolbens verdünnte Räume herstellen, in denen die etwa mehr 10^{mm} Quecksilberdruck hat. Die Maschine geht, da n nicht reibt, leichter wie die andern Pumpen, sie hat zugleich ig, daß der Kolben nicht gefettet wird.

Nachfrage nach gut wirkenden Pumpen hat in der letzten Zeit zugenommen, seits die Technik die Herstellung ampen Bedarf andererseits in atorien die Erfen der elektriadungen in verGasen vielfach wurden. vielen Neukonn von Kolbenaben prinzipiell eues gebracht, hat zu Labozwecken eine Ölel Anklang ge- Wir wollen deren ing kurz folgen

Fig. 205.

logen. „Geryk"-pe[2]) (Patent R. P.) ist eine npe, die entn Hand oder mit einem kleinen Elektromotor betrieben wird. ffliche Wirkung beruht darauf, daß der Kolben auf eine besondere

[1]) leuil, Comptes Rendus. 60. p. 571. 1890. Repertorium für physikanik von Carl. 1. 1865

[2]) schr. f. phys.-chem. Unterricht. 16. p. 285. 1903.

Art mit Öl gedichtet ist. Es befindet sich nämlich (Fig. 204) über Kolben eine Ölschicht J von 13^{mm} Dicke, welche mit dem Kolben ge wird. Ein Teil desselben wird, wenn der Kolben oben angelangt ist, das Austrittsventil G hindurchgetrieben, wobei es die Luft vor sich treibt, und dadurch die schädlichen Räume vollkommen ausfüllt. dem Ventil G in dem Vorraum K befindet sich auch eine Ölschich daß die Luft nicht mehr durch das Ventil zurück kann, denn die b Ölschichten vereinigen sich zu einer Masse. Bewegt sich der Kolben w nach unten, so fließt die nötige Ölmenge wieder durch das til, bevor es sich schließt. A ist das Saugrohr, L ein stutzen zum Einfüllen des Öles. Bei der sogenannten Du pumpe wirken zwei solcher Kolbenpumpen hintereinander. Fig. stellt eine solche Duplexpumpe dar.

Fig. 206.

Arthur Pfeiffer (Wetzlar), der diese Pumpen baut, an, daß das Vakuum bis zu $0{,}0002^{mm}$ getrieben werden Man muß dabei aber berücksichtigen, daß sich diese Zahl auf den Partialdruck Luft bezieht, dabei aber die Tension Öldampfes nicht berücksichtigt sein kann.

§ 109.

Fall der Körper im luftleeren Raum. In § 92 erw ten wir bereits, daß wegen des Daseins der Luft nicht alle K gleich schnell fallen, daß wir aber die im ersten Kapitel ersten Abschnittes behauptete Proportionalität von Gewicht Anziehungskraft und somit den Satz, daß alle Körper schnell fallen, selbst für die spezifisch leichtesten Körper mi Luftpumpe nachweisen könnten. Zu dem Ende wendet man Röhre an, welche an der einen Seite in eine Metallfassung gekittet ist, die in eine mit einem Hahn versehene Röhre geht, welche in einer auf das Schraubengewinde der Luftp passenden Schraubenmutter endigt. Das andere Ende der ist durch eine Metallfassung luftdicht geschlossen.

In diese Röhre bringt man ein Schrotkorn und eine F feder, oder ein Stückchen Platin und ein Stückchen P schraubt sie auf die Luftpumpe und macht sie so luftle möglich. Darauf schließt man den Hahn, schraubt die wieder ab und kehrt sie um. Die in der Röhre enthal Körper fallen dann herab, und man sieht, daß die Flaum in demselben Augenblicke unten ankommt wie das Schrotk chen, das Stück Papier ebenso rasch fällt wie das Stück P

Läßt man dann durch teilweises Öffnen des Hahnes al lich wieder Luft in die Röhre eintreten, so sieht man, wie Fallen, die leichteren Körper immer mehr zurückbleiben, je d die Luft wird, ein Beweis, daß die ungleiche Geschwindigkeit des dieser Körper nur Folge des störenden Einflußes der Luft ist.

Eine Reihe von Versuchen, welche gewöhnlich mit der Luftp angestellt werden, um die Existenz des Luftdruckes nachzuweisen, al Zersprengen einer über einen Zylinder gespannten Blase, das feste

inanderhaften der sogenannten Magdeburger Halbkugeln usf., genüge es, ier erwähnt zu haben. Sie haben viel von ihrem Interesse verloren, relches sie früher darboten, als sie dazu dienten, den großen Druck nachzuweisen, und beitrugen, das Phantom des Horror vacui zu verbannen.

§ 110.

Quecksilberluftpumpen. Eine von den bisher besprochenen durchaus verschiedene Form der Luftpumpen ist die zuerst von Dr. Geißler n Bonn konstruierte Quecksilberluftpumpe.[1]) Bei dieser wird die Pumpe urch eine barometerartige Vorrichtung ersetzt, in welcher durch Heben und enken von Quecksilber die Torricellische Leere hergestellt wird, mit relcher diejenigen Apparate verbunden werden, aus welchen die Luft entfernt werden soll. Die Einrichtung der Pumpe in der jetzt ihr gegebenen Form zeigt Fig. 207. An einem festen auf massivem Holzfuß aufgestellten Brett ist die bei B mit einer etwa 1,5 Liter enthaltenden birnförmigen Erweiterung versehene unten und oben offene Glasröhre AC befestigt. Die Länge der Glasröhre von C bis zur Birne beträgt etwa 80^{cm}. Unten bei C ist die Röhre umgebogen und auf die Umbiegung ein dickwandiger Schlauch vom besten Kautschuk gezogen, der die Röhre AC mit dem Gefäße G in Verbindung setzt, das einen etwas größern Rauminhalt hat als die Birne B. Das Gefäß G befindet sich in einem Rahmen R, der selbst an dem Riemen L hängt. Der Riemen L ist über zwei Rollen r_1 geführt und an der mit der Kurbel K drehbaren Rolle r_2 befestigt. Wird die Rolle r_2 in dem einen Sinne gedreht, so wird G gehoben, wird sie in entgegengesetztem Sinne gedreht, so sinkt G durch sein Gewicht hinab.

An die Röhre AC ist bei E etwas oberhalb B seitlich ein horizontales Glasrohr angesetzt, welches zu den auszupumpenden Apparaten führt. Bei H ist ein einfach durchbohrter Glashahn eingeschliffen.

In der Röhre AC befinden sich oberhalb E noch zwei weitere eingeschliffene Glashähne H_1 und H_2; oben bei A ist die Röhre trichterartig erweitert.

Das freie Ende des Rohres S ist konisch ausgeschliffen; in dieses Ende wird das Rohr s, das zu den weitern Apparaten führt, mit einem sehr sorgfältig an dessen einem Ende angeschliffenen Konus luftdicht eingesetzt. Dieses Rohr trägt das Manometer M, welches durch einen ebenso sorgfältig geschliffenen Konus in das konisch ausgeschliffene Ansatzstück m eingesetzt ist. Durch einen ebensolchen Schliff ist der Trockenapparat T mit der Pumpe verbunden, der, mit wasserfreier Phosphorsäure gefüllt, den Zweck hat, nur trockne Luft in die Pumpe eintreten zu lassen. Die Hähne und Schliffe werden zur vollständigen Abdichtung etwas eingefettet. Als ein besonders geeignetes Fett empfiehlt Röntgen[2]) eine Mischung von reinster Vaseline mit möglichst reinem Wachs. Durch Wahl passender Verhältnisse

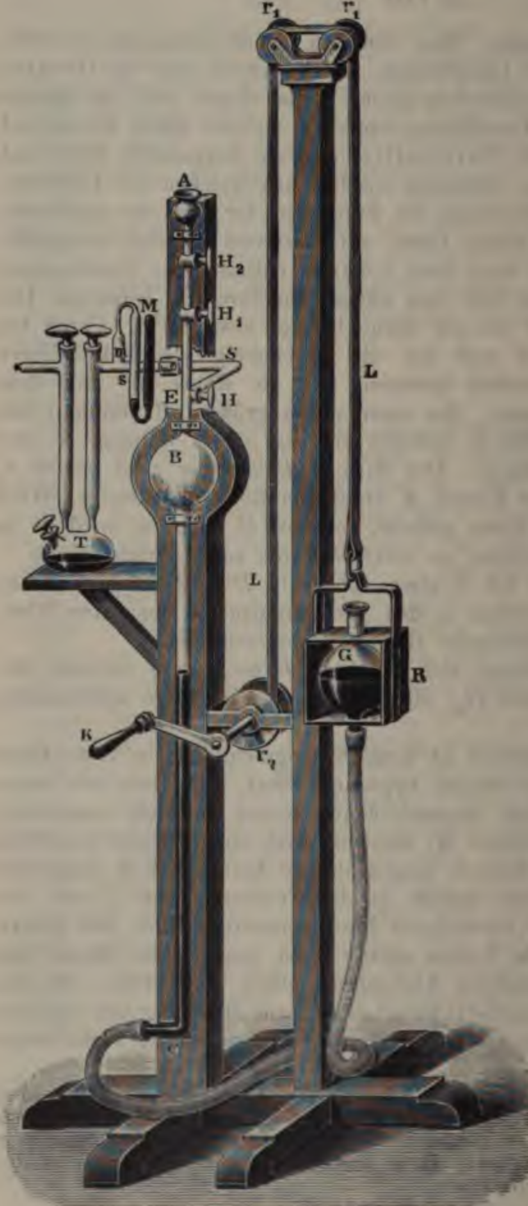
1 *Poggendorff* weist zwar nach (Poggend. Ann. 125. 1865), daß die Idee der Quecksilberluftpumpe sehr alt, ja fast ebenso alt als die der gewöhnlichen Luftpumpe ist; man wird aber trotzdem Dr. Geißler als den Erfinder dieser Art Luftpumpen bezeichnen müssen, da er zuerst (1857 eine praktisch benutzbare und benutzte Pumpe konstruierte.

2) *Röntgen*, Wiedem. Ann. 23. p. 23. 1884.

der beiden Substanzen kann dem Fette jede gewünschte Konsistenz gegeben werden. Dieses Fettungsmittel hat den großen, gerade für die Luftpumpe unschätzbaren Vorzug, daß es keine Dämpfe abgibt und daß es nicht verharzt.

Um die Pumpe zu gebrauchen, wird das Gefäß *G* in seiner tiefen Lage mit Quecksilber angefüllt, der Hahn *H*, der zu den anszupumpenden Apparaten führt, wird geschlossen und die Hähne H_1 und H_2 werden geöffnet. Man hebt das Gefäß *G*, wodurch selbstverständlich das Quecksilber in *AC* emporsteigt; man setzt das Heben so weit fort, bis etwas Quecksilber durch den Hahn H_1 tritt (der Hahn H_2 wird erst später benutzt) und schließt den Hahn H_1. Läßt man jetzt das Gefäß *G* hinab, so wird, sobald das Niveau des in ihm vorhandenen Quecksilbers mehr als die Höhe des Barometers beträgt unter H_1 ist, das Quecksilber in *AC* sinken, aber sich, falls das Quecksilber luftfrei ist, die Barometerleere lassend. Man läßt das Gefäß *G* soweit hinab, daß in *AC* das Quecksilber bis einige Zentimeter unter der Birne *B* steht.

Fig. 207.



Öffnet man jetzt den Hahn *H*, das heißt stellt man ihn so, daß die auszupumpenden Räume mit der Birne *B* in Verbindung stehen, so strömt die Luft in die Birne.

Man schließt wieder *H* und hebt zunächst ohne H_1 zu öffnen das Gefäß *G*, so daß das Quecksilber in *AC* steigt. Ist der Druck der in *AC* kom-

mierten Luft annähernd dem der äußern Atmosphäre gleich, so öffnet n H_1 und hebt das Quecksilber bis über H_1 wie vorhin usf. Der Hahn kommt zur Wirkung, wenn die Verdünnung schon ziemlich weit geeben ist. Man hebt dann das Quecksilber bis über H_2 und schließt, vor man G hinabläßt, H_2 und wenn das Quecksilber H_1 passiert hat, ch H_1. Zwischen H_1 und H_2 entsteht ein luftleerer Raum. Bei dem chstfolgenden Pumpen wird dann das Quecksilber bei geschlossenem hne H_1 vorsichtig langsam gehoben, damit es nicht bei der schon starken rdünnung gegen den Hahn H_1 schlägt, wodurch ein solcher Stoß entben kann, daß die oberen Teile der Pumpe abgeschlagen werden können. st wenn das Quecksilber bis zu H_1 gehoben ist, öffnet man H_1. Die zten Luftblasen treten demnach in einem luftverdünnten Raum aus und s Quecksilber kommt nicht mehr mit der Atmosphäre in Berührung. folgedessen wirkt die Anbringung des zweiten Hahns ähnlich wie der abinetsche Hahn, die Verdünnung geht weiter als bei Anwendung nur es Hahnes.

Eine etwas andere Anordnung hat wenige Jahre später (1862) Töpr der Quecksilberluftpumpe gegeben, die Töplersche Pumpe ist eine ntilluftpumpe. Wenn bei den gewöhnlichen Luftpumpen im allgemeinen e Hahnluftpumpen den Ventilluftpumpen vorzuziehen sind, so kommt bei n Quecksilberluftpumpen der Töplerschen Luftpumpe der Vorzug zu, en weil sie jeden Hahn, jeden Glasschliff entbehrlich macht. Die Töprsche Pumpe in der Form, welche ihr Hagen gegeben hat[1]) mit nur ringen Abweichungen, zeigt Fig. 208. Das Rohr AC mit der Birne B nd dem auf und nieder zu hebenden Gefäß G ist dasselbe wie bei der eißlerschen Luftpumpe. Bei A ist an die Röhre ein enges zweimal bogenes und unter der zweiten Biegung bei b etwa 80^{cm} langes Rohr n 2^{mm} Weite angesetzt. Dasselbe endet bei c in einem mit Quecksilber rsehenen Glase, dem man häufig bei d ein Ausflußrohr gibt, um in diesem efäße ein konstantes Niveau zu erhalten. Das obere Ende des Rohres twa bis 78^{cm} über dem Niveau des Quecksilbers befindet sich vor einer ilung, welche auf der einen Seite die Höhe über c in Millimetern anibt, auf der andern Seite eine Teilung hat, welche das Volumen der gen Röhre von einer Marke bei m bis zu dem betreffenden Teilstrich in U^{cm} angibt.

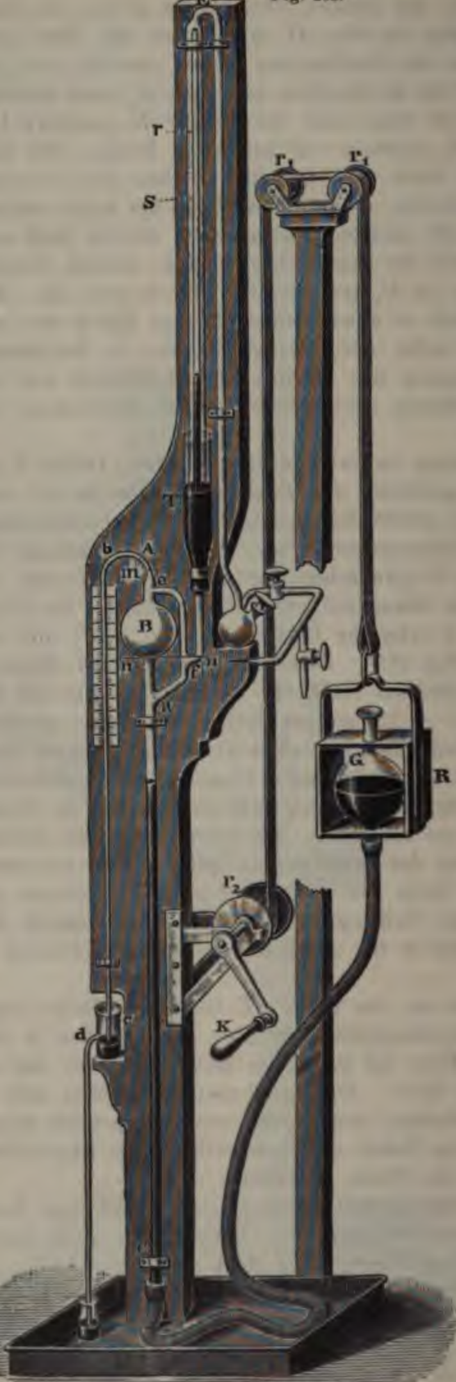
Unterhalb der Birne B ist an das Rohr AC bei a ein Rohr angeschmolzen, das um die Birne herumgeführt ist und bei e wieder in das hr AC mündet. An dieses Rohr ist bei f das Rohr angesetzt, das zu n auszupumpenden Apparaten führt. Die Ansatzstelle f befindet sich in er solchen Höhe, daß die Mündung des zu den auszupumpenden Apparaten führenden Rohres r bei dem Heben des Quecksilbers eher abgeschlos- ist, als das Quecksilber in die Birne B eintritt.

Das Rohr r steigt von f ab vertikal so weit empor, daß sein Ende hr als die höchste Barometerhöhe über dem horizontalen Teile bezw höchsten Stelle des gebogenen Rohres Abc liegt.

Die zu den auszupumpenden Apparaten führenden Glasröhren können den Enden dieses Rohres angeschmolzen werden. Besser aber stülpt

1) Bessel-Hagen, Wiedem. Ann. 12. p. 425. 1881.

Fig. 208.



man über das Rohr *r* ei
tes Rohr *S*, das bis
trichterförmiges passen
Quecksilber gefülltes G
hinabreicht, das mit
eines durchbohrten Kor
Kautschukpfropfens q
berdicht auf das Rohr
nahe an dessen unter
aufgesetzt ist. An das
Ende dieses Rohres *S*
Glasröhre angeschmolze
che nach Einschaltung
Trockenapparates, de
Feuchtigkeit von der
fernhält, zu den auszup
den Apparaten führt.
kann diese direkt ansch
so daß es bei Anwendu
Töplerschen Pumpe
Hahnes und keines Gla
fes bedarf. Nehmen
es sei irgend ein Raum
welchem die an *s* anges
zene Röhre führt, aus
pen. Das Gefäß *G* w
hoben und ehe es in di
B tritt, wird bei *f* d
tung zu *R* unterbroche
weiterem Heben des
silbers wird die in de
befindliche Luft dur
Rohr *bc* ausgetrieben.
hebt das Quecksilber
daß es selbst durch d
bc auszufließen begin
senkt dasselbe langsa
Quecksilber trennt sich
gend einer Stelle des
Ab, sinkt in *bc* bis
rometerhöhe hinab un
ebenso in der Birne,
luftleer zurücklassend,
die Niveaudifferenz in
die Barometerhöhe ist.
die Mündung *f* frei ist,
die Luft aus dem aus
penden Raume in die B
Bei den ersten Hübe

man vorsichtig verfahren, denn es tritt die Luft, sobald die Mündung c frei wird, schon unter Hinausstoßen des Quecksilbers aus der Röhre fc in die Birne herein. Wenn man das Quecksilber in B nicht sehr langsam sinken läßt, kann durch den Stoß des Quecksilbers der obere Teil der Pumpe zertrümmert werden. Durch die in B eintretende Luft sinkt das Quecksilber in bc, und man kann an der Höhe des Quecksilbers in dieser Röhre über c sofort erkennen, welche Verdünnung erreicht ist. Man hebt das Quecksilber im Gefäße G von neuem. Ist f erreicht, so steigt das Quecksilber bei weiterem Heben von G entsprechend der in den auszupumpenden Räumen erreichten Verdünnung in r hinauf. Durch die Kompression der in B enthaltenen Luft wird bei weiterem Heben das Quecksilber in bc hinabgedrückt und die Luft entweicht bei c. Man hebt weiter, bis Quecksilber durch das Rohr bc unten austritt und senkt das Gefäß G hinab, wobei sich derselbe Vorgang wiederholt wie vorher. In dieser Weise fährt man fort, bis die gewünschte Verdünnung erreicht ist.

Der in der Pumpe noch vorhandene Luftdruck ergibt sich jedesmal aus der Höhe der Quecksilbersäule in bc und um bei starker Verdünnung den Luftdruck direkt abzulesen dient die Teilung am oberen Ende von bc. Ist die Verdünnung sehr weit getrieben, so ist die Änderung der Quecksilberhöhe in bc nicht mehr mit Sicherheit zu erkennen. Um die Verdünnung aber auch dann genau anzugeben, hat Töpler folgenden Weg eingeschlagen. Man bestimmt, ehe man die Pumpe an ihrem Stativ befestigt, das Volumen der Röhre Abc von der Marke an bis zu den verschiedenen auf der Teilung rechts von der Röhre angebrachten Teilstrichen, bezw. man versieht die Röhre mit einer Teilung, welche den Raum von m ab bis zu den verschiedenen Teilstrichen in $0{,}1^{\mathrm{ccm}}$ angibt. Bei einem Durchmesser des Rohres von 2^{mm} hat der Raum für $0{,}1^{\mathrm{ccm}}$ etwa 30^{mm} Länge, man sieht, daß man so mit Sicherheit auf weniger als $0{,}01^{\mathrm{ccm}}$ ablesen kann. Man mißt ferner den Raum der Birne und des Seitenrohres cf von der Marke m bis nn, also jener Stelle, welche das Quecksilber gerade haben muß, damit das Rohr r abgeschlossen ist. Das Volumen sei gleich V.

Will man nun den Druck, der bei starker Verdünnung in der Pumpe noch vorhanden ist, genau bestimmen, so hebt man zunächst das Quecksilber bis zum Niveau nn und beobachtet den Stand des Quecksilbers in bc. Ist das durch das Quecksilber in bc abgesperrte Volumen der Röhre bis m gleich v, so ist jetzt zwischen den Quecksilberflächen nn und in bc ein Luftvolumen unter dem unbekannten Drucke x abgesperrt. Man hebt das Quecksilber bis m; das Quecksilber in bc sinke dabei um d^{mm}. Ist das Volumen von m bis zu dem jetzigen Stande des Quecksilbers in bc gleich v_1, so ist die Luft von dem Volumen $V + v$ auf das Volumen v_1 komprimiert und die komprimierte Luft übt den Druck $d + x$ aus. Zur Berechnung von x haben wir daher die Gleichung

$$(V + v)x = v_1(d + x),$$

demnach

$$x = \frac{v_1}{V + v - v_1}\,d.$$

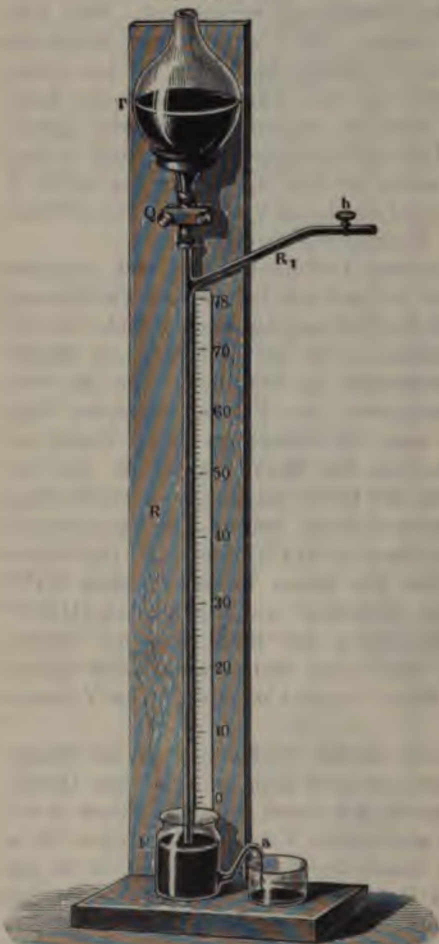
Nehmen wir an V sei 1500^{ccm} und v_1, das wir bei den stärksten

Verdünnungen gleich v setzen können, sei $0,2^{\text{ccm}}$, so ist

$$x = \frac{1}{7500} d.$$

Würde man dann d nur auf $0,1^{\text{mm}}$ genau bestimmen können, so könnte man x bis auf $0,000\,012^{\text{mm}}$, also bis auf den 57 millionsten Teil des Druckes einer Atmosphäre genau bestimmen. Da man die Genauigkeit von d noch weiter treiben und das Verhältnis $v : V$ noch günstiger herstellen kann, lassen sich noch erheblich kleinere Drucke genau messen. Mc Leod hat das Töplersche Verfahren zur Konstruktion eines Manometers benutzt, welches zur Ablesung sehr kleiner Drucke sehr geeignet ist.[1])

Fig. 209.



Wir werden nachher die mit diesen Pumpen erreichbaren Verdünnungen angeben.

Eine auf einem ganz andern Prinzip beruhende Quecksilberluftpumpe ist die von Sprengel angegebene[2]); dieselbe beruht auf den § 87 abgeleiteten Sätzen über den hydraulischen Druck.

An ein trichter- oder flaschenförmiges Gefäß T (Fig. 209) ist unten mit einem Kautschukschlauch eine etwa 800^{mm} lange dickwandige Glasröhre von überall gleichem etwa 2^{mm} betragendem Durchmesser angehängt, deren unteres offenes Ende in ein kleines mit seitlichem Ausflußrohr a versehenes Gefäß F mündet. An das Rohr R ist etwa 30^{mm} unterhalb des Kautschukschlauches eine seitliche Röhre R_1 angeschmolzen, in welche man bei h passend einen Glashahn einsetzt. Diese Röhre führt zu den auszupumpenden Apparaten. Über den Kautschukschlauch ist ein Quetschhahn gelegt, durch welchen man den Schlauch schließen kann. Um die Pumpe wirken zu lassen, füllt man den Trichter mit Quecksilber, öffnet

1) Eine Beschreibung des Apparates von Mc Leod befindet sich Beibl. 1 p. 176. 1877.

2) *Sprengel*, Journal of chemical Society. 3. (2.) 1865. Poggend. Ann. 129 p. 564. 1865.

durch einen Druck auf den Quetschhahn den Kautschukschlauch und läßt das Quecksilber in einem stetigen Strahl ausfließen. Die durch die Röhre R_1 mit dem Apparat verbundenen Räume werden dann allmählich leer gepumpt, indem die Luft durch das bei R_1 vorbeifallende Quecksilber mitgerissen und unten aus dem Rohre R ausgetrieben wird. Hat der Apparat die angeführten Dimensionen, so kann man ziemlich vollständige Barometerleere durch fortgesetztes Ausfließen erhalten. Es ergibt sich das unmittelbar aus der letzten Gleichung des § 87. Nennen wir h die Tiefe des Ansatzrohres R_1 unter dem Niveau des Quecksilbers in T, H den Abstand der untern Ausflußöffnung von demselben Niveau, p_0 den Druck der Atmosphäre, der auf dem obern Niveau des Quecksilbers lastet und ebenso in der Ausflußöffnung wirkt, so ist der bei R_1 vorhandene hydraulische Druck

$$p = p_0 - s(H - h).$$

Ist nun $H - h$, die Länge der Quecksilbersäule unterhalb R_1, gleich der Höhe des Barometers, so ist $p = 0$, es wird also aus den mit R_1 verbundenen Räumen in die Röhre R die Luft gerade so hereingezogen wie in den leeren Raum des Barometers, und deshalb jeder mit R_1 verbundene Raum durch fortgesetztes Pumpen ebenso weit entleert wie mit den andern Quecksilberluftpumpen.

Man kann natürlich die Verbindung des Fallrohrs mit dem Gefäße T anstatt durch einen Kautschukschlauch auch dadurch herstellen, daß man mit Zwischensetzung eines Glashahnes dasselbe direkt an das Gefäß anschmilzt. Jedoch ist diese Befestigung nicht ratsam, da bei häufigem Gebrauche der Pumpe durch die Erschütterung infolge der Stöße des fallenden Quecksilbers das Fallrohr Sprünge bekommt und erneuert werden muß.

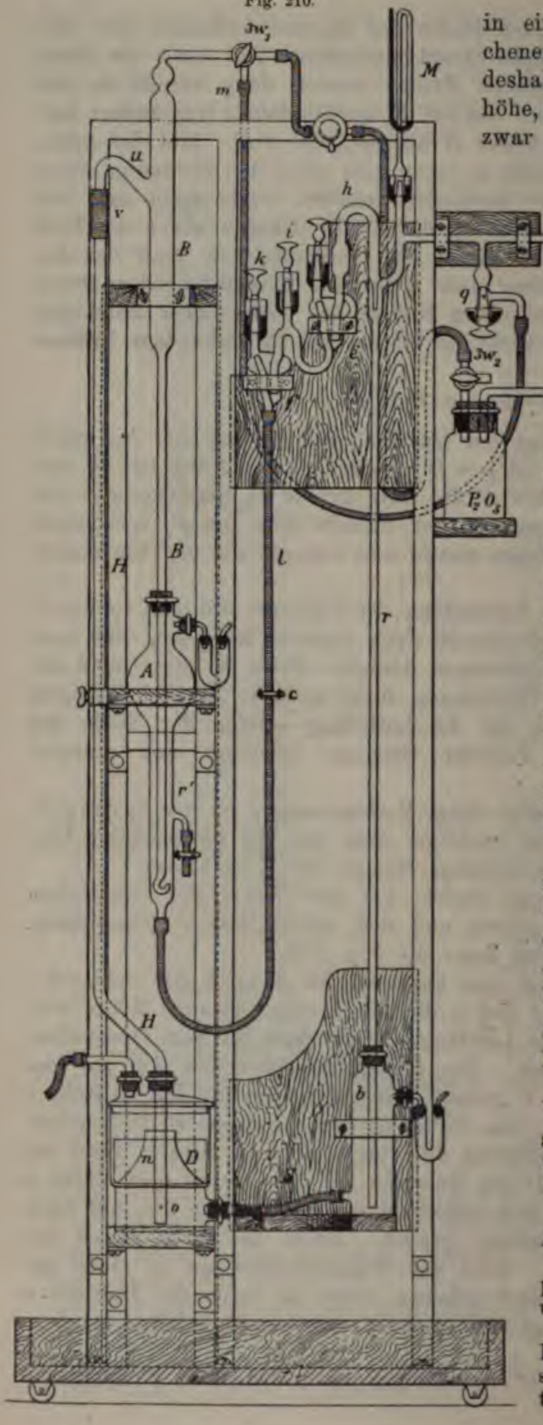
Giningham[1]) hat zunächst einige Verbesserungen an der Sprengelschen Pumpe angegeben. Viel wichtiger aber war die zweckmäßige Umänderung derselben in eine selbsttätige Pumpe von Kahlbaum.

Die Kahlbaumsche Pumpe besteht aus zwei Teilen, der eigentlichen Pumpe nach dem Sprengelprinzip und dem automatischen Hebeapparat. Zur Erläuterung des Apparates diene die Fig. 210.

Das Quecksilber fließt aus dem Sammelgefäß A durch den Schlauch l nach den beiden Luftfängen f und e, die durch eine s-förmige Röhre miteinander verbunden sind. Die Luftfänge dienen dazu die dem Quecksilber anhaftende Luft zu entfernen. Die Einrichtung derselben ist aus der Zeichnung zu ersehen. Aus e gelangt das Quecksilber in das Fallrohr r und sammelt sich in b an, von wo es in den Hebeapparat D hinüberfließt. Durch den mittleren Stutzen des eingeschliffenen Deckels führt bis direkt über den Boden von D das Heberohr H; dasselbe ist oben durch u mit einem Barometerrohr B und außerdem durch den Hahn $3w_1$ mit einer Wasserstrahlpumpe in Verbindung gesetzt. Unten bei o in H ist ein kleines Luftloch angebracht. Wird die Wasserstrahlpumpe in Gang gesetzt, so wird in H Quecksilber gehoben, aber, da durch das Luftloch o gleichzeitig Luft mit eingesaugt wird, nicht in einer kontinuierlichen, sondern

1 *Giningham*, Proceeding of Royal Society. 25. p. 396. 1877. Beiblätter zu Poggend. Ann. 1. p. 175. 1877.

Fig. 210.



in einer von Luftblasen unterbrochenen Säule. Das Quecksilber steigt deshalb nicht nur bis zu Barometerhöhe, sondern wesentlich höher, und zwar bis *u*, wo es nach *B* überfließt und nach *A* gelangt, und nun in die eigentliche Pumpe fließen kann. Vor Beginn wird die ganze Pumpe samt dem auszupumpenden Rezipienten mit der Wasserstrahlpumpe evakuiert, soweit wie es geht, was ohne weiteres durch passende Stellung der verschiedenen Hähne ausgeführt werden kann. Nachher dient die Wasserstrahlpumpe nur noch zum Heben des Quecksilbers. Die weiteren Einzelheiten ersieht man aus der Zeichnung und in der von Kahlbaum verfaßten Abhandlung.[1]) Die Pumpe wirkt rasch und evakuiert sehr hoch.

In neuester Zeit sind zahlreiche neue Konstruktionen von Quecksilberpumpen entstanden, die hier unmöglich alle erwähnt werden können. Kurz besprochen sei eine von Gaede[2]) gebaute Rotationsquecksilberpumpe.[3])

Die Pumpe besitzt kein Ventil und keinen Hahn. Man arbeitet auch hier mit einer Wasserstrahlpumpe vor.

1) *W. A. Kahlbaum*, Wied. Ann. **53**. p. 199. 1894.

2) *W. Gaede*, Ber. d. deutsch. phys. Gesellsch. **3**. p. 287. 1905 u. Phys. Ztschr. **6**. p. 758. 1905.

3) Auch *Kaufmann* hat eine Rotationsquecksilberpumpe konstruiert. Ztschr. für Instrumentenkunde 1905. p. 129.

Fig. 211 stellt einen Querschnitt dar. In dem Gehäuse g, das auf ...r Seite durch eine Glasplatte g' verschlossen ist, befindet sich die ...mmel t, welche durch die luftdichte Achse a gedreht werden kann. ...ind Zwischenwände. R stellt die Verbindung mit dem Rezipienten vor, ...nd f_2 sind zwei Öffnungen in der Trommel. Mit r wird die Wasser-...ahlpumpe in Verbindung gesetzt.

Die Wirkung der Pumpe beruht darauf, daß die durch Zwischen-...me unterteilte Trommel über Quecksilber q Räume abschließt, deren ...lumen beim Drehen geändert werden. Die Räume mit wachsendem ...lumen kommunizieren mit dem Rezipienten, die mit abnehmendem mit ...m Vorvakuum und geben den Gasinhalt an dasselbe ab. Fig. 212 stellt ...en Schnitt durch den Apparat ausgeführt in der Linie $x\,x$ vor. Man

Fig. 211.

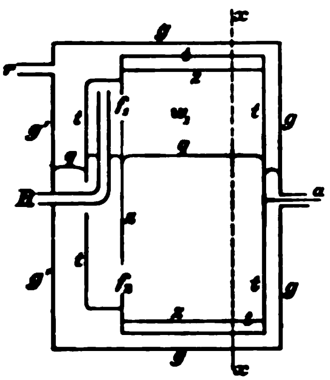
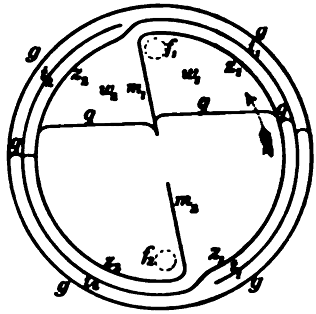


Fig. 212.



...ht, daß bei der Rotation in der Richtung des Pfeiles der Rezipient ...rch f_1 mit dem wachsenden Volumen w_1 in Verbindung steht. Ist die ...hung soweit erfolgt, daß f_1 unter die Quecksilberoberfläche getaucht ..., so liegen die Verhältnisse wie in der linken Trommelhälfte. Das ...ecksilber wirkt als Kolben und komprimiert das Gas zwischen den ...den z_1 und t_1 und bringt es in das Vorvakuum.

Die Pumpe evakuiert bis zu einem Drucke von 0,00007^{mm} nach den ...gaben von Gaede.

Da die Spannkraft des Quecksilbers geringer ist wie die des Öles, werden für ganz hohe Evakuationen die Quecksilberpumpen den Öl-...mpen überlegen sein.

Hagen hat die Verdünnung bestimmt, welche man mit den Queck-...erluftpumpen erreichen kann; bei der Untersuchung der Geißlerschen ...mpe pumpte er mit derselben eine Töplersche leer und maß in der ...hin angegebenen Weise in der Töplerschen Pumpe die erreichte Ver-...nnung. Er erhielt mit einer Geißlerschen Pumpe ohne zweiten Hahn als Grenze des erreichbaren Druckes 0,11^{mm}, mit Anwendung des ...iten Hahns 0,0082^{mm} und mit der Töplerschen Pumpe 0,000012^{mm}. ...den Rood soll aber nach einer von Hagen in seiner Abhandlung mit-...ilten Notiz eine ebenso weit, ja vielleicht noch weiter gehende Ver-...nnung mit der verbesserten Sprengelschen Pumpe erhalten haben, wie

Hagen mit der Töplerschen, eine Verdünnung von etwa ein Hu millionstel der Atmosphäre. Kahlbaum gibt als die mit seiner P erreichte Maximalleistung eine Verdünnung auf 0,000003^{mm}.

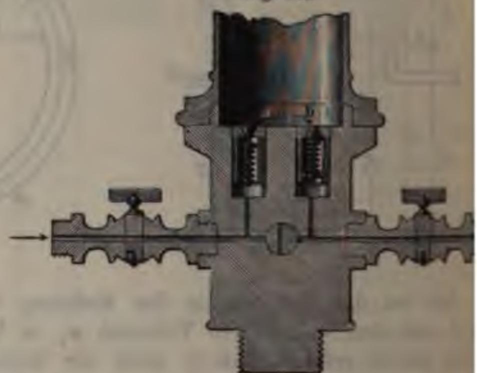
Auf ganz demselben Prinzip wie die Sprengelsche Pumpe b die Bunsensche Wasserluftpumpe, in welcher nur das Quecksilber Wasser ersetzt ist.

§ 111.

Die Kompressionspumpe. Die Kompressionspumpen haben derjenigen der Luftpumpen entgegengesetzte Aufgabe, sie dienen da

Fig. 213.

Fig. 214.



in irgend einem Raume ein Gas zu verdichten. Die Fig. 213 darge Hahnluftpumpe kann ohne jede konstruktive Veränderung unmittelbar als Kompressionspumpe benutzt werden, zu diesem Zwecke muß nu Spiel der Hähne umgekehrt werden. Öffnen wir den Hahn l bei ges senem h, so tritt bei Zurückziehen des Kolbens Luft aus der Atmo in den Zylinder, schließen wir l und öffnen bei Rückführung des Kolb so wird die Luft in den Rezipienten gepreßt. Selbstverständlich m dem Falle der Rezipient auf dem Teller der Pumpe befestigt werde die im Innern desselben verdichtete Luft sonst denselben aufhebt. E wie die einstiefelige kann man auch die zweistiefelige Luftpump

n Graßmannschen Hahne unmittelbar als Kompressionspumpe gemachen, indem man den Hahn bei dem Pumpen umgekehrt legt.

Indes wendet man selten die Luftpumpen zum komprimieren an; die häufigsten zur Anwendung kommenden Kompressionspumpen sind einhe Röhren von starkem Eisen oder Messing, in denen ein massiver lben auf- und abgeht. Dieselben werden an das mit dem entsprechenden schlusse versehene Gefäß, welches die verdichtete Luft aufnehmen soll, geschraubt. Zum Schöpfen der Luft dient dann ein Loch in der Röhre, ches nahe an dem andern Ende der Röhre sich befindet, so daß der lben in seiner äußersten Stellung sich über demselben befindet, die Luft frei in den innern Raum des Zylinders unter dem Kolben eintreten n. Derart sind z. B. die kleinen Kompressionspumpen, deren man sich ient, um die Luft in dem Kolben der Windbüchse zu komprimieren.

Eine sehr bequeme sowohl als Luftpumpe als auch als Kompressionspe zu benutzende Anordnung, es ist eine Ventilpumpe, zeigt Fig. 213 Fig. 214. Sie dient zugleich, um andere Gase als atmosphärische Luft einem Raume zu verdichten.

Die Pumpe ist einstiefelig, sie wird auf den Boden fest aufgeschraubt. der Stange des ganz massiven Kolbens befindet sich oben ein Handf, den man mit beiden Händen faßt, und an dem man den Kolben abhselnd auf und nieder bewegt. In dem Boden der Pumpe sind zwei tile a und b, deren eines sich von unten nach oben öffnet und den penstiefel mit der freien Luft oder mit dem Gefäße in Verbindung t, in welchem das zu verdichtende Gas angesammelt ist; es öffnet sich, n man den Kolben in die Höhe zieht. Das andere Ventil b öffnet sich entgegengesetzter Richtung, wenn der Kolben niedergeht. Dieses setzt Zylinder der Pumpe durch die Röhrenleitung bd mit dem Raume in bindung, in welchem das Gas komprimiert werden soll.

Man sieht, wie dieser Apparat zugleich als Luftpumpe und auch als npressionspumpe dienen kann. Bringt man die mit dem Ventil a in bindung stehende Röhre mit einem Rezipienten in Verbindung und läßt Röhrenleitung bd mit der äußern Luft kommunizieren, so dient der arat als Luftpumpe, macht man die Verbindungen umgekehrt, als Komsionsmaschine.

Eine Kompressionspumpe, welche sehr starke Verdichtungen hervorngen imstande ist, bietet der Apparat von Natterer. Er dient vorweise dazu, um Gase in den flüssigen Zustand zu versetzen.

Der Natterersche Apparat (Fig. 215) besteht im wesentlichen aus m dickwandigen Rohr l von sehr kleinem innern Durchmesser, in welchem ein massiver Kolben auf und ab bewegt. Zur Sicherung der vertikalen egung des Kolbens ist derselbe durch einen Ring geführt. Unterhalb elben ist mit dem Kolben durch ein Scharnier die Schubstange s in bindung, die ihre auf und nieder gehende Bewegung durch das Schwung- R bekommt, an dessen Achse sie mittels einer Kurbel exzentrisch begt ist.

Der Pumpenzylinder ist durch eine Röhrenleitung L mit einem Gasoer in Verbindung, aus welchem beim Niedergange des Kolbens das Gas den Pumpenzylinder eingesaugt wird.

Auf dem Pumpenzylinder ist eine starke Flasche von Schmiedeeisen

(Fig. 215) befestigt, in welche das Gas hineingepreßt wird. Dieselb vorher auf ihre Festigkeit geprüft, indem man mittels Wasser au Innenfläche derselben einen Druck von 150 Atmosphären ausübt. Das nach dem Innern der Flasche zu öffnende Ventil l (Fig. 216) läßt da eintreten. Um das verdichtete Gas oder das flüssig gewordene aust

Fig. 215.

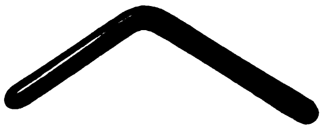
Fig. 216.

zu lassen, ist an dem obern Ende der Flasche eine kleine Öffnung, w in dem Röhrchen r mündet, angebracht. Dieselbe wird verschlossen den mit einem Schraubengewinde versehenen Stift s, der konisch in engen Hals der Flasche eingeschliffen ist. Will man das flüssige Gas strömen lassen, so schraubt man die Flasche ab, kehrt sie um, so die Öffnung r unten ist, und öffnet dieselbe durch Drehen der Schrau

ck des über dem flüssigen stark verdichteten Gases treibt dann sigkeit heraus. Außer diesen Kompressionspumpen kann man auch stedschen Apparat zur Kompression der Gase benutzen, wie es tz tat (§ 99).

dfach dient auch folgendes Verfahren dazu, um ganz ohne mechalittel ein Gas zu komprimieren. Man schließt in eine heberförmig Röhre von starkem Glase Fig. 217 tanzen, durch deren Einwirkung auf- das Gas entwickelt wird. Durch die elung des Gases in diesem geschlos- aume und die Ansammlung desselben r Druck des Gases in der Röhre ein ormer und es bedarf großer Vorsicht, er Apparat nicht springt. Einen nach diesem Prinzipe konstruierarat wandte Thilorier an, um flüssige Kohlensäure in großen herzustellen.[1])

Fig. 217.



§ 112.

issigmachen der Gase. Im § 100 haben wir das Verhalten der ten permanenten Gase, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenter hohen mit der Kompressionsmaschine herstellbaren Drucken be-, und gesehen, daß dieselben von gewissen schon ziemlich starken an sehr viel weniger zusammengedrückt werden, als es das Ma-che Gesetz verlangt, wenn man die Kompression bei gewöhnlicher tur oder auch bei derjenigen des schmelzenden Eises vornimmt. ter denselben Umständen verhalten sich die übrigen Gase ganz bei diesen zeigt sich vielmehr, daß mit steigendem Drucke die sibilität stetig wächst bis zu einem gewissen für die verschiedenen rschiedenen Drucke. Ist dieser Druck erreicht, so kann man das des Gases beliebig, bis zu einer bestimmten Grenze, weiter ver-, ohne daß die Spannung des Gases zunimmt, ohne daß man also ern Druck vermehren muß. Bei diesem Drucke ändert nämlich seinen Aggregatzustand, es hört auf Gas zu sein, es wird tropfug, jede Volumverminderung, welche nach Erreichung jenes Grenzdem Gase zu teil wird, führt die dem verminderten Volumen entde Gasmenge in die flüssige Form über.

se Zustandsänderung geht plötzlich vor sich, sie bereitet sich aber tetiges Wachsen der Kompressibilität vor. Daraus ergibt sich aß man die vier genannten permanenten Gase durch Vermehrung ckes nicht flüssig machen kann. Es würde, nach der schon § 99 en Bemerkung über den Einfluß der Temperatur auf die Komität der Gase, indes voreilig sein, daraus zu schließen, daß dies ier Natur der Gase begründeter wesentlicher Unterschied zwischen manenten und nicht permanenten Gasen wäre. Es hängt die Fähigsig zu werden wesentlich von der Temperatur ab, bei der man komprimiert.

[1]) Thilorier, Annales de chim. et de phys. 60. 1835.

Eben wegen des Einflusses, den der Wärmezustand des Gases auf dieses Verhalten hat, wollen wir die Frage nach der Kondensation der Gase in die Wärmelehre verweisen. Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben, welche Gase man bei gewöhnlicher Temperatur flüssig machen kann, welche Drucke dazu erfordert werden[1]), und welche spezifischen Gewichte einige der flüssigen Gase bei der Temperatur des schmelzenden Eises haben.[2])

Bei nicht viel von der des schmelzenden Eises verschiedenen Temperaturen werden flüssig:

Name der Gase	Druck, unter welchem sie flüssig werden	Spezifische Gewichte bei 0°
Schwefelige Säure	1,5 Atmosphären	1,4333
Cyan	2,4 „	0,866[3])
Ammoniak	4,4 „	0,6362
Arsenwasserstoff	8,6 „	
Schwefelwasserstoff . . .	9,9 „	
Chlorwasserstoff	25,3 „	
Stickstoffoxydul	31,1 „	0,9369
Kohlensäure	37,2 „	0,94695
Ölbildendes Gas	42,5 „	

Alle diese Flüssigkeiten besitzen sehr merkwürdige Eigenschaften, welche wir in der Wärmelehre weiter betrachten werden. Es sind im allgemeinen sehr flüssige, ungefärbte Flüssigkeiten, welche sich in Wasser nicht, in Alkohol und Äther aber sehr gut lösen.

§ 113.

Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern. Wenn man in einen mit Gas erfüllten Raum einen festen Körper bringt, so zieht derselbe die ihn zunächst umgebenden Gasmoleküle an und die Folge davon ist eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des festen Körpers. Je größer die Oberfläche des festen Körpers ist, an um so mehr Punkten ist er mit dem Gase in Berührung, um so mehr Punkte desselben ziehen daher Gasteile an sich, um so mehr Gas wird an der Oberfläche des Körpers verdichtet werden. Man kann diese Tatsache leicht durch den Versuch beweisen. Füllt man eine oben geschlossene und mit ihrem offenen Ende in Quecksilber tauchende Glasröhre mit Kohlensäure, und bringt dann über das Quecksilber in die Glasröhre eine frisch in Quecksilber abgelöschte Kohle von Buchsbaumholz, so sieht man, wie sich sofort das Volumen des Gases vermindert, indem das Quecksilber in die Glasröhre aufsteigt. So wie die Kohle Kohlensäure, so absorbiert sie sowohl als auch andere Körper andere Gase.

Die ausgedehntesten Versuche über die Absorption der Gase durch feste Körper rühren von Theodor von Saussure her[4]).

---

1) *Faraday*, Philos. Transactions of London. R. S. **135**. 1845; auch Pogg. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.
2) *Andreeff*, Liebigs Annalen. **110**. 1857.
3) *Faraday*, a. a. O.
4) *Saussure*, Gilberts Annalen. **47**. 1814.

nächst wies derselbe nach, daß nur geglühte und frisch abgelöschte zu den Absorptionsversuchen brauchbar sind. Der Grund dafür arin, daß Körper, die längere Zeit an der Luft gelegen haben, be- tmosphärische Luft und Wasserdampf an ihrer Oberfläche verdichtet Die ausgeglühten Körper brachte Saussure unter eine Glocke, in r über Quecksilber ein gemessenes Gasvolum aufgefangen war, und ie eintretende Volumänderung. Er fand dann, daß ein und derselbe verschiedene Gase und verschiedene Körper dasselbe Gas in ver- ner Menge absorbierten. So erhielt er z. B. für Buchsbaumkohle erschaum von Valecas folgende Zahlen, welche angeben, wieviel mal enes Volum Gas unter dem darunter angeführten Drucke die Körper ieren.

	Kohle	Meerschaum
Ammoniak	90	15
Chlorwasserstoff	85	--
Schwefelige Säure	65	—
Schwefelwasserstoff	55	11,7
Stickstoffoxydul	40	3,75
Kohlensäure	35	5,26
Elayl	35	3,7
Kohlenoxyd	9,42	1,17
Sauerstoff	9,25	1,49
Stickstoff	7,5	1,60
Wasserstoff	1,75	0,44
Druck	$p = 724^{mm}$	730^{mm}

ie Dauer des Versuches war 24—36 Stunden, nach denen keine ng des Volumens mehr eintrat; nur bei dem Sauerstoff dauert die tion mehrere Jahre.

an sieht, daß im allgemeinen die absorbierten Gasmengen bei den edenen Körpern in derselben Reihe folgen, und daß die Gase, welche urch Druck flüssig machen kann, in weit höherem Maße absorbiert als die permanenten Gase. Das spricht auf das entschiedenste für nahme, daß wir es hier nur mit einer Molekularanziehung der Mo- des festen Körpers auf die ihn zunächst berührende Gasschicht zu ben. Dabei ist es jedoch möglich, wie aus der nicht vollständigen stimmung der beiden Reihen zu schließen ist, daß auch chemische e mit wirksam sind.

euchte Kohle absorbiert weniger Gas als trockne; so fand Saussure chsbaumkohle

	trocken	feucht
Kohlensäure	33	17
Stickstoff	7,5	6,5
Sauerstoff	9,25	3,25.

uch über die Gasmenge, welche von den festen Körpern unter ver- nen Drucken absorbiert wird, hat Saussure Versuche angestellt, aben dieselben nichts Gesetzmäßiges ergeben. Bei gemindertem vermindert sich die Menge des absorbierten Gases.

Die Untersuchung der Gasverdichtung an der Oberfläche fester Körper, die Adsorption der Gase, wie Kayser nach einem Vorschlage du Bois-Reymonds die Erscheinung genannt hat, ist in neuerer Zeit von Chappuis[1]), Joulin[2]) und Kayser[3]) wieder aufgenommen.

Chappuis suchte zunächst die auf einer der Größe nach bekannten Glasoberfläche kondensierte Gasmenge zu bestimmen, indem er in ein zylindrisches Glasgefäß 13 200 Glasfäden einfüllte, deren mittlere Länge $12{,}665^{cm}$, deren mittlerer Durchmesser, aus der Bestimmung des von den Fäden eingenommenen Raumes abgeleitet, $0{,}2851^{mm}$ betrug, so daß die Oberfläche der Mantelflächen der Fäden $1{,}497\ m^2$ war. Mit den Endflächen der Fäden und der innern Oberfläche des Glaszylinders war in dem zylindrischen Glasgefäß eine freie Oberfläche von $1{,}6752\ m^2$. Das Gefäß wurde bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit verschiedenen Gasen nach und nach unter Atmosphärendruck gefüllt, und beobachtet, wie viel sich von den an den Wänden bei 0^0 verdichteten Gasmengen bei Erwärmung des Zylinders auf 183^0 loslöste. Die Methode der Beobachtung ergibt sich in der Wärmelehre; wir werden sie bei der Besprechung der Messung der Ausdehnungskoeffizienten der Gase bei konstantem Druck kurz angeben können. Die in dieser Weise gemessene Verdichtung der Gase bestätigte die Folgerung Saussures, daß die Menge des verdichteten Gases im allgemeinen größer wird, unter je geringerem Drucke das Gas verflüssigt wird.

Die für die einzelnen Gase erhaltenen Zahlen, aus denen sich die Menge des an einem Quadratmeter Glasfläche unter dem Druck einer Atmosphäre adsorbierten Gases ergeben würde, haben indes nach den Versuchen Kaysers keine allgemeine Bedeutung. Wie Kayser fand, ist die an einem solchen Bündel von Glasfäden adsorbierte Gasmenge durchaus nicht einfach der Oberfläche des Glases bei gleichem Drucke proportional, sondern hängt davon ab, ob das Bündel mehr oder weniger dicht verpackt ist. Kayser beobachtete die Menge des adsorbierten Gases direkt, indem er in den mit den Glasfäden gefüllten Zylinder, welcher vorher durch oftmaliges Auspumpen und tagelanges Erhitzen auf 300^0 von dem adsorbierten Gase befreit war, ein außerhalb des Zylinders gemessenes Gasvolumen einfüllte und darauf die infolge der Adsorption eingetretene Abnahme des Volumens bestimmte, wenn nach einiger Zeit das Gas wieder unter denselben Druck gebracht wurde und dieser Druck konstant blieb. Außerdem war die Zunahme der adsorbierten Gasmenge mit zunehmendem Drucke ganz verschieden.

So fand er[4]) für drei verschiedene Bündel von Fäden desselben Glases, deren erstes eine Oberfläche von 7,05, das zweite 12,17, das dritte 12,03 hatte, folgende auf 760^{mm} reduzierte Volumina adsorbierten Ammoniaks in Kubikzentimetern:

1) *Chappuis*, Wiedem. Ann. 8. p. 1 u. p. 672. 1879; 12. p. 161. 1881.
2) *Joulin*, Comptes Rendus. 90. p. 741. 1880. Beiblätter 4. p. 762. 1880.
3) *Kayser*, Wiedem. Ann. 12. p. 526. 1881; 14. p. 450. 1881; 15. p. 1882.
4) *Kayser*, Wiedem. Ann. 14. p. 458. 1881.

I	Druck	395,9^{mm}	610^{mm}	822^{mm}	977^{mm}
	Vol.	1,534	3,114	5,53	10,5
	Vol. pro m^2	0,218	0,441	0,784	1,49
II	Druck	244,4	415	538	
	Vol.	0,949	3,81	5,85	
	Vol. pro m^2	0,078	0,314	0,481	
III	Druck	274	482	639	760
	Vol.	1,547	2,739	3,73	5,43
	Vol. pro m^2	0,126	0,222	0,306	0,441.

Als ein Teil des Glases in ein möglichst feines Pulver zerrieben und 87,6^g der Adsorption von Ammoniak ausgesetzt wurden, fanden sich unter den in der ersten Zeile angegebenen Drucken die in der zweiten Reihe adsorbierten Volumina

250^{mm}	450	658	810	965	1094	1250
8,44^{ccm}	8,83	13,3	15,80	9,21	10,73	11,85.

Die dritte und vierte Zahl dieser Beobachtungsreihe paßt zu den übrigen gar nicht; obwohl sie Kayser zweimal beobachtet hat, muß man doch irgend einen Irrtum annehmen, denn die Zahlen würden bedeuten, daß bei Vermehrung des Druckes von 810 auf 965^{mm} Quecksilber vom Glaspulvers sich nahezu 0,4 des adsorbierten Gases loslösen würde, ein Vorgang, der sich sonst nirgendwo zeigt, da immer die adsorbierte Gasmenge mit dem Druck zunimmt.

Lassen wir diese Zahlen außer acht, so zeigt sich, daß das Gesetz, nach welchem die adsorbierte Gasmenge mit dem Drucke zunimmt, für dasselbe Glas je nach der Form der Oberflächen, Kayser meint, je nach der Größe der Zwischenräume zwischen den Glasfäden bezw. im Pulver, ein verschiedenes ist.

Für schwefelige Säure war die Zunahme der Adsorption mit steigendem Drucke wieder eine andere.

Auch verschiedene Sorten Holzkohle zeigen eine verschiedene Zunahme mit verschiedenem Druck für die Adsorption desselben Gases. So ergaben sich für verschiedene Sorten Holzkohle aus den Versuchen von Chappuis, Joulin, Kayser folgende Adsorptionen. Bei einem Drucke von 100^{mm} und der Temperatur 19^0 wurden adsorbiert bei Kayser 230^{ccm}, Chappuis 250^{ccm}, Joulin 280^{ccm} von 22,5^g Kohle. Setzen wir bei jedem Beobachter die für diesen Druck adsorbierte Menge gleich 1, so wird sie

Druck	100	200	300	400	500	600	700
K.	1	1,70	2,14	2,55	2,77	3,00	3,32
C.	1	1,80	2,32	2,72	3,04	3,28	3,48
J.	1	1,89	2,50	2,82	3,11	3,40	3,68.

Mit steigender Temperatur nimmt die Adsorption schnell ab. Kayser meint, man könne bei einem und demselben Druck die Menge des adsorbierten Gases durch eine Gleichung von der Form $v = A - Bt$ darstellen. Indes wird zur Darstellung dieser Abnahme sich wohl ebensowenig eine allgemeine und einfache Gleichung eignen wie zur Darstellung der Zunahme mit dem Drucke.

nommen werden. Wenn man daher eine Daguerresche it Silber plattierte Kupferplatte, mit frisch geglühtem und chluß der Luft erkaltetem Trippel oder Kohlenpulver belegt, Kohlenpulver mit reiner Baumwolle abkehrt, so ist der Platte häre genommen. Beim Behauchen zeigt diese Platte eine ung, während eine an freier Luft gelegene Platte beim Be- räunliche Färbung zeigt.

n die Platte aber mit einem Körper in Berührung, der bei he eine dichte Gasatmosphäre besitzt, so wird die Platte läche von dem Körper Gas aufnehmen und verdichten.

nahm nun eine Daguerresche Platte und belegte die eine n mit frisch geglühtem und unter Abschluß der Luft in gel erkaltetem, die andere Hälfte mit frisch geglühtem, aber me von Kohlensäure erkaltetem Kohlenpulver und wischte mit reiner Baumwolle ab. Beim Behauchen zeigte die eine luliche, die andere eine bräunliche Färbung.

Platte in Quecksilberdampf gebracht, so kondensierte sich der- er nicht mit Gas bedeckten Hälfte, die andere Hälfte blieb frei.

nan eine Platte mit einer Atmosphäre von Kohlensäure, in- nit Kohlenpulver bedeckt, welches in der angegebenen Weise , und legt dann eine kleine flache Scheibe frisch geglühter e auf dieselbe, so wird an der Stelle in sehr kurzer Zeit äre fortgenommen; behaucht man die Platte nach Entfernung zeigt sie an der Stelle, wo diese lag, eine bläuliche, im räunliche Färbung.

an einen Stempel, putzt ihn mit einer durch Alkohol befeuch- o kann man ihn von seiner Gasatmosphäre befreien. Setzt isch gereinigt auf eine mit Kohlensäure überzogene Platte, as Gas von derselben fort. Wird die Platte nach Abheben ksilberdämpfen ausgesetzt, verdichten sich letztere vorzugs- vom Stempel berührten Stellen.

den Stempel in kohlensäurehaltiges Kohlenpulver und setzt on ihrer Gasatmosphäre befreite Platte, so nimmt die Platte pel Kohlensäure auf. Wird die Platte nach Fortnahme des ucht oder Quecksilberdämpfen ausgesetzt, so zeigt sich das pels, indem vorzugsweise an den Stellen sich der Dampf elche mit dem Stempel nicht in Berührung waren.

n dagegen einen frisch gereinigten Stempel auf eine frisch te, so zeigt sich so gut wie kein Bild, die Dämpfe werden ndensiert. Dasselbe ist der Fall, wenn man einen mit Kohlen- n Stempel auf eine mit Kohlensäure bedeckte Platte legt.

stellte ferner einen mit Kohlensäure bedeckten Stempel nach- echs verschiedene frisch gereinigte Silberplatten. Auf der iten ließ er ihn 30 Minuten, es zeigte sich beim Behandeln rdampf ein deutliches Bild, auf die dritte und vierte Platte eine Stunde, die dritte zeigte ein Bild, wenn auch schwach, Behauchen nur die Spur eines Bildes Auf der fünften und ließ er den Stempel zwei Stunden stehen; sie zeigten gar hied beim Behauchen, es zeigte sich gar kein Bild.

Dieser Versuch beweist auf das allerentschiedenste die Richtigkeit der Waideleschen Erklärung, daß es eine Änderung der Gasatmosphäre auf den Platten sei, welche die Moserschen Bilder erzeugt. Denn bei den ersten Versuchen war der Stempel mit der dichten Atmosphäre versehen, und in der kurzen Zeit von 30 Minuten kondensierte die Platte rings umher nicht viel Luft an ihrer Oberfläche, die Bilder wurden deutlich und scharf; je mehr aber die Gasatmosphäre am Stempel abnahm und die Verdichtung der Luft auf der übrigen Platte größer wurde, um so undeutlicher wurde das Bild.

Wir sind also berechtigt, die Moserschen Bilder als eine Folge der an einzelnen Stellen geänderten Gasatmosphäre anzusehen; denn im allgemeinen werden die Gasatmosphären an den verschiedenen Körpern immer verschieden dicht sein, eine Berührung zweier Körper also auch an der Berührungsstelle eine Änderung der Dichtigkeit hervorbringen.

Das wird selbst dann der Fall sein, wenn sich die Körper nicht unmittelbar berühren, da die Gasatmosphären eine gewisse Dicke haben müssen, und selbst wenn sie nicht so dick sind, daß sie ineinander übergehen, doch ein Austausch zwischen denselben stattfinden muß.[1])

§ 115.

Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten. In gleicher Weise, wie die festen Körper die Gase anziehen und absorbieren, tun es auch die Flüssigkeiten.

Füllt man z. B. eine oben geschlossene Glasröhre, welche in Quecksilber taucht, mit Ammoniakgas, und bringt dann über das Quecksilber in der Röhre ein wenig Wasser, so steigt das Quecksilber sofort in der Röhre in die Höhe; ein Beweis, daß das Gas vom Wasser verschluckt ist.

Ein und dieselbe Flüssigkeit verschluckt von verschiedenen Gasen bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur verschiedene Mengen; verschiedene Flüssigkeiten von demselben Gase, unter sonst gleichen Umständen ebenfalls verschiedene Mengen, so daß die Menge des absorbierten Gases bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur von der Natur des Gases sowohl, als auch von der der absorbierenden Flüssigkeit abhängt.

Seit Priestley, der zuerst die Absorption der Gase untersuchte, indem er nachwies, daß unter gewöhnlichem Barometerdrucke ein gegebenes Volumen Wasser ein gleiches Volumen Kohlensäure absorbiere, haben sich viele Physiker und Chemiker mit den Absorptionserscheinungen beschäftigt, und zu bestimmen gesucht, welche Gasmengen verschiedene Flüssigkeiten aufzunehmen imstande sind, und wie die aufgenommene Menge desselben Gases bei gleicher Flüssigkeit sich mit dem äußern Drucke, unter welchem das Gas steht, ändert.

Was die letztere Frage betrifft, so haben die Versuche von Henry[2]) ergeben, daß das Volumen des von einer Flüssigkeit aufgenommenen Gases stets dasselbe ist, welches auch der äußere Druck ist, unter welchem sich das Gas über dem Wasser befindet. So absorbiert ein gegebenes Wasser-

1) *Quincke,* Poggend. Ann. **108**. 1859.
2) *Henry,* Philos. Transact. 1803. part. I. p. **29**. Gilbert, Ann. **20**. 18..

olumen bei gewöhnlicher Temperatur (15° C.) ein nahezu gleiches Volumen Kohlensäure, ob nun die Kohlensäure in dem Raume, in welchem die Absorption vor sich geht, unter dem Drucke von einer oder mehreren Atmosphären steht. Da nach dem Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit eines ases sich direkt verhält, wie der äußere Druck, so folgt daraus, daß die Gewichtsmengen des absorbierten Gases sich direkt verhalten, wie die äußeren Drucke, unter denen das Gas steht.

Kennt man darnach die Gasmenge, welche unter einem bestimmten Drucke absorbiert wird, so kann man daraus leicht für alle anderen Drucke die absorbierten Gasmengen berechnen.

Bunsen[1]) nennt deshalb das auf 0° und den Druck von 760^{mm} reduzierte Gasvolumen, welches die Volumeinheit der Flüssigkeit unter dem Drucke von 760^{mm} absorbiert, den Absorptionskoeffizienten des Gases für die Flüssigkeit.

Diese Zahl gibt dann sogleich das Volumen an, welches unter irgend einem Drucke P absorbiert wird, und wir erhalten für die Gasmenge, welche diesem Volumen entspricht,

$$g = \frac{\alpha \cdot P}{760},$$

wenn wir mit α den Absorptionskoeffizienten bezeichnen und als Gasmenge das Volumen, welches eine gegebene Gasmenge unter dem Barometerdruck von 760^{mm} einnimmt; von Wroblewski nennt die so bestimmte Größe g den Sättigungskoeffizienten. Für die von dem Wasservolum h absorbierte Gasmenge erhalten wir dann

$$g = \frac{\alpha \cdot h \cdot P}{760}.$$

Kennt man in einem dem eingangs erwähnten ähnlichen Versuche das Volumen des in der Röhre enthaltenen Gases V und den Druck P, unter dem es steht, die Differenz zwischen der Barometerhöhe und dem Niveauunterschied des Quecksilbers in und außer der Röhre, läßt man dann ein Flüssigkeitsvolumen h in die Röhre eintreten und bestimmt das Volum V' und den Druck P' des nach der Absorption übrigbleibenden Gasvolumens, so kann man den Absorptionskoeffizienten leicht erhalten.

Die vor dem Versuche in dem Rohre enthaltene Gasmenge ist

$$\frac{V \cdot P}{760},$$

die nach dem Versuche noch vorhandene $\frac{V' \cdot P'}{760}$, die absorbierte also

$$\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760}.$$

Da der endliche Druck P' ist, so ist die Flüssigkeit unter diesem Drucke gesättigt. Nach dem Henryschen Gesetze verhalten sich die absorbierten Gasmengen wie die Drucke; unter dem Drucke 760^{mm} würde demnach die absorbierte Gasmenge

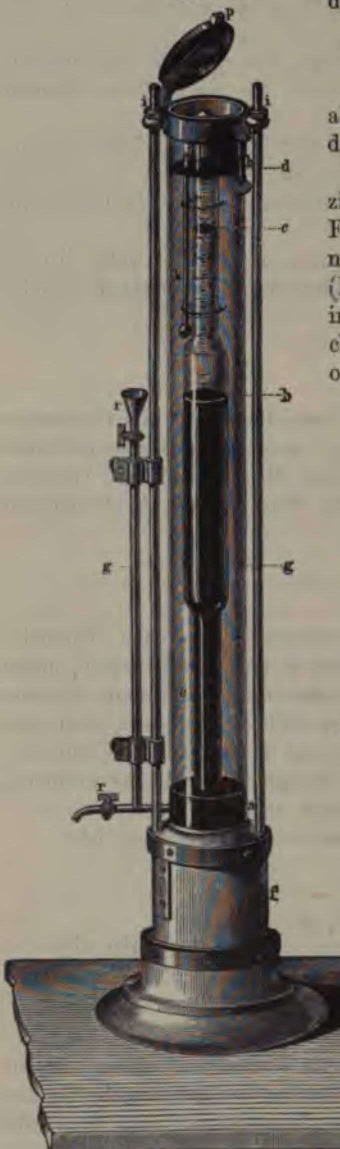
1) *Bunsen*, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857. Liebigs Annalen. Bd. 1855.

$$\left(\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760}\right)\frac{760}{P'} = \left(V\frac{P}{P'} - V'\right)$$

gewesen sein.

Diese Gasmenge würde beim Drucke 760 von der Flüssigkeits absorbiert sein, das Flüssigkeitsvolumen demnach die Menge

Fig. 218.



$$\alpha = \frac{1}{h}\left(V\frac{P}{P'} - V'\right)$$

absorbiert. Diese Größe α ist es, we den Absorptionskoeffizienten nannten.

Zur Bestimmung des Absorptio zienten der verschiedensten Gase für Flüssigkeiten wandte Bunsen das A meter an, welchem er folgende Einrich (Fig. 218). Ein seiner ganzen Län in Millimeter geteiltes kalibriertes Roh ches oben geschlossen ist, ist mit seine offenen Ende in eine Schraubenhülse 219) eingekittet, we Schraubenmutter des Stuhles aa entsprich Bodenplatte des Stuhl mit Kautschuk überz daß beim Hinabschrau Rohres e dessen unter schliffener Rand geg Kautschuk drückt, un das Rohr geschlossen w zwei Federn cc am St (Fig. 219) passen in z nen des Fußes f (Fig. daß wenn man das R den Fuß f einsetzt, d aa nur auf und ab nicht aber gedreht werd Eine Drehung des Rohr wirkt deshalb ein Lös Festerziehen der Sch und damit eine Erheb der Bodenplatte und des Rohres e, oder ei Drücken gegen diesel dichten Verschluß von Rohr e dient als Abs rohr. Das Rohr ist sei zen Länge nach von d zylinder gg umhüllt. Der Zylinder ist mit seinen abgeschliffenen auf denen Kautschukringe liegen, in den Fuß f und gegen de

Fig. 219.

eisernen Ringes h mittels der Schrauben ii fest angepreßt. Die welche mit dem innern Raume des Zylinders gg kommuniziert, Eingießen und Ablassen von Quecksilber, um den Druck im Absorptionsrohres e regulieren zu können. Der weitere Zylinder dem Quecksilber mit Wasser angefüllt, um das Absorptionsonstanter Temperatur zu erhalten, welche mit dem Thermometer k wird. Der äußere Zylinder kann mittels des Deckels p fest verwerden, in dessen Mitte eine mit einer Kautschukplatte übertte gegen den Kopf des Absorptionsrohres e drückt, um dasselbe lich festzustellen.

ersuche werden folgendermaßen angestellt. In einer Quecksilbert man in das zunächst ganz mit Quecksilber gefüllte Absorpdas zu untersuchende Gas einsteigen, und mißt das Volum V und den Druck P, unter dem es steht, um die Gasmenge (das l 760^{mm} Druck reduzierte Volum) zu erhalten. Darauf läßt man uecksilber ein gemessenes Volum h völlig luftfreien Wassers einließt das Rohr mittels des Stuhles a und setzt es in den Boden f uecksilber und darüber vollständig mit Wasser gefüllten Zylin-

eine kleine Drehung öffnet man dann das Absorptionsrohr, setzt en Druck im Innern desselben mit dem äußern Druck ins Gleicherschließt es wieder und schüttelt den ganzen Apparat eine Miauf das heftigste, öffnet dann wieder das Absorptionsrohr, um neuerdings auszugleichen, schließt und schüttelt wieder und so ge bis beim Öffnen des Absorptionsrohres keine Volumänderung mehr eintritt.

uf wird das Volum V_1 des rückständigen Gases und sein Druck P_1 und wir haben alle Daten zur Bestimmung des Absorptionsen α.

sen fand, daß der Absorptionskoeffizient sich mit der Temperatur ierenden Flüssigkeit ändert. Ein Gesetz dieser Änderung ließ erkennen, man mußte sich begnügen, eine empirische Formel n, um die Werte von α zu bestimmen.

Formeln von Bunsen haben alle die Gestalt

$$\alpha = a + bt + ct^2,$$

e Temperatur in Graden nach der hundertteiligen Skala a, b, c, des Gas und jede Flüssigkeit verschiedene Konstanten sind, welche Anzahl, wenigstens drei Versuche bei verschiedenen Temperabestimmen sind.

Stickstoff in Wasser ist z. B.

$$\alpha = 0{,}020\,346 - 0{,}000\,538\,87\,t + 0{,}000\,011\,156 \cdot t^2.$$

Stickstoff in Alkohol aber

$$\alpha = 0{,}126\,338 - 0{,}000\,418\,t + 0{,}000\,006\,0\,t^2.$$

Formeln gelten jedoch nur bis zu ungefähr 20°, bis wohin die reichen.

Wir lassen hier eine Reihe der Absorptionskoeffizienten der v sten Gase nach Bunsen für Wasser und Alkohol folgen. Indem Bunsenschen Gleichungen schreiben

$$\alpha = a\left(1 - \frac{b}{a} t + \frac{c}{a} t^2\right) = a\,(1 - \beta t + \gamma t^2)$$

gibt folgende Tabelle die Werte von a, $\beta \cdot 10^5$, $\gamma \cdot 10^6$.

Namen der Gase	α für Wasser[1])			α für Alkoho	
	a	$\beta \cdot 10^5$	$\gamma \cdot 10^6$	a	$\beta \cdot 10^5$
Stickstoff	0,0203	2648	548	0,126 34	331
Wasserstoff	0,0193	0	0	0,069 25	215
Sauerstoff	0,0412	2648	548	0,289 37	0
Kohlenoxyd	0,0329	2430	499	0,204 42	0
Kohlensäure.	1,7967	4320	914	4,3296	2172
Stickoxydul	1,3052	3475	496	4,1781	1671
Grubengas.	0,0545	2166	188	0,5226	548
Äthylen	0,2563	3564	654	3,5950	1605
Stickoxyd	—	—	—	0,3161	1103
Äthylgas.	0,0315	3320	796	—	—
Schwefelwasserstoff . .	4,3706	1914	119	17,891	3666
Atm. Luft	0,0247	2643	548	—	—

Bei Bunsens Messungen wurden im allgemeinen nur Druck wandt, welche wenig von dem einer Atmosphäre abweichen, und stimmte Bunsen anfänglich auch Absorptionskoeffizienten unter A der Gültigkeit des Henryschen Gesetzes für die äußerst stark al baren Gase wie Ammoniak und schweflige Säure.

Ditmar und Roscoe[2]) zeigten indes bald, daß für Chlorwa säure und Ammoniak das Henrysche Gesetz auch nicht annähern war. Dieselben sättigten unter verschiedenen Drucken Wasser mit treffenden Gasen und bestimmten dann durch chemische Analyse die der absorbierten Gase.

Für Salzsäuregas zeigte sich so, daß ein erheblicher Teil d mit dem Wasser gewissermaßen chemisch verbunden war, denn a äußerst geringem Drucke blieb der größte Teil des Gases in der keit absorbiert, wie folgende Zahlen, welche die in einem Gramm bei 0° absorbierten Gramme Chlorwasserstoffsäure unter den üb Zahl angegebenen Drucken geben, beweisen. Die Druckzahlen l Meter Quecksilber.

Druck	0,058	0,321	0,569	0,735	0,737	0,755	0,932
Gr. HCl	0,614	0,746	0,796	0,824	0,821	0,827	0,851

Die Zahlen zeigen, daß bei einem Drucke von 58^{mm} Quecksil als $^2/_3$ des Gases absorbiert ist, wie bei 1270^{mm}, und auch daß nahme der absorbierten Gasmenge bei wachsendem Drucke eine kleinere wird.

1) Nach der Zusammenstellung von *E. Wiedemann,* Wiedem. Ann p. 350. 1882.
2) *Roscoe* und *Ditmar,* Liebigs Ann. 112. p. 327. 1859.

Die Versuche mit Ammoniak ergaben, daß dort ein solcher, sagen wir chemisch gebundener Anteil nicht vorhanden ist, daß vielmehr mit abnehmendem Drucke die absorbierten Mengen derartig abnehmen, daß sie für den Druck Null auch auf die Absorption Null führen. Mit wachsendem Drucke nimmt aber die Menge des absorbierten Ammoniaks anfangs langsamer, später rascher zu als der Druck, wie folgende Zahlen zeigen. Die Werte gelten wie die vorigen für 0°, die erste Zeile gibt die Drucke in Meter Quecksilber, die zweite die unter dem betreffenden Drucke absorbierte Gasmenge in Gramm pro Kubikzentimeter.

Druck	0,018	0,097	0,268	0,760	1,264	1,963
Gr. NH_3	0,074	0,274	0,478	0,879	1,268	2,137.

Man sieht, bis $1,2^m$ Druck wächst die absorbierte Gasmenge langsamer als der Druck, wächst dann aber rascher, denn wenn der Druck von 1,264 auf das 1,55 fache wächst, nimmt die absorbierte Gasmenge etwa auf das 1,7 fache zu. Der Absorptionskoeffizient im Sinne Henrys nimmt also zunächst mit steigendem Drucke ab, dann aber wieder zu.

Sims[1]) fand bei seinen Versuchen für die Temperatur Null dieses relative Minimum für die Absorption des Ammoniaks nicht, er findet stets ein langsameres Wachsen als jenes des Druckes.

Einen ähnlichen Gang fand Sims für schweflige Säure in Wasser.

Aus den Beobachtungen von Sims ergibt sich weiter das interessante Resultat, daß für höhere Temperaturen die Abweichung der absorbierten Gasmengen von dem Henryschen Gesetze erheblich abnimmt, so zwar, daß für schweflige Säure das Gesetz schon bei 50°, bei Ammoniak bei 100° gültig ist.

Auch für die Kohlensäure, obwohl sie ganz erheblich weniger absorbiert wird als die drei zuletzt genannten Gase, ergibt sich aus Versuchen von Khanikoff und Longuinine[2]) nach der Berechnung von v. Wroblewski und den Versuchen von v. Wroblewski selbst[3]) bei hohen Drucken eine Abweichung von dem Henryschen Gesetze, im gleichen Sinne wie sie Sims für schweflige Säure und Ammoniak gefunden hat, die Menge des absorbierten Gases wächst langsamer als der Druck. v. Wroblewski brachte das Absorptionsrohr in ähnlicher Weise wie Cailletet bei seinen Kompressionsversuchen das Gefäß, welches die zu komprimierenden Gase enthielt, in einen Kompressionsapparat, bei dem aber das Stahlrohr durch ein Glasrohr ersetzt war. Auf dem Quecksilber des Absorptionsrohres befand sich eine nur geringe genau gemessene Quantität Wasser. Das zu rascher und vollständiger Absorption des Gases erforderliche Schütteln ersetzte v. Wroblewski dadurch, daß er den Druck, unter welchem das Gas stand, systematisch etwas kleiner und größer werden ließ, daß bei dem Aufsteigen des Quecksilbers zwischen dem Quecksilber und der Glaswand keine bemerkbare Quantität des Wassers festgehalten wurde. Er fand in dieser Weise für den Sättigungskoeffizienten a und den sich daraus ergebenden Absorptionskoeffizienten

1) *Sims*, Liebigs Ann. 118. p. 333. 1861.
2) *Khanikoff* und *Longuinine*, Ann. de chim. et de phys. 11. (4.) p. 412. 1867.
3) *v. Wroblewski*, Wiedem. Ann. 17. p. 103. 1883; 18. p. 290. 1883.

$$\alpha = \frac{g}{P} \cdot 760,$$

wenn wir P in Atmosphären ausdrücken, also $P = n \cdot 760$ setzen, folg
Werte bei 0° und bei 12°,43 C.

Druck in Atm.	g		α	
	bei 0°	bei 12°,43	bei 0°	bei 12°,43
1	1,797	1,086	1,797	1,086
5	8,65	5,15	1,730	1,030
10	16,03	9,65	1,603	0,965
20	26,65	17,11	1,332	0,855
30	33,74	23,25	1,124	0,775

Auch hier sieht man, wie in den Versuchen von Sims, daß mit s
gender Temperatur die Abweichung vom Henryschen Gesetz kleiner w
Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß zur Reduktion des absorbi
Gases auf Atmosphärendruck nicht das Boylesche Gesetz angewandt wu
sondern das aus den früher besprochenen Versuchen sich ergebende K
pressionsgesetz der Kohlensäure.

In der Nähe des Atmosphärendruckes ist die Änderung des Ab
tionskoeffizienten auch nach den Versuchen von Khanikoff und Lon
nine eine sehr geringe.

Aus Bunsens Versuchen ergab sich, daß der Absorptionskoeffi
des Wasserstoffs in Wasser von der Temperatur unabhängig sei, und eb
jener von Sauerstoff und Kohlenoxyd in Alkohol. Neuere Versuche
Timofejew[1]) und Bohr und Bock[2]) haben jedoch für die Absorp
des Wasserstoffs in Wasser und Versuche von Timofejew auch für
des Sauerstoffs in Alkohol die Abnahme der Koeffizienten gezeigt, w
indes Bohr und Bock, welche die Versuche über die Absorption
Wasserstoffs bis zur Temperatur 100° verfolgten, zu dem interessanten
sultat gelangten, daß über 60° die Absorption des Wasserstoffs in Wa
wieder zunimmt. Nach Bohr nimmt der Absorptionskoeffizient des Wa
stoffs in Wasser von 0,0203 bei 0° auf 0,0144 bei 60° ab und st
wieder auf 0,0166 bei 100°. Der Bunsensche Wert entspricht nach B
der Absorption bei 10°. Timofejew erhält zwischen 0° und 26° i
etwas größere Werte als Bohr, er findet für den Absorptionskoeffi
ten bei t^0

$$\alpha = 0{,}021\,53\,(1 + 0{,}0090\,t + 0{,}000\,08\,t^2),$$

der Bunsensche Wert entspricht hiernach der Temperatur 13°.

Während Timofejew den Absorptionskoeffizienten des Sauerstoff
Alkohol etwas kleiner findet wie Bunsen, erhält Bohr für Stickstoff
Sauerstoff in Wasser durchweg etwas größere Werte. Wir verweisen d
halb auf die betreffenden Abhandlungen.

1) *Timofejew*, Zeitschr. f. phys. Chemie. **6**. p. 141. 1893.
2) *Bohr* und *Bock*, Wiedem. Ann. **44**. p. 318. 1891.

Das Gesetz von Henry wurde von Dalton auch auf Gasgemische ausgedehnt in dem Satze, daß wenn ein Gasgemisch der Absorption ausgesetzt wird, die von jedem Gase absorbierte Menge sich nach dem Henryschen Gesetze aus dem Partialdrucke des betreffenden Gases ergebe.

Ein Volumen atmosphärischer Luft besteht z. B. aus 0,79 Stickstoff und 0,21 Sauerstoff. Übt dasselbe den Druck p aus, so ist der Druck des Stickstoffs 0,79 p und der des Sauerstoffs 0,21 p. Ist der Absorptionskoeffizient des Stickstoffs α_1, der des Sauerstoffs α_2, so ist die von einem Wasservolumen h absorbierte Menge Stickstoff

$$g_1 = \frac{\alpha_1 h \cdot 0{,}79\, p}{760}$$

und des Sauerstoffs

$$g_2 = \frac{\alpha_2 h \cdot 0{,}21\, p}{760}.$$

Setzen wir $h = 1$, $p = 760$, so muß $g_1 + g_2 = \alpha$ gleich dem Absorptionskoeffizienten der Luft sein. Die Bunsenschen Zahlen ergeben

$$\begin{aligned} g_1 &= 0{,}79 \cdot \alpha_1 = 0{,}016\,04\,(1 + 0{,}026\,48\, t + 0{,}000\,548\, t^2) \\ g_2 &= 0{,}21 \cdot \alpha_2 = 0{,}008\,65\,(1 + 0{,}026\,48\, t + 0{,}000\,548\, t^2) \\ g_1 + g_2 &= \alpha \;= 0{,}024\,69\,(1 + 0{,}026\,48\, t + 0{,}000\,548\, t^2) \end{aligned}$$

und der Wert von α ist der von Bunsen gefundene Absorptionskoeffizient der Luft.

Hat man allgemein ein Gasgemisch unter dem Drucke p, welches in der Volumeinheit des Gemisches r_1 Teile eines Gases, r_2 eines zweiten, r_3, $r_4 \cdots r_n$ Teile eines 3, 4 $\cdots n$ Gases enthält, so sind die von jedem Gase absorbierten, in der Volumeinheit enthaltenen Gasmengen

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_1 \cdot r_1 \frac{p}{760} \\ g_2 &= \alpha_2 \cdot r_2 \frac{p}{760} \\ &\;\;\vdots \\ g_n &= \alpha_n \cdot r_n \cdot \frac{p}{760}. \end{aligned}$$

Kennt man die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases nicht, aber kann man die Zusammensetzung des absorbierten Gases und somit g_1, g_2, $g_3 \ldots$ bestimmen, so kann man daraus r_1, $r_2 \ldots$ oder die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases berechnen. Auf diese Weise hat Bunsen der Absorptiometrie in der Analyse der Gase eine wichtige Anwendung gegeben.

§ 116.

Ausströmen der Gase. Wenn in die Wand eines mit Gas unter dem Drucke p gefüllten Gefäßes eine Öffnung gemacht wird, und vor der Öffnung weniger dichtes Gas oder ein leerer Raum ist, so strömt das Gas aus der Öffnung hervor, um so rascher, je höher der Druck ist, unter welchem das Gas im Gefäße steht und je geringer der Druck des äußern

Gases ist. Wegen der freien Beweglichkeit der Teile, welche die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemein haben, müssen auch die Ausströmungsgesetze der Gase mit denen der Flüssigkeiten übereinstimmen.

Wir gelangen daher zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas aus einer Öffnung in der Wand eines Gefäßes, in welchem es unter stärkerm Druck steht, als der Druck außerhalb des Gefäßes ist, ausfließt, durch Anwendung ganz derselben Prinzipien, welche wir auch § 87 anwandten. Wir denken uns zunächst das Gas im Innern des Gefäßes unter einem konstanten Drucke p_0 und ebenso werde der Druck außerhalb auf konstanter Höhe erhalten, so daß ein stationärer Strömungszustand eintritt. Das Kennzeichen dieses stationären Zustandes ist dann, daß durch jeden Querschnitt, durch welchen das Gas hindurchtritt, in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Gases hindurchgehen müssen. Haben wir deshalb zwei Querschnitte Q und Q_1 und sind die mittleren gegen diese Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten u und u_1, so sind die durch die Querschnitte in der Zeiteinheit hindurchtretenden Gasvolumina $Q \cdot u$ und $Q_1 \cdot u_1$. Diesen Volumen entsprechen aber nur dann gleiche Mengen, wenn in diesen Querschnitten die Drucke, welchen die Gase dort ausgesetzt sind, gleich sind, da nur dann die Dichtigkeit des Gases dieselbe ist. Sind die Drucke nicht gleich, sondern ist der Druck im Querschnitt Q gleich P, im Querschnitt Q_1 gleich P_1, so ist die Dichtigkeit im Querschnitt Q gleich s, im Querschnitt Q_1 gleich s_1, und die durch diese Querschnitte hindurchfließenden Gasmengen, die einander gleich sein müssen, sind

$$sQu = s_1 Q_1 u_1 .$$

Da nun, bei der von uns als überall gleich vorausgesetzten Temperatur nach dem Mariotteschen Gesetze

$$s : s_1 = P : P_1 ,$$

so können wir die Gleichung schreiben

$$PQu = P_1 Q_1 u_1 .$$

Eine weitere Beziehung erhalten wir auch hier wieder durch die Bemerkung, daß bei dem stationären Zustande die Gase sich in konstanten Bahnen bewegen; denken wir uns deshalb wieder, wie in § 87 einen Kanal OA von überall gleichem Querschnitt q durch das Gas gelegt, so können wir in diesem die Geschwindigkeitsänderung bestimmen. Sei Fig. 270 $MMNN$ das Gefäß, aus dem das Gas aus einer engen Öffnung ausfließt, in welchem der konstante Druck etwa dadurch erhalten wird, daß das Gefäß mit einem höher gelegenen Wasserreservoir R, welches auf konstantem Niveau erhalten wird, in Verbindung steht. Sei OA der betrachtete Kanal, und seien m und n zwei unendlich nahe Querschnitte. Tritt das Gas durch den Querschnitt m mit der Geschwindigkeit v, so ist die in der Zeit dt durch denselben hindurchfließende Gasmenge gleich $sqvdt$. In derselben Zeit erreicht das Gas den Querschnitt n, den es mit der Geschwindigkeit $v + dv$ passiert, so daß die in der Zeit dt durch den Querschnitt m fließende Gasmenge in derselben Zeit den Geschwindigkeitszuwachs dv erfährt; die Bewegungsgröße nimmt also zu um

$$sqvdtdv .$$

... Zunahme der Bewegungsgröße wird durch die in der Zeit dt ... Kraft erteilt; als solche haben wir hier nur die Änderung dp ...kes zu betrachten, da dieser gegenüber die Wirkung der Schwere ... geringen Gewichtes der Gase ...lässigt werden darf. Ändert ... bis n der Druck um dp, ... dp die Größe der wirksamen ... daß wir die Gleichung er-

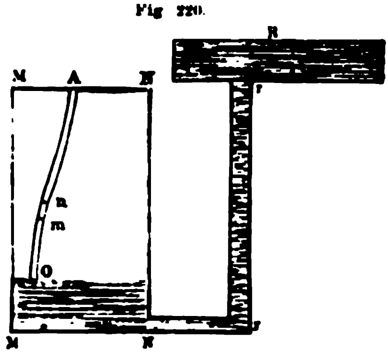


Fig. 220.

$$...qvdtdv = -qdpdt,$$

...auf der rechten Seite das ne-...orzeichen setzen müssen, weil ...dem Druck abnehmende Ge-...gkeit, abnehmendem Druck ...le Geschwindigkeit entspricht. ...en wir die Dichtigkeit des ...i dem Drucke π der Atmo-...ät σ, so ist, wenn p den Druck im Querschnitt m bedeutet,

$$s = \frac{\sigma}{\pi} p,$$

...rd unsere Gleichung

$$\frac{\sigma}{\pi} pqvdtdv = -qdpdt$$

$$vdv = -\frac{\pi}{\sigma}\frac{dp}{p}.$$

... die Geschwindigkeit an der Grenze des Gases bei O gleich v_0, ...k dort p_0, so erhalten wir die Geschwindigkeit, welche das Gas ...ro der Druck p ist, besitzt, indem wir auf beiden Seiten der Glei-...mmieren, wie im § 87, auf der linken von v_0 bis v, auf der ...von p_0 bis p.

...se Summen sind, wie wir schon öfter sahen, nach E VIII, E I

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p}.$$

... wir über die Lage des gedachten Gaskanals gar keine besondere ...tzung gemacht haben, so gilt, wie wir schon § 87 für die aus-... Flüssigkeit bemerkten, diese Gleichung für die ganze ausströmende ...e, es ist überall dort die Geschwindigkeit der strömenden Gasmasse ... wo der Druck gleich p ist.

...eichnen wir den Druck in der Ausströmungsöffnung mit p_1, die ...digkeit des Gases dort mit v_1, so erhalten wir

$$v_1^2\left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2\frac{\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p_1}.$$

... schließlich das Verhältnis $\frac{v_0}{v_1}$ zu bestimmen, setzen wir wieder ...laß in der Fläche bei O, wo die Bewegung des Gases beginnt und

in der Öffnung bei A, die wir als sehr klein nehmen, die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 die mittlern gegen die betreffenden Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten seien. Ist dann Q der Querschnitt des Gefäßes, q_1 der der Öffnung, so ist

$$p_1 q_1 v_1 = p_0 Q v_0$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1 q_1}{p_0 Q}$$

und damit

$$v_1^{\,2} = \frac{2\,\frac{\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p_1}}{1-\left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}.$$

Ist der Querschnitt der Öffnung gegen jenen des Gefäßes hinreichend klein, so können wir, da auch $p_1 < p_0$ sein muß, wenn überhaupt ein Ausströmen stattfindet, das zweite Glied des Nenners vernachlässigen, und dann wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p_1}}.$$

Der Ausdruck für v_1 wird einfacher, wenn der Druck p_0 nur wenig von dem Drucke p_1 in der Ausflußöffnung verschieden ist. Wir erhalten zunächst

$$\log\frac{p_0}{p_1} = -\log\frac{p_1}{p_0} = -\log\left(1-\frac{p_0-p_1}{p_0}\right).$$

Nun ist, wie in der Analysis bewiesen wird

$$-\log\left(1-\frac{p_0-p_1}{p_0}\right) = \frac{p_0-p_1}{p_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_0-p_1}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p_0-p_1}{p_0}\right)^3 + \cdots$$

Wenn p_0 nur wenig größer als p_1 ist, so können in dieser Reihe alle Glieder nach dem ersten vernachlässigt werden, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}\cdot\frac{p_0-p_1}{p_0}}.$$

Es ergibt sich somit, daß bei kleinen Überdrucken die Geschwindigkeit des Ausströmens bei einem und demselben Gase der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Überdruckes $p_0 - p_1$ und des Druckes im Gasbehälter proportional ist; bei gleicher Druckdifferenz $p_0 - p_1$ nimmt sie die Ausflußgeschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus dem Drucke p_0 ab.

Für Luft von der Temperatur 0^0 wird der Wert des Koeffizienten $\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}$, da die Dichtigkeit der Luft bei dem Drucke der Atmosphäre $0^m,76$ Quecksilber gleich 0,001 293 ist, und die Dichtigkeit des Quecksilbers gleich 13,59 ist, und da wir den in Kilogrammen pro Quadratmeter sich aus sich ergebenden Druck mit $g = 9{,}808$ multiplizieren müssen, weil die Massen einfach durch die Gewichte ausgedrückt haben,

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}76\cdot 13{,}59\cdot 9{,}808}{0{,}001\,293}} = 396^m{,}002,$$

somit

$$v_1 = 396^{\mathrm{m}},002 \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Bezeichnen wir das spezifische Gewicht irgend eines andern Gases, jenes der Luft gleich 1 gesetzt, mit d, so erhalten wir für die Ausflußgeschwindigkeit desselben

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma d} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}} = \frac{396^{\mathrm{m}},002}{\sqrt{d}} \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}$$

der bei gleichen Drucken p_0 und p_1 ist die Ausflußgeschwindigkeit verschiedener Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional.

Eine Prüfung dieser Sätze durch Messung der Geschwindigkeit v_1 ist nicht möglich, da die Geschwindigkeit des Gases in der Ausflußöffnung sich nicht messen läßt. Dieselbe ist dagegen möglich, indem man die Menge des ausgeflossenen Gases mißt.

Man kann das am besten, indem man bei einer der in Fig. 220 angedeuteten ähnlichen Vorrichtung die Volumverminderung des Gases in dem Gefäße mißt, welche sich unmittelbar aus dem Volumen oder Gewichte der nachströmenden Flüssigkeit ergibt. Ist der Querschnitt der Öffnung q_1, so ist das in der Sekunde ausfließende Gasvolumen

$$w_1 = q_1 v_1.$$

Da dieses Volumen aus der Öffnung bei dem Drucke p_1 hervortritt, so entspricht in dem Gefäße, in welchem der Druck, wenn wir dasselbe als ein zylindrisches Reservoir voraussetzen, überall gleich p_0 ist, ein Volumen w, welches nach dem Mariotteschen Gesetze sich ergibt

$$w : w_1 = p_1 : p_0$$

$$w = \frac{w_1 p_1}{p_0} = q_1 \frac{p_1}{p_0} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma d} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Läßt man die Gase in die freie Luft ausströmen und wendet nur einen kleinen Überdruck an, so kann man für den Druck in der Ausflußöffnung den Druck der äußern Atmosphäre einsetzen, und erhält dann, wenn q_1 in Quadratmetern gegeben ist, das Volumen der ausgeflossenen Gasmenge in Kubikmetern.

Die Versuche ergeben auch hier, wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten, daß die wirkliche Ausflußmenge kleiner ist als die theoretische; während indes bei den tropfbaren Flüssigkeiten der sogenannte Erfahrungskoeffizient konstant war, scheint er bei den Gasen mit wachsendem Drucke p_0 etwas abzunehmen, schon innerhalb der Grenze, bei welcher die angenäherte Formel noch ausreicht, was bis etwa 1^{m} Wasserdruck als Überdruck der Fall ist. Bei sehr geringen Differenzen der Drucke $p_0 - p_1$, zwischen $0^{\mathrm{m}},028$ und $0^{\mathrm{m}},14$ Wasserdruck fand D'Aubuisson[1] den Erfahrungskoeffizienten bei Öffnungen in dünner Wand

$$\mu = 0,65,$$

1 *D'Aubuisson*, Annales de chim. et de phys. 32. 1826.

Weisbach[1]) erhielt bei ähnlichen Verhältnissen

$$\mu = 0{,}671,$$

also sehr nahe mit dem übereinstimmend, mit welchem man die theoretisch berechnete Ausflußmenge der Flüssigkeiten multiplizieren muß, um die beobachtete Ausflußmenge zu erhalten.

G. Schmidt[2]) erhielt für eine Druckhöhe von $0^{m},913$ als Koeffizienten

$$\mu = 0{,}52$$

und einen nicht viel davon verschiedenen Wert bestimmte Koch[3]) für das Ausströmen der Luft aus Öffnungen in dünner Wand.

Diese Verschiedenheit der Resultate aus den Beobachtungen und der Theorie weist darauf hin, daß bei der theoretischen Entwicklung der Ausflußgesetze nicht alle Umstände in Betracht gezogen sind, welche auf die Bewegung des Gases von Einfluß sind. Wir erkennen dieselben leicht in ähnlichen Verhältnissen wie bei den Flüssigkeiten, das Gas bewegt sich von allen Seiten gegen die Öffnung hin und dadurch wird die gegen die Öffnung senkrechte Geschwindigkeit des ausfließenden Gases gestört.

Den experimentellen Beweis dafür liefert uns der Einfluß von Ansatzröhren an die Gefäßöffnung auf die Menge des ausfließenden Gases. Nach den Versuchen von D'Aubuisson, Schmidt, Koch und Weisbach wird die Menge des ausfließenden Gases durch solche Röhren ähnlich wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten größer, so lange die Röhren nicht zu enge und zu lang sind. Nach den Versuchen von D'Aubuisson ist für kurze zylindrische Röhren, deren Länge gleich ist dem fünffachen Durchmesser $\mu = 0{,}92$ und für kurze konische Ansatzröhren, den engern Durchmesser nach außen gekehrt, $\mu = 0{,}93$, Weisbach findet für zylindrische Ansatzrohre $\mu = 0{,}839$, für konische 0,883.

Schmidt findet für konische Ansatzröhren, wenn der größere Durchmesser nach außen gekehrt ist, μ noch um vieles größer, nämlich 1,12, so daß also die beobachtete Ausflußmenge selbst größer ist als die theoretisch berechnete.

Wendet man anstatt kurzer verhältnismäßig weiter Ansatzröhren lange und enge Röhren an, so zeigt sich auch hier ähnliches wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten; der Ausfluß der Gase folgt ganz anderen Gesetzen als bei Anwendung von Öffnungen in dünnen Wänden. Nach den ausgedehnten Versuchen von Girard[4]) verhalten sich die Ausflußmengen bei nicht zu engen Röhren direkt wie die Drucke, unter welchen das ausfließende Gas steht, und umgekehrt wie die Quadrate der Röhrenlängen, durch welche das Gas abfließt.

Daß die Ausflußgeschwindigkeit der Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, kann man am bequemsten dadurch nachweisen, daß man gleiche Volume verschiedener Gase unter denselben

---

1) *Weisbach,* Experimental-Hydraulik. p. 184 ff.
2) *G. G. Schmidt,* Gilbert Annalen. 66. 1820.
3) *Fr. L. Koch,* Versuche und Beobachtungen über die Geschwindigkeit und Quantität verdichteter Luft, welche aus Öffnungen usw. ausströmt. Göttingen 18[illegible]
4) *Girard,* Mémoires de l'Institut de France. 5. 1826. — Neuere Versuche *Saint-Venant* und *Wantzel,* Comptes rendus 17. 1843.

hältnissen aus einer engen Öffnung ausströmen läßt und die dazu iche Zeit beobachtet. Die Quadrate dieser Zeiten müssen sich halten wie die Dichtigkeiten der Gase. Bunsen hat diese Mengewandt und darauf ein Verfahren gegründet, die spezifischen der Gase miteinander zu vergleichen[1], ein Verfahren, welches für technische Zwecke, wie zu Dichtigkeitsbestimmungen von is, sehr bequem ist.

lt man verschiedene Gase durch lange Röhrenleitungen gehen, so ach den Versuchen von Girard die Ausflußgeschwindigkeit nicht on der Dichtigkeit des Gases ab; unter Voraussetzung gleicher hältnisse ist die Ausflußgeschwindigkeit für die verschiedenen Gase

ch in einer andern Weise können wir die abgeleiteten Gleichungen ndem wir aus ihnen die Verteilung des Druckes in der strömenden berechnen. Bezeichnen wir in irgend einem Querschnitt q der en Gasmasse den Druck mit p, die Geschwindigkeit mit v, so erir für die Ausflußgeschwindigkeit v_1, wenn in der Ausflußöffnung k gleich p_1 ist, aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$v\,dv = -\frac{\pi}{\sigma}\frac{dp}{p},$$

ir jetzt von v bis v_1 und von p bis p_1 summieren

$$v_1^2\left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right) = 2\frac{\pi}{\sigma}\log\frac{p}{p_1},$$

ichung, welche uns mit Hilfe der Beziehung

$$pqv = p_1 q_1 v_1,$$

alt, wenn wir eine derartige Form des Gefäßes und der Ausflußvoraussetzen, daß wir die Geschwindigkeiten als senkrecht zu den len Querschnitten annehmen dürfen, den in den verschiedenen itten des Gefäßes vorhandenen Druck p zu berechnen gestattet. erhalten wir

$$v_1^2\left(1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^2\left(\frac{q_1}{q}\right)^2\right) = 2\frac{\pi}{\sigma}\log\frac{p}{p_1}.$$

en wir nun voraus, daß das Ausfließen überhaupt nur unter kleinen erfolge, so können wir zunächst setzen

$$\log\frac{p}{p_1} = \log\left(1 + \frac{p-p_1}{p_1}\right) = \frac{p-p_1}{p_1}$$

er

$$= \left(\frac{p}{p_1}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{p-p_1}{p_1}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{p-p_1}{p_1} + 3\left(\frac{p-p_1}{p_1}\right)^2 + \cdots$$

nen in dieser Reihe schon das dritte Glied vernachlässigen. Dann wir

$$v_1^2\left\{1 - \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 - 2\frac{p-p_1}{p_1}\left(\frac{q_1}{q}\right)^2\right\} = 2\frac{\pi}{\sigma}\frac{p-p_1}{p_1}$$

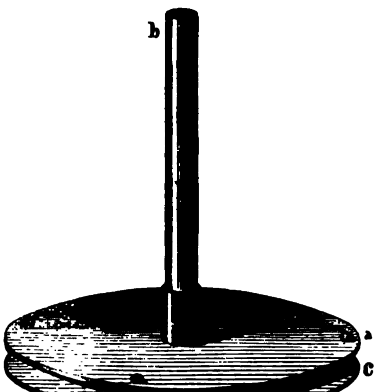
[1] Bunsen, Gasometrische Methoden p. 128 ff

und daraus
$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{2\pi}{\sigma v_1^2} q^2 - 2 q_1^2}$$
oder, indem wir im Nenner rechts v_1^2 durch seinen Wert
$$v_1^2 = \frac{\frac{2\pi}{\sigma} \frac{p_0 - p_1}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}$$
ersetzen,
$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{p_1}{p_0 - p_1} q^2 \left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2\right) - 2 q_1^2}.$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite hängt davon ab, ob $q > q_1$ oder $q < q_1$, denn da unsere ganze Entwicklung nur gilt, so lange $p_0 - p_1$ gegen p_1 sehr klein ist, so ist der Nenner der rechten Seite bei allen in der Praxis herzustellenden Vorrichtungen als positiv zu nehmen. Dann ergibt sich, daß in allen Querschnitten, welche größer sind als die Ausflußöffnung, $p > p_1$, in allen, welche kleiner sind als die Ausflußöffnung, dagegen $p < p_1$. Läßt man deshalb Gas oder Luft in die äußere Atmosphäre ausströmen, so daß in der Ausflußöffnung der Druck p_1 gleich dem der äußern Atmosphäre ist, so wird an allen Stellen, an welchen das ausströmende Gas einen Querschnitt passiert, der kleiner ist als die Ausströmungsöffnung, der Druck kleiner als derjenige der Atmosphäre.

Mit Hilfe des kleinen Apparates Fig. 221 kann man diesen geringeren Druck leicht nachweisen. Eine Glasröhre mündet in der Mitte einer Scheibe und in einiger Entfernung von letzterer ist eine zweite nicht durchlöcherte Scheibe mittels dreier Drähte festgehalten, welche sich der Mündung der Röhre nähern kann. Bläst man kräftig in die Röhre b hinein, so sieht man, wie sich die Scheibe c der Schwere entgegen zur Scheibe a hinbewegt, einen Moment die Öffnung der Röhre verschließt, dann wieder abgestoßen wird, wieder sich gegen a hinbewegt und so auf und nieder sich bewegt, so lange man in die Röhre hineinbläst. Die Ausflußöffnung ist hier die ringförmige Spalte zwischen den Rändern der beiden Scheiben, nach welcher von der Mitte aus die Luft sich auf den Radien hinbewegt. Die einzelnen um den Mittelpunkt der Scheibe a gelegten zur Scheibe a und c senkrechten kreisförmigen Schnitte bilden also die verschiedenen Querschnitte, welche somit alle kleiner sind als die Ausflußöffnung, so daß auf die ganze Scheibe von unten nach oben ein stärkerer Druck wirkt als von oben nach unten. In dem Augenblicke aber, in welchem infolge dieses Druckes die Platte c si

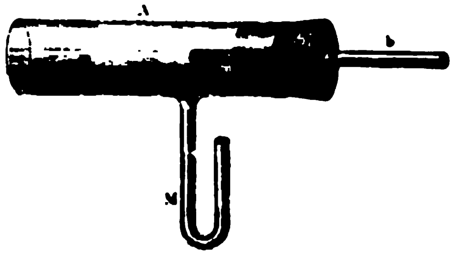
Fig. 221.



die Öffnung der Röhre legt, die Luft also am Ausfließen gehindert l, tritt der statische Druck der in der Röhre b verdichteten Luft in tsamkeit, und treibt die Platte fort, welche dann wieder gegen a be- t wird, und so fort.

Mit der Anordnung Fig. 222 kann man diesen kleinern Druck ebenso kt sichtbar machen. Man steckt in ein weiteres Glasrohr A, an welches kleines Manometerrohr M an- hmolzen ist, mit einem Stopfen engeres Rohr b und schiebt elbe soweit hinein, daß das s sich in dem Querschnitt be- t, in welchem das Manometer- angeschmolzen ist. Füllt man i das Manometer mit Wasser, bläst durch das Röhrchen b, steigt das Wasser in dem akel des Manometerrohres or, welcher mit der Röhre A erbindung steht. Die Niveaudifferenz in den beiden Röhren gibt die renz der Drucke in der Mündung des engen Rohres und an der Aus- ffnung.

Fig. 222.



§ 117.

Reibung der Gase. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Be- ungen gelten nur für das Ausfließen der Gase durch eine Öffnung in ner Wand oder durch Röhren, welche einen im Verhältnis zu ihrer ge nicht zu kleinen Querschnitt haben; läßt man die Gase durch llare Röhren ausfließen, so werden, wie das sich zuerst aus ausge- lten Versuchen von Graham[1]) ergab, die Gesetze des Ausflusses wie Flüssigkeiten ganz andere, welche beweisen, daß auch bei den Gasen innere Reibung vorhanden ist, und ebenso eine Reibung an den den der Röhre, durch welche die Gase fließen.

Daß in der Tat bei den Gasen eine innere Reibung vorhanden sein , und welchen Gesetzen dieselbe folgen muß, ergibt sich unmittelbar der kinetischen Gastheorie, wie zuerst Maxwell[2]) aus seiner ältern, wir erwähnten, im wesentlichen mit derjenigen von Clausius über- timmenden Anschauung über die Natur der Gase abgeleitet hat. Später lie Theorie der Reibung von O. E. Meyer[3]), Tait[4]), Clausius[5]) be- lelt worden und in sehr einfacher Weise von v. Lang[6]).

1 *Graham*, Philosophical Transactions of London R. S. **136**. 1846 und 1849.

2 *Maxwell*, Philosophical Mag. **19**. (4) 1860. Eine etwas andere Theorie Reibung aus seiner spätern Gastheorie gibt *Maxwell*, Phil. Mag. **35**. (4) 1868.

3 *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. **125**. 1865. Kinetische Theorie der Gase afl. Breslau 1894—1899 p. 171 ff. Mathem. Zusätze. p. 96.

4 *Tait*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh. **33**. I. p. 65. 1888.

5 *Clausius*, Mechanische Wärmetheorie. II. Aufl. **3**. Abschn. III. Braun- eig 1891.

6 *v. Lang*, Poggend. Ann. **145**. 1872. Man sehe auch *Stefan*, Wiener Be- e. **65**. p. 343. 1872. *Boltzmann*, Wiener Berichte. **66**. p. 325. 1872.

Wir denken uns zu dem Ende eine Gasmasse, welche nach einer Richtung strömt, nehmen an, daß die einander parallelen Schichten mit verschiedener Geschwindigkeit strömen, und untersuchen, welche Verzögerung eine Schicht dadurch erhalten muß, daß die an einer Seite neben ihr befindliche eine kleinere Strömungsgeschwindigkeit hat. Denken wir uns jetzt durch die strömende Gasmasse der Strömungsrichtung parallel, und zwar so eine Ebene gelegt, daß die sämtlichen in einer der Ebene parallelen Gasschicht liegenden Teilchen dieselbe Strömungsgeschwindigkeit haben, daß aber mit der Entfernung von der Ebene nach der einen Seite die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung zunimmt, nach der andern Seite mit wachsender Entfernung abnimmt. In einer ruhenden Gasmasse nehmen wir, was allerdings, wie wir sahen, nicht der Wirklichkeit entspricht, für alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit an, welche nach allen Richtungen des Raumes gerichtet ist, so daß keine Richtung vor der andern bevorzugt ist. In einer parallel einer bestimmten Richtung bewegten Gasmasse haben die Moleküle zunächst diese, von uns bisher mit u bezeichnete Geschwindigkeit und außerdem eine der Bewegungsrichtung parallele Geschwindigkeit, welche der Strömungsgeschwindigkeit des Gases gleich ist. Nennen wir diese Strömungsgeschwindigkeit in der gedachten durch die strömende Gasmasse gelegten Ebene v_0, so ist sie in dem von uns angenommenen Falle für alle Gasschichten an der einen Seite der Ebene $v_0 + \varphi$, an der andern $v_0 - \varphi$, worin φ mit wachsendem Abstande von der gedachten Ebene größer wird. Infolge der den Gasmolekülen eigentümlichen nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig mit der Geschwindigkeit u stattfindenden Bewegung werden durch die gedachte Ebene in jedem Momente Moleküle von der einen zur andern Seite gehen, und zwar muß, da die Dichtigkeit an allen Stellen der Gasmasse dieselbe bleibt, die Zahl der Moleküle, welche von Seiten der rascher bewegten zu den langsamer strömenden Schichten hinüber gehen, genau so groß sein als die Zahl der umgekehrt von den langsamer zu den rascher strömenden Schichten übertretenden Moleküle. Da diese letztern nun aber eine geringere Geschwindigkeit in der Richtung der Strömung besitzen, so muß ihnen von der strömenden Gasmasse eine gewisse Geschwindigkeit mitgeteilt werden; ebenso übertragen die zu der langsamer strömenden Gasmasse hinübertretenden Moleküle dorthin eine gewisse Bewegungsgröße. Das geht aber nur auf Kosten der Bewegung der rascher strömenden Gasmasse, so daß diese eine der den eintretenden Molekülen erteilten und der an die langsamer strömenden übertragenen genau gleiche Bewegungsgröße verliert. Diese verlorene Bewegungsgröße der rascher strömenden Gasmasse ist der Effekt der Reibung. Eine genau gleiche Bewegungsgröße erhalten die langsamer fließenden Schichten, so daß diese eine Beschleunigung erhalten müssen, deren Wert ebenso groß ist, als derjenige der Verzögerung der rascher strömenden Schichten.

Man sieht, daß hieraus zunächst die Tatsache der Reibung, wie sie bei den Beobachtungen sich ergibt, als in der Konstitution der Gase begründet erscheint.

Um die Größe der Reibung zu bestimmen, haben wir die Bewegungsgröße zu berechnen, welche den in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der vorhin gedachten Ebene von der Seite der langsamer strömenden

hichten auf die Seite der rascher strömenden Schichten hinüber treten-m Molekülen mitzuteilen ist.

Um die überhaupt durch eine Ebene hindurchtretenden Moleküle zu halten, können wir die vereinfachende Annahme machen, daß nur solche olekūle durch sie hindurchgehen, welche in der Richtung ihrer Bewegung cht weiter von ihr entfernt sind, als die mittlere Wegelänge l beträgt, d daß aus allen Schichten bis zu dieser Entfernung die gleiche Anzahl Molekülen übertritt. Denken wir uns also etwa ein Flächenelement ds d auf diesem unter dem Winkel ϑ einen prismatischen Raum von der nge l, so wird aus jeder Schicht dieses Raumes von der Dicke dl die iche Anzahl von Molekülen durch das Flächenelement ds hindurchtreten. ergibt sich das unmittelbar aus der Bedeutung der mittleren Wegenge. Die gesamten zwischen zwei Zusammenstößen der Moleküle zurückegten Wege dividiert durch die Zahl der Moleküle sind diese mittleren ege; anstatt die einzelnen Moleküle mit ihren Wegen in Betracht zu hen, ist es somit im Effekt dasselbe, wenn wir annehmen, alle Moleküle en von einem Stoß zum andern diesen Weg zurück. Dann wird aber n Molekül, welches weiter in der Richtung seiner Bewegung von der enze, als die Strecke l beträgt, entfernt ist, in Betracht zu ziehen sein, es vor Erreichung der gedachten Grenzebene an ein Molekül stößt und rückkehrt; alle in der Richtung ϑ sich bewegenden aber, deren Ent nung zwischen Null und l beträgt, treten über, und zwar so weit, daß r zurückgelegte Weg gleich l geworden ist. Da nun die Moleküle ganz ichmäßig im Raume verteilt sind, so müssen dann auch aus jeder Schicht eicher Dicke gleich viel Moleküle sich herausbewegen.

Wie wir im § 103 sahen, ist die Zahl der Moleküle, welche gegen e Fläche von der Größe s in der Richtung ϑ anprallen,

$$\frac{s N u \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{2 V}.$$

Nennen wir die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle so

$$\frac{N}{V} = n$$

d setzen wir für s die Flächeneinheit, so gibt uns der Ausdruck

$$\frac{n u \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{2}$$

ch die Anzahl der in der Richtung ϑ durch die betrachtete Fläche des ses pro Flächeneinheit hindurchgehenden Zahl von Molekülen; denn ist der betreffenden Stelle keine Wand, so gehen die Moleküle eben durch Fläche hindurch, die, wenn eine Wand vorhanden ist, an dieselbe an allen.

Da alle diese Moleküle aus der zwischen Null und l liegenden Ent nung herkommen, so kommen aus jeder Schicht zwischen Null und l der Richtung ϑ von der Dicke $d\xi$ eine Anzahl von Molekülen, welche h zur Gesamtzahl verhält wie $\frac{d\xi}{l}$. Aus einer in der Richtung der Be gung genommenen Entfernung $\xi < l$ und einer Schicht, welche in dieser

Richtung die Dicke $d\xi$ hat, passieren also unsere gedachte Grenzebene pro Flächeneinheit

$$\frac{nu \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{2} \frac{d\xi}{l}$$

Moleküle. Wir berechnen jetzt die Bewegungsgröße, welche diesen aus der Entfernung ξ kommenden und durch die gedachte Grenzebene von den langsamer zu den rascher strömenden Schichten in der Richtung ϑ hinüber gehenden Molekülen erteilt werden muß. Indem wir dann für ξ nach und nach alle Werte von Null bis l einsetzen und die so für alle innerhalb dieser Entfernung befindlichen Moleküle erforderliche Bewegungsgröße bilden, erhalten wir in der Summe aller dieser Werte zunächst die Bewegungsgröße, welche den in der Richtung ϑ übertretenden Molekülen erteilt werden muß.

Wir bezeichneten schon vorhin die Strömungsgeschwindigkeit in der gedachten Grenzebene mit v_0 und in einiger Entfernung davon an Seite der langsamer strömenden Schichten mit $v_0 - \varphi$; die Größe φ wächst mit der Entfernung der Schichten von der Grenzebene. Da es sich hier nur um äußerst kleine Entfernungen handelt, dürfen wir φ dem senkrechten Abstande z der betrachteten Schicht von der Grenze proportional, also setzen

$$\varphi = \frac{dv}{dz} z,$$

worin dv die Abnahme der Geschwindigkeit gibt, wenn z um dz wächst, somit der Quotient die Abnahme der Geschwindigkeit bedeutet, wenn der senkrechte Abstand von der Grenze um die Einheit der Entfernung zunimmt, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitsabnahme überall gleichmäßig erfolgen würde, wie an der gerade betrachteten Stelle.

Ein aus dem Abstande ξ in einer Richtung, welche mit der Normalen den Winkel ϑ bildet, kommendes Molekül kommt aus einer Schicht, deren senkrechter Abstand von der Grenze

$$z = \xi \cos\vartheta$$

ist, es hat somit die Strömungsgeschwindigkeit

$$v_0 - \frac{dv}{dz} \cdot \xi \cos\vartheta.$$

Dieses Molekül geht an der andern Seite der Grenzebene bis zu einem Abstande

$$z = (l - \xi) \cos\vartheta,$$

es muß somit dort eine Strömungsgeschwindigkeit erhalten

$$v_0 + \frac{dv}{dz} (l - \xi) \cos\vartheta,$$

seine Strömungsgeschwindigkeit muß somit um

$$\left(v_0 + \frac{dv}{dz} (l - \xi) \cos\vartheta\right) - \left(v_0 - \frac{dv}{dz} \xi \cos\vartheta\right) = \frac{dv}{dz} l \cos\vartheta$$

zunehmen. Ist m die Masse des einzelnen Moleküls, so entspricht die

schwindigkeitszunahme die Bewegungsgröße

$$m \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta .$$

Für die aus der Entfernung ξ von Seiten des langsamer strömenden ses kommenden unter einem Winkel ϑ die Grenzebene durchsetzenden olekūle ist somit der Zuwachs an Bewegungsgröße, welche sie auf Kosten r strömenden Gasschicht erhalten

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d \vartheta}{2} \frac{d \xi}{l} \cdot m \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta .$$

Für die überhaupt in der Richtung ϑ übertretenden Moleküle ergibt h dann die erforderliche Bewegungsgröße aus der Überlegung, daß auf r Strecke l, von welcher überhaupt Moleküle in dieser Richtung überten, $\frac{l}{d\xi}$ Schichten von der in der Bewegungsrichtung genommenen Dicke sind. Da aus jeder dieser Schichten die gleiche Zahl von Molekülen mmt, und da nach der eben gemachten Entwicklung für jedes der Molele die gleiche Zunahme der Bewegungsgröße eintreten muß, erhalten r die für alle in der Richtung ϑ übertretenden Moleküle erforderliche wegungsgröße, indem wir den eben gefundenen Ausdruck mit $\frac{l}{d\xi}$ multiizieren. Dieselbe wird somit

$$\frac{m n u l}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d \vartheta \frac{dv}{dz} .$$

Diesen Verlust an Bewegungsgröße erfährt die rascher strömende Gasasse durch die von Seite der langsamer strömenden Schichten in sie in r Richtung ϑ eintretenden Moleküle. Einen genau ebenso großen Verst an Bewegungsgröße erfährt sie dadurch, daß von Seiten der rascher römenden Gasmasse genau so viel Moleküle in die langsamer strömende ergehen und dort genau denselben Zuwachs an Bewegungsgröße überigen. Denn die Zahl der übertretenden Moleküle ist genau dieselbe, und les legt den Weg l in der Richtung von der rascher zu der langsamer römenden Gasmasse zurück, gibt also an diese genau die gleiche Beegungsgröße ab, welche das aus der entsprechenden Lage von der andern ite kommende zu erhalten hat.

Der Gesamtverlust, den die durch die Grenzebene in der Richtung ϑ h austauschenden Moleküle in der rascher strömenden Gasmasse bewirken, somit das Doppelte des eben berechneten, oder

$$m n u l \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d \vartheta \frac{dv}{dz} \cdot$$

Wir erhalten dann den Verlust an Bewegungsgröße, den die rascher ömende Gasmasse überhaupt durch die sich austauschenden Moleküle errt, wenn wir obigen Wert für jeden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Win- ϑ bilden und alle diese Werte summieren, also in der Summe

$$m n u l \frac{dv}{dz} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d \vartheta ,$$

da $mnul\frac{dv}{dz}$ für jede Richtung ϑ denselben Wert hat. Diese Summe ist, wie wir schon mehrfach sahen,

$$\frac{1}{3}mnul\frac{dv}{dz}.$$

Dieser Verlust der Bewegungsgröße der rascher strömenden Gasmasse, dem ein genau gleicher Gewinn auf Seiten der langsamer strömenden gegenüber steht, ist der Effekt der Reibung.

Gerade wie bei den Flüssigkeiten können wir die Reibung auch hier als einen in der Grenzebene der Bewegungsrichtung entgegenwirkenden Druck definieren, der Druck muß auf die Flächeneinheit während einer Sekunde wirkend der strömenden Gasmasse denselben Verlust an Bewegungsgröße, oder dieselbe Bewegungsgröße in der der Strömung entgegengesetzten Richtung erteilen. Bezeichnen wir diesen Druck mit K, so ist

$$K = \frac{1}{3}mnul\frac{dv}{dz}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem § 89 für die Reibung in Flüssigkeiten erhaltenen Ausdruck

$$K = \eta f\frac{dv}{dz},$$

indem wir hier z für x setzen, weil wir die zur Strömungsrichtung normale Richtung mit z bezeichnet haben, so erkennt man, daß für die Gase ganz dasselbe Reibungsgesetz für die innere Reibung gilt, und daß der Reibungskoeffizient

$$\eta = \frac{1}{3}mnul$$

ist[1]. In diesem Ausdrucke bedeutet n die in der Volumeinheit vorhandene Molekülzahl. Nach § 102 können wir, wenn wir die von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Räume außer acht lassen, für l setzen

$$l = \frac{1}{n\frac{4}{3}\varrho^2\pi}\,\varrho$$

und erhalten dann für η

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{mu}{\frac{4}{3}\varrho^2\pi}\cdot\varrho,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, daß der Reibungskoeffizient von der Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also auch, soweit die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, von dem Drucke unabhängig ist, unter welchem das Gas steht.

Die Notwendigkeit dieses auf den ersten Blick sehr auffallenden Satzes ergibt sich indes aus der Natur der Gasreibung als Abgabe der Bewegung der schneller strömenden Moleküle an die in sie eindringenden langsamer fortschreitenden. Wird die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit kleiner, so nimmt in demselben Verhältnisse die Wegelänge l, also die Dicke der

1) Für den Zahlenkoeffizient des Ausdrucks für die Reibungskonstante erhält man einen etwas verschiedenen Wert, wenn man die Annahme, daß alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit haben, fallen läßt. Man sehe Clausius, Mechanische Wärmetheorie. 3. p. 101; je nach der Bedeutung, welche dem Mittelwerte u beigelegt wird, erhält Clausius 0,3501 oder 0,3225.

agsamer strömenden Schicht, aus welcher die Moleküle in die rascher strömende übertreten, zu, die übertragene Bewegungsgröße muß also denselben Wert behalten, vorausgesetzt, daß die strömende Gasmasse in der zur Bewegung senkrechten Richtung eine solche Ausdehnung hat, daß die mit abnehmender Dichte, wegen des Wachsens von l wachsende Dicke der Schicht ganz mit Gas ausgefüllt ist.

Bei einer sehr weitgehenden Verdünnung des Gases ist indes die vorgeführte Theorie nicht mehr gültig[1], da wir dann die Annahme nicht mehr machen dürfen, daß nur Moleküle aus Schichten von der Dicke l sich austauschen. Wir werden sehen, daß auch bei sehr hohen Drucken die Theorie nicht mehr besteht.

§ 118.

Bestimmung der Reibungskoeffizienten der Gase. Da nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen die Theorie für die Reibung der Gase zu dem auch für die Flüssigkeiten gültigen Reibungsgesetze führt, müssen auch die zur Beobachtung der Flüssigkeitsreibung dienenden Methoden zur Beobachtung der Gasreibung geeignet sein. Zunächst muß sich für das Ausströmen von Gasen aus kapillaren Röhren ganz der entsprechende Ausdruck ergeben wie für das Ausströmen von Flüssigkeiten. Die von O. E. Meyer[2]) durchgeführte Theorie des Ausströmens von Gasen durch kapillare Röhren, die den Entwicklungen des § 89 ganz analog ist, führt denn auch zu ganz entsprechenden Ausdrücken für das Volumen der durchströmenden Gase. Mißt man das Volumen des unter konstanten Druckverhältnissen, das heißt während des ganzen Versuches konstantem Drucke p_a beim Anfange und p_e am Ende der kapillaren Röhre durch die Röhre geströmten Gases unter dem arithmetischen Mittel der Drucke p_a und p_e, also unter dem Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$, so liefert die Theorie für das in der Zeiteinheit ausströmende Volumen V

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta L} \left(R^4 + 4\,\frac{\eta}{\varepsilon}\,R^3 \right),$$

also genau denselben Ausdruck, welchen wir für das Volumen der ausgeflossenen Flüssigkeit fanden, wenn wie dort η die Konstante der innern, ε jene der äußern Reibung, L die Länge und R den Radius der kapillaren Röhren bedeutet.

Mißt man das Volumen des ausfließenden Gases unter einem andern Drucke, etwa p_a oder p_e, so ändert sich dieser Ausdruck etwas, da dann das Volumen V ein anderes wird; messen wir das Volumen etwa einfach durch die Volumverminderung des Gases in dem Gefäße, aus welchem das Gas ausströmt, also unter dem Drucke p_a, so wird dasselbe V_1 nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V_1 \cdot p_a = V \cdot \frac{p_a + p_e}{2}$$

---

1) *Kundt* und *Warburg*, Poggend. Ann. 155. p. 337. 1875.
2) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. 127. p. 253. 1866.

und deshalb

$$V_a = \frac{\pi(p_a^2 - p_e^2)}{16\eta L p_a}\left(R^4 + 4\frac{\eta}{\varepsilon}R^3\right).$$

An den im Anfang des vorigen Paragraphen erwähnten, in den Jahren 1846 und 1849 von Graham angestellten Versuchen hat Meyer die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen. Unter den vielen Versuchsreihen Grahams ist eine, bei welcher die Drucke p_a und p_e konstant erhalten wurden; es wurde unter konstantem Drucke p_a ein bestimmtes unter dem Drucke p_a gemessenes Volumen Luft in die Glocke einer Luftpumpe strömen gelassen, in der durch fortgesetztes Pumpen ein konstant luftverdünnter Raum erhalten wurde, und die Zeit bestimmt, welche bei verschiedenen Drucken p_a dazu erforderlich war. Bezeichnen wir die dazu erforderliche Zeit mit t, so wird, da wir $p_e = 0$ setzen können,

$$V_a = p_a t \frac{\pi}{16\eta L}\left(R^4 + 4\frac{\eta}{\varepsilon}R^3\right),$$

somit

$$p_a t = \frac{V_a 16\eta L}{\pi} \cdot \frac{1}{R^4 + 4\frac{\eta}{\varepsilon}R^3}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist, da immer dasselbe Volumen V_a und dieselbe Röhre benutzt wurde, konstant, es muß also bei diesen Versuchen das Produkt aus dem Drucke p_a und der Zeit t konstant sein. Das ergaben auch die Versuche Grahams; bei drei Versuchsreihen ergaben sich folgende Werte

p_a	t	$p_a t$
1 Atmosph.	799″,5	799,5
0,75 „	1050	787,5
0,5 „	1543	771,5

Werte, welche so wenig voneinander abweichen, daß man sie in Anbetracht der Schwierigkeit der Versuche als eine Bestätigung des Satzes ansehen muß, daß die Größe der Reibung von dem Drucke unabhängig ist.

Bei den übrigen Versuchen ließ Graham entweder nur p_a oder p_e konstant; indem Meyer aber aus obiger für den stationären Zustand geltenden Gleichung jene ableitete, welche für ein nur konstantes p_a oder p_e gültig sind, konnte er zeigen, daß alle Versuche Grahams mit der Theorie in Übereinstimmung sind.

Später haben dann O. E. Meyer gemeinschaftlich mit Springmühl[1] und A. von Obermaier[2]) in ausführlichen Versuchen das Ausströmungsgesetz der Gase durch kapillare Röhren geprüft, und gleichzeitig gezeigt, daß auch für Gase sich dabei der Koeffizient ε der äußern Reibung als unendlich groß ergibt. Man wird also auch bei den Gasen unter diesen Umständen annehmen müssen, daß die letzte Schicht fest an den Wänden

1) *Meyer* und *Springmühl,* Poggend. Ann. 148. p. 1 und p. 526. 1873.
2) *A. von Obermaier,* Wiener Berichte. 73. 1877; *Carl,* Repertorium 12. 1876; 13. 1877. Man sehe auch *von Lang,* Wiener Berichte. 63. 1871 und Meyer Berechnung dieser Versuche. Poggend. Ann. 148. p. 550. 1873.

r Röhre adhäriert, und daß an dieser sich die strömenden Gasschichten orbeischieben.

Infolge dieser Erfahrung ist die Beobachtung der durch eine kapillare öhre strömenden Gasmenge auch vortrefflich geeignet, um die Reibungskoeffizienten der Gase in absolutem Maße zu bestimmen; sie ist zu dem wecke von Meyer und Springmühl und von A. von Obermaier be utzt worden. Die von diesen Experimentatoren erhaltenen Resultate werden ir nachher für einige Gase zusammenstellen[1]).

Bei Besprechung der Reibung der Flüssigkeiten haben wir noch eine dere Methode zur Bestimmung der Reibungskoeffizienten kennen gelernt, elche darin bestand, daß man eine kreisförmige Scheibe um eine durch ren Mittelpunkt gehende und zu ihrer Ebene senkrechte Achse in Schwin ungen versetzt, und das logarithmische Dekrement dieser Schwingungen stimmt. In welcher Weise dieses Dekrement von der Reibung, welche e Platte in ihrer Bewegung erleidet, abhängig ist, haben wir § 89 ab leitet.

Wie wir dort sahen, erhält man den Reibungskoeffizienten der Flüssig iten aus der Differenz der logarithmischen Dekremente, wenn man die hwingungen der Scheibe in der Luft und in der Flüssigkeit beobachtet. dieser Form ist die Methode zur Bestimmung der Reibungskoeffizienten r Luft nicht anzuwenden, da man einen luftleeren Raum nicht herstellen nn. O. E. Meyer, der diese Methode zuerst zur Messung der Luftreibung nutzte, verfuhr deshalb folgendermaßen.[2] An dem Draht, dessen Torsion e Schwingungen bewirken soll, deren Dekrement beobachtet wird, wurde n vertikal herabhängender zylindrischer Stab befestigt Auf diesen wurden ei kreisförmige Scheiben von gleichem Durchmesser, entweder Glasscheiben n 150^{mm} oder Messingscheiben von 200^{mm} Durchmesser, verschiebbar ugesetzt, so daß man entweder die Scheiben in einem gewissen Abstande neinander einklemmen konnte, oder alle drei fest aneinander geschoben einer Scheibe vereinigen konnte. In dem letztern Falle wirkt die Luft ibung nur auf eine Scheibe, in dem erstern dagegen auf drei Scheiben. d das von der Luftreibung herrührende Dekrement der Schwingungen t dann das dreifache von demjenigen, welches man mit einer Scheibe hält. Die Rechnungen führen im übrigen zu denselben Gleichungen, die ch die Flüssigkeitsrechnung ergeben; wir gehen nicht weiter darauf ein. O. E. Meyer nach dieser Methode nur wenig befriedigende Resultate

1 *Schumann*, Wiedem Ann 23. p 337 1884 spricht die Ansicht aus, daß Beobachtung des Durchflusses durch kapillare Röhren kein geeignetes Mittel r Erlangung absoluter Werte der Reibungskoeffizienten sei; ganz besonders int er, die Methode sei nicht geeignet die Änderungen der Reibungskoeffi nten mit der Temperatur zu erkennen Einen wesentlichen Grund für seine sicht sieht er in der Änderung des äußeren Reibungskoeffizienten ε mit der mperatur, auf welche wir später zu sprechen kommen, und in der mit der mperatur sich ändernden Adsorption der Gase, die zudem nach den Versuchen Kayser in Röhren verschiedenen Durchmessers verschieden sei Ich kann Einwürfe Schumanns nicht für richtig halten, er überschätzt ohne Zweifel Einfluß der Adsorption der Gase. Man sehe in bezug auf die Bemerkungen Schumann auch *Barus*, Wiedem Ann. 36 p. 358 1889

2 *O E. Meyer*, Poggend. Ann 125. p 177, 401, 564 1865.

erhielt, auch nachdem er die im § 89 erwähnte Korrektion von W. König in seinen Rechnungen angewandt hatte.[1])

Eine sehr wesentliche Verbesserung wurde dieser Methode durch Maxwell[2]) gegeben, die darin bestand, daß er die beweglichen Scheiben zwischen denselben sehr nahestehenden festen, den beweglichen parallelen Scheiben schwingen ließ. Es wurden über und unter die schwingenden Scheiben und zwischen dieselben dünne aus zwei Halbkreisen bestehende Platten geschoben, so daß sich zwischen den schwingenden und festen Scheiben nur wenige Millimeter dicke Luftplatten befanden. Durch diese Modifikation des Coulombschen Verfahrens wird die dämpfende Wirkung der Luftreibung eine ganz erheblich stärkere; läßt man nämlich die Scheiben ohne zwischen oder nahe gestellte Platten schwingen, so überträgt sich von der schwingenden Platte aus die Bewegung erheblich weiter, während bei den zwischen gestellten Platten die an der festen Platte anliegende Luftschicht durch die Adhäsion in Ruhe bleibt; infolgedessen ist die Geschwindigkeitsabnahme der Bewegung mit Entfernung von der schwingenden Platte, der § 89 als $\frac{d\psi}{dx}$ bezeichnete Differentialquotient erheblich größer. Die theoretische Behandlung der zwischen den Platten stattfindenden Bewegung der Luft zeigt ferner, daß das von der Reibung an der Luft abhängige logarithmische Dekrement in diesem Falle direkt dem Reibungskoeffizienten proportional ist. Ist nämlich jetzt λ das beobachtete, λ_0 das von der Luftreibung nicht abhängige Dekrement, so wird nach Maxwell

$$\lambda - \lambda_0 = N \frac{\pi (R + \alpha)^4}{4DM} T\eta (1 + \vartheta),$$

wenn N die Anzahl der Oberflächen der Scheiben ist, welche der Luftreibung ausgesetzt sind, D den Abstand der Oberfläche der beweglichen von der zugewandten Seite der festen Scheibe bedeutet.

Läßt man eine Scheibe zwischen zwei festen schwingen, so wird $N = 2$ und der Ausdruck wird

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\pi (R + \alpha)^4}{2DM} T\eta (1 + \vartheta).$$

Die Größe α ist eine Korrektion wegen des Scheibenrandes, welche nach Maxwell gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{2b}{\pi} \log \text{nat}\ 10 \left(\log_{10} 2 - \log_{10} \sin \frac{D\pi}{2b}\right),$$

wo das Zeichen $\log_{10}$ Briggische Logarithmen andeuten soll; $2b$ ist der Abstand der einander zugewandten Flächen der festen Scheiben, also gleich $2D$ vermehrt um die Dicke der schwingenden Scheibe. Setzen wir die Zahlenwerte für die Logarithmen ein, so wird

$$\alpha = 0{,}731\,25 \cdot 2b \left(0{,}301\,03 - \log \sin \frac{D\pi}{2b}\right).$$

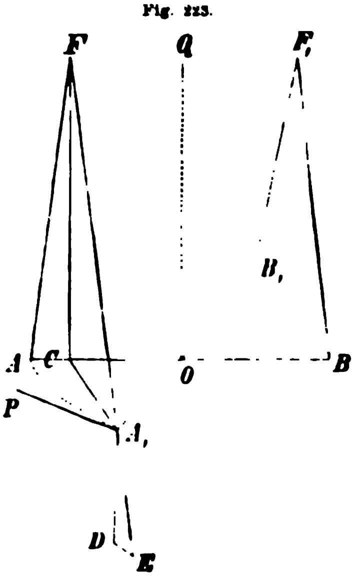
Die Größe ϑ ist ein Korrektionsglied, das durch eine Reihe gegeben

1) *O. E. Meyer,* Wiedem. Ann. 32. p. 657. 1887.
2) *Maxwell,* Philos. Transactions. 156. p. 249. 1866.

, deren Wert von der Dichte der Luft abhängt, und welche um so näher sich Null wird, je kleiner der Abstand D, je größer die Schwingungs-ser T und je geringer die Luftdichte ist. Bei einem Werte $D = 4{,}6^{mm}$ d $T = 36''$ wird nach Maxwell, wenn die Luft unter dem Drucke der mosphäre steht, $\vartheta = -0{,}000\,58$. Bei kleinern Werten D und geringe-r Luftdichte nimmt der Wert rasch ab; bei den gleich zu besprechenden rsuchen von Kundt und Warburg war er gleich Null zu setzen.

Wegen der Größe und Unsicherheit in der Bestimmung der innern ibung wandten später Meyer[1] sowie Kundt und Warburg[2]) zur Auf-agung der Scheiben, die zuerst von Gauß[3]) bei magnetischen Beobach-gen benutzte Bifilarsuspension an. Dieselbe besteht darin, daß man Körper, der Schwingungen vollführen soll, an zwei Fäden von gleicher age aufhängt, welche sich in größerer oder geringerer Entfernung von-ander befinden, und welche entweder einander parallel hängen, wenn ihre ren und unteren Anknüpfungspunkte gleich weit voneinander entfernt d, oder symmetrisch zur vertikalen, wenn die unteren Anknüpfungspunkte ander näher oder auch voneinander entfernter sind als die oberen. Ein aufgehängter Körper befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn die den Fäden sich ihrer ganzen Länge nach in einer Vertikalebene befinden, d eine durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Vertikale sich in der-ben Ebene befindet. Bringt man den Körper aus seiner Lage durch eine ehung um die Mittellinie der beiden Fäden, so wird das Gleichgewicht stört, da die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr bestehen; die Fäden d nicht mehr parallel, nicht mehr in einer Ebene, und gleichzeitig wird r Schwerpunkt des Körpers etwas ge-ben. Es entsteht daher ein Drehungs-oment, welches den Körper in die Gleich-wichtsstellung zurückzuführen bestrebt . Um die Größe dieses Drehungsmo-entes zu bestimmen, sei AB (Fig. 223) s Durchschnitt durch den Körper in der fhängeebene FA, F_1B seien die Auf-ngefäden und der Schwerpunkt des Kör-rs sei in der Mittellinie QO. Ist das wicht des Körpers p, so können wir r unsere Betrachtung annehmen, in jedem r Aufhängepunkte A und B wirke das wicht $\frac{p}{2}$. Nun werde der Körper in die ge A_1B_1 gedreht, wobei wir voraus-tzen wollen, daß die Fäden eine solche age gegenüber den Abständen $AB = 2a$ er $FF_1 = 2b$ haben, daß wir die durch Drehung eintretende Hebung des hwerpunktes außer acht lassen können.

Fig. 223.



1 O. E. Meyer, Poggend. Ann. 148. p 14. 1871.
2 Kundt und Warburg, Poggend. Ann. 155. p. 873 1875.
3 Gauß, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins für Jahr 1837. p 1, für das Jahr 1840. p 1.

Dann befinden sich AB und A_1B_1 in derselben Horizontalebene und $AOA_1 = \varphi$ ist der Winkel, um welchen der Körper gedreht ist. Das Gewicht $\frac{p}{2}$, das durch die Länge A_1D dargestellt sei, greift dann in A_1 vertikal abwärts an, und bildet mit der Richtung des Fadens einen Winkel DA_1E, der gleich ist dem Winkel CFA_1, wenn CFA_1 die durch den Faden FA_1 und die Vertikale gelegte Ebene ist. Den parallel A_1D gerichteten Zug $\frac{p}{2}$ können wir in zwei Komponenten zerlegen, deren eine parallel der Richtung des Fadens A_1E, deren andere in der Ebene CA_1D senkrecht zum Faden den Körper wieder gegen die Gleichgewichtslage zurückzieht. Die parallel A_1P senkrecht zu A_1O genommene Komponente dieser letztern Kraft multipliziert mit $A_1O = a$ gibt uns dann das den Körper in die Gleichgewichtslage zurückführende Drehungsmoment. Nennen wir den Winkel, den der Faden FA_1 mit der Vertikalen bildet, δ, so ist die zum Faden senkrechte Komponente $\frac{p}{2} \sin\delta$; da die zum Faden senkrechte Komponente ED mit der Horizontalen CA_1 denselben Winkel δ bildet, ist die parallel CA_1 genommene Komponente dieser Kraft $\frac{p}{2} \sin\delta \cdot \cos\delta$ und die zu A_1O senkrechte $\frac{p}{2} \sin\delta \cos\delta \cos CA_1P$; zur Bildung des Drehungsmomentes haben wir diesen Ausdruck mit $A_1O = a$ zu multiplizieren. Da nun an dem andern Aufhängepunkte B_1 ein ganz ebensolches Drehungsmoment wirkt, ist das gesamte den Körper zurückführende Drehungsmoment

$$ap \sin\delta \cos\delta \cos CA_1P.$$

In diesem Ausdrucke ist

$$\sin\delta = \sin DA_1E = \sin CFA_1 = \frac{CA_1}{FA_1} = \frac{CA_1}{l}$$

$$\cos\delta = \frac{CF}{l} = \frac{h}{l}\,,$$

wenn wir die Länge der Fäden mit l und den vertikalen Abstand der unteren von den oberen Aufhängepunkten mit h bezeichnen. Da weiter

$$\cos CA_1P = \sin CA_1O$$

und

$$\sin CA_1O = \sin COA_1 \frac{CO}{CA_1}\,,$$

so wird das Drehungsmoment unter Beachtung, daß $CO = b$ und der Winkel $COA_1 = \varphi$,

$$ap\,\frac{CA_1}{l}\,\frac{h}{l}\,\frac{b}{CA_1} \sin\varphi = ap\,\frac{h}{l}\,\frac{b}{l} \sin\varphi.$$

Wir erhalten demnach ein dem Sinus des Drehungswinkels proportionales Drehungsmoment; somit vollführt der aus der Gleichgewichtslage gebrachte Körper Pendelschwingungen um die Gleichgewichtslage.

Den mit $\sin\varphi$ multiplizierten Faktor, das Drehungsmoment, wenn $\sin\varphi = 1$, nennt man die bifilare Direktionskraft. Ist die Länge der Aufhängefäden so groß, daß wir die Hebung des Schwerpunktes vernachlässi-

irfen, dann dürfen wir auch $h = l$ setzen, und erhalten für die bifilare irektionskraft

$$p \frac{ab}{l},$$

i ist dem Gewichte des Körpers, dem Produkte aus den halben Abständen r oberen und unteren Aufhängepunkte direkt und der Länge der Fäden ngekehrt proportional.

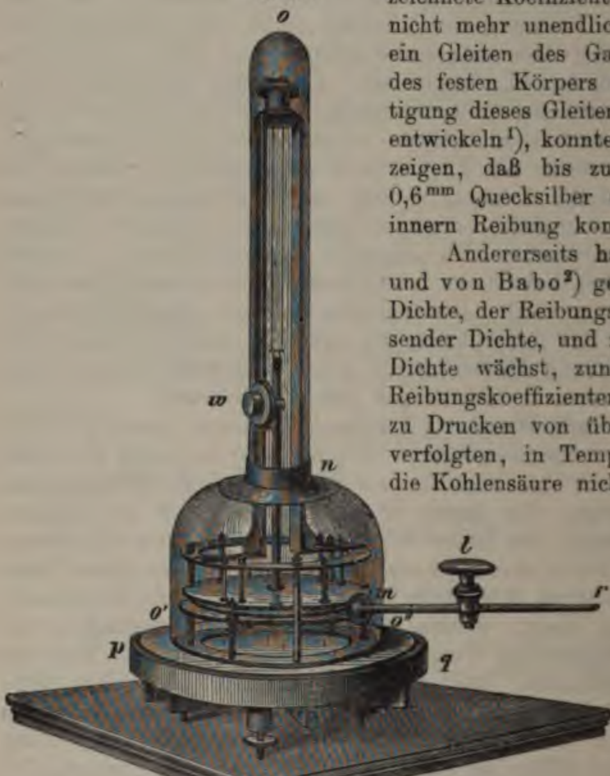
Da bei einer solchen Aufhängung die innere Reibung des Aufhängeahtes wegen der sehr geringen Torsion der Aufhängedrähte nur sehr ein ist, hängt das Dekrement der Schwingungen wesentlich von dem 'iderstande, den die Bewegung in der Luft findet, also wesentlich von r Reibung des an den Fäden hängenden Körpers ab. Indem nun Kundt nd Warburg sehr feine und einander sehr nahe Fäden anwandten, waren ie Dekremente innerhalb der Beobachtungsfehler nur von der Luftreibung r nach der Maxwellschen Methode schwingenden Scheibe abhängig. Turde anstatt der Scheibe ein kleines Gewicht angehängt, welches aus iner kleinen Zinkscheibe bestand, so war das logarithmische Dekrement o klein, daß die aus demselben berechnete dämpfende Kraft nur 1 Prozent er bei den Reibungsversuchen sich zeigenden Dämpfung betrug. Kundt nd Warburg konnten deshalb, da der Einfluß der dämpfenden Kraft nach § 89 dem Trägheitsmoment des schwingenden Systems umgekehrt proporional ist, das ganze bei den Schwingungsversuchen nach der Maxwell chen Methode auftretende Dekrement als von der Luftreibung herrührend nsehen, also das λ_0 unserer Gleichungen gleich Null setzen.

Die von Kundt und Warburg bei ihren Versuchen benutzte Anordnung zeigt Fig. 224. Die schwingende Scheibe sitzt zunächst an einem esten Stiel, der zugleich oben bei w den zur Beobachtung der Schwingungen ienenden Spiegel trägt. An diesem Stiel sind die Fäden der bifilaren Aufhängung angeknüpft. Die festen Scheiben, zwischen denen die bewegliche schwingen soll, deren obere aus zwei gegeneinander geschobenen Halbkreisen besteht, die erst an ihre Stelle gebracht werden, wenn die schwingende Scheibe richtig hängt, werden von einem Rahmen getragen, auf welchem auch die galgenartige Vorrichtung befestigt ist, an der oben die Bifilarfäden angeknüpft sind. Die ganze Vorrichtung ist mit einer Glasglocke bedeckt, welche auf dem Teller pq, der Basis des ganzen Apparates luftdicht aufgeschliffen ist. Aus der Glocke führt eine mit einem Glashahne t verschließbare Röhre zu einem weitern ebenfalls abzusperrenden T-förmigen Rohr, dessen einer Schenkel zu einer Luftpumpe, dessen anderer zu einem Behälter führt, welcher das Gas enthält, dessen Reibungskoeffizient bestimmt werden soll. Um die Scheibe in Schwingungen zu setzen, ist oben an dem dieselbe tragenden Stiel ein Stückchen Eisendraht befestigt. Die Schwingungen werden dann durch Annäherung eines Magnets n diesen Eisendraht bewirkt.

Kundt und Warburg haben bei ihren Versuchen in sehr hohem Maße die Dichtigkeit der Gase geändert, zur Prüfung des aus der Theorie sich ergebenden Gesetzes, daß die Reibung von der Dichtigkeit des Gases unabhängig sei. Da die Reibungskoeffizienten bei diesen Beobachtungen den logarithmischen Dekrementen proportional sind, so muß, wenn das Gesetz richtig ist, der Wert des logarithmischen Dekrementes von der Dicht-

des Gases unabhängig sein. In der Tat zeigte sich das, so lange der Druck mehr als 20^{mm} Quecksilber betrug; wurde er kleiner, so nahmen die logarithmischen Dekremente nicht unerheblich ab. Die beiden Physiker zeigten indes, daß hieraus nicht ein Mangel der aus unserer Auffassung sich ergebenden Theorie der Reibung folgt, daß vielmehr die bei der Ableitung der schwingenden Bewegung mit Berücksichtigung der Reibung gemachte Voraussetzung, daß die an den festen Körpern anliegende Gasschicht an derselben fest haftet, nicht mehr zulässig ist. Wird der Druck kleiner als 20^{mm} Quecksilber, so ist der mit ε bezeichnete Koeffizient der äußern Reibung nicht mehr unendlich zu setzen, es tritt ein Gleiten des Gases an den Wänden des festen Körpers ein. Mit Berücksichtigung dieses Gleitens, dessen Theorie sie entwickeln[1]), konnten die beiden Physiker zeigen, daß bis zu einem Drucke von 0,6^{mm} Quecksilber die Koeffizienten der innern Reibung konstant sind.

Fig. 224.



Andererseits haben aber Warburg und von Babo[2]) gezeigt, daß bei großer Dichte, der Reibungskoeffizient mit wachsender Dichte, und zwar schneller als die Dichte wächst, zunimmt, indem sie die Reibungskoeffizienten der Kohlensäure bis zu Drucken von über 100 Atmosphären verfolgten, in Temperaturen, in welchen die Kohlensäure nicht flüssig wird. Eine Vergleichung mit den Reibungskoeffizienten der flüssigen Kohlensäure führt zu dem Schlusse, daß, wenn man die Kohlensäure bis zu höhern Temperaturen in Form der Flüssigkeit halten könnte, der Reibungskoeffizient der flüssigen Kohlensäure kleiner sein würde, als derjenige der gasförmigen bei gleicher Dichte.

Die Methode der Untersuchung war die des Durchflusses durch kapillare Röhren; wegen der geistreichen Anordnung dieser äußerst schwierigen Versuche müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen, wir beschränken uns auf Angabe der Resultate und bemerken zu den Zahlen folgendes. Der Reibungskoeffizient der Kohlensäure unter dem Drucke der Atmosphäre

1) *Kundt* und *Warburg*, Poggend. Ann. **155**. p. 345 ff. 1875.
2) *Warburg* und *von Babo*, Wiedem. Ann. **17**. p. 390. 1882.

bei $32^\circ,6$ C. gleich 0,000 162 und bei $40^\circ,3$ gleich 0,000 165 in absolutem Maße (gr cm^{-1} sec^{-1}). Die unter p angegebenen Drucke sind die reziproken Werte eines beobachteten Volumens Stickstoff, dessen Volumen unter dem Druck einer Atmosphäre gleich 1 gesetzt wurde, sie sind demnach unter Annahme der Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes nach Gleichung

$$p = \frac{1}{v}$$

berechnet. Die den Drucken p entsprechenden Dichten s, Gewicht des Kubikzentimeters Kohlensäure in Gramm sind durch direkte Versuche erhalten. Die über den betreffenden Spalten angegebenen Werte L bedeuten den Gehalt der Kohlensäure an atmosphärischer Luft

s	$t^\circ = 32^\circ,6$ $L = 0{,}000\,74$		$t^\circ = 40^\circ,3$ $L = 0{,}000\,85$	
	p	$\eta \cdot 10^6$	p	$\eta \cdot 10^6$
0,100	43,1	—	45,3	180
0,170	60,3	188	64,3	196
0,240	69,9	213	75,9	218
0,310	74,6	239	82,7	243
0,380	76,6	270	86,8	275
0,450	77,2	304	89,2	316
0,520	77,6	351	91,7	366
0,590	78,2	414	94,9	426
0,660	80,7	493	101,6	499
0,730	88,5	574	114,6	580
0,800	107,3	677	—	—

Die Dichtigkeit s der Kohlensäure unter dem Drucke einer Atmosphäre bei 40° ist 0,001 72; während die Dichtigkeit der Kohlensäure bis auf das 58fache zunimmt, nimmt hiernach der Reibungskoeffizient bei 40° nur von 165 auf 180, also um etwa 9 % zu; von da ab wächst der Reibungskoeffizient rascher, und zwar mit steigendem Druck für gleiche Druckzunahme immer schneller.

Folgende kleine Tabelle gibt die Reibungskoeffizienten der flüssigen Kohlensäure bei einer Temperatur von $25^\circ,1$. Die Kohlensäure enthielt 0,044 Luft

p	s	$\eta \cdot 10^6$
105	0,898	822
95	0,873	742
85	0,859	705
75	0,826	686
70	0,810	629.

Man sieht, daß die Kohlensäure einen erheblich kleinern Reibungskoeffizienten hat, als die im § 89 erwähnten Flüssigkeiten, und daß der Reibungskoeffizient mit wachsender Dichte zunimmt. Als Kompressionskoeffizient der Kohlensäure würde sich 0,003 04 ergeben.

Versuche, welche durch diese Resultate veranlaßt, Warburg und Sachs[1]) über die Änderung der Reibungskoeffizienten mit dem Drucke für Äthyläther und Benzol anstellten, ergaben für diese ebenfalls eine wenn auch erheblich geringere Zunahme der Reibung mit zunehmendem Drucke. Für Wasser ergab sich in Übereinstimmung mit früheren Versuchen von Röntgen[2]) eine Abnahme der Reibung mit steigendem Druck.

Unsere Theorie der Reibung führt allerdings nicht zu einer Zunahme der Reibungskoeffizienten der Gase mit wachsendem Drucke bezw. wachsender Dichtigkeit der Gase. Indes ist zu beachten, daß wir bei der Entwicklung der Theorie der Reibung auf die zwischen den Molekülen wirksamen Molekularkräfte gar keine Rücksicht genommen haben. Nach der Theorie von van der Waals sind zwischen den Molekülen anziehende Kräfte vorhanden, welche um so mehr zur Wirksamkeit kommen, je näher sich die Moleküle rücken, je größer also die Dichte des Gases wird. Bei hinreichend großer Dichte muß deshalb zu der Gasreibung infolge des Austausches der Moleküle noch eine Reibung nach Art der Flüssigkeitsreibung hinzutreten und demnach der Reibungskoeffizient wachsen. Dem entspricht es auch, daß die Zunahme des Reibungskoeffizienten bei großer Dichte mit gleichem Wachsen der Dichte eine größere ist, als bei kleinerer Dichte. Würde man bei gleicher Temperatur und gleicher Dichte die Reibung im flüssigen und gasförmigen Zustande vergleichen können, so würde man im gasförmigen Zustande die größere Reibung finden müssen. Die Versuche Warburgs lassen das erkennen, eine wirkliche Vergleichung ist nicht möglich, da in den Temperaturen, in welchen die gasförmige Kohlensäure die Dichte der flüssigen annehmen kann, die Kohlensäure nicht mehr flüssig sein kann, wie wir in der Wärmelehre bei Besprechung der kritischen Temperaturen zeigen werden.

Ehe wir die von den verschiedenen Experimentatoren erhaltenen Werte für die Reibungskoeffizienten einiger Gase zusammenstellen, wollen wir, um nicht später auf diese Untersuchungen noch zurückkommen zu müssen, noch auf eine Folgerung der Theorie hinweisen. Die Theorie gibt für den Reibungskoeffizienten den Wert

$$\eta = \tfrac{1}{3} m n u l,$$

sie zeigt somit, daß derselbe der Geschwindigkeit u der Moleküle proportional ist. Für diese gaben wir § 104 an, daß, wenn u_0 die Geschwindigkeit bei 0^0 ist, bei der Temperatur t^0 C.

$$u = u_0 \sqrt{1 + 0{,}003\,67\, t} = u_0 (1 + 0{,}003\,67\, t)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Nach demselben Gesetze müßte also auch der Reibungskoeffizient mit der Temperatur wachsen. Diese Folgerung hat sich in den Versuchen nicht bestätigt, sämtliche Versuche ergeben ein rascheres Wachsen des Reibungskoeffizienten. Maxwell[3]) folgerte aus seinen Versuchen, daß der Reibungskoeffizient der Luft nicht der Quadratwurzel, sondern direkt $1 + 0{,}003\,67\,t$

1) *Warburg* und *Sachs*, Wiedem. Ann. 22. p. 518. 1884.
2) *Röntgen*, Wiedem. Ann. 22. p. 510. 1884.
3) *Maxwell*, Philosophical Transactions for 1866. p. 267.

oportional zunehme. O. E. Meyer[1]) erhielt für Luft einen zwischen dem oretischen und dem von Maxwell gefundenen liegenden Wert, er fand

$$\eta_t = \eta_0 (1 + 0{,}002\,5\,t) = \eta_0 (1 + 0{,}003\,67\,t)^{\frac{3}{4}},$$

man bei der Kleinheit der Koeffizienten von t sich bei Entwicklung der tenz $\frac{3}{4}$ auf das erste Glied beschränken kann. Denselben Wert des Exenten für Luft fand Warburg[2]), für Wasserstoff erhielt er 0,60 bis 65, also etwa $\frac{2}{3}$.

Ausführlicher ist die Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten von der mperatur fast gleichzeitig von Puluj[3]) durch Ausflußversuche und wingungsversuche, und von A. von Obermaier[4]) durch Ausflußverhe verfolgt worden. Beide Experimentatoren gelangen übereinstimmend dem Resultate, daß die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der mperatur für die verschiedenen Gase verschieden ist, für alle aber erlich rascher erfolgt, als es nach der vorgeführten Theorie der Reibung Fall sein sollte. Für Luft finden beide Experimentatoren fast den ichen Wert wie O. E. Meyer; Puluj gibt als Exponenten des Tempeurkoeffizienten anstatt $\frac{1}{2}$ den Wert 0,722, A. von Obermaier 0,76; Wasserstoff erhält der erstere 0,693, der letztere 0,70, für Kohlensäure d die Werte 0,917 und 0,94, wie man sieht, vortrefflich übereinstimmde Werte. Einen ähnlichen fast der Einheit gleichen Wert erhielt von Obermaier für Stickoxydul, Chloräthyl und Äthylen, Gase, die n Teil bei gewöhnlicher Temperatur durch Druck flüssig gemacht werden nen, teils, wie das Äthylen nach § 100, sehr stark von dem Mariotchen Gesetze abweichen.

Schumann[5]) schließt aus seinen nach der Maxwellschen Schwingungsthode ausgeführten Versuchen, daß die Zunahme der Reibung mit der mperatur sich nicht durch eine Gleichung von der Form

$$\eta_t = \eta_0 (1 + \alpha t)^c,$$

nn α für den Ausdehnungskoeffizienten der Gase $\alpha = 0{,}003\,67$ gesetzt , mit einem konstanten c darstellen lasse, er findet, daß mit steigender mperatur schon bis 100° das c merkbar zunimmt, und setzt deshalb, h den gleich zu erwähnenden theoretischen Betrachtungen Stefans anließend,

$$\eta_t = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}} (1 + \beta t)^2$$

Indem er für Luft $\beta = 0{,}000\,802$ einsetzt, konnte er seine Beobachgen vortrefflich darstellen. Für Kohlensäure fand er als Wert für = 0,000889

Schumann findet auch in den Zahlen von Puluj eine Zunahme von mit wachsender Temperatur, während in den von E. Wiedemann[6]) bei – 100° – 184° nach der Transpirationsmethode gefundenen Zahlen sich

1) O. E. Meyer, Poggend. Ann. 143. 1871; 148. 1873.
2) Warburg, Poggend. Ann. 159. p. 399. 1876.
3) Puluj, Wiener Berichte 69. 1874; 70. 1874; 73. 1876. Carl, Repertos 13. 1877.
4) A. von Obermaier, Wiener Berichte 71. 1875; 73. 1876.
5) Schumann, Wiedem. Ann. 23. p. 353. 1884.
6) E. Wiedemann, Arch. des sciences phys. de Génève 44. 2. p. 278. 1872.

eher eine Abnahme der Exponenten c mit wachsender Temperatur erkennen läßt.

Barus[1]) hat die Reibungskoeffizienten der Luft und des Wasserstoffs bis gegen 1400° C. verfolgt. Er ließ die Gase durch Platinspiralen fließen, von so geringem Durchmesser und solcher Länge, daß das Poiseuillesche Gesetz gültig war, und verglich die bei 7°—8° aus seinen Versuchen sich ergebenden Werte mit denen, welche sich bei 400°—700°—900°—1000° usw. ergaben. Die Temperaturen der in einer Heizvorrichtung befindlichen Platinspiralen wurden in später zu besprechender Weise durch den Thermostrom eines aus Platin und Platiniridium hergestellten Thermoelementes gemessen, dessen Angaben mit dem eines Luftthermometers verglichen waren. Barus gelangt zu dem Resultate, daß sowohl für Luft wie für Wasserstoff sich die beobachteten Berechnungsexponenten durch

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{2}{3}}$$

oder durch

$$\eta = \eta_0 (1 + 0{,}002\,38\, t)$$

darstellen lassen. Es würde also für höhere Temperaturen der Temperaturkoeffizient auch für Luft gleich dem von Warburg schon in niedriger Temperatur gefundenen Koeffizienten des Wasserstoffs sein. Für Luft zeigt sich somit in wachsender Temperatur, entgegen den Schlüssen von Schumann, eine Abnahme des Koeffizienten.

Barus neigt zu der Ansicht, daß der Temperaturkoeffizient für alle Gase bei hinreichend hoher Temperatur gleich jenem für Wasserstoff werde.

Die Resultate, betreffend die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur, weichen demnach, was bei der Schwierigkeit der Untersuchungen nicht Wunder nehmen kann, noch ziemlich voneinander ab, sie stimmen aber alle darin überein, daß die Zunahme eine raschere ist, als unsere Theorie der Gasreibung es verlangt. Um diese Abweichung von der Theorie mit unserer Anschauung der Gase in Einklang zu bringen, nimmt Stefan[2]) an, daß die mittlern Wegelängen mit der Temperatur der Gase auch bei konstanter Dichte derselben etwas größer werden. Nach unserer Gleichung für die Reibungskoeffizienten

$$\eta = \tfrac{1}{3} n m u l$$

sieht man, daß ein solches Wachsen von l die raschere Zunahme von η zur Folge haben müßte. Da wir die mittlere Wegelänge l, wie wir vorhin sahen, setzen können

$$l = \frac{1}{n \frac{4}{3} \varrho^2 \pi} \cdot \varrho = \frac{1}{n \frac{4}{3} \varrho^2 \pi},$$

so bedeutet die Annahme Stefans eine Abnahme des Radius der Wirkungssphäre mit steigender Temperatur. Setzen wir

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t},$$

so würden wir zu dem Ausdrucke von Schumann für die Zunahme der Reibungskoeffizienten gelangen.

1) *Barus,* Wiedem. Ann. **36**. p. 358. 1889.
2) *Stefan,* Wiener Berichte. **65**. p. 338. 1872.

Die Korrektion, die Sutherland[1]) an der Berechnung der mittlern egelänge infolge der gegenseitigen Anziehung der Moleküle der Gase gebracht hat, führt unmittelbar zu einem Wachsen der mittlern Wegeagen mit der Temperatur und damit zu einem schnellern Wachsen des ibungskoeffizienten als es ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit n l eintreten würde. Wir fanden im § 103 nach Sutherland für die ittlere Wegelänge

$$l = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\varrho^2\pi} \cdot \frac{1}{1 + k\frac{E}{\frac{1}{2}mu^2}}.$$

ierin können wir setzen, wenn α der Ausdehnungskoeffizient der Gase, $= 0{,}003\,67$, ist

$$u^2 = u_0^2(1 + \alpha t) = \alpha u_0^2\left(\frac{1}{\alpha} + t\right).$$

Setzen wir $\frac{1}{\alpha} + t = T$ und $\frac{kE}{\frac{1}{2}\alpha u_0^2 m} = C$, so wird

$$l = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\varrho^2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{C}{\frac{1}{\alpha} + t}}$$

ir die mittlere Wegelänge bei der Temperatur t; um die mittlere Wegeage l_0 bei der Temperatur 0^0 des schmelzenden Eises zu erhalten, haben ir in dem letzten Ausdruck nur $t = 0$ zu setzen, so daß

$$l_0 = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\varrho^2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \alpha C}.$$

Für l durch l_0 ausgedrückt wird l, wenn wir $\frac{1}{\alpha} + t = T$, die von m absoluten Nullpunkt an gerechnete Temperatur setzen

$$l = l_0 \frac{1 + \alpha C}{1 + \frac{C}{T}}.$$

Die Größe C ist eine von der Natur des Gases bedingte Konstante, ie man als Kohäsionskonstante des Gases bezeichnen kann. Man sieht, a der Nenner mit wachsendem T kleiner wird, wächst bei konstant eraltener Dichte des Gases die mittlere Wegelänge mit steigender Tempeatur. Für den Reibungskoeffizienten bei der Temperatur t erhalten wir mit

$$\eta_t = \frac{1}{3} m n u_0 l_0 \frac{1 + \alpha C}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{1 + \alpha t} = \eta_0 \frac{1 + \alpha C}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Sutherland prüfte seine Gleichung zunächst an Versuchen von Holan[2]) und Barus[3]) über die innere Reibung der Luft; das von Holman nutzte Temperaturintervall war 14^0 bis 124^0 C., das von Barus benutzte

1) *Sutherland*, Phil. Mag. **36** (5.) p. 507. 1893.
2) *Holman*, Proc. of the Amer. Acad. **21**. p. 13. 1885.
3) *Barus*, Amer. Journ. **35**. (3.) p. 408. 1888.

Namen des Gases	10⁶ · η nach Breitenbach[1])	O. E. Meyer[2])	Puluj[3])	Kundt u. Warb.[4])	v. Obermaier[5])	Markowski[6])
Luft	180,7	189	182	187	174	—
Wasserstoff . .	88,9	93	93	92	89	87,7
Kohlensäure . .	145,7	160	152	152	146	—
Sauerstoff . . .	—	212	—	—	195	202,3
Stickstoff . . .	—	184	—	—	173	174,7
Kohlenoxyd .	—	—	—	—	169	—
Wasserdampf.	—	—	96,7	98,7	—	—

Im großen und ganzen weichen die von den verschiedenen Beobachtern für dasselbe Gas erhaltenen Zahlen nicht sehr voneinander ab, nur die Zahlen von v. Obermaier sind etwas kleiner als die übrigen.[7])

§ 119.

Diffusion der Gase. Verbindet man zwei Gefäße etwa durch eine Öffnung in dünner Wand, welche dasselbe Gas enthalten, so tritt eine Bewegung der Gase nur ein, wenn in dem einen Gefäß der Druck kleiner ist als in dem andern, ist keine Druckdifferenz in beiden Gefäßen vorhanden, so tritt auch keine Strömung des Gases ein. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn in den beiden durch eine Öffnung in Verbindung stehenden Räumen verschiedene Gase vorhanden sind. Zwar läßt sich durch den Versuch nachweisen, daß substantiell verschiedene Gase denselben Druck aufeinander ausüben, wie die Teilchen gleichartiger Gase, aber dennoch tritt stets eine Vermischung ein, wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke durch eine Öffnung miteinander in Verbindung stehen. Daß ersteres der Fall ist, zeigt folgender Versuch.[8]) Wenn man eine mit Luft gefüllte unten verschlossene Glasröhre vom Boden aus mit einem gefärbten Gase zur Hälfte anfüllt, welches schwerer ist als Luft, z. B. mit unterchloriger Säure, so ruht in dem obern Teile der Röhre anfänglich eine farblose Luftsäule auf dem gefärbten Gase. Bringt man dann rasch das obere Ende der Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und pumpt einen Teil der Luft aus, so rückt die an der Farbe erkenntliche Grenzfläche beider Gase mit der zunehmenden Verdünnung aufwärts, der Druck der Gase ändert sich aber

1) *Breitenbach*, Wiedem. Ann. **67**. p. 803. 1899.
2) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. **148**. p. 226 u. 549. 1873; an letzterer Stelle gibt Meyer die Reibungskoeffizienten einer größeren Zahl von Gasen an.
3) *Puluj*, Wiener Berichte. **70**. 1874; **73**. 1876.
4) *Kundt* und *Warburg*, Poggend. Ann. **155**. p. 529. 1875; auch *Warburg*, Poggend. Ann. **159**. p. 399. 1876.
5) *A. von Obermaier*, Wiener Berichte **73**. 1876; Carls Repert. **13**. 1877.
6) *Markowski*, Ann. d. Phys. **14**. p. 742. 1904.
7) Über Reibungskoeffizienten von Dämpfen sehe man *Puluj*, Carls Repertorium. **14** p. 573. 1878; *Lothar Meyer*, Wiedem. Ann. **7**. p. 497. 1879; **13** p. 1. 1881, gemeinschaftlich mit *Schumann*, **16** p. 393. 1882; *Schumann*, Wiedem. Ann. **23**. p. 353. 1884. Eine Tabelle wohl sämtlicher bis 1904 bestimmter Reibungskoeffizienten von Gasen und Dämpfen findet sich in *Landolt-Börnstein*, Physikalisch-chemischen Tabellen. 3. Aufl. Berlin 1905.
8) *Bunsen*, Gasometrische Methoden. p. 208.

in der ganzen Ausdehnung der Röhre in gleicher Weise, denn seitlich angebrachte Manometer zeigen in jedem Momente an allen Stellen der Röhre den gleichen Druck. Aber ungeachtet dessen, daß die verschiedenen Gase aufeinander denselben Druck ausüben, als die einzelnen Teile desselben Gases, vermag ein Gas ein anderes nicht in einem Raume abzusperren.

Der erste, welcher diese Vermischung verschiedener Gase nachwies, war Dalton[1]), er wandte zwei Flaschen von gleicher Kapazität an, welche durch einen Hahn miteinander in Verbindung gesetzt werden konnten. Die eine füllte er mit Kohlensäure, die andere mit atmosphärischer Luft unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur, und stellte sie so auf, daß die Kohlensäure in der untern, die Luft in der obern Flasche sich befand. Auf diese Weise konnte durch die verschiedenen spezifischen Gewichte der Gase eine Mischung derselben nicht eintreten, da die Kohlensäure als das spezifisch schwerere Gas unten und die leichtere Luft darüber war. Nach geöffnetem Hahne war der Druck im Innern der Flaschen ungeändert derselbe geblieben, nach mehreren Stunden waren aber beide Gase gleichmäßig in beiden Flaschen verteilt, ungeachtet, daß die Schwere dieselben getrennt zu erhalten suchte. Es folgt daraus, daß jedes der beiden Gase sich in dem ganzen Raum verbreitet hatte, als wenn es in demselben allein vorhanden gewesen wäre. Man bezeichnet diesen Satz als das Daltonsche Gesetz.[2]) Jedes der Gase dehnte sich dadurch auf den doppelten Raum aus, sein Druck mußte dadurch die Hälfte des frühern werden; die Unveränderlichkeit des äußern Druckes zeigt daher ebenfalls, daß auch die Drucke verschiedener Gase sich summieren.

Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Mischung der Gase ihrem Gewichte entgegen zeigt uns unsere Atmosphäre, welche, wie wir bereits früher erwähnten, ein Gemische zweier Gase, Sauerstoff und Stickstoff ist. Obwohl nämlich der Sauerstoff schwerer ist als der Stickstoff, und zwar im Verhältnis 110 zu 97, so zeigt doch die Luft an allen Stellen, wo sie geschöpft wird, nahezu dieselbe Zusammensetzung von 79 Teilen Stickstoff und 21 Teilen Sauerstoff.

Man bezeichnet diese Mischung von unter gleichem Drucke stehenden Gasen ähnlich wie die allmähliche Mischung zweier verschiedener übereinander gelagerter mischbarer Flüssigkeiten, als Diffusion der Gase.

Die Diffusion der Gase ineinander zeigt auch darin eine Analogie mit der Diffusion der Flüssigkeiten, daß die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, wesentlich von der Natur der Gase abhängig ist, wie das schon die ersten messenden Versuche von Graham[3]) zeigten. Graham gibt an, daß sich Wasserstoff in Luft sehr viel schneller verbreitet als Kohlensäure.

Der erste, welcher die Diffusion der Gase genauer untersuchte, war Loschmidt[4]), er ging davon aus, daß die Diffusion der Gase ganz denselben Gesetzen folgen müsse wie diejenige der Flüssigkeiten. Die Menge eines Gases, welche, konstante Verhältnisse vorausgesetzt, in der Zeiteinheit

1) *Dalton,* Gilbert Annalen. **17**. 1804.
2) Auf das *Dalton*sche Gesetz kommen wir in der Wärmelehre noch zurück.
3) *Graham,* Philosoph. Magazin. **26**. (4.) 1863; Poggend. Ann. **120**.
4) *Loschmidt,* Wiener Ber. **61**. u. **62**. 1870.

ırschnittseinheit wandert, wenn auf den beiden Seiten des lie Konzentration des Gases eine verschiedene ist, wird der differenz, und einem von der Natur der beiden Gase abfizienten, der Diffusionsgeschwindigkeit oder dem Diffusionsıroportional gesetzt. Als Konzentration des Gases können ch den Druck des betreffenden Gases an der betrachteten n, indem nach dem vorhin erwähnten Gesetze von Dalton eines zwei Gase enthaltenden Raumes sich die Drucke beider im ganzen Raume konstanten Gesamtdrucke summieren, jedes a solchen Teil des Gesamtdruckes ausübt, als es einen Bruchr Volumeinheit an der betreffenden Stelle vorhandenen Ge-Gases ausmacht. Der Diffusionsvorgang wird demnach durch hungen, die wir § 85 für die Diffusion der Flüssigkeiten abstellt, wenn wir die dort eingeführte Konzentration durch les betreffenden Gases ersetzen, also durch die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = -k\frac{d^2p}{dx^2},$$

h jetzt den Diffusionskoeffizienten mit k bezeichnen.

lesselben ist nur zu bemerken, daß der Diffusionskoeffizient f zwei Gase beziehen muß, daß wir also z. B. für Kohlena bestimmten Diffusionskoeffizienten einem bestimmten zweiten r, also etwa dem Wasserstoff gegenüber erhalten, und daß ısionskoeffizient des Wasserstoffs gegenüber der Kohlensäure s derjenige der Kohlensäure gegenüber dem Wasserstoff. Daß 'all sein muß, ergibt sich unmittelbar aus dem Daltonschen sich die Drucke beider Gase an jeder Stelle eines Gefäßes ınten Gesamtdrucke summieren. Ist also in einem gegebenen iner Stelle des Raumes p_1 der Druck des einen, p_2 der des so ist immer

$$p_1 + p_2 = p$$

ɔnstanten Gesamtdrucke. Geht dann durch Zuströmen des ı der Zeit dt der Druck desselben in $p_1 + dp_1$ über, so muß men des andern der Druck desselben in $p_2 - dp_2$ übergehen, :

$$p_1 + dp_1 + p_2 - dp_2 = p$$

t $dp_1 = dp_2$. Es ist somit der Strom des einen Gases gegen ts gleich dem des zweiten gegen das erste.

hysikalische Bedeutung des Diffusionskoeffizienten zu erkennen, ıs wieder den stationären Zustand hergestellt, das heißt also, ıs ein Gefäß mit Kohlensäure gefüllt, etwa unter dem Druck ıäre und dieses durch einen Zylinder von q^{qcm} Querschnitt mit einem ebensolchen mit Wasserstoff gefüllten Gefäße ver-Gefäße denken wir uns von solcher Größe, daß die durch Gase in sie übertretenden Mengen des andern Gases keine ınreinigung des in dem Gefäße vorhandenen Gases bewirken. r denken uns durch irgend ein Mittel die in das Wasserstofffretene Kohlensäure und den in das Kohlensäuregefäß über-

gegangenen Wasserstoff sofort weggenommen. Dann ist auf der ein des Zylinders der Druck des einen Gases stets konstant und gleich der andern stets gleich Null, und auf der l^{cm} langen Strecke des Z nimmt der Druck von p_0 auf 0, und zwar nach Eintritt des sta Zustandes in solcher Weise ab, daß, wie sich durch eine der im § den analogen Fall gemachten gleiche Entwicklung ergibt, im Abstan dem Beginne des Zylinders der Druck des betreffenden Gases p_1 gl

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0}{l} \cdot x.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit der Dichtigl Gases, welche dem Drucke p_0 entspricht, mit c_0 und dividieren di so wird

$$c_0 \frac{p_1}{p_0} = c_0 - \frac{c_0}{l} x,$$

und da die linke Seite der Dichtigkeit c des Gases an der Stelle spricht, so ist diese Gleichung

$$c = c_0 - \frac{c_0}{l} x$$

genau jene, welche wir § 85 erhielten. Die Quantität des Gases, in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des Zylinders wandert un aus dem einen Gefäße in das andere übertritt, ergibt sich ebenfa in § 85

$$S = kq \frac{c_0}{l}.$$

Hiernach bedeutet der Diffusionsquotient k jene Gasmenge, in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnitts in ein ander bei stationärem Zustande übertritt, wenn auf der Strecke von der Eins die Dichte, das heißt die in der Volumeinheit enthaltene Ga dieses Gases von der dem Drucke einer Atmosphäre entsprechende malen Dichte, auf Null abnimmt, oder auch, wenn der Druck dieses von dem einer Atmosphäre auf Null abnimmt, der Druck des zweiten von Null auf den einer Atmosphäre zunimmt. Der Diffusionskoeffizi zweiten Gases in das erste ist dann genau derselbe.

Die Dimension des Diffusionskoeffizienten ergibt sich hiernach S ist eine Masse dividiert durch eine Zeit, q das Quadrat einer c der Quotient einer Masse und der dritten Potenz einer Länge, so

$$k = \frac{Sl}{qc_0} = \frac{\mu \lambda \lambda^3}{\tau \lambda^2 \mu} = \frac{\lambda^2}{\tau}.$$

Die Dimension ist, wie es auch sein muß, dieselbe wie diejeni Diffusionskoeffizienten der Flüssigkeiten.

Das hier gedachte einfache Verfahren läßt sich in der Praxis dings nicht durchführen. Loschmidt verfuhr deshalb zur Bestimm Diffusionskoeffizienten folgendermaßen. Ein vertikal zu stellendes G von 97,5^{cm} Länge und 2,6^{cm} Durchmesser wird an beiden Enden Spiegelglasplatten geschlossen, in welche je zwei Glashähne eingekittet In der Mitte ist dasselbe durchschnitten und beide Hälften sind i durch untergelegte Metallplatten verstärkte Spiegelglastafeln eing

en denen sich ein Schieber von dünnem Stahlblech mittels eines ibengewindes hin und herführen läßt. Derselbe ist mit einer dem i Querschnitt des Glasrohres entsprechenden kreisförmigen Öffnung en, und so eingerichtet, daß er in der einen Stellung I die beiden älften voneinander gasdicht absperrt, in der andern Stellung II da die Kommunikation zwischen ihnen vollkommen frei läßt. Es wurden r Schieberstellung I beide Rohrhälften mit Quecksilber gefüllt, das- dann durch die wohlgetrockneten Gase verdrängt, und der Apparat Vertikalstellung gebracht.

Iach etwa einer Viertelstunde wurde der Schieber möglichst rasch Stellung II gebracht, wodurch der Beginn der Diffusion herbei- t wurde. Nach Ablauf einer passenden Zeit, eine halbe oder eine Stunde, ward der Schieber geschlossen, und damit die Diffusion be- Das Resultat der Diffusion wurde durch eine genaue Analyse der in Rohrhälfte vorhandenen Gase festgestellt. Wie man sieht, entspricht erfahren im wesentlichen dem einen von Schumeister (§ 85) zur ımung der Diffusion der Salze angewandten. Der Diffusionskoeffizient sich in ähnlicher Weise aus den gefundenen Gasmengen.[1] In dieser erhielt Loschmidt unter andern folgende Diffusionskoeffizienten aus- :kt in den Einheiten Zentimeter, Sekunde

Wasserstoff — Kohlensäure	k = 0,556
Sauerstoff — Kohlensäure	0,141
Wasserstoff — Sauerstoff	0,722
Luft — Kohlensäure	0,142.

oschmidt fand weiter, daß die Diffusionskoeffizienten einer und der- Kombination der Summe der Gasdrucke, oder dem in dem Diffusions- vorhandenen Gesamtdrucke umgekehrt proportional seien, und daß nı erheblich mit der Temperatur wachsen. Obige Werte beziehen uf die Temperatur des schmelzenden Eises.

'ür die bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur den verschie- Kombinationen entsprechenden Werte der Diffusionskoeffizienten er- die Beobachtungen Loschmidts, daß dieselben der Quadratwurzel m Produkte der spezifischen Gewichte umgekehrt proportional sind, renn wir die Dichtigkeit der beiden Gase mit δ_1 und δ_2 bezeich- laß

$$k\sqrt{\delta_1\delta_2} = k_0$$

onstante Größe ist. Setzen wir das spezifische Gewicht der Luft 1, so wird:

	$\delta = 1$	Luft — Kohlensäure	$k\sqrt{\delta_1\delta_2}$ = 0,1775
ısäure	1,53	Wasserstoff — Kohlensäure	„ = 0,1811
rstoff	0,0693	Wasserstoff — Sauerstoff	„ = 0,1990
toff	1,103	Sauerstoff — Kohlensäure	„ = 0,1848.

.nnähernd bestätigen die Zahlen der letzten Spalte den Satz, immer- hwanken die Zahlen um mehr als 0,1 des Mittelwertes.

[1] Man sehe außer *Loschmidt* a. a. O. *Stefan*, Wiener Ber. 63. p. 79. 1871.

Die Änderung des Diffusionskoeffizienten mit der Temperatur wurde von v. Obermaier[1]) näher verfolgt. Die Versuchsanordnung entsprach der von Loschmidt mit kleinen Abänderungen, die Messung der Diffusionskoeffizienten geschah bei Zimmertemperatur und bei der Temperatur des erstarrenden Paraffins, 61°,5, indem der Diffusionsapparat in ein Paraffinbad gesetzt wurde, in welchem während der Dauer des Versuches das Paraffin auf der Schmelzungstemperatur gehalten wurde. Zur Darstellung der Versuche benutzte Obermaier die Form

$$k_t = k_0 (1 + \alpha t)^h,$$

worin α der Ausdehnungskoeffizient der Gase gleich 0,003 67 ist. Die von Obermaier für den Exponenten h gefundenen Werte, sowie die Diffusionskoeffizienten k_0 enthält folgende kleine Tabelle:

Luft — Kohlensäure	$k_0 =$ 0,1347	$h =$ 1,958
Wasserstoff — Luft	0,6766	1,755
Kohlensäure — Stickoxydul	0,0920	2,050
Kohlensäure — Wasserstoff	0,5463	1,742
Sauerstoff — Stickstoff	0,1774	1,792.

Wie man sieht, weichen die Werte k_0 nicht unerheblich von den von Loschmidt gefundenen ab, sie sind durchweg kleiner.

v. Obermaier[2]) wiederholte deshalb die Messung der Diffusionskoeffizienten nach einer andern Methode, welche der zweiten von Schumeister bei Untersuchung der Diffusion der Salzlösungen benutzten entsprach; es wurde über die das eine Gas enthaltende Diffusionsröhre ein konstanter Strom des zweiten Gases geführt, so daß alles aus der Röhre herausdiffundierte Gas sofort weggeführt wurde, somit am obern Ende stets die Dichte des Gases Null war. Nachdem das Gas längere oder kürzere Zeit über dem Rohre hingestrichen war, wurde der Inhalt des Diffusionsrohres analysiert.

Die Versuche führten zu dem Resultate, daß die Diffusionskoeffizienten mit der Dauer der Diffusion etwas zunahmen; da mit wachsender Diffusion das Dichtigkeitsgefälle, die Abnahme der Dichtigkeit der Gase für die Längeneinheit, kleiner wird, würde darnach der Diffusionskoeffizient mit abnehmendem Dichtigkeitsgefälle bis zu einer gewissen oberen Grenze wachsen.

So findet v. Obermaier für Luft — Kohlensäure den Diffusionskoeffizienten nach einer Versuchsdauer von

25 Min.	30 Min.	1 Stunde	2 Stunden	2,5 und 3 Stunden
0,1297	0,1299	0,1325	0,1347	0,1355.

Eine Wiederholung[3]) der Versuche nach der ersten Methode gab ähnliche Zunahme mit der Zeit, so für Luft — Kohlensäure nach

10 Min.	15 Min.	40 und 45 Min.	1 Stunde
0,1299	0,1320	0,1337	0,1351.

1) *von Obermaier,* Wiener Berichte. 81. p. 1102. 1880.
2) *von Obermaier,* Wiener Berichte. 85. p. 147. 1882.
3) *von Obermaier,* Wiener Berichte. 85. p. 748. 1882; 87. p. 188. 1883.

Ähnliche Änderungen, zum Teil kleinere, wurden bei einer sehr großen Zahl von Gaskombinationen erhalten. Die Änderungen sind sehr klein, nahe innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; da indes bei fast allen Versuchen sich derselbe Gang der Diffusionskoeffizienten zeigt, so ist eine solche Veränderlichkeit durch dieselben doch wahrscheinlich gemacht.

Auch Waitz[1]) findet den Diffusionskoeffizienten, aber in anderer Weise als v. Obermaier variabel. Waitz füllte einen Kasten, dessen Tiefe 50,3 cm, dessen Breite 7,1 cm, dessen Länge 50,3 cm war und der mit einem abnehmbaren Deckel versehen war, mit Kohlensäure. Auf die eine breite Außenseite des Kastens waren drei rechteckige hinten und vorn offene Röhren von Eisenblech aufgelötet, die möglichst gleiche Länge mit dem Kasten hatten. Neben den Öffnungen dieser Röhre waren in den schmalen Seitenwänden des Kastens Fenster eingeschnitten, die nebst den Mündungen der drei Röhren durch planparallele Glasplatten luftdicht geschlossen waren; dabei war dafür gesorgt, daß der Raum der Röhren von demjenigen des Kastens vollkommen abgeschlossen war. Die Röhren enthielten Luft. Die Einrichtung hatte den Zweck, von zwei parallelen Lichtstrahlenbündeln das eine durch die Luft der Röhre, das andere, unmittelbar neben dem ersten, durch das Gas des Kastens zu führen. Die beiden Lichtstrahlenbündel waren die zur Interferenz in einen Jaminschen Interferentialrefraktor gelangenden Strahlen. Wir werden in der Optik sehen, wie man aus der hierbei sich zeigenden Erscheinung die Änderung in der Zusammensetzung des Gasgemisches im Innern des Kastens ableiten kann.

Zur Einleitung der Diffusion wurde der Deckel von dem Kasten entfernt und die Kohlensäure in die freie Luft diffundieren gelassen. Es wurde dann mit der angedeuteten optischen Methode die Änderung in der Zusammensetzung des in dem Kasten vorhandenen Gasgemisches sowohl in der obern etwa 10 cm, in der mittlern etwa 20 cm und in der untern etwa 35 cm unter dem obern Rande des Kastens befindlichen Gasschicht beobachtet.

Aus der Änderung der Zusammensetzung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit läßt sich für die drei Schichten der Diffusionskoeffizient in allerdings ziemlich komplizierter Weise berechnen.

Waitz fand zunächst in jeder Schicht, daß der Diffusionskoeffizient mit wachsender Zeit kleiner wurde, sich aber einem für jede Schicht bestimmten Grenzwerte annäherte. Dieser Grenzwert nahm an Größe mit der Tiefe im Diffusionsgefäße zu, er war 10 cm unter dem obern Rande 0,148, in der 20 cm tiefen Schicht 0,152 und in der tiefsten 35 cm unter dem Rande befindlichen Schicht 0,159.

Mit wachsender Zeit nimmt, bis eine Zeitlang ein annähernd stationärer Zustand eintritt, an jeder Stelle der Gehalt an Kohlensäure ab. Andererseits nimmt für die ganze Dauer der Diffusion der Gehalt der Kohlensäure mit der Tiefe zu; beide Sätze von Waitz würden also zu dem Schlusse führen, daß der Diffusionskoeffizient Luft — Kohlensäure mit wachsendem Kohlensäuregehalt einer Schicht zunähme. Da nach v. Obermaier der

1) *K. Waitz*, Wiedem. Ann 17. p 201. 1882. Über die von Waitz erhaltenen Resultate sehe man auch *Hausmanninger*, Wiener Ber. 86. p 1073. 1882; v. *Obermaier*, Wiener Ber. 87. p. 188 1883

Diffusionskoeffizient mit abnehmendem Dichtigkeitsgefälle etwas zunimmt, müßte die Abnahme mit abnehmendem Kohlensäuregehalt stärker sein als die von v. Obermaier gefundene Zunahme; denn bei den Versuchen von Waitz nimmt gleichzeitig mit dem Gehalte an Kohlensäure auch das Dichtigkeitsgefälle ab. Eine volle Vergleichbarkeit zwischen den Resultaten von Waitz und v. Obermaier ist nicht vorhanden, da der von beiden gemessene Diffusionskoeffizient nicht genau derselbe ist; v. Obermaier bestimmte den Diffusionskoeffizienten aus der in einer gewissen Zeit aus den Diffusionsröhren ausgetretenen Gasmenge, während Waitz denselben für die einzelnen Schichten aus der dort stattfindenden Änderung der Zusammensetzung des Gasgemisches ableitete. Gegenüber dem letztern ist also der Diffusionskoeffizient, den v. Obermaier bestimmt hat, ein mittlerer Wert.

Stefan[1]) hat gezeigt, daß man aus der Geschwindigkeit der Verdampfung einer Flüssigkeit, wenn man über die Mündung einer engen, die Flüssigkeit enthaltenden Röhre einen stetigen Gasstrom hinführt, den Diffusionskoeffizienten der Dämpfe in dem betreffenden Gase bestimmen kann. Winkelmann[2]) hat dieses Verfahren zu einer Untersuchung der Diffusion der Dämpfe und ganz besonders auch zur Beantwortung der Frage benutzt, ob sich der Diffusionskoeffizient mit dem Mengenverhältnisse der Gase ändert. Wir werden die Theorie von Stefan und die sich aus derselben ergebende Methode in der Wärmelehre besprechen und geben hier nur die Resultate an, zu denen Winkelmann gelangt ist.

Entgegen den Resultaten von Waitz und v. Obermaier findet Winkelmann den Diffusionskoeffizienten unabhängig von dem Verhältnis der in dem Gasgemische vorhandenen Gase ebenso auch von dem Dichtigkeitsgefälle. So ließ Winkelmann aus einer engen Glasröhre Wasser bei $17^0,08$ verdampfen und führte einmal in einem luftverdünnten Raume, in welchem $6,11^{\mathrm{cm}}$ Quecksilberdruck war, das anderemal unter dem Drucke der Atmosphäre, $74,81^{\mathrm{cm}}$ Quecksilber, einen Luftstrom darüber her. Der Druck des Wasserdampfes unmittelbar über dem Wasser in dem engen Röhrchen war bei $17^0,08$ gleich $1,447^{\mathrm{cm}}$ Quecksilber. Im ersten Falle war somit der Gesamtdruck 7,557, im zweiten Falle 76,257, also mehr als das zehnfache, während der Partialdruck des Wasserdampfes in beiden Versuchen der gleiche, im ersten Falle etwa 0,2, im letztern 0,02 des Gesamtdruckes war. Nach dem schon von Loschmidt bewiesenen Satze, daß der Diffusionskoeffizient dem Gesamtdruck umgekehrt proportional ist, wurden die direkt gefundenen Diffusionskoeffizienten auf 76^{cm} Druck reduziert, und es ergab sich für den Gesamtdruck

$$\begin{array}{rcc} & 7,557^{\mathrm{cm}} & 76,257^{\mathrm{cm}} \\ k = & 0,241 & 0,241 \end{array}$$

für die Temperatur von $17^0,08$.

Gibt man der verdampfenden Flüssigkeit bei gleichem Gesamtdrucke, indem man das vorüberstreichende Gas unter dem Druck der Atmosphäre hält, eine verschiedene Temperatur, so ändert sich gleichzeitig der Partialdruck, und bei Anwendung desselben Apparats das Dichtigkeitsgefälle, so

1) *Stefan,* Wiener Berichte. **68**. p. 385. 1873.

2) *Winkelmann,* Wiedem. Ann. **22**. p. 1 u. 152. 1884; **23**. p. 203. 1885; **26**. p. 105. 1885; **33**. p. 445. 1888; **36**. p. 93. 1889.

über der Flüssigkeit mit steigender Temperatur der Dampfdruck wächst, und von dort bis zu dem vorüberstreichenden Gasstrom auf den Druck Null abnimmt. Direkt beobachtet wird der Diffusionskoeffizient bei verschiedenen Temperaturen, Winkelmann reduzierte die beobachteten Werte auf 0^0, indem er in der Gleichung

$$k_t = k_0 (1 + \alpha t)^h$$

den Exponenten $h = 2$ setzte.

Bei seinen ersten Versuchen erhielt er so bei den über jeder Reihe in Form eines Bruches, dessen Zähler den Partialdruck des Wasserdampfes, dessen Nenner den Gesamtdruck angibt, ausgedrückten Mengenverhältnissen der diffundierenden Gase, und bei der neben diesem Bruche angegebenen Temperatur folgende auf 0^0 reduzierte Werte der Diffusionskoeffizienten:

	$\frac{576}{730}$, $t = 92^0$,	$\frac{89,6}{730}$, $t = 49^0,5$
Wasserdampf — Wasserstoff	0,658	0,716
„ Luft	0,193	0,203
„ Kohlensäure	0,133	0,130.

Ferner mit Äthylalkohol und Äthyläther

	Alkohol		Äther	
	$\frac{476}{728,6}$, $t = 66^0,9$	$\frac{129,2}{732,7}$, $t = 40^0,45$	$\frac{431,2}{725}$, $t = 19^0,9$	$\frac{292,1}{725,5}$, $t = 10^0,4$
Dampf in Wasserst.	0,374	0,382	0,296	0,297
„ „ Luft	0,0986	0,1046	0,0776	0,0775
„ „ Kohlens.	0,0684	0,0687	0,0552	0,0553.

Die Zahlen für Äther sind ganz unabhängig vom Partialdruck, die Zahlen für Alkohol schwanken etwas, allerdings stets im gleichen Sinne, die Zahlen für Wasser stärker, aber für Kohlensäure im entgegengesetzten Sinne als für die beiden andern Gase.

Die in der zuletzt zitierten Abhandlung wiederholten Versuche, bei welchen die Temperaturbestimmung eine genauere war, führten in den höhern Temperaturen zu größeren Werten von k für den Wasserdampf. Setzte man für Wasserdampf in Luft den Exponenten $h = 1,774$, so führten Versuche bei 16^0 und 99^0 zu $k_0 = 0,2162$, für Wasserdampf — Wasserstoff mit $h = 1,712$ zu $k_0 = 0,7516$ und für Wasserdampf — Kohlensäure mit $h = 1,972$ zu $k_0 = 0,1378$.

Auch R. Schmidt gelangte bei Untersuchung von Argon und Helium zu dem Resultate[1], daß bei konstantem Gesamtdruck der Diffusionskoeffizient von dem Partialdrucke nicht merklich abhängig sei.

Wir werden es demnach, wenn auch noch nicht sicher bewiesen, so doch als wahrscheinlich hinstellen dürfen, daß bei konstantem Gesamtdrucke beider Gase der Diffusionskoeffizient für zwei gegebene Gase konstant ist.

1) *R. Schmidt*, Ann. d. Phys. 14. p. 801. 1904.

§ 120.

Ableitung der Diffusion aus der kinetischen Gastheorie. Die langsame Mischung, welche bei der Diffusion zweier Gase eintritt, glaubte Buys-Ballot[1]) als mit der kinetischen Gastheorie unvereinbar ansehen zu müssen, da bei der großen Geschwindigkeit der molekularen Bewegung es nur sehr kurze Zeit dauern könne, bis in geschlossenen Räumen zwei Gase sich mischen. Clausius[2]) wies dem entgegen darauf hin, daß die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, nicht von der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Moleküle allein, sondern ebenso sehr von den Strecken abhängig sein müsse, welche die Gasmoleküle ungestört zurücklegen. Es war das für Clausius der Anlaß, die mittleren Weglängen der Gasmoleküle zu untersuchen; für welche sich Werte ergaben, § 102, welche nicht sehr große Vielfache des Radius der Wirkungssphäre sind. Eine vollständigere Ableitung der Diffusion gaben später Maxwell[3]), Stefan[4]) und O. E. Meyer[5]). Wir begnügen uns damit, die Theorie der Diffusion soweit zu führen, daß wir den Zusammenhang des Diffusionskoeffizienten mit den die Gase in der kinetischen Gastheorie charakterisierenden Größen, Geschwindigkeit und Wegelängen der Moleküle, erkennen. Wir folgen der Theorie von Stefan, da aus dieser sich ein von dem Mischungsverhältnis der Gase unabhängiger Diffusionskoeffizient ergibt, wie er nach den vorliegenden Versuchen wahrscheinlich ist. Die Theorie von O. E. Meyer führt zu einem von dem Mischungsverhältnisse der Gase abhängigen Diffusionskoeffizienten.

Stefan geht von der Anschauung aus, daß wenn in einem Raume zwei Gase vorhanden sind, welche noch nicht gleichförmig gemischt sind, jedes nach dem Orte hinströmt, an welchem die Dichtigkeit des Gases die geringere ist. Den Kräften aber, welche die Strömung bewirken, steht ein Widerstand entgegen.

Wir denken uns eine Röhre, in welcher zwei Gase übereinander geschichtet sind, so daß nur eine Diffusionsströmung nach der Richtung der Röhrenachse stattfindet. Die Röhrenachse nehmen wir als die Richtung der x. In der zur Achse senkrechten Richtung legen wir jene der y und z. In einem Querschnitt der Röhre sei der Druck des einen Gases p_1, des andern p_2, der Gesamtdruck $p_1 + p_2 = p$ ist an allen Stellen der gleiche. Parallel der Röhrenachse ist der Druck p_1 und ebenso p_2 veränderlich. Jedes der beiden Gase wird nach der Richtung hingetrieben, nach welcher der Druck desselben abnimmt, die treibende Kraft ist der Druckabnahme proportional, gerade wie wenn das Gas allein vorhanden wäre. Das in einem Volumelemente $dx\,dy\,dz$ vorhandene Gas der einen Art erhält auf der einen zur Achse der x senkrechten Fläche den Druck $p_1\,dy\,dz$, auf der andern gegenüberliegenden den Druck $\left(p_1 + \frac{dp_1}{dx}\,dx\right)dy\,dz$; die Kraft, mit

1) *Buys-Ballot,* Poggend. Ann. **103**. p. 240. 1858.
2) *Clausius,* Poggend. Ann. **105**. p. 239. 1858.
3) *Maxwell,* Philosoph. Magazin. **20**. (4) p. 21. 1860.
4) *Stefan,* Wiener Berichte. **63**. p. 63. 1871; **65**. p. 323. 1872.
5) *O. E. Meyer,* Die kinetische Theorie der Gase. **Breslau** 1877. p 161 ff.

welcher das Gas Eins in diesem Volumelement getrieben wird, ist demnach

$$-\frac{dp_1}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Die Kraft, mit welcher das zweite Gas an eben der Stelle nach entgegengesetzter Seite getrieben wird, ist

$$-\frac{dp_2}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Dieser Kraft wirkt der Widerstand entgegen, von welchem Stefan annimmt, daß jedes Molekül des einen Gases, wenn es sich bewegt, von dem andern Gase einen Widerstand erfährt, welcher der Dichte des andern Gases und der relativen Geschwindigkeit der beiden Gase gegeneinander proportional ist. Nennen wir σ_1 die Dichtigkeit des ersten, σ_2 die Dichtigkeit des zweiten Gases an der Stelle des Volumelementes, c_1 die Geschwindigkeit der Strömung des einen, c_2 jene der Strömung des zweiten Gases, so daß $c_1 - c_2$ die relative Geschwindigkeit des Gases Eins gegen das Gas Zwei ist, so wird, da jedes Molekül des Gases Eins den gleichen Widerstand erfährt, das in dem Volumelement vorhandene Gas $\sigma_1\,dx\,dy\,dz$ den Widerstand

$$W_1 = A_{12}\sigma_1\sigma_2(c_1 - c_2)\,dx\,dy\,dz$$

erfahren, wenn A_{12} die Proportionalitätskonstante bedeutet. Die Differenz zwischen der bewegenden Kraft und diesem Widerstande gibt uns somit die das Gas forttreibende Kraft, diese Differenz ist somit gleich dem Produkte aus der in dem Volumelemente vorhandenen Masse und der Beschleunigung, welche diese Masse erhält. Bei der Diffusion erhält das Gas keine beschleunigte Bewegung, es wird das Gas Eins mit gleichförmiger Bewegung in das Gas Zwei hinübergeführt, es folgt deshalb, daß die Kraft gerade ausreicht, um den Widerstand zu überwinden, oder daß

$$-\frac{dp_1}{dx}\,dx\,dy\,dz = W_1 = A_{12}\sigma_1\sigma_2(c_1 - c_2)\,dx\,dy\,dz$$

ist.

Für die Verbreitung des zweiten Gases im ersten muß der Widerstand ganz genau derselbe sein, da der Widerstand Folge der Wechselwirkung der Teilchen des ersten und des zweiten Gases in dem betrachteten Volumelemente ist, und die Wirkung stets der Gegenwirkung gleich sein muß. Für das zweite Gas erhalten wir daher die Gleichung

$$-\frac{dp_2}{dx}\,dx\,dy\,dz = A_{12}\sigma_1\sigma_2(c_2 - c_1)\,dx\,dy\,dz.$$

Wir können demnach die beiden Gleichungen, welche als erste die Bewegungen der beiden Gase bestimmen, schreiben

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{dx} + A_{12}\sigma_1\sigma_2(c_1 - c_2) = 0\\ \frac{dp_2}{dx} + A_{12}\sigma_1\sigma_2(c_2 - c_1) = 0\end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \quad (1$$

Ein zweites Paar von Gleichungen für die Bewegung der beiden Gase erhalten wir aus der Erwägung, daß infolge der Strömung sich die Dichtig-

keit jedes Gases in dem Volumelement ändert, da von der Seite des höhern Druckes mehr Teilchen in das Volumelement eintreten als austreten. In dem Zeitelement dt legt jedes Molekül des ersten Gases die Strecke $c_1 dt$ zurück, es tritt demnach von der einen Seite durch die Fläche $dy\,dz$ die Gasmenge $\sigma_1 c_1 dt\,dy\,dz$ ein, denn es rückt gewissermaßen durch das Flächenelement $dy\,dz$ ein Parallelepiped, dessen Querschnitt $dy\,dz$, dessen Länge $c_1 dt$ in das betrachtete Volumelement ein; da die Dichte des Gases hier σ_1 ist, so ist die eintretende Menge $\sigma_1 c_1 dt\,dy\,dz$. Geht auf der Strecke dx die Geschwindigkeit in $c_1 + \frac{dc_1}{dx}dx$ und die Dichte in $\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx}dx$ über, so ist der Überschuß der austretenden über die der eintretenden

$$\left(c_1 + \frac{dc_1}{dx}dx\right)\left(\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx}dx\right)dt\,dy\,dz - \sigma_1 c_1\,dt\,dy\,dz = \frac{d(c_1\sigma_1)}{dx}dx\,dt\,dy\,dz.$$

Ist dieser Überschuß positiv, so geht die Dichtigkeit in $\sigma_1 - d\sigma_1$ über, ist derselbe negativ, so geht die Dichtigkeit in $\sigma_1 + d\sigma_1$ über, es ist demnach

$$d\sigma_1\,dx\,dy\,dz = -\frac{d(c_1\sigma_1)}{dx}dt\cdot dx\,dy\,dz$$

oder

$$\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d(c_1\sigma_1)}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und ganz entsprechend bekommen wir für das zweite Gas

$$\frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{d(c_2\sigma_2)}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 der Gase in dem Volumelement können wir durch die Drucke p_1 und p_2 ausdrücken. Ist δ_1 die Dichtigkeit des Gases Eins, δ_2 jene des Gases Zwei unter dem Druck p_0 der normalen Atmosphäre und der Temperatur des schmelzenden Eises, und ist die Temperatur des Gases ϑ, so ist

$$\sigma_1 = \delta_1 \frac{p_1}{p_0}\frac{1}{1+\alpha\vartheta}, \qquad \sigma_2 = \delta_2 \frac{p_2}{p_0}\frac{1}{1+\alpha\vartheta},$$

$$\sigma_1\sigma_2 = \frac{\delta_1\delta_2}{p_0^2(1+\alpha\vartheta)^2}\cdot p_1 p_2.$$

Setzen wir weiter $p_1 c_1 = q_1$; $p_2 c_2 = q_2$, so werden die Gleichungen (1)

$$\frac{dp_1}{dx} + A_{12}\frac{\delta_1\delta_2}{p_0^2(1+\alpha\vartheta)^2}(p_2 q_1 - p_1 q_2) = 0.$$

Der Faktor des zweiten Gliedes vor der Klammer wollen wir mit b_{12} bezeichnen, dann wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dx} + b_{12}(p_2 q_1 - p_1 q_2) = 0 \\ \frac{dp_2}{dx} + b_{12}(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und die Gleichungen (2) werden, wenn wir den gemeinschaftlichen Faktor fortlassen

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dq_1}{dx} = 0, \qquad \frac{dp_2}{dt} + \frac{dq_2}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Addieren wir die beiden Gleichungen (4), so wird

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} + \frac{d(q_1 + q_2)}{dx} = 0.$$

Da in dem ersten Gliede $p_1 + p_2 = p$ in dem ganzen Rohre konstant st, so ist das erste Glied für sich Null, es muß deshalb auch das zweite lied für sich gleich Null und deshalb $q_1 + q_2$ in dem ganzen Rohre denlben Wert haben. An den festgeschlossenen Enden des Rohres tritt Gas eder ein noch aus, die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 sind dort Null, desalb muß für das ganze Rohr $q_1 + q_2 = 0$ oder $q_1 = - q_2$ sein. Setzen wir as in die Gleichungen (3), so wird unter Beachtung, daß $p_1 + p_2 = p$ ist,

$$\frac{dp_1}{dx} + b_{12} p q_1 = 0, \qquad \frac{dp_2}{dx} + b_{12} p q_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Differenzieren wir diese beiden Gleichungen nach x, so wird

$$\frac{1}{b_{12} p} \frac{d^2 p_1}{dx^2} + \frac{dq_1}{dx} = 0, \qquad \frac{1}{b_{12} p} \frac{d^2 p_2}{dx^2} + \frac{dq_2}{dx} = 0$$

nd unter Beachtung der Gleichungen (4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{1}{b_{12} p} \cdot \frac{d^2 p_1}{dx^2} = k \frac{d^2 p_1}{dx^2} \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{b_{12} p} \frac{d^2 p_2}{dx^2} = k \frac{d^2 p_2}{dx^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wir haben hier die Grundgleichung der Diffusion, in welcher k der iffusionskoeffizient ist; derselbe ist hiernach für beide Gase derselbe und ie es Loschmidt schon fand, dem Gesamtdruck p umgekehrt proporonal. Nach der Bedeutung des Diffusionskoeffizienten

$$k = \frac{1}{b_{12} p} = \frac{1}{p} \frac{1}{A_{12}} \frac{p_0 p_0}{\delta_1 \delta_2} (1 + \alpha \vartheta)^2$$

kennen wir, daß der früher eingeführte Proportionalitätsfaktor A_{12} von r Natur der Gase abhängig sein muß. Um denselben zu bestimmen, ntersuchen wir die Umstände, von welchen der Widerstand abhängig ist, sen Wert für die Volumeinheit ist

$$W = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2).$$

Dieser Widerstand rührt daher, daß die Moleküle des einen Gases an Moleküle des andern Gases prallen; infolgedessen geben die Moleküle Gases I eine gewisse Bewegungsgröße an jene des Gases II ab, und se Bewegungsgröße für die Zeiteinheit ist der Widerstand, den die in Volumeinheit befindlichen Moleküle ihrer Bewegung entgegen erfahren.

Wir führen zur Berechnung derselben wie früher die Voraussetzung , daß die Geschwindigkeit der Molekularbewegung für alle Moleküle elben Gases dieselbe ist. Stößt eine Kugel von der Masse m_1 und der chwindigkeit c_1 in zentralem Stoße an eine andere mit der Masse m_2 l der Geschwindigkeit c_2, so ist die Bewegungsgröße, welche die Kugel an die Kugel m_2 abgibt, wenn wir die Geschwindigkeit nach dem Stoße c_1' bezeichnen,

$$m_1 (c_1 - c_1').$$

Nach § 59 ist v_1

$$v_1 = \frac{2 m_2 c_2 + (m_1 - m_2) c_1}{m_1 + m_2},$$

somit

$$m_1 (c_1 - v_1) = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2).$$

Würden alle Moleküle des Gases I diejenigen des Gases II in zentralem, der Bewegungsrichtung x parallelem Stoße treffen, so hätten wir nur die Gesamtzahl der Stöße der Moleküle des ersten an jene des zweiten Gases mit diesem Werte zu multiplizieren, um die verlorene Bewegungsgröße, somit den Widerstand W zu erhalten. Infolge der nach allen Richtungen stattfindenden, von der Strömung unabhängigen Bewegungen der Moleküle kommen aber neben dem zentralen Stoße alle möglichen schiefen Stöße, und zwar für jede mögliche Richtung in gleicher Anzahl vor. Bei schiefem Stoße wird aber nur die der Richtung x parallele Komponente der soeben berechneten Bewegungsgröße abgegeben. Diese Komponenten haben alle möglichen Werte zwischen 0 und dem oben angegebenen; anstatt aber alle diese Komponenten auszurechnen, können wir mit Hilfe der in Betracht kommenden Zahl Z_1 der Stöße die verlorene Bewegungsgröße in folgender Weise erhalten. Bildet die Stoßrichtung mit der zentralen parallel x den Winkel φ, so geht bei diesem Stoße für die Strömungsbewegung nur die in die Richtung der strömenden Bewegung fallende Komponente

$$2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \cos \varphi$$

verloren. Von der Zahl Z_1 fallen in diese Richtung, wie ganz analog dem § 102 Seite 572 durchgeführte Überlegungen zeigen, die Anzahl

$$Z_1 \sin \varphi d \varphi,$$

wo hier nicht wie an der frühern Stelle im Nenner 2 steht, weil hier nicht nur spitze Winkel φ, sondern auch deren Supplement vorkommen kann, welche mit der Richtung des geraden Stoßes somit denselben Winkel φ bildet. Für die unter dem Winkel φ auftreffenden Stöße ist demnach die verlorene Bewegungsgröße

$$2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \cos \varphi \cdot Z_1 \sin \varphi d \varphi.$$

Um den Gesamtverlust zu erhalten, haben wir für φ alle Werte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nach und nach einzusetzen und alle für die verschiedenen Werte von φ sich ergebenden Ausdrücke zu summieren, oder was dasselbe ist, nach φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu integrieren und erhalten

$$Z_1 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d \varphi = Z_1 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2),$$

da das Integral den Wert $\frac{1}{2}$ hat, wie wir schon mehrfach sahen.

Die Zahl Z_1 der in Betracht kommenden Stöße ist etwas größer als 'ahl derselben, wenn die Moleküle nur ihre Molekularbewegung hätten, ie Moleküle parallel der Strömungsrichtung sich rascher nähern, als ı die Strömungsbewegung nicht vorhanden wäre. Stefan weist nach, wenn Z die Stöße sind, welche ohne die Strömungsbewegung vor- en sind, wir den Verlust an Bewegungsgröße erhalten, wenn wir in n Ausdruck für Z_1 einsetzen $\frac{4}{3} Z$, so daß also die abgegebene Be- ıngsgröße oder der der Strömung entgegenstehende Widerstand

$$W = \frac{4}{3} Z \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)$$

Die Stoßzahl Z haben wir zu berechnen. Wir schlagen dazu genau lben Weg ein wie im § 102.

Die molekulare Geschwindigkeit des Gases I sei u, die des Gases II , der Radius der Wirkungssphäre des ersten Gases sei ϱ_1, der des en sei ϱ_2.

Bewegt sich ein Molekül in einem Raume von der Größe V, in wel- sich N Moleküle befinden, und ist ϱ der Abstand, bis zu welchem die Mittelpunkte der als Kugeln gedachten Moleküle nähern können, t nach § 102, wenn die Moleküle, mit Ausnahme des einen bewegten, ıd sind, die Stoßzahl Z'

$$Z' = \frac{N 4 \varrho^2 \pi + \Sigma}{4 (V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi)} u.$$

Die Größe ϱ können wir hier aber nicht als die Radien der Wirkungs- e der ruhenden Moleküle bezeichnen, da wir die Stöße der Moleküle iases I an jenen des Gases II aufsuchen. Wir nehmen als ruhende :üle die des Gases II, das eine bewegte ist eines des Gases I. Der nd, bis zu welchem die Mittelpunkte eines Moleküles des Gases I und des Gases II sich nähern können, ist bei der Annahme, daß die Mole- Kugeln wären, gleich der Summe der beiden Kugelradien. Da nach ben Anschauung der Radius der Wirkungssphäre gleich dem doppel- er Kugelradien ist, so müssen wir setzen

$$\varrho = \frac{1}{2} (\varrho_1 + \varrho_2).$$

Da wir hier nur Stöße an den Molekülen aufsuchen, haben wir in Ausdrucke für Z' die Wandfläche $\Sigma = 0$ zu setzen. Vernachlässigen en von den Molekülen des Gases II eingenommenen Raum, und setzen

$$\frac{N}{V} = n_2$$

der Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle des zweiten so wird

$$Z' = n_2 \varrho^2 \pi u.$$

ınd die Moleküle n_2 nicht in Ruhe, so müssen wir die Geschwindig- ersetzen durch die mittlere relative Geschwindigkeit $\bar{r}$ des Moleküls I die mit der mittlern Geschwindigkeit v bewegten Moleküle II. Wir n dieselbe genau wie im § 102; nur dürfen wir hier nicht $v = u$

setzen. Beachten wir das, so wird die mittlere relative Geschwindigkeit des Moleküls I gegen die Moleküle II

$$\bar{r} = \frac{1}{n_2} \int_0^\pi n_2 \tfrac{1}{2} \sin \varphi \, d\varphi \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi} .$$

In dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen ist

$$\sin \varphi \, d\varphi = - d \cos \varphi .$$

Setzen wir $\cos \varphi = x$, so ist $\sin \varphi \, d\varphi = - dx$, setzen wir ferner $u^2 + v^2 = a$, $2uv = b$, so wird das Integral, wenn wir gleichzeitig n_2 im Zähler und Nenner wegheben,

$$\bar{r} = \int - \tfrac{1}{2} dx \sqrt{a - bx},$$

wo jetzt nur die Grenzen zu bestimmen sind, zwischen welchen wir das Integral, in welchem jetzt die veränderliche x ist, zu nehmen haben. Nach φ hatten wir das Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ zu nehmen. Dem Werte $\varphi = 0$ entspricht der Wert $x = \cos \varphi = 1$, dem Werte $\varphi = \pi$ der Wert $x = \cos \pi = -1$. Wir haben also das Integral von $x = 1$ bis $x = -1$ zu nehmen. Zur Durchführung der Integration setzen wir

$$a - bx = t^2 .$$

Dann wird

$$- dx = \frac{2t\,dt}{b}$$

und wir erhalten

$$\bar{r} = \int \frac{t^2}{b} dt .$$

Da für $x = 1$, $t^2 = a - b$, für $x = -1$ dagegen $a + b$ wird, sind die Grenzen, zwischen denen wir dieses Integral zu nehmen hab[en] $\sqrt{a - b}$ und $\sqrt{a + b}$. Da unter dem Integralzeichen das Differential d[es] Ausdruckes $\frac{1}{3b} t^3$ steht, so wird

$$\bar{r} = \frac{1}{3b} \left\{ (a + b)^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

und setzen wir für a und b ihre Werte $a + b = (u + v)^2$; $a - b = (u - v)^2$ so wird

$$\bar{r} = \frac{1}{6uv} \left\{ (u + v)^3 - (u - v)^3 \right\} .$$

Ebenso aber, wie wir $a - b = (u - v)^2$ setzen, können wir ... setzen $a - b = (v - u)^2$, und in der Tat ist v größer als u, so m[üssen] wir diesen Wert einsetzen. Dann setzen wir die Geschwindigkeiten ... Moleküls des einen Gases s_1, die andern $v = s_2$ und nehmen ausdrü[cklich] an, daß $s_1 > s_2$, so erhalten wir, wenn wir $(s_1 + s_2) = f$ und $s_1 - s_2$ ... setzen, in der Klammer den Wert $f^3 - h^3$. Wir müssen aber gena[u] ... selbe mittlere Geschwindigkeit bekommen, wenn $u = s_2$ und $v = s_1$. Bilden wir aber jetzt die Differenz $u - v$, so würde dieselbe $s_2 - s_1 =$

; der Klammer würde $f^3 + h^3$, setzen wir aber jetzt das Glied wird der Wert der Klammer $f^3 - h^3$ wie vorher.
 $u > v$ erhalten wir nach Durchführung der Rechnung

$$r = \frac{3u^2 + v^2}{3u},$$

gegen

$$r = \frac{3v^2 + u^2}{3v}.$$

llen stets annehmen, es sei $u > v$, das heißt, wir nennen as I, welches die größere Molekulargeschwindigkeit hat. Die ıres Moleküls I an den n_2 Molekülen des Gases II wird damit

$$Z' = n_2 \varrho^2 \pi \frac{3u^2 + v^2}{3u}.$$

Moleküle des Gases I in der Volumeinheit, so ist die Anzahl $= n_1 Z'$, somit

$$Z = n_1 n_2 \varrho^2 \pi \frac{3u^2 + v^2}{3u}.$$

ht gleichzeitig, daß, wenn $u = v$ ist, der letzte Faktor, wie § 102 fanden, gleich $\frac{4}{3}$ ist.
Widerstand W erhalten wir demnach

$$W = \tfrac{4}{3} n_1 n_2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \varrho^2 \pi \frac{3u^2 + v^2}{3u} (c_1 - c_2).$$

hen wir diesen Ausdruck mit dem für den Widerstand W auf-

$$W = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2),$$

unter Beachtung, daß $\sigma_1 = n_1 m_1$, $\sigma_2 = n_2 m_2$, daß der Pro- koeffizient A_{12} wird

$$A_{12} = \tfrac{4}{3} \frac{\varrho^2 \pi}{m_1 + m_2} \frac{3u^2 + v^2}{3u}.$$

'usionskoeffizient k wird demnach

$$k = \frac{1}{p} \frac{3(m_1 + m_2)u}{\frac{4}{3}\varrho^2 \pi (3u^2 + v^2)} \frac{p_0 p_0}{\delta_1 \delta_2} (1 + \alpha \vartheta)^2.$$

Diffusionskoeffizienten weiter diskutieren zu können, machen hme, in dem Diffusionsgefäß sei der normale Druck vorhanden, ϑ die Temperatur des Diffusionsgefäßes ist, $p = p_0 (1 + \alpha \vartheta)$ ist. dann

$$k = \frac{3(m_1 + m_2) u p_0}{\frac{4}{3}\varrho^2 \pi (3u^2 + v^2) \delta_1 \delta_2} (1 + \alpha \vartheta).$$

timmen den Koeffizienten von $(1 + \alpha \vartheta)$, berechnen somit k

$n_1 + n_2$ die Anzahl der Moleküle eines Gases in der Volum- dem Drucke p_0, die Masse der Moleküle m, ihre Molekular- ıit bei 0° w_0, so ist der Druck p_0 nach § 103

$$p_0 = \tfrac{1}{3} n m w_0^2.$$

Nach einem schon früher herangezogenen Satze von Avogadro ist die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur immer die gleiche, einerlei welches Gas wir nehmen. Wir können deshalb ebenso auch für 0^0 setzen

$$p_0 = \tfrac{1}{3} n m_1 u_0^2 = \tfrac{1}{3} n m_2 v_0^2 .$$

Setzen wir also für m und w_0 Masse und Geschwindigkeit der Luftmoleküle, so können wir die Geschwindigkeiten u_0 und v_0 durch diejenige der Luftmoleküle ausdrücken

$$u_0^2 = \frac{m}{m_1} w_0^2 \qquad v_0^2 = \frac{m}{m_2} w_0^2 .$$

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für k ein und beachten, daß

$$\delta_1 = n m_1 \qquad \delta_2 = n m_2 ,$$

so wird

$$k = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{m} \cdot w_0}{(3 m_2 + m_1)\sqrt{m_1} \cdot \frac{4}{3} n \varrho^2 \pi} .$$

Das spezifische Gewicht eines Gases bezogen auf Luft ist gleich dem Quotienten des Gewichtes des Moleküls dieses Gases und des Gewichtes des Moleküls Luft. Nennen wir das so definierte spezifische Gewicht des Gases I d_1, des Gases II d_2, so wird, wenn wir Zähler und Nenner mit $m\sqrt{m}$ dividieren,

$$k = \frac{(d_1 + d_2) w_0}{(3 d_2 + d_1)\sqrt{d_1} \cdot \frac{4}{3} n \varrho^2 \pi} ,$$

worin für d_1, weil $u > v$ sein muß, als Gas I immer jenes mit dem kleinern spezifischen Gewicht genommen werden muß.

Den hier im Nenner noch vorkommenden Ausdruck $\frac{4}{3} n \varrho^2 \pi$ können wir durch die mittlere Wegelänge der einzelnen Gase ausdrücken. Vernachlässigen wir den von den Molekülen eingenommenen Raum, so ist nach § 102, wenn n die Molekülzahl eines Gases in der Volumeinheit und ϱ_0 der Radius der Wirkungssphäre ist, die mittlere Wegelänge l gegeben durch

$$l = \frac{1}{\frac{4}{3} n \varrho_0^2 \pi} .$$

In unserm Ausdrucke für k ist $\varrho = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$, den Wert des Ausdruckes $\frac{4}{3} n \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)^2 \pi$ erhalten wir demnach in folgender Weise. Ist l_1 die mittlere Wegelänge des Gases eins, l_2 jene des Gases zwei, so ist

$$\frac{1}{l_1} = \tfrac{4}{3} n \varrho_1^2 \pi \qquad \frac{1}{l_2} = \tfrac{4}{3} n \varrho_2^2 \pi$$

demnach

$$\tfrac{4}{3} n \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)^2 \pi = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2$$

und damit schließlich k

$$k = \frac{d_1 + d_2}{(3 d_2 + d_1)\sqrt{d_1}} \, \frac{4 w_0}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2} .$$

Ist die Temperatur der diffundierenden Gase nicht $\vartheta = 0$ sondern andere, so haben wir diesen Ausdruck mit $(1 + \alpha\vartheta)$ zu multiplizieren anstatt w_0 die Geschwindigkeit der molekularen Bewegung bei 0^0 zu setzen durch die molekulare Geschwindigkeit bei ϑ^0. Wie wir bereits § 104 bemerkt haben, ist diese Geschwindigkeit $w = w_0 \sqrt{1 + \alpha\vartheta}$. mit wird k

$$k = \frac{d_1 + d_2}{(3 d_2 + d_1)\sqrt{d_1}} \cdot \frac{4 w_0 (1 + \alpha\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2}.$$

Die Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten von der Temperatur, wie die Theorie liefert, entspricht, wie wir sahen, der Erfahrung nicht, denn Exponent von $(1 + \alpha\vartheta)$ ist nicht gleich 1,5, sondern liegt zwischen und 2. Indes ist zu beachten, daß wir hier ebenso, wie bei der bung, die mittlern Wegelängen bei gleichem Druck der Gase infolge Anziehung der Moleküle als mit der Temperatur veränderlich ansehen sen; wir müssen demnach auch hier die von Sutherland angegebene rektion anbringen. Da auch hier die mittlern Wegelängen in der ersten enz im Zähler stehen, müssen wir, wenn wir die Diffusionskoeffizienten der Temperatur $\vartheta = 0$ mit k_0 bezeichnen, setzen

$$k = k_0 \frac{1 + \alpha C_1}{1 + \frac{C_1}{T}} (1 + \alpha\vartheta)^{\frac{3}{2}},$$

in C_1 die Kohäsionskonstante der gemischten Gase ist.

Sutherland[1] hat diese Gleichung an den Beobachtungen von v. Oberier geprüft und gezeigt, daß die Diffusionskoeffizienten in ihrer Ab gigkeit von der Temperatur durch sie vortrefflich dargestellt werden. die Konstante C_1 erhält Sutherland die Werte

Kohlensäure — Luft	250	Sauerstoff — Wasserstoff	100
Kohlensäure — Wasserstoff	106	Sauerstoff — Stickstoff	136
Kohlensäure — Stickoxydul	380	Sauerstoff — Kohlenoxyd	124.

Bemerkenswert ist, daß wir den Diffusionskoeffizienten durch den ungskoeffizienten ausdrücken können. Wir fanden im § 117

$$\eta_1 = \tfrac{1}{3} n m_1 u l_1 \qquad \eta_2 = \tfrac{1}{3} n m_2 v l_2.$$

Drücken wir zunächst u und v durch w aus, so können wir schreiben

$$\frac{\eta_1}{n m_1} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{n m}{n m_1}}\, w l_1, \qquad \frac{\eta_2}{n m_2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{n m}{n m_2}}\, w l_2.$$

Hierin ist nm das Gewicht von 1 cm³ Luft, das wir gleich δ setzen en, damit wird

$$l_1 = \frac{3\eta_1}{\delta w \sqrt{d_1}} \quad \text{und ebenso} \quad l_2 = \frac{3\eta_2}{\delta w \sqrt{d_2}}.$$

1 Sutherland, Phil. Mag. 38. (5.) p. 1. 1894

Setzen wir diese Werte von l_2 und l_1 in den Ausdruck für k, und beachten, daß $w = w_0 \sqrt{1 + \alpha\vartheta}$, so erhält man leicht

$$k = 36 \frac{d_1 + d_2}{(3 d_2 + d_1)\sqrt{d_1}} \frac{\eta_1 \eta_2}{\delta\left(\sqrt{3\eta_1 \sqrt{d_2}} + \sqrt{3\eta_2 \sqrt{d_1}}\right)^2} (1 + \alpha\vartheta) \frac{1 + \alpha C_1}{1 + \frac{C_1}{T}}.$$

ein Ausdruck, der nur die Reibungskoeffizienten, die spezifischen Gewichte der Gase bezogen auf Luft und das Gewicht der Volumeinheit Luft enthält.

Schließlich sei darauf aufmerksam gemacht, daß wenn der Gesamtdruck im Diffusionsgefäße p nicht gleich $p_0(1 + \alpha\vartheta)$, sondern etwa gleich $P_0(1 + \alpha\vartheta)$ ist, wir den oben erhaltenen Wert mit dem Quotienten $\frac{p_0}{P_0}$ zu dividieren haben. Die Theorie führt demnach zu dem schon von Loschmidt gefundenen Resultate, daß der Diffusionskoeffizient dem Gesamtdrucke umgekehrt proportional ist.

Bei der Bestimmung des Diffusionskoeffizienten haben wir, wie bisher stets vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten u und v für alle Moleküle der gleichen Art dieselben sind. Wie wir schon erwähnten macht Maxwell diese Annahme nicht, derselbe berechnet unter Annahme, daß die Moleküle alle möglichen Geschwindigkeiten haben, die mittlere Geschwindigkeit anders. Damit wird auch die Stoßzahl eine andere, und damit werden die mittleren Wegelängen andere. Geht man von der Maxwellschen Bestimmung der mittlern Geschwindigkeiten aus, so wird nach den Rechnungen Stefans der Diffusionskoeffizient

$$k = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} \frac{\sqrt{d_1 + d_2}}{\sqrt{d_1 d_2}} \cdot \frac{w_0 (1 + \alpha\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2} \cdot \frac{p_0}{P_0} \frac{1 + \alpha C_1}{1 + \frac{C_1}{T}}.$$

ein Ausdruck, welcher in der Form übersichtlicher ist als der obige aus unserer nach Clausius gemachten Annahme gleicher Geschwindigkeit der Moleküle sich ergebende, besonders da er von den spezifischen Gewichten beider Gase in ganz gleicher Weise abhängt.

Die zahlenmäßige Prüfung dieser Ausdrücke wollen wir im nächsten Paragraphen nach Berechnung der mittlern Wegelängen vornehmen.

§ 121.

Absolute Werte der mittlern Wegelängen; Größe und Zahl der Moleküle. Die experimentelle Bestimmung der Reibungs- und Diffusionskoeffizienten setzt uns in den Stand die absoluten Werte der Wegelängen der Gasmoleküle zu bestimmen; in der Übereinstimmung der auf beiden Wegen gefundenen Werte erhalten wir eine wertvolle Bestätigung der kinetischen Gastheorie. Für den Reibungskoeffizienten eines Gases fanden wir § 117

$$\eta = \tfrac{1}{3} m n u l.$$

Wir haben im § 118 die Reibungskoeffizienten in absolutem Maß angegeben, für Luft ist derselbe so aus den Beobachtungen von Mey

aluj. Kundt und Warburg, von Obermaier bei der Temperatur 15°

$$\eta = 0{,}000\,183\ \frac{gr}{cm\ sec}.$$

Wir erhalten demnach aus der Gleichung

$$l = \frac{3\eta}{n m u}$$

ir Luft die mittlere Wegelänge bei normalem Druck der Atmosphäre, wenn wir für nm das Gewicht eines Kubikzentimeters Luft unter dem Drucke der Atmosphäre bei der Temperatur 15° und aus § 104 die Geschwindigkeit u der Luftmoleküle bei der Temperatur 15° einsetzen.

Das Gewicht eines Kubikzentimeters Luft bei 15° ist 0,001 226^{g}. Für die Geschwindigkeit u der Luftmoleküle erhielten wir bei der gleichen Temperatur $u = 49\,800$. Demnach wird l

$$l = \frac{3 \cdot 0{,}000\,183}{0{,}001\,226 \cdot 49\,800} = 0{,}000\,008\,992^{cm}$$

ler fast genau 9 Millionteile eines Zentimeters.

Setzen wir die Dichtigkeit eines Gases bezogen auf Luft gleich eins sich d, so können wir, wenn m_1, n_1, u_1 die betreffenden Größen für dieses as bedeuten, schreiben,

$$n_1 m_1 = n m d \qquad u_1 = \frac{u}{\sqrt{d}} \qquad n_1 m_1 u_1 = n m u \cdot \sqrt{d}.$$

Ist η_1 der Reibungskoeffizient dieses Gases, so können wir die Wegelänge l_1 schreiben

$$l_1 = \frac{3\eta_1}{m n u \sqrt{d}} = \frac{3\eta_1}{0{,}001\,226 \cdot 49800 \cdot \sqrt{d}} = 0{,}049\,14\ \frac{\eta_1}{\sqrt{d}}.$$

Demnach wird für

	η_1	d	l_1	l_1 Maxwell
Wasserstoff . .	0,000 091	0,069 26	0,000 016 95	0,000 018 49
Sauerstoff . . .	0,000 203	1,105 63	0,000 009 49	
Stickstoff . . .	0,000 179	0,971 37	0,000 008 92	
Kohlensäure . .	0,000 152	1,529 01	0,000 006 04	0,000 006 56
Kohlenoxyd . .	0,000 169	0,967 30	0,000 008 67	
Wasserdampf .	0,000 099	0,623 34	0,000 006 18	0,000 006 71.

Die mittlere molekulare Geschwindigkeit nach Maxwell wird kleiner nach Clausius Annahme der für alle Moleküle gleichen Geschwindigkeit, denn nach Maxwell wird die mittlere Geschwindigkeit r

$$r = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot u.$$

wird für Luft bei 15° gleich 45 885^{cm}, und demnach wird die mittlere Wegelänge für Luft

$$l = 0{,}000\,009\,77.$$

Mit diesem Werte sind die oben nach Maxwell angegebenen Werte die Wegelängen von Wasserstoff, Kohlensäure und Wasserdampf berechnet.

Aus den Diffusionskoeffizienten können wir die Weglängen berechnen, wenn die Diffusionskoeffizienten zwischen den möglichen Kombinationen dreier Gase vorliegen. Denn dann haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten l_1, l_2, l_3. Wir können in dieser Weise die von v. Obermayer beobachteten Werte benutzen. Nehmen wir die von Obermayer für Luft, Wasserstoff, Kohlensäure erhaltenen Werte für 15°

		berechnet nach Stefan mit der Annahme von Clausius	Maxwell
Luft — Kohlensäure	0,1496	0,1621	0,1574
Luft — Wasserstoff	0,7422	0,9871	0,9772
Wasserstoff — Kohlensäure .	0,5997	0,6387	0,7611

so wird nach der Formel von Stefan aus der Annahme von Clausius

$$\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2 = \frac{d_1 + d_2}{(3d_2 + d_1)\sqrt{d_1}} \cdot \frac{4w(1 + \alpha t)}{k}$$

die Weglänge

für Luft	0,000 006 06	aus der Reibung	0,000 009 00
„ Wasserstoff . .	0,000 015 14	„ „ „	0,000 016 94
„ Kohlensäure . .	0,000 005 68	„ „ „	0,000 006 04.

Rechnen wir nach dem von Stefan mit Zugrundelegung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeit erhaltenen Formel, so wird die mittlere Weglänge

für Luft	0,000 007 70	aus der Reibung	0,000 009 77
„ Wasserstoff . .	0,000 011 34	„ „ „	0,000 018 49
„ Kohlensäure . .	0,000 006 32	„ „ „	0,000 006 71.

Nach der ersten Formel stimmen die Weglängen für H und CO_2 recht gut, für Luft wird sie viel zu klein, nach der zweiten Formel weichen die für Luft und Wasserstoff gefundenen Werte erheblich ab.

Die mit den aus der Reibung sich ergebenden Weglängen berechneten Diffusionskoeffizienten sind oben neben den beobachteten angegeben, die nach beiden Formeln berechneten Diffusionskoeffizienten weichen nahezu gleichviel von den beobachteten ab. Man würde, wenn man die aus der Reibung abgeleiteten Weglängen als die wahrscheinlicheren annehmen wollte, zwischen den beiden Diffusionsformeln nicht entscheiden können. Gleiches ergibt sich, wenn man mit den aus den Reibungskoeffizienten sich ergebenden Weglängen die Diffusionskoeffizienten für Wasserdampf in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure berechnet und mit der von Winkelmann beobachteten vergleicht. Winkelmann hat bei 16°, 19°, 22° beobachtet, wir reduzieren mit seinen Temperaturkoeffizienten auf 15°, da die Reibungskoeffizienten nahe bei 15° beobachtet sind und wir für diese bezw. die Weglängen die Korrektion wegen der Temperatur so nicht anbringen müssen. Die Diffusionskoeffizienten sind

		beobachtet	berechnet I	berechnet II
Wasserdampf —	Luft	0,2377	0,2235	0,2472
„	Wasserstoff . .	0,8230	0,6980	0,7625
„	Kohlensäure . .	0,1514	0,1639	0,15[illegible].

Rechnung liefert den Koeffizienten für Wasserdampf — Wasserstoff mit der Annahme von Clausius I als jener von Maxwell II erkleiner, wobei indes bemerkt werden mag, daß die frühern Beoba Winkelmanns für Wasserdampf — Wasserstoff den Wert 0,802

nn die Reibung und Diffusion auch nicht zu den gleichen Werten elängen führen, so kommen sich doch die Werte so nahe, daß iesen Resultaten eine Bestätigung der kinetischen Gastheorie finden. auch zu beachten, daß Stefans Anschauung des Diffusionsvorals einer durch den Widerstand gehinderten Strömung der Gase einzig mögliche ist. Wir erwähnten schon vorher die Ableitung isionskoeffizienten von O. E. Meyer, welcher die Diffusion ledig-Folge der molekularen Bewegungen der Gase ansieht, aber in ihrer Form noch nicht genügen kann, weil sie zu einem von dem Verler Gasmengen abhängigen Diffusionskoeffizienten führt. Vielleicht dieselbe noch modifizieren, so daß sie zu einer Gleichung führt, leibung und Diffusion noch mehr in Übereinstimmung bringt, als schon der Fall ist.

Bestimmung der absoluten Werte der mittleren Wegelängen, wir lie aus den Reibungskoeffizienten abgeleiteten dazu verwenden, weiter in den Stand einen ungefähren Wert für die Radien der sphären zu erhalten, und zwar bieten sich dazu wiederum zwei Der erste benutzt dazu die nach den Entwicklungen von van der § 103, mitgeteilte theoretische Bedeutung der Größe b, welche in Verhalten der Gase an Stelle des Mariotteschen Gesetzes charakden Gleichung vorkommt. Dieselbe ist das von der Wirkungser in dem Raume V unter dem Drucke p vorhandenen Moleküle te Volumen, somit wenn wir die Volumeinheit Gas unter dem voraussetzen und wie immer die Zahl der in der Volumeinheit nen Moleküle mit n bezeichnen,

$$b = n \tfrac{4}{3} \varrho^3 \pi .$$

die Wegelängen l, ausgedrückt durch den Radius der Wirkungsanden wir § 103

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{N\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = \frac{1 - n\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{n\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = \frac{1-b}{b} \cdot$$

$$\varrho = l\,\frac{b}{1-b} \cdot$$

§ 103 erhielten wir für Stickstoff als Wert von $b = 0{,}002\,325$, der, wie wir sahen, auch die Amagatschen Beobachtungen bis Quecksilber gut wieder gab. Als Druck p ist hier jener von 1^m er angenommen; unsere Wegelängen beziehen sich dagegen auf h. = $0{,}76^m$ Quecksilber. Da die Zahl der Moleküle in der Volumm Drucke proportional ist, so enthält dieselbe unter Atmosphärenr 0,76 derjenigen, welche sie unter dem Drucke von 1^m enthält ihnen ausgefüllte Raum ist daher

$$b = 0{,}76 \cdot 0{,}002\,325 = 0{,}001\,767 .$$

Damit wird für Stickstoff

$$\varrho = l\,\frac{0{,}001\,767}{1 - 0{,}001\,767} = \frac{l}{564}\,.$$

Die mittlere Wegelänge würde somit bei Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, gleich dem 564fachen des Radius der Wirkungssphäre sein. Für ϱ erhalten wir daraus in Millimetern

$$\varrho = \frac{0{,}000\,0892}{564} = 0{,}000\,000\,158,$$

also etwa anderthalb Zehnmillionstel eines Millimeters.

Mit diesem Werte erhalten wir die Zahl n der in einem Kubikmillimeter unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Stickstoffmoleküle aus der Gleichung für b

$$n = \frac{b}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = \frac{0{,}001\,767}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi}\,,$$

da, wenn wir ϱ in Millimetern angeben, b der von dem Volumen der Wirkungssphäre der in einem Kubikmillimeter vorhandenen Moleküle eingenommene Raum ist. Mit dem oben erhaltenen Werte für ϱ wird

$$n = 1070 \cdot 10^{14},$$

oder im Kubikmillimeter Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, befinden sich 107 000 Billionen Moleküle.

Einen zweiten, zuerst von Loschmidt benutzten Weg bietet uns die Vergleichung des Volumens der Gase, welche durch Druck flüssig gemacht werden können, mit dem Volumen der aus ihnen entstandenen Flüssigkeit. Wir können zu diesem Zwecke die Kohlensäure benutzen, deren spezifisches Gewicht in flüssiger Form wir § 112 zu 0,947 bei der Temperatur des schmelzenden Eises angaben.

Bei derselben Temperatur ist das Gewicht von 1 Kubikmillimeter gasförmiger Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre, da das spezifische Gewicht derselben, bezogen auf Luft, gleich 1,529 ist und 1 Kubikmillim. Luft unter denselben Verhältnissen 0,001 293 Milligramm wiegt,

$$0{,}001\,293 \cdot 1{,}529 = 0{,}001\,977.$$

Das Volumen dieser Kohlensäuremenge in flüssiger Form ist in Kubikmillimetern

$$\frac{0{,}001\,977}{0{,}947} = 0{,}002\,08\,.$$

Im flüssigen Zustande sind die Moleküle einander so nahe, daß, wie die geringe Kompressibilität zeigt, dieselben überhaupt nur wenig mehr einander genähert werden können. Wir werden daher nur wenig von der Wahrheit abweichen, wenn wir annehmen, daß die Moleküle einander so weit genähert sind, wie sie es im Gaszustande im Augenblicke des Stoßes sind. Dann würde also der Abstand der Mittelpunkte der Moleküle gleich dem Radius der Wirkungssphären sein. Man würde sich etwa die Moleküle selbst als Kugeln denken können, deren Durchmesser gleich dem Radius der Wirkungssphäre wäre, und daß diese Kugeln sich zur Berührung nähern könnten, denn in dem Falle wäre der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich

n Durchmesser der Moleküle. Die von uns bisher allein in Betracht ogenen Wirkungssphären entsprächen dann dem Achtfachen des von dem lekül selbst ausgefüllten Raumes.

Wir erhalten aus dem von der flüssigen Kohlensäure in Anspruch ommenen Raume den von den Wirkungssphären ausgefüllten in folgender ise. Denken wir um jedes der im flüssigen Zustande sich berührenden leküle einen Würfel gelegt, dessen Seite gleich dem Durchmesser des leküls ist, so füllen diese Würfel den ganzen von der Flüssigkeit einommenen Raum aus. Der von den Molekülen wirklich ausgefüllte Raum hält sich somit zu den von der Flüssigkeit ausgefüllten, wie das Volum r Kugel zu dem des umschriebenen Würfels, er ist somit $\frac{1}{6}\pi$ des ganzen umes. Da nun die Wirkungssphären den achtfachen Raum der Moleküle nehmen, ist derselbe $\frac{8}{6}\pi$ des von der Flüssigkeit ausgefüllten, somit

$$b = \tfrac{8}{6}\pi \cdot 0{,}002\,08 = 0{,}008\,69,$$

d dann

$$\varrho = l\,\frac{b}{1-b} = \frac{l}{114} = \frac{0{,}000\,0604}{114} = 0{,}000\,000\,53,$$

wir als l den aus der Reibung sich ergebenden Wert der mittlern Wegege einsetzten.

Der Radius der Wirkungssphäre wäre also etwas mehr als dreimal groß als bei Stickstoff. Für die Molekülzahl n ergibt sich dann

$$n = 139{,}4 \cdot 10^{14}.$$

Die Annahme, daß die Moleküle, dieselben als Kugeln gedacht, sich mittelbar berühren, ist keinenfalls ganz richtig, und damit wird b und mit ϱ etwas zu groß und n zu klein. Nach dem Avogadroschen Satze ßte dieses n dem für Stickstoff gefundenen gleich sein, letzteres ist aber ra das siebenfache. Indes, wenn wir beachten, aus welch verschiedenigen Erfahrungen wir die beiden Zahlen abgeleitet haben, und daß weder für den Stickstoff aus den Regnaultschen Beobachtungen abgeleitete öße b vollkommen genau, noch daß der für die Kohlensäure berechnete rt ganz richtig ist, weiter, daß die Werte der mittleren Weglängen gleiche Unsicherheit enthalten, welche die experimentell bestimmten ibungskoeffizienten haben, so müssen wir die Übereinstimmung der Werte n n für eine ganz außerordentlich nahe halten und darin einen neuen weis erblicken, wie vortrefflich die dynamische Gastheorie die verschiesten bei den Gasen beobachteten Erscheinungen aus der einfachen Grundothese abzuleiten vermag. Würden wir annehmen, daß im flüssigen stande der Abstand der Schwerpunkte der Moleküle nur das 1,5fache Radius der Wirkungssphäre wäre, so würde der für Kohlensäure beinete Wert von n schon auf mehr als das Zehnfache steigen. Überpt läßt sich ja bei diesen Berechnungen nicht mehr erwarten, als daß in den schließlichen Resultaten nur ein ungefähres Bild der äußerst nen Dimensionen und der sehr großen Zahl der Moleküle erhalten, wir nen die für Stickstoff und Kohlensäure berechneten Werte von n als obere und untere Grenze ansehen, zwischen denen die Zahl der Mole eingeschlossen ist.

§ 122.

Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen. Trennt man zwei Gase durch eine poröse Scheidewand, z. B. durch eine poröse Tonplatte oder durch ein Gipsdiaphragma, dessen Poren so enge sind, daß infolge selbst bedeutender Drucke die Gase nur mit geringer Geschwindigkeit hindurchfließen, so zeigt sich, daß auch durch solche Scheidewände hindurch die Gase sich mit großer Geschwindigkeit mischen. Sorgt man dafür, daß der Druck auf beiden Seiten der Scheidewand während der ganzen Dauer des Versuches genau gleich ist, so sieht man, daß die in entgegengesetzter Richtung durch die Scheidewand hindurchtretenden Gasvolumina keineswegs gleich sind, daß also die chemisch verschiedenen Gase die Scheidewand mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchdringen.

Die ersten genauern Versuche über die Diffusion der Gase durch trockene poröse Scheidewände rühren von Graham[1]) her. Derselbe ließ verschiedene Gase, die er in Röhren, welche mit einem trockenen Gipspfropf verschlossen waren, über Quecksilber absperrte, in atmosphärische Luft diffundieren, und fand, daß das gegen Luft unter konstantem Drucke ausgetauschte Gasvolumen nahezu der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Gase umgekehrt proportional war. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Luft zu der des Wasserstoffs wie

$$1{,}000 : 0{,}069\,26,$$

oder wie

$$14{,}43 : 1;$$

für 1 Volumen Luft, welches in die Diffusionsröhre durch den Gipspfropf eingetreten war, traten nun 3,1 Volumina Wasserstoff aus; die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten der Luft und des Wasserstoffes verhalten sich aber wie 3,8 : 1; man sieht, daß die ausgetauschten Gasmengen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten stehen.

Da die sich austauschenden Gasmengen diejenigen sind, welche in gleichen Zeiten durch die Scheidewand hindurchtreten, so messen sie zugleich die Geschwindigkeiten, mit denen die verschiedenen Gase durch die Scheidewand hindurchfließen.

Vorhin sahen wir, daß die Ausflußgeschwindigkeiten verschiedener Gase aus Öffnungen in dünner Wand unter gleichem Drucke den Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind. Die Diffusionsgeschwindigkeiten verhalten sich also nahezu wie die Ausflußgeschwindigkeiten aus dünner Wand.

Graham nahm nun an, daß die Diffusionsgeschwindigkeiten mit den Ausflußgeschwindigkeiten genau übereinstimmen, und gründete darauf eine Erklärung der Diffusionserscheinungen. Nach dieser verbreitet sich ein Gas in ein anderes gerade so wie in den leeren Raum und die Bewegung erfolgt mit derselben Geschwindigkeit. Die Poren der Tonplatte sieht man dann an als Öffnungen in dünner Wand und dann folgt unmittelbar, daß die ausgetauschten Gasmengen sich verhalten müssen wie die reziproken Werte aus den Quadratwurzeln der Dichtigkeiten.

1) *Thomas Graham*, Poggend. Ann. 17. p. 341. 1829; 28. p. 331. 1833.

Bunsen[1]) machte jedoch später darauf aufmerksam, daß die Erklärung ht zulässig sei, da nur bei Anwendung von Öffnungen in dünner Wand Ausflußgeschwindigkeiten in dem erwähnten Verhältnisse stehen, nicht r bei der Anwendung enger und besonders kapillarer Röhren. Wenn i auch bei der Anwendung poröser Diaphragmen die Gesetze des Ausmens nicht einfach diejenigen der Transpiration durch lange kapillare ren sein werden, so ist es doch wahrscheinlich, daß die Gase durch he Diaphragmen nicht wie aus Öffnungen in dünner Wand fließen.

Letzteres hat Bunsen dann zunächst nachgewiesen: eine mit einer lung versehene und kalibrierte Glasröhre wurde oben mit einem Gipsopf, der bei 60° getrocknet war, geschlossen, mit Quecksilber gefüllt, l dann mit dem Gipspfropf nach oben in ein tiefes Quecksilbergefäß enkt. Dann wurde das obere durch den Gipspfropf geschlossene Ende Röhre mit einem Raume in Verbindung gesetzt, der mit den verschieen Gasen unter dem während des ganzen Versuches konstant erhaltenen cke einer Atmosphäre gefüllt werden konnte. Wurde das Rohr allhlich aus dem Quecksilber herausgezogen, so strömte durch das Diaragma das Gas in die Röhre. War dann der Druck in der Röhre nur nig mehr von dem Drucke einer Atmosphäre verschieden, so hielt man rch langsames Heben der Röhre den Druck des Gases eine Zeitlang ch im Innern der Röhre konstant, und beobachtete die Zeit, welche erderlich war, daß eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in Röhre einströmte.

Dabei ergab sich, daß die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die mer unter demselben Drucke von 1^m in der Zeit $1''$ einströmende Gasnge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorndenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und daß die nströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reziken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten steht. So erhielt nsen unter andern folgende Werte:

		Sauerstoff	
Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,091 87	0,1977	0,3058
Druckdifferenz p in M. Quecksilber	0,0167	0,0335	0,0520
$\frac{V_1}{p}$	5,893	5,901	5,881
		Wasserstoff	
Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,2665	0,5369	0,8431
Druckdifferenz p in M. Quecksilber	0,0167	0,0338	0,0520
$\frac{V_1}{p}$	15,96	15,89	16,21

Während also die Druckdifferenzen von $16,7^{mm}$ bis 52^{mm} Quecksilber chsen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf portional.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff im Mittel 1 : 2,71, während das Verhältnis der reziproken Quadratwurzeln Dichten 1 : 3,995 ist.

1 Bunsen, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857.

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also mit dem durch kapillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verhältnis der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht auch nicht sehr von dem Verhältnis der reziproken Werte der Reibungskoeffizienten ab, wie sie sich im § 118 aus Meyers Beobachtungen der Transpirationszeiten, 1 : 2, ergaben.

Wollte man nun im übrigen die Grahamsche Theorie beibehalten, also die Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch kapillare Röhren ansehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume absperren kann, so müßten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch kapillare Röhren verhalten, das ist aber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt fand, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten Luft zu Wasserstoff wie 1 : 3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1 : 3,345, Zahlen, welche dem Verhältnis der reziproken Werte der Quadratwurzeln aus den Dichten näher kommen als dem Verhältnis der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Außerdem nimmt Bunsen an, daß die Verhältnisse der Diffusionsgeschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch eine weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der Gase bedingt wäre.

Eine ausführlichere Theorie dieser Diffusionserscheinungen ist später von Stefan[1]) gegeben worden, in welcher er einen wohl zuerst von Maxwell[2]) ausgesprochenen Gedanken ausführt, nach welchem man diese Diffusion als einen Spezialfall der in den Paragraphen 119 und 120 betrachteten Diffusion ansehen kann. Stefan untersucht zunächst die Diffusion der Gase, denen ein drittes Gas gleichförmig beigemischt ist, also etwa die Diffusion von Wasserstoff und Sauerstoff, denen beiden Kohlensäure beigemischt ist. Man kann dann die Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen als eine solche ansehen, wobei indes die Moleküle des dritten Gases nicht beweglich, sondern fest sind. Ein weiteres Eingehen in die Theorie würde uns zu weit führen, wir verweisen auf die Abhandlung von Stefan.

Anders als solche poröse Diaphragmen verhalten sich Kolloide, wie Kautschuk oder flüssige Lamellen, wenn sie Räume voneinander trennen, welche mit einem an den beiden Seiten der Membran verschieden dichten oder auch verschiedenen Gasen angefüllt sind.[3]) Das Eindringen eines Gases in eine dasselbe begrenzende Flüssigkeit erfolgt zunächst durch Absorption des Gases in der Flüssigkeit. Die Menge des absorbierten Gases ist gemäß dem Henry-Daltonschen Gesetze dem Drucke bezw. der Dichtigkeit des Gases proportional. Aus der oberflächlichen Schicht, welche sich allmählich mit Gas sättigt, diffundiert das Gas in die Flüssigkeit gerade so wie in einer Lösung das Salz aus der konzentrierteren in die weniger konzentrierte Lösung hineindiffundiert.

Man erkennt ohne weiteres, daß für die Diffusion des Gases die gleichen

1) *Stefan*, Wiener Berichte. **63**. 1871.
2) *Maxwell*, Phil. mag. **20**. (4.) 1860.
3) Über die Diffusion durch Kolloide sehe man *Graham*, Poggend. Ann. **129**. p. 549. 1866; *von Wroblewski*, Poggend. Ann. **158**. p. 539. 1876; Wiedem. Ann. **8**. p. 29. 1879.

Gesetze gelten müssen, wie wir sie § 85 für die Salze fanden. Es entwickelt sich ein Dichtigkeitsgefälle und die in gleichen Zeiten durch die Flächeneinheit wandernde Gasmenge ist dem Dichtigkeitsgefälle proportional. Befindet sich an der andern Seite der das Gas begrenzenden Flüssigkeitsschicht kein Gas oder Gas von geringerer Dichtigkeit, so wird die Grenzschicht an dieser Seite nach dem Henryschen Gesetz weniger mit Gas gesättigt sein, es entsteht deshalb auch dann ein Gefälle der Gasdichte in der Flüssigkeit. Wird das Gas auf beiden Seiten auf konstanter Dichtigkeit gehalten, so entwickelt sich ein stationärer Zustand, indem in den beiden Grenzflächen der Flüssigkeitsschicht eine konstante Gasdichte entsteht, welche dem auf der betreffenden Seite vorhandenen Gasdrucke, entsprechend dem Henry-Daltonschen Gesetze, proportional ist. Nehmen wir an auf der einen Seite sei gar kein Gas vorhanden, auf der andern Seite das Gas unter dem Drucke der Atmosphäre, es sei a der Absorptionskoeffizient des Gases und l die Dicke der Schicht, so ist das Absorptionsgefälle gleich $\frac{a}{l}$, und wir erhalten für das in der Zeiteinheit durch die Fläche q strömende auf normalen Druck reduzierte Gasvolumen v

$$v = k \frac{a}{l} q.$$

Die Proportionalitätskonstante k ist die Menge Gas, welche für das Gefälle $\frac{a}{l} = 1$ in der Zeit eins durch die Fläche $q = 1$ hindurchgeht, sie ist das Maß der Diffusionsgeschwindigkeit.

Wir sehen, daß sich für die Diffusionsgeschwindigkeit derselbe Ausdruck ergibt wie für Salze bei Anwendung der Beobachtungsmethode von Fick.

Ebenso wie in diesem Falle gelten auch bei anderer Anordnung des Versuches die in § 85 mitgeteilten Gleichungen für die Diffusion, wie Stefan[1] nachgewiesen hat.

Um den Diffusionskoeffizienten der Kohlensäure in Wasser unter Anwendung des stationären Zustandes zu bestimmen, füllte Stefan eine etwa 1mm weite Glasröhre mit Kohlensäure und schloß dieselbe an beiden Enden. Es wurde dann das eine Ende unter Wasser gebracht, und die Röhre unter Wasser geöffnet. War der Druck der Kohlensäure etwas kleiner als der zeitige Atmosphärendruck, so trat eine Wassersäule in die Röhre. War eine solche von passender Länge hergestellt, so wurde die Röhre aus dem Wasser herausgezogen und sich selbst überlassen. Die Kohlensäure diffundierte durch das Wasser, da sie oben entsprechend dem Drucke des Gases absorbiert wurde, unten dagegen in der Grenzschicht wegen der schnellen Diffusion der Kohlensäure in der freien Luft die Dichtigkeit null ist. Den Austritt des Gases durch die Flüssigkeit erkannte man dadurch, daß der Flüssigkeitsfaden in der Röhre vorrückte, und man erkannte so, daß nach hinreichend langer Zeit in der Tat in gleichen Zeiten das gleiche Volumen Gas durch die Wasserschicht hindurch diffundierte. Indem wir des weiteren auf die Arbeit von Stefan verweisen, bemerken wir nur, daß er als

1) Stefan, Berichte der Wiener Akad. 77. II. p. 371. 1878.

Diffusionskoeffizienten der Kohlensäure in Wasser, in Zentimeter und Tag als Einheit der Länge und der Zeit, 1,38 fand.

In anderer Weise hat Exner[1]) die Diffusionskoeffizienten einer größern Anzahl von Gasen durch Seifenlösung miteinander verglichen; er wandte Seifenlamellen an. Durch Eintauchen des einen Endes eines Glasrohres in Seifenlösung wurde dasselbe mit einer Seifenlamelle überzogen, die Lamelle durch Saugen an dem andern Ende des Rohres an eine passende Stelle gebracht und darauf dieses Ende geschlossen; der durch die Lamelle abgegrenzte Teil des Rohres war demnach mit Luft gefüllt. Auf die andere Seite der Lamelle wurde das Gas gebracht. Das Gas diffundierte dann durch die Seifenlamelle gegen Luft, ersteres in den durch die Lamelle abgeschlossenen Raum, letztere in die freie Luft. Ist die Diffusionsgeschwindigkeit des durch die Lamelle austretenden Gases größer als die des durch die Lamelle von außen eindringenden Gases, so wird das Volumen des von der Lamelle abgeschlossenen Gases abnehmen; ist die Geschwindigkeit des eindringenden Gases die größere, so wird dasselbe wachsen, und diese Änderung in der Lage der Membran wird so lange fortdauern, bis auf beiden Seiten der Membran dasselbe Gas ist; ist das erreicht, so tritt eine weitere Verschiebung der Membran nicht ein.

Das bei Beginn des Versuches durch die Membran abgesperrte Volumen des einen Gases ist dann nach außen diffundiert, das am Ende von der Membran abgegrenzte Volumen des von außen kommenden Gases ist unter genau gleichen Verhältnissen von außen nach innen diffundiert. Das Verhältnis des End- und Anfangsvolumen ist demnach das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeit der beiden Gase.

Exner gelangte bei seinen Versuchen zu dem Resultate, daß die Diffusionsgeschwindigkeiten zweier Gase sich direkt verhalten wie die der Temperatur der diffundierenden Gase entsprechenden Absorptionskoeffizienten und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus den Dichtigkeiten.

Hiernach würden wir den vorher eingeführten Diffusionskoeffizienten $k = \frac{K}{\sqrt{d}}$ zu setzen haben und unsere Gleichung für die in der Zeiteinheit diffundierte Gasmenge wird

$$v = \frac{K}{\sqrt{d}} \frac{a}{l} q.$$

Nennen wir die in der gleichen Zeit durch dieselbe Membran diffundierte Luftmenge v_1, den Absorptionskoeffizienten der Luft a_1, und die Dichtigkeit derselben d_1, so wird

$$v_1 = \frac{K}{\sqrt{d_1}} \frac{a_1}{l} q$$

und das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten des Gases und der Luft

$$\frac{v}{v_1} = \frac{a}{\sqrt{\frac{d}{d_1}} \cdot a_1} = \frac{a}{\sqrt{\delta} \cdot a_1},$$

wenn δ die Dichte des Gases bezogen auf die Dichte der Luft gleich eins

1) *Franz Exner,* Poggend. Ann. 155. p. 321. 1875.

deutet. Setzen wir mit Exner den Absorptionskoeffizienten nach Bunsen unter der Voraussetzung, daß der Absorptionskoeffizient der Seifenlamelle der gleiche ist wie für Wasser, für etwa 17° C. gleich 0,017, so wird

$$\frac{r}{r_1} = 58,8 \frac{a}{\sqrt{\delta}},$$

eine Gleichung, welche die Exnerschen Beobachtungen sehr gut darstellt.

Beziehen wir die Diffusionsgeschwindigkeiten auf jene der Kohlensäure gleich 1, so wird

$$\frac{r}{r_c} = 1,230 \frac{a}{\sqrt{\delta}}.$$

Kennen wir die Diffusionsgeschwindigkeit der Kohlensäure, so kennen wir, soweit die Exnersche Regel gültig ist, die Diffusionsgeschwindigkeit der übrigen Gase nach der Gleichung

$$r = r_c \cdot 1,230 \frac{a}{\sqrt{\delta}}.$$

Nach Stefan ist r_c gleich 1,38 zu setzen; somit

$$r = 1,697 \frac{a}{\sqrt{\delta}}.$$

Die zu Grunde liegenden Einheiten sind Zentimeter und Tag.

Hüfner[1]) hat zur Prüfung der Exnerschen Regel die Diffusion durch eine Wasserschicht von gemessener Dicke untersucht. Auf das gerade abgeschnittene Ende einer Röhre wurde eine Platte von Hydrophan gekittet, einem Mineral, welches mit Wasser in Berührung sich mit Wasser vollsaugt aber eine Wasserschicht von ziemlicher Dicke tragen kann, ohne daß das Wasser durch sie hindurch filtriert. Auf die Hydrophanplatte wurde eine zweite Röhre gekittet, so daß ihre Achse die Verlängerung der Achse der untern Röhre bildete. Auf die Hydrophanplatte wurde eine Wasserschicht von gemessener Dicke gebracht und die untere Röhre mit Gas unter dem Drucke der Atmosphäre gefüllt. Die Abnahme des Gasvolumens in der untern Röhre gab die Menge des diffundierten Gases an.

Für Kohlensäure, Sauerstoff, Stickstoff, Stickoxydul und Chlor fand er die Exnersche Regel bestätigt, für Wasserstoff waren die gefundenen Werte schwankend, für Ammoniak waren die beobachteten Werte viel zu groß.

A. Hagenbach[2]) gab, um Strömungen zu vermeiden, dem Wasser durch Zusatz von Gelatine eine feste Form, wie es Voigtländer bei Untersuchung der Diffusion der Salze getan hatte (§ 85). Wie Voigtländer, so fand auch Hagenbach, daß sich die Gelatinelösung selbst bei konzentrierterer Lösung in ihrem Verhalten vom Wasser nur wenig unterscheidet: die Absorptionskoeffizienten waren die gleichen. Mit einer solchen Gelatinelösung wurde eine Messingplatte von 1^{cm} Dicke, welche mit etwa 1000 gleich großen Löchern versehen war, beschickt. Zu beiden Seiten der Platte waren Gefäße aufgekittet, die mit einem und demselben Gas aber unter

1) *Hüfner*, Wiedem. Ann. 60 p. 134. 1897.
2) *A. Hagenbach*, Wiedem. Ann. 65. p. 673. 1898.

so daß wir dieselbe setzen können $m = \mu ds$ Setzen wir diesen bigen Ausdruck ein, so erhalten wir für die zur Überwindung standes erforderliche Kraft $\mu \frac{ds^2}{dt^2}$ oder μv^2. Infolge des Luftes ist es gerade so, als wenn an dem Körper eine seiner augen-Bewegungsrichtung entgegensetzte, dem Quadrat seiner Geschwin-›portionale Kraft angriffe. Daraus folgt aber, daß sein Verlust ·indigkeit in jedem Augenblicke dem Quadrate der Geschwindig-rtional ist.

s Newtonsche Widerstandsgesetz schließt sich jedoch der Ercht genau an, dieselbe zeigt vielmehr, daß das Widerstandsgesetz iedene Geschwindigkeiten selbst verschieden ist. Ein Umstand · Ableitung jenes Gesetzes auch ganz außer acht gelassen, nämeibung der Luft, wodurch, wie wir im § 117 sahen, selbst die solcher Körper verzögert wird, welche keine Luft aus der Stelle ., wie etwa um eine vertikale Achse rotierende oder schwingende Kreisscheiben. Dieser Widerstand ist der Geschwindigkeit der direkt proportional. Wir müssen deshalb den Widerstand der nur dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers, ıch der ersten Potenz derselben proportional setzen. Ja letzteres ›ogar bei langsamen Bewegungen, wie Pendelschwingungen, das ıde. Für sehr rasche Bewegungen nimmt der Widerstand in einem ıern Verhältnisse zu, als das Quadrat der Geschwindigkeit. Der on ist der, daß bei jeder Bewegung vor dem bewegten Körper chtung der Luft entsteht. Bei langsamer Bewegung gleicht sich lichtung, da sie sich rasch auf die entfernteren Luftschichten bald aus, so daß der Körper bei seinem Vorschreiten die Luft ler in der gewöhnlichen Dichtigkeit vorfindet; bei rascheren Beist das nicht der Fall, da findet die Ausweichung der Luftteil· so rasch statt, so daß vor den bewegten Körpern eine Schicht r Luft sich befindet. Hinter denselben dagegen ist die Luft verın bei sehr rascher Bewegung kann die Luft nicht rasch genug ·her von dem Körper eingenommenen Raum eindringen, um dort, hdem der Körper sich fortbewegt hat, die normale Dichtigkeit ·zustellen. Es tritt also zu der vorhin betrachteten Ursache eines igkeitsverlustes bei sehr raschen Bewegungen noch die hinzu, daß r in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung einen stärck erfährt als in der Richtung derselben.

r von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers hängt der Wider-Luft auch wesentlich ab von der Gestalt desselben, besonders Flächeninhalt des auf der Bewegungsrichtung senkrechten Querles Körpers, denn mit diesem ändert sich in obigem Ausdruck zient μ. Je größer dieser Querschnitt ist, eine um so größere muß der Körper aus der Stelle drängen. Es ist unmittelbar erlaß diese zu verdrängende Luftmenge und damit der von dieser Widerstand der Luft der Größe dieses Querschnittes proportional dem übersieht man leicht, daß bei gleichem Querschnitt der Wider- von der Gestalt abhängt, daß also ein vorn keilförmig zuge-Körper einen kleineren Widerstand findet als ein vorn flacher.

Bei gleicher Gestalt und gleicher Geschwindigkeit zweier bewegter Körper mit verschiedener Masse erfährt der Körper kleinerer Masse eine stärkere Verzögerung als der Körper mit größerer Masse, weil er bei kleinerer lebendiger Kraft denselben Widerstand zu überwinden hat. Daraus folgt unmittelbar, daß bei dem freien Fall in der Luft leichte Körper langsamer fallen müssen als schwere, so daß wir in dem Widerstande der Luft neben dem früher erwähnten Gewichtsverluste der Körper in der Luft den Grund der beobachteten Abweichung vom Fallgesetz erkennen.

§ 124.

Kinetische Theorie der Flüssigkeiten; endosmotischer Druck; Diffusion. Wenn wir auch erst in der Wärmelehre imstande sind den Übergang von dem gasförmigen Zustande einer Materie in die flüssige Form und den umgekehrten Vorgang näher zu verfolgen, so wollen wir doch am Schlusse dieses Abschnittes schon kurz die kinetische Theorie der Flüssigkeiten erwähnen, auf welche van der Waals[1]) in konsequenter Durchführung seiner § 103 mitgeteilten Anschauungen gelangt ist. Wir haben damals die Zustandsgleichung von van der Waals kennen gelernt

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R,$$

worin p der Druck auf die Wandfläche des das Gas enthaltenden Gefäßes, a die molekulare zwischen den Gasmolekülen vorhandene Anziehung, v das von dem Gase eingenommene Volumen, b den von der Wirkungssphäre der Moleküle eingenommenen Raum und R eine Konstante bedeutet, wenn das Gas eine konstante Temperatur hat. Aus der Form der Gleichung erkennt man, daß a die in denselben Druckeinheiten wie p gemessene Druckverminderung an den Gefäßwänden, und zwar für die Flächeneinheit bedeutet gegenüber dem Drucke im Innern des Gases, wenn das Volumen des Gases bei der Druckeinheit die Einheit des Volumens ausfüllt. Wenn wir demnach für Stickstoff die Gleichung fanden

$$\left(p + \frac{0{,}003\,03}{v^2}\right)(v - b) = 1{,}000\,697,$$

wo die Druckeinheit 1^{m} Quecksilber war, so heißt das, die molekulare Anziehung vermindert den von dem Stickstoff auf die Wandfläche ausgeübten Druck um $0{,}003\,03^{\mathrm{m}}$ Quecksilber, wenn wir ein Gefäß mit Stickstoff unter dem Drucke von 1^{m} Quecksilber angefüllt haben, oder im Innern des mit Stickstoff angefüllten Raumes erfährt jedes Flächenstück nach allen Richtungen des Raumes den Druck $1{,}003\,03^{\mathrm{m}}$ Quecksilber.

Wie wir weiter erwähnten, lassen sich eine Reihe von Gasen bei gewöhnlicher Temperatur lediglich durch Druck in die flüssige Form bringen, und van der Waals gelangt zu dem Schlusse, daß dieselbe Gleichung allerdings mit einem etwas kleinern Werte für b, wie wenn die Wirkungssphären kleiner geworden wären, wie er für größere Volumen gilt, auch

1) *Van der Waals*, Over de continuiteit van den Gas en Vloeistoftoestand Leiden 1873; übersetzt von Roth, Leipzig 1881.

r die flüssige Form der Körper ihre Gültigkeit bewahre. Er liefert einen perimentellen Beweis für die Richtigkeit seines Schlusses, indem er seine eichung an Beobachtungen von Andrews prüfte. Andrews hat die sammengehörigen Drucke und Volume der Kohlensäure bis zum flüssigen stande, und auch die Kompression der Kohlensäure im flüssigen Zunde verfolgt. Wir besprechen diese Versuche ausführlich in der Wärmeare; hier bemerken wir nur folgendes. Aus den auch von uns angebenen Versuchen Regnaults erhält van der Waals für Kohlensäure, nn der Druck in Atmosphären gemessen wird, das Volumen des dem rsuche unterworfenen Quantums Kohlensäure, somit unter dem Druck ner Atmosphäre gleich eins gesetzt wird, die Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{0{,}008\,74}{v^2}\right)(v - 0{,}0023) = 1{,}0547$$

nn die Temperatur der Kohlensäure gleich 13° ist.

Die Versuche von Andrews ergaben, so lange das Volumen der Kohlenure bei einer Temperatur von 13° größer als 0,01 war, für b den Wert 0024. Bei einem Drucke von 49 Atmosphären wurde die Kohlensäure ssig und das Volumen der flüssigen Kohlensäure war 0,002 2647. Setzte an in obige Gleichung für b den Wert 0,001 663, so stellte dieselbe ch für die flüssige Kohlensäure die zusammengehörigen Drucke und Vomen dar. Bei einer Drucksteigerung auf 54,5 Atmosphären war das olumen auf 0,002 0527 zurückgegangen. Wird in obiger Gleichung = 0,001 565 gesetzt, so wird dieselbe durch diese Werte von p und v füllt.

Daß diese Verkleinerung nicht dem Übergange in den flüssigen Zu and zuzuschreiben ist, sondern nur der Verkleinerung des Volumens der ohlensäure, zeigte van der Waals an den Versuchen von Andrews bei 5,°5. Bei dieser Temperatur wird die Kohlensäure nicht flüssig. Während r Volume größer als 0,004 96 die zusammengehörigen Drucke und Vo me durch obige Gleichung mit $b = 0{,}0025$ dargestellt wurden, sank mit bnahme des Volumens auf 0,002 629 der Wert von b auf 0,001 798, n Wert, der nur wenig größer ist als der für die eben flüssig gewordene ohlensäure erhaltene, deren Volumen um nahezu ¹⁄₄ kleiner ist als das olumen 0,002 629.

Wenn sich so durch eine und dieselbe Gleichung, welche wir aus der netischen Gastheorie abgeleitet haben, das Verhalten eines Körpers im sförmigen und flüssigen Zustande darstellen läßt, so liegt der Schluß he, daß auch im flüssigen Zustande die Moleküle Bewegungen vollführen e im Gaszustande, wobei wegen der großen Dichte des flüssigen Zu ande die mittlern Wegelängen nur erheblich kleiner sind als im Gasstande, die Bewegung wird eine in kleinen Amplituden schwingende s besteht hiernach durchaus kein qualitativer Unterschied zwischen dem sförmigen und dem flüssigen Zustande, und damit auch kein Grund, daß e Bewegung der Moleküle im Innern der Flüssigkeiten eine andere sei s in den Gasen.

Der Übergang aus dem gasförmigen Zustande in den flüssigen ist ein stiger; ein Gas nimmt die flüssige Form an, wenn sein Volumen so klein worden ist, daß die mit abnehmendem V[illegible] wachsende Anziehung

der Moleküle so groß wird, daß die an der Grenze aus dem Innern ankommenden Moleküle im allgemeinen die Grenze nicht oder nur mit geringer Geschwindigkeit passieren können. Die Kohlensäure wird bei einer Temperatur von $13^0,1$ flüssig, wenn der Druck 49 Atmosphären beträgt, das heißt in dieser Auffassung des flüssigen Zustandes, daß wenn wir der Kohlensäure das unter diesem Druck ihr zukommende kleinste Volumen gegeben haben, an der Grenze durch die molekulare Anziehung die molekulare Geschwindigkeit so weit vermindert wird, bezw. daß die Moleküle die Grenzfläche der flüssigen Kohlensäure nur in so geringer Zahl passieren können, daß in einem etwa über der flüssigen Kohlensäure vorhandenen Raum die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle nur einen äußern Druck von 49 Atmosphären ausüben kann. Unter der Grenzschicht ist die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle erheblich größer, und eben deshalb ist im Innern der flüssigen Masse der Druck ein erheblich höherer. Die Zahl der im Innern auf die Flächeneinheit kommenden Stöße ist erheblich größer, als die Zahl der die Flächeneinheit der Grenzfläche passierenden Moleküle, die Grenzfläche umspannt die eingeschlossenen Moleküle wie eine elastische Haut, welche nur einen geringen Teil der ankommenden Moleküle durchläßt. Wir können hier etwa an das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Molekülen denken, nur die Moleküle, deren Geschwindigkeit beim Eintritt in die Grenzschicht einen gewissen Wert übersteigt, werden durch die molekularen Anziehungen in der Grenze nicht auf die Geschwindigkeit Null gebracht, sie durchdringen dieselbe, während alle mit kleinerer Geschwindigkeit zurückkehren und erst durch die Stöße im Innern wieder eine größere Geschwindigkeit erhalten. Den größern Druck im Innern können wir nicht wahrnehmen, da er nach allen Richtungen des Raumes der gleiche ist. Wir gaben vorhin an, daß die flüssige Kohlensäure unter dem Drucke von 49 Atmosphären in Form der Flüssigkeit 0,002 2647 des Volumens einnimmt, welchen dieselbe Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre einnimmt, der innere Druck ist deshalb

$$49 + \frac{0{,}008\,74}{(0{,}002\,2647)^2} = 1751 \text{ Atm.},$$

die in der Grenzfläche wirkenden molekularen Anziehungen vermindern demnach den äußern Druck um 1702 Atmosphären.

Für Flüssigkeiten, welche ohne besondern äußern Druck, oder wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, unter dem geringen Drucke ihres Dampfes bei gewöhnlicher Temperatur ihre flüssige Form behalten, ist die molekulare Anziehung in der Grenzschicht so groß, daß fast alle Moleküle bei ihrer Bewegung gegen die Grenze die Geschwindigkeit Null bekommen, daß nur ganz wenige die Grenze passieren können. Wir werden auf alle hierher gehörigen Fragen in der Wärmelehre näher eingehen.

Diese in der Grenze wirkende gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Anziehung liefert uns, wie van der Waals zuerst geschlossen hat[1]), den in der ebenen Oberfläche einer Flüssigkeit wirksamen Normaldruck, also die Konstante K in unsern Gleichungen für die Erscheinungen

1) *Van der Waals,* Over de continuiteit etc. Vorrede und Kap. IX. Leyden 1873.

der Kapillarität, welche, wie wir schon hervorhoben, sich in keiner Weise experimentell bestimmen läßt, da diese Größe in allen Gleichungen sich forthebt. Bei Kohlensäure, wenn dieselbe unter dem Drucke von 49 Atmosphären flüssig geworden ist, würde der Normaldruck in ebener Oberfläche demnach 1702 Atmosphären betragen. Man sieht, dieser Normaldruck hat eine Größe, gegen welche die Oberflächenspannung sehr klein ist, wie es schon La Place annahm.

Die Konstante K läßt sich nur durch die Kenntnis der Größe a der Gleichung von van der Waals oder einer ähnlichen für die Gase geltenden Zustandsgleichung ableiten: wie wir dieselbe erhalten, wenn wir die Flüssigkeit nicht in Gasform untersuchen können, werden wir in der Wärmelehre sehen.

Van't Hoff[1] hat die kinetische Auffassung der Flüssigkeiten in sehr interessanter Weise für die Theorie der Lösungen verwertet, und ist dadurch zu einer eigentümlichen Deutung des endosmotischen Drucks gelangt, welche zu einer Reihe interessanter Folgerungen führt, von der wir hier nur die kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten erwähnen, die von Nernst und Riecke spezieller durchgeführt ist.

Wird ein Körper in einem Lösungsmittel gelöst, so geht derselbe in die flüssige Form über, und seine Moleküle bewegen sich zwischen den Molekülen des Lösungsmittels gerade so wie in einem Gasgemische die Moleküle des einen Gases zwischen denen des andern, nur mit ganz erheblich kleinern Wegelängen. Zu dem innern Drucke, der von der Bewegung der Moleküle des Lösungsmittels herrührt, tritt dann der Druck der bewegten Salzmoleküle. Sind in der Volumeinheit N Moleküle des Lösungsmittels jedes von der Masse m_1, n der gelösten Substanz mit der Masse m_2, und ist u_1 die molekulare Geschwindigkeit der erstern, u_2 jene der Moleküle der gelösten Substanz, so ist im Innern der gegen die Flächeneinheit, allerdings von beiden Seiten immer, wie wir auch die Flächeneinheit orientiert denken, gleiche Druck gegeben durch

$$\tfrac{1}{3} N m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{3} n m_2 u_2^2 .$$

Der äußere Druck wird aber durch den Normaldruck derartig vermindert, daß er nur einen kleinen Wert hat, derselbe rührt jetzt her von der Anziehung der Moleküle des Lösungsmittels aufeinander, der Anziehung der Moleküle der gelösten Substanz und der wechselseitigen Anziehung der verschiedenen Moleküle aufeinander.

Gerade wie bei einem Gasgemische der Partialdruck des einzelnen Gases nur von der Anzahl der demselben angehörigen Moleküle abhängt, nicht von der Natur des Gases, so muß auch in der Lösung der Partialdruck der gelösten Substanz der Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle proportional und von der Natur der Moleküle unabhängig sein. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die Molekülzahl der gelösten Substanz in der Lösung nicht der Zahl derselben außer der Lösung gleich zu sein braucht, es kann in der Lösung eine Dissoziation eintreten, das heißt das Molekül der gelösten Substanz kann zerfallen in seine Bestandteile, und jeder Bestandteil bewegt sich mit der ihm zukommenden Ge-

1) Van't Hoff, Zeitschr. für phys. Chemie. 1. p. 481. 1887.

schwindigkeit. Da die Zahl der frei sich bewegenden Moleküle dadurch größer wird, muß eine solche Dissoziation eine Vermehrung des Druckes zur Folge haben. Das Verhalten ist bei den Gasen genau das gleiche; nehmen wir ein Volumen Wasserdampf etwa bei 100° unter dem Drucke einer Atmosphäre und zerlegen dasselbe, so wächst bei konstant erhaltenem Volumen der Druck auf 1,5 Atmosphäre, der Partialdruck des Wasserstoffs ist für sich eine Atmosphäre, der Partialdruck des Sauerstoffs eine halbe Atmosphäre. Eine solche mehr oder weniger weit gehende Dissoziation tritt bei den meisten Lösungen von Salzen in Wasser ein.

Wir kommen auf diese Dissoziation bei Besprechung der Zersetzungen durch den elektrischen Strom zurück, hier besprechen wir nur solche Lösungen, in denen keine Dissoziation vorhanden ist.

Diesen Druck der gelösten Substanzen erkannte van't Hoff in dem von Pfeffer untersuchten endosmotischen Druck. In der Tat verhalten sich zwei Gase, die durch eine einseitig durchgängige Membran voneinander getrennt sind, gerade wie zwei Flüssigkeiten bei der Endosmose, wie man direkt erkennen kann, wenn man in einer der Pfefferschen ganz entsprechenden Anordnung Luft und Kohlensäure durch eine Kautschukmembran voneinander trennt. Kautschuk läßt in gleichen Zeiten und gleichen Druckverhältnissen etwa 12 mal soviel Kohlensäure durch sich hindurchgehen als Luft. Ich habe eine solche Anordnung in folgender Weise zusammengestellt.

In die zentrale Durchbohrung einer gut ebengeschliffenen Spiegelglasplatte war ein ∽ förmiges Glasrohr eingekittet, welches unten aus der Glasplatte einige Zentimeter hervortrat, während der obere Teil gerade wie bei Pfeffer (Fig. 158) als Manometer diente. Eine Erweiterung in dem kurzen Schenkel des Manometers bewirkte auch hier, daß selbst eine starke Vermehrung des Druckes in dem Raum, in welchem der Druck gemessen werden sollte, eine merkliche Vergrößerung des Volumens nicht eintrat. An das untere Ende des Glasrohrs war eine zentral durchbohrte kreisförmige Messingplatte von etwa 1 cm Dicke eingekittet, so daß sie der Glasplatte parallel war. Auf dem Umfange der Platte waren Rillen eingeschnitten, und mit Hilfe derselben wurde das obere Ende eines oben offenen, unten geschlossenen Gummibeutels luftdicht angebunden. Der Kautschukbeutel war, um eine Ausdehnung durch Vermehrung des innern Druckes zu verhindern, mit einer Zelle von Messingdrahtnetz umgeben, welche durch einen Bajonettverschluß an der den Gummibeutel tragenden Messingplatte befestigt war. Der Kautschukbeutel und der mit ihm in Verbindung stehende Raum bis zum Quecksilber des Manometers war mit Luft gefüllt.

Der Kautschukbeutel wurde in einen Glaszylinder gesenkt, welcher durch die am Rande etwas eingefettete Glasplatte luftdicht geschlossen wurde. Die Glasplatte hatte außer der zentralen zwei Durchbohrungen, in welche Glasröhren eingekittet waren, deren eine bis auf den Boden des Glaszylinders reichte, während die andere kurz unter der Glasplatte abgeschnitten war. Die längere Röhre war mit einem Kohlensäureentwicklungsapparat verbunden, so daß durch den Glaszylinder ein stetiger Strom von Kohlensäure hindurchging; die Kautschukmembran trennte also einen mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre gefüllten Raum von einem

unter gleichem Drucke mit Kohlensäure gefüllten Raum. Wie es die Diffusion der Gase verlangt, trat sofort im Innern des Beutels eine Druckzunahme ein; der Druck hätte, wenn gar keine Luft durch Kautschuk hindurchginge, wachsen müssen, bis der Partialdruck der Kohlensäure im innern gleich dem äußern Drucke geworden wäre, also auf zwei Atmosphären. Da indes auch Luft aus dem Beutel nach außen tritt, nahm der Druck nur auf etwa 1,66 Atmosphären zu.

Die im § 86 besprochenen Versuche Pfeffers, ebenso wie die von de Vries und Tamman zeigen uns das gleiche Verhalten bei der Endosmose. Bei Zuckerlösungen kann der in der Tonzelle enthaltene Zucker die Membran nicht passieren, das Wasser kann hindurch. Die Membran bildet demnach für die Flüssigkeit keine Trennungsschicht, sie geht kontinuierlich durch die Poren hindurch, es ist keine Grenzschicht zwischen dem Wasser und der Lösung vorhanden, welche durch molekulare Anziehung die molekularen Bewegungen modifiziert. Innerhalb des Gefäßes sind in der Volumeinheit Zuckermoleküle und, wenn wir von einer etwaigen Kontraktion der Lösung absehen, in dem Maße weniger Wassermoleküle, als Zuckermoleküle vorhanden sind. Der Partialdruck des Wassers ist somit innen und außen verschieden, es muß demnach so lange Wasser in die Zuckerlösung diffundieren, bis der Partialdruck des Wassers im Innern gleich demjenigen außen geworden ist, bis also der Überdruck dem in der Lösung ursprünglich vorhandenen Drucke des Zuckers gleich geworden ist. Der durch die Endosmose entstandene Überdruck gibt also den Partialdruck des gelösten Zuckers im Innern der Lösung, wobei selbstverständlich vorausgesetzt wird, daß die poröse Tonwand so dicht ist, daß der im Innern vorhandene Überdruck nicht das Wasser oder Lösung hydrodynamisch durch die Poren hinauspreßt. Diese Bemerkung erklärt die Abhängigkeit des osmotischen Druckes von der Beschaffenheit der Membran; wird, ehe der volle osmotische Druck erreicht ist, durch den Druck Wasser durch die Membran gepreßt oder ist ein Diosmieren des Gelösten vorhanden, so kann der volle osmotische Druck nicht erreicht werden.

Entsprechend der Theorie fand, wie wir sahen, Pfeffer, daß der osmotische Druck der Konzentration der Lösung, also der Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen gelösten Moleküle proportional ist. Die Versuche von Tamman zeigten das gleiche für eine Anzahl weiterer Substanzen und gleichzeitig, daß der osmotische Druck für eine ganze Anzahl von Körpern bei gleicher Molekülzahl in der Lösung der gleiche ist, so für Zucker, Harnstoff, Propylalkohol, $CuSO_4$, $ZnSO_4$, $MgSO_4$ und mehrere andere, während bei Kupferchlorid die halbe Molekülzahl denselben osmotischen Druck gibt. Letzteres würde auf eine starke Dissoziation des Salzes hindeuten.

Eine interessante Bestätigung dieser Auffassung des osmotischen Druckes gibt van't Hoff, indem er den osmotischen Druck des Zuckers mit dem Drucke des Wasserstoffs vergleicht, bei welchem eine merkliche molekulare Anziehung nicht vorhanden ist, somit der äußere Druck dem innern gleich ist. Das Molekulargewicht des Zuckers ist 342, das des Wasserstoffs ist 2; es enthält demnach 1^g Zucker ebensoviel Moleküle wie $\frac{2}{342}$ g Wasserstoff. Als 1^g Zucker in 100^g Wasser gelöst war, somit, da 1^g Zucker $0{,}6^{ccm}$

Raum ausfüllt, in 100,6^ccm verteilt war, wurde bei einer Temperatur von 13°,7 der osmotische Druck im Mittel gleich 584^mm Quecksilber oder gleich 0,69 Atmosphären gefunden. Bei 13°,7 wiegt 1^ccm Wasserstoff 0,000 0853^g unter dem Drucke der Atmosphäre. Demnach füllen $\frac{2}{342}$ g Wasserstoff bei dieser Temperatur und dem Druck der Atmosphäre

$$\frac{2}{342 \cdot 0{,}000\,0853} = 69^{\mathrm{ccm}}$$

aus. Werden dieselben auf 100,6^ccm ausgedehnt, so wird der Druck $\frac{69}{100{,}6}$ oder 0,686 Atmosphären.

Die für den innern Druck der gelösten Zuckermoleküle und den Druck des Wasserstoffs bei gleicher Molekülzahl im gleichen Raum sich ergebenden Werte sind in der Tat so nahe gleich, daß man in dieser Gleichheit eine Bestätigung der van't Hoffschen Auffassung des osmotischen Druckes erkennen muß.[1]

Mit der kinetischen Auffassung der Flüssigkeiten muß auch die Anschauung über die freie Diffusion der Flüssigkeiten eine andere werden, wir können die Wanderung einer Flüssigkeit in eine andere oder die Wanderung gelöster Substanzen von Orten größerer zu Orten kleinerer Konzentration nicht mehr der Anziehung der einen Flüssigkeit auf die andere oder des Lösungsmittels auf die gelöste Substanz zuschreiben.

Daß diese ältere Auffassung überhaupt nicht mit dem wenigstens annähernd gültigen Fickschen Diffusionsgesetz vereinbar ist, nach welchem die Menge der in gleichen Zeiten diffundierten Substanz dem Konzentrationsgefälle proportional ist nach der Gleichung

$$S = -k\frac{dc}{dx},$$

hat Arrhenius[2]) durch Betrachtungen gezeigt, die ganz analog denen von van der Waals sind, aus denen sich ergibt, daß die Anziehungen in der Grenzschicht eines Gases oder einer Flüssigkeit dem Quadrate der Dichte des Gases proportional sein muß.

Wir schichten Wasser auf eine Lösung und denken uns der Einfachheit wegen durch die Grenze eine horizontale Ebene gelegt, so daß oberhalb dieser Ebene reines Wasser, unterhalb Lösung ist. In der Volumeinheit der Lösung seien n Salzmoleküle. Die in der Grenzschicht befindlichen Salzmoleküle erhalten dann gegen das Wasser hin einen stärkern Zug als nach unten hin, weil nach der ältern Auffassung die Wassermoleküle diejenigen des Salzes stärker anziehen als letztere einander anziehen. Denken wir uns parallel der Grenzebene unterhalb und oberhalb in einem Abstande dx, der gleich dem für beide Molekülarten als gleich angenommenen Radius der Wirkungssphäre sein soll, zwei Ebenen gelegt, so sind unterhalb der Flächeneinheit in dem Raume zwischen den beiden Ebenen unterhalb der Grenzebene $n\,dx$ Salzmoleküle, oberhalb der Grenzebene sind

1) Durch diese Ableitung der Auffassung des osmotischen Druckes aus van der Waalsschen Theorie der Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes sind auch wohl die Schwierigkeiten gehoben, welche *L. Meyer* (Ber. der Berliner Akademie 1891. p. 993) in der *van't Hoff*schen Auffassung fand.

2) *Arrhenius*, Zeitschr. für physikal. Chemie. 10. p. 62. 1892.

e $n\,dx$ Moleküle durch Wassermoleküle ersetzt. Der Überschuß der iehung dieser $n\,dx$ Wassermoleküle in der obern Schicht auf die in Grenzebene vorhandenen Salzmoleküle über die Anziehung der $n\,dx$ moleküle in der untern Schicht auf dieselben in der Grenzebene vordenen Salzmoleküle ist die Kraft, welche die Salzmoleküle in das Wasser st. Infolgedessen geht ein gewisser Bruchteil der in der Grenze vorlenen Moleküle durch die Grenze in das Wasser hinüber, denn die eküle bekommen durch diese Anziehung eine gewisse nach oben getete Bewegung, welche eine gleichförmige sein wird, da die Moleküle erhebliche Reibung an dem Lösungsmittel erfahren.

Nun werde plötzlich unter der Grenzebene die Konzentration verdoppelt, sind auch in der Grenzebene bezw. in ihrer unmittelbaren Nähe doppelt viele Moleküle wie vorher. Da jetzt die Zahl der wirksamen Wasserekūle oberhalb der Grenze gleich $2\,n\,dx$ ist, so erfährt jedes an der nze befindliche Salzmolekül die doppelte Anziehung, somit erhält es auch doppelte Geschwindigkeit nach oben. Diese doppelte Anziehung wirkt t auf die doppelte Anzahl der in der Nähe der Grenze befindlichen ekūle. Da die doppelte Zahl demnach mit der doppelten Geschwindignach oben wandert, müßte in gleichen Zeiten die vierfache Anzahl Grenze passieren, oder allgemein die in gleichen Zeiten diffundierende menge müßte dem Quadrate des Konzentrationsgefälles proportional , die Grundgleichung der Diffusion müßte lauten

$$S = -k\left(\frac{dc}{dx}\right)^2.$$

Die sehr nahe gültige einfache Diffusionsgleichung gestattet demnach ht die Anziehung des Lösungsmittels auf das diffundierende als das entlich maßgebende der Diffusion anzusehen; der Mechanismus der Difion muß ein anderer sein.

Nernst hat zuerst[1]) eine Ableitung der Diffusion aufgrund der n't Hoffschen Theorie des osmotischen Druckes gegeben, die einfach on ausgeht, daß durch den höhern osmotischen Druck an der Stelle ßerer Konzentration die gelösten Moleküle an die Stellen niedrigern osischen Druckes hingetrieben werden, geradeso wie nach Stefans Theoein Gas von dem Orte höhern Druckes in einem Gasgemische nach den en hingetrieben wird, wo der Partialdruck des Gases ein geringerer ist. Strömung der gelösten Moleküle steht aber durch Reibung derselben dem Lösungsmittel ein solcher Widerstand entgegen, daß die Strömung gleichförmiger Bewegung stattfindet. Es tritt demnach eine Strömung so lange ein, als eine Differenz der osmotischen Drucke vorhanden ist, die Geschwindigkeit ist dieser Druckdifferenz proportional.

Wir betrachten einen Diffusionszylinder von konstantem Querschnitt nehmen an, daß in einem und demselben Querschnitte die Konzentra- dieselbe sei, daß aber parallel der Achse, der Richtung der x die Kontration von Querschnitt zu Querschnitt, etwa von unten nach oben hin ehme. In einem Querschnitt an der Stelle x sei der osmotische Druck p nanden; in der Richtung x auf der Strecke dx nehme derselbe um dp dann wirkt auf die Substanz, welche in einer Schicht von der Dicke

1) *W. Nernst,* Zeitschr. f. physikal. Chemie. 2. p. 615. 1888.

dx, deren Querschnitt die Flächeneinheit ist, gelöst ist, die Kraft $-dp$. Ist c die Konzentration der Lösung an der betreffenden Stelle, das ist also die Menge der in der Volumeinheit gelösten Substanz, wenn in jedem Teile der Volumeinheit dieselbe Menge gelöst wäre wie an der betreffenden Stelle, so ist in der Schicht von der Dicke dx und der Einheit des Querschnitts die Menge $c\,dx$ gelöst. Die auf die Einheit der gelösten Masse an der betreffenden Stelle wirkende Kraft ist demnach

$$-\frac{dp}{c\,dx}.$$

Dieser Kraft ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Gelöste bewegt, proportional. Ist K die Kraft, welche auf die Einheit der gelösten Menge wirken muß, damit dieselbe die Geschwindigkeit 1^{cm} in der Sekunde bekommt, so ist die Geschwindigkeit v, welche durch die vorhandene Kraft bewirkt wird, gegeben durch

$$v : 1 = -\frac{dp}{c\,dx} : K; \qquad v = -\frac{1}{K}\frac{dp}{c\,dx}.$$

Die Menge der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit wandernden gelösten Substanz ist $c \cdot v = S$, somit

$$S = -\frac{1}{K}\frac{dp}{dx}.$$

Ist die gelöste Substanz nicht dissoziiert, ist dieselbe also nicht, wie wir später sehen werden, ein Elektrolyt, so ist der osmotische Druck der Konzentration proportional. Nennen wir den Druck, welcher der Konzentration Eins entspricht, p_0, so ist der osmotische Druck

$$p = p_0 \cdot c \quad \text{und} \quad -dp = -p_0 dc,$$

somit

$$S = -\frac{p_0}{K}\frac{dc}{dx}.$$

Die Kraft K, welche die Reibung für die Konzentration Eins der gelösten Substanz zu überwinden hat, die wir auch als Koeffizient bezeichnen können, mit welcher wir den auf die Quantitätseinheit der Substanz in der Lösung wirksamen Druck dividieren müssen, um die Strömungsgeschwindigkeit zu erhalten, ist, solange wie die Lösungen derartig verdünnt sind, daß eine Reibung der Moleküle des gelösten lediglich an den Molekülen des Lösungsmittels in Betracht zu ziehen ist, als konstant anzunehmen; da ebenso der der Konzentration Eins entsprechende osmotische Druck eine konstante Größe ist, so gibt diese Theorie unmittelbar das Ficksche Gesetz.

Bei konzentrierteren Lösungen findet eine Reibung der strömenden Moleküle nicht nur an den Molekülen des Lösungsmittels, sondern auch, was bei verdünnten Lösungen wegen der Seltenheit des Zusammentreffens von Molekülen der gelösten Substanz außer acht gelassen werden kann, an den andern Molekülen der gelösten Substanz statt; damit kann die Reibung eine andere werden und somit K von der Konzentration abhängig sein. Ebenso wird man bei großen Konzentrationen nicht mehr den osmotischen Druck der Konzentration proportional setzen dürfen, man wird denselben vielmehr nach der van der Waalsschen oder einer ähnlichen Gleichung berechnen müssen.

Aus diesen Gründen kann die Unabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten

$$k = \frac{p_0}{K}$$

r für nicht zu hohe Konzentrationen gelten, bei stärkern Konzentrationen rd derselbe sich ändern.

Zu den hier angedeuteten Ursachen der Änderung kann bei wachsen-r Konzentration eine Zunahme der Diffusionskoeffizienten weiter bewirkt rden durch die Anziehung der Moleküle des Lösungsmittels auf die ge-sten Moleküle; es würde dadurch in die einfache Gleichung von Fick ı Glied hinzukommen, welches dem Quadrate des Konzentrationsgefälles oportional ist, wie sich aus den Betrachtungen von Arrhenius ergibt. e Gleichung würde etwa die Form annehmen, welche Wiedeburg ihr geben hat (§ 85).

Man kann, wie Riecke[1]) gezeigt hat, aus der kinetischen Theorie r Flüssigkeiten noch in anderer Weise die Erscheinung der Diffusion ab-iten und für den Diffusionskoeffizienten einen bestimmten Ausdruck er-lten. Wir betrachten die Diffusion lediglich als Folge der molekularen ewegung und machen die Annahme, daß die mittlern Weglängen der oleküle der gelösten Substanz lediglich durch die Stöße an den Mole-ülen des Lösungsmittels bedingt sind, daß dieselben also von der Kon-ntration unabhängig sind. Diese Annahme kann selbstverständlich nur ir verdünnte Lösungen gelten, wie man sie auch für ein Gasgemische achen kann, das von dem einen Gase nur einen sehr kleinen Bruchteil thält, so daß die Zahl der Stöße an den Molekülen der gleichen Art ne äußerst kleine ist gegenüber der Zahl der Stöße an den Molekülen s andern Gases.

Wir nehmen wieder einen Diffusionszylinder an, in welchem die Kon-ntration an allen Stellen eines Querschnittes die gleiche ist, die Konzen-ation aber von Schicht zu Schicht nach oben hin abnimmt; wir legen Achse der x parallel der Achse des Zylinders nach oben hin positiv.

Wir legen in dem Zylinder irgendwo einen Schnitt senkrecht zur hse x, durch diesen Schnitt gehen Moleküle der gelösten Substanz von ten nach oben und von oben nach unten, in der erstern Richtung aber hr, weil die Lösung unten konzentrierter ist.

Im § 117 haben wir die Zahl der Moleküle berechnet, die aus einer hicht, welche von dem betrachteten Schnitte in einer Richtung, welche t der zu dem Schnitte senkrechten den Winkel ϑ bildet, um die Strecke ξ fernt ist und in dieser Richtung die Dicke $d\xi$ hat, in der Richtung ϑ gen die Flächeneinheit des Schnittes in der Zeiteinheit hinfliegen. Ist n Zahl der in der Volumeinheit an der Stelle der Schicht vorhandenen lekūle, das heißt also die Zahl, mit der wir das Volumelement der hicht multiplizieren müssen, um die im Volumelement vorhandene An-l der Moleküle zu erhalten, u die Geschwindigkeit, l die mittlere Wege-ge, so war die gefundene Zahl

$$\frac{n u \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{2} \cdot \frac{d\xi}{l} \cdot$$

1) Riecke, Zeitschr. für physikal. Chemie. 6. p. 564. 1890.

Wir erhielten die Zahl allerdings unter der Voraussetzung, daß in dem betrachteten Raume überall dieselbe Gasdichte sei und daß alle Moleküle dieselbe mittlere Wegestrecke durchlaufen. Indes behält dieser Ausdruck auch seine Gültigkeit, wenn wir beide Annahmen fallen lassen. Man erkennt das leicht, wenn man erwägt, daß, gemäß der Definition der mittlern Geschwindigkeit und der mittlern Wegelänge, $\frac{u}{l}$ die Anzahl der Stöße des einzelnen Moleküles, also die Zahl ist, wie oft in der Sekunde das Molekül einen neuen Weg beginnt. Da $n d\xi$ die Zahl der Moleküle in der betrachteten von der Flächeneinheit begrenzten Schicht ist, so ist $n d\xi \frac{u}{l}$ die Zahl der Stöße der in diesem Teil der Schicht vorhandenen Moleküle und damit auch die Zahl der nach irgend einer Richtung aus der Schicht herausfahrenden Moleküle, und

$$\frac{n u \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{2} \frac{d\xi}{l}$$

die Zahl der aus der Flächeneinheit der Schicht in der Richtung der ϑ herausfahrenden Moleküle. Lassen wir aber die Annahme fallen, daß alle Moleküle in Wirklichkeit nur aus Schichten kommen, deren Abstand ξ von dem durch die Flüssigkeiten gelegten Schnitt kleiner als l ist, sondern soll ξ alle möglichen Werte haben, so gibt uns obiger Ausdruck wohl die gegen die Flächeneinheit des Schnittes aus jeder Schicht in der Richtung ϑ hinfahrenden Moleküle, aber nicht die Zahl der den Schnitt wirklich erreichenden. Um diese zu erhalten, müssen wir nach § 102 die Zahl der aus dem Querschnitt gegen die Flächeneinheit des Schnittes sich hinbewegenden mit dem Faktor $e^{-\frac{\xi}{l}}$ multiplizieren, der uns die Anzahl derjenigen Moleküle liefert, welche einen Weg größer als ξ zurücklegen, also wirklich die von uns gedachte Schnittfläche durchsetzen. Dieselbe wird demnach

$$\frac{n u \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{2} \frac{d\xi}{l} \cdot e^{-\frac{\xi}{l}}.$$

Um die Gesamtzahl der von unten nach oben oder von oben nach unten durch die Flächeneinheit des Schnittes hindurchgehenden Moleküle zu erhalten, haben wir für jede Schicht $d\xi$ die in ihr vorhandene Molekülzahl n, die Konzentration, einzuführen und dann die Summe für alle Schichten von $\xi = 0$ bis $\xi = \infty$ und für $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zu bilden, das heißt die Integrale zwischen diesen Grenzen zu nehmen.

Ist n_0 die in der Volumeinheit vorhandene Zahl der Moleküle an der Stelle des Schnittes und ist dn die Änderung dieser Zahl, wenn wir uns von dem Schnitte um dx entfernen, so ist die Konzentration in einem senkrechten Abstande x unter dem Schnitte, da für x doch nur sehr kleine Werte in Betracht zu ziehen sind, ohne Fehler zu setzen

$$n = n_0 + \frac{dn}{dx} \cdot x$$

und oberhalb des Schnittes

$$n = n_0 - \frac{dn}{dx} \cdot x.$$

Da wir in dem Ausdruck für die Zahl der Moleküle, welche die Schnittfläche in der Richtung ϑ treffen, den Abstand ξ in der Richtung ϑ gerechnet haben, so ist

$$x = \xi \cos \vartheta .$$

Für die aus der Schicht an der Stelle ξ und von der Dicke $d\xi$ die Flächeneinheit unseres Schnittes in der Zeiteinheit der Richtung ϑ treffende, von unten her kommende Molekülzahl erhalten wir somit

$$\left(n_0 + \frac{dn}{dx}\xi \cos \vartheta\right) \frac{u \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}{2} \frac{d\xi}{l} e^{-\frac{\xi}{l}}$$

und die Gesamtzahl der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit von unten nach oben gehenden Moleküle ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} \frac{u n_0 \cos \vartheta \sin \vartheta}{2} \, d\vartheta \frac{d\xi}{l} e^{-\frac{\xi}{l}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} u \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \frac{d\xi}{2l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}} .$$

Für die von oben nach unten gehenden Moleküle erhalten wir denselben Ausdruck, mit dem Unterschied nur, daß das zweite Glied negativ ist. Ziehen wir von den nach oben gehenden die nach unten gehenden ab, so fallen die ersten Glieder fort und die Differenz, also die durch den betrachteten Schnitt diffundierende Molekülzahl, wird:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} u \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \frac{d\xi}{2l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}} .$$

Zur Ausführung der Integration beachten wir, daß ϑ von ξ unabhängig ist, so daß wir den ϑ enthaltenden Faktor bei der Integration nach ξ als konstant ansehen, somit daß wir schreiben können

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}} .$$

Das Integral nach ξ erhält man durch die Integration durch Teilung, indem man beachtet, daß

$$d(uv) = u\,dv + v\,du; \quad uv = \int u\,dv + \int v\,du; \quad \int v\,du = uv - \int u\,dv;$$

setzen wir $\xi = v$, $\frac{1}{l} e^{-\frac{\xi}{l}} d\xi = du$, so ist, da $\frac{d\xi}{l} e^{-\frac{\xi}{l}}$ das Differential von $-e^{-\frac{\xi}{l}}$ ist,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}} = -\left|\xi e^{-\frac{\xi}{l}}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi}{l}} d\xi .$$

Da $e^{-\frac{\xi}{l}}\,d\xi$ das Differential von $-l e^{-\frac{\xi}{l}}$ ist, so wird schließlich unser Integral

$$-\left[\xi e^{-\frac{\xi}{l}}\right]_0^{\infty} - \left[l e^{-\frac{\xi}{l}}\right]_0^{\infty} = -[0 - l].$$

Das erste Glied ist für $\xi = 0$ Null, und ebenso für $\xi = \infty$, da der Exponent dann negativ unendlich wird, das zweite wird für $\xi = 0$ gleich l, da der Exponent Null wird, für $\xi = \infty$ gleich Null; da der Wert des Integrals an der untern Grenze negativ zu nehmen ist, wird das Integral gleich l. Die Zahl der diffundierten Moleküle wird demnach

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l u \frac{dn}{dx} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{3} l u \frac{dn}{dx},$$

und der Diffusionskoeffizient wird

$$k = \tfrac{1}{3} l u$$

oder wenn der Tag als Zeiteinheit genommen wird

$$k = \frac{86\,400}{3} \cdot l u,$$

derselbe ist somit dem Produkte der mittlern Wegelänge und der molekularen Geschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit u können wir in der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten aus dem Molekulargewichte berechnen, denn wir werden später sehen, daß, wenn wir das Gewicht der Volumeinheit Wasserstoff gleich 1 setzen, das Molekulargewicht uns das spezifische Gewicht in Gasform der betreffenden Substanzen bezogen auf Wasserstoff gleich 2 gibt. Ist u_w die molekulare Geschwindigkeit des Wasserstoffs und μ das Molekulargewicht der gelösten Substanz, so ist nach § 104

$$u = u_w \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,.$$

Aus dem Diffusionskoeffizienten läßt sich demnach die mittlere Weglänge der gelösten Moleküle berechnen.

Wir bemerken hier zum Schlusse nochmals, daß diese sowie die Nernstsche Ableitung sich nur auf verdünnte Lösungen solcher Substanzen bezieht, welche in der Lösung nicht dissoziiert oder, wie wir später sehen werden, durch den elektrischen Strom nicht zersetzt werden. Wir werden deshalb in der Elektrizitätslehre auf diese Fragen zurückkommen und dort die Theorie ergänzen. Überhaupt werden wir dort und in der Wärmelehre die in unsern bisherigen Untersuchungen noch mangelhaften experimentellen Belege der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten vervollständigen.

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Prinzipien der Wellenbewegung.

§ 125.

Schwingende Bewegung eines Punktes. Wenn ein materieller Punkt *A* (Fig. 225), welcher durch irgend welche Kräfte in einer bestimmten Lage so festgehalten wird, daß er, sobald er aus derselben fortgeschoben ist, wieder in seine frühere Lage zurückgezogen wird, durch eine äußere Kraft aus seiner Gleichgewichtslage nach *B* entfernt und dann der Wirkung der ihn in die Ruhelage zurückziehenden Kräfte überlassen wird, so wird er zunächst wieder in seine frühere Lage zurückkehren. Da aber die Kräfte, welche den Punkt zurückziehen, so lange auf ihn wirken, bis er die Lage in *A* wieder erreicht hat, so ist die ihm erteilte Bewegung eine beschleunigte und der Punkt ist in *A* mit einer gewissen gegen *C* gerichteten Geschwindigkeit begabt. Infolge dieser Geschwindigkeit muß der Punkt, gerade wie das bewegte Pendel über die vertikale Lage, sich über die Ruhelage hinaus gegen *C* hin bewegen. Von der Zeit an aber, wo er die Ruhelage nach der andern Seite verlassen hat, wirken die ihn nach *A* ziehenden Kräfte wieder auf den Punkt ein. Diesmal aber sind sie der Bewegung entgegengerichtet, bewirken also, daß die Bewegung des Punktes eine verzögerte wird, bis er in dem Abstande *AC* von *A* einen Augenblick in Ruhe kommt, wenn durch die Wirkung der nach *A* gerichteten Kräfte die dem Punkte auf dem Wege *BA* erteilte Geschwindigkeit vernichtet ist.

Fig. 225.

Der Abstand *AC* ist gleich dem Abstande *AB*, da der bewegte Punkt die Geschwindigkeit in *A* nur infolge der gegen *A* gerichteten Kräfte erhalten hatte, und dieselben Kräfte es sind, welche die Bewegung desselben hemmen. Von *C* aus wird dann der betrachtete Punkt gerade so nach *A* zurückkehren, wie vorher von *B*, wird ebenso infolge der auf diesem Wege erlangten Geschwindigkeit sich über *A* hinausbewegen nach *B* hin, weiter von *B* wieder über *A* nach *C* und so fort. Kurz, der Punkt wird eine hin und her gehende Bewegung um den Punkt *A* vollführen, indem er infolge der ihn gegen *A* hinziehenden Kräfte sich abwechselnd der Gleichgewichtslage genähert und von ihr entfernt.

Eine solche hin und her gehende Bewegung eines Punktes um eine bestimmte Lage nennt man eine schwingende Bewegung, sie wird überall dort eintreten, wo ein Punkt aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, ohne in eine neue Gleichgewichtslage übergeführt zu sein; ein spezielles Beispiel einer solchen haben wir bereits früher beim Pendel kennen gelernt, welches infolge der Schwerkraft Schwingungen um die Vertikale vollführt. Andere Arten von schwingenden Bewegungen der einzelnen Teile fester, flüssiger und gasförmiger Körper werden wir demnächst zu betrachten haben.

Den Abstand der äußersten Punkte der Bahn des Beweglichen von der Ruhelage, die Länge AB, nennen wir die Schwingungsweite oder Amplitude der Schwingung, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen einer ganzen Schwingung gebraucht, das heißt, um den Weg von B nach C und wieder zurück zu durchlaufen, die Schwingungsdauer. Den Bewegungszustand des Punktes zu irgend einer Zeit, oder an einer Stelle a der Bahn desselben nennt man die Oszillationsphase, so daß also die Phase durch den Abstand Aa von der Ruhelage, die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Punktes in dem betrachteten Augenblicke bestimmt wird. Während einer ganzen Oszillation ist der bewegte Punkt in allen möglichen Phasen, d. h. er nimmt alle überhaupt bei den Schwingungen möglichen Bewegungszustände an. Zugleich sieht man, daß die Zeit, welche verfließt, bis der Punkt wieder in derselben Phase ist, ebenfalls der ganzen Oszillationsdauer gleich ist. Die um eine halbe Schwingungsdauer voneinander entfernten Phasen nennt man entgegengesetzte. Der bewegte Punkt befindet sich dann in gleichen, aber der Richtung nach entgegengesetzten Bewegungszuständen; die Abstände von der Ruhelage sind gleich, aber an verschiedenen Seiten, und die Geschwindigkeiten sind gleich, aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wir nahmen vorhin an, daß die schwingende Bewegung des Punktes dadurch eingeleitet wurde, daß äußere Kräfte denselben nach B entfernten und dann ihn der Wirkung der nach A gerichteten Kräfte überließen; es kann indes ebenso die schwingende Bewegung dadurch eingeleitet werden, daß dem Punkt A durch einen Stoß eine gewisse nach B gerichtete Geschwindigkeit erteilt wird. Er wird sich dann in der Richtung nach B bewegen, bis durch die Wirkung der ihn nach A zurückziehenden Kräfte die dem Punkte erteilte Geschwindigkeit aufgehoben wird, dann sich mit beschleunigter Bewegung nach A zurückbewegen, darüber hinaus gegen C hin und von da an ganz in der vorhin betrachteten Weise über A nach B, um die soeben betrachteten Schwingungen zu vollführen.

§ 126.

Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes. Um die schwingende Bewegung eines Punktes zu bestimmen, ist es notwendig, in jedem Augenblicke den Ort sowohl als die Geschwindigkeit des Punktes der Größe und Richtung nach zu kennen. Wir werden daher eine Gleichung aufzusuchen haben, worin der Abstand des beweglichen Punktes von der Ruhelage, ferner die Geschwindigkeit desselben als abhängig von der [illegible] dargestellt wird.

Diese Abhängigkeit wird lediglich davon bedingt, nach welchem [illegible]setze die Kräfte, welche den aus der Gleichgewichtslage gebrachten Pu[illegible]

gen dieselbe hintreiben, sich mit dem Abstande des Punktes von der-
lben ändern. Da wir es nun in unsern weitern Untersuchungen fast nur
t Schwingungen zu tun haben, welche durch Elastizität bedingt sind,
d deren Amplituden so klein sind, daß die Elastizitätsgrenzen nicht über-
ritten werden, so wollen wir hier nur die schwingenden Bewegungen
trachten, bei denen die wirkenden Kräfte in jedem Momente dem augen-
cklichen Abstande des Punktes von der Gleichgewichtslage proportional
d. Bezeichnen wir dann die Kraft, welche den Punkt gegen die Gleich-
wichtslage hintreibt, wenn er sich im Abstande y von derselben befindet,
t ψ und mit p eine Konstante, so ist

$$\psi = -py.$$

Wir müssen der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, da die
chtung der wirksamen Kraft immer die entgegengesetzte ist von der-
igen, nach welcher der Punkt aus der Gleichgewichtslage entfernt ist;
findet sich der Punkt rechts von A Fig. 225, so wirkt die Kraft nach
ks und umgekehrt. Die Konstante p in dieser Gleichung ist die Kraft,
t welcher der Punkt gegen die Gleichgewichtslage hin gezogen wird,
nn der Abstand $y = 1$ ist.

Nennen wir die Masse des beweglichen Punktes m, so wird die Be-
hleunigung φ, welche derselbe im Abstande y gegen die Gleichgewichts-
ge hin erfährt,

$$\varphi = -\frac{p}{m}y = -k^2y.$$

Diese Beschleunigung φ ist gleich dem Quotienten aus der Änderung
r Geschwindigkeit dv, welche die Bewegung in der unendlich kleinen
it dt erfährt, in welcher der Punkt, gerade den Abstand y passiert, und
eser unendlich kleinen Zeit dt, oder

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

nd damit

$$\frac{dv}{dt} = -k^2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

In dieser Form der Gleichung I erkennt man unmittelbar, daß sie
entisch dieselbe ist, welche wir § 27 für die Schwingungen des Pendels
rhielten. eine Übereinstimmung, die notwendig ist, da wir bei Betrachtung
er Pendelbewegung so kleine Amplituden voraussetzten, daß wir die be-
egende Kraft in jedem Momente dem Abstande des Pendels von seiner
leichgewichtslage proportional setzen konnten. Es ist also dasselbe Ge-
tz für die Abhängigkeit des Beweglichen von der bewegenden Kraft, welche
ir hier wie an jener Stelle zugrunde legen.

In derselben Weise wie § 27 erhalten wir aus der Gleichung I für
e Geschwindigkeit v, welche das Bewegliche im Abstande y von der
leichgewichtslage besitzt, wenn wir den Abstand des Punktes dort, wo
e Geschwindigkeit gleich Null ist, also die Amplitude der Bewegung
it a bezeichnen,

$$v^2 = k^2(a^2 - y^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{II.}$$

Um die Abhängigkeit des Abstandes y des Punktes von seiner Gleichgewichtslage zu erhalten, wollen wir annehmen, der Punkt beginne seine Bewegung in dem Momente, in welchem er seine Gleichgewichtslage verläßt, daß also die Bewegung durch einen kurzen Stoß eingeleitet werde. In dem Ausdrucke für v

$$v = \pm k\sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

haben wir dann auf der rechten Seite das positive Vorzeichen zu wählen, wenn wir die Richtung, nach welcher das Bewegliche aus der Gleichgewichtslage sich zuerst bewegt, als die positive Richtung der y betrachten. Nach der Bedeutung von v

$$v = \frac{dy}{dt}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dt} = k\sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = k\,dt$$

und

$$\int_0^y \frac{dy}{\alpha\sqrt{1 - \frac{y^2}{\alpha^2}}} = \int k\,dt = kt.$$

Die Summe auf der linken Seite müssen wir von $y = 0$ bis $y = y$ nehmen, weil wir den Beginn der Bewegung von dem Momente an rechnen, in welchem das Bewegliche die Gleichgewichtslage passiert, also $y = 0$ ist, wenn $t = 0$ ist. Diese Summe ist nach E 8 und E VIII

$$kt = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\alpha}\right) - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{0}{\alpha}\right) = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\alpha}\right).$$

Lösen wir die Gleichung nach y auf, so wird

$$y = \alpha \sin kt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{III.}$$

In dieser Gleichung wächst y mit t von $t = 0$ bis $kt = \frac{\pi}{2}$; ist letzterer Wert von t erreicht, so wird $y = \alpha$ gleich der Amplitude der Bewegung. Wächst t weiter, so nimmt y ab und wird 0, wenn $kt = \pi$ geworden ist; bei weiterer Zunahme von t wird, so lange $kt > \pi < 3\frac{\pi}{2}$ ist, y negativ und wächst negativ bis $-\alpha$, welcher Wert für $kt = 3\frac{\pi}{2}$ erreicht wird. Wenn dann kt von $3\frac{\pi}{2}$ bis 2π zunimmt, wird der negative Wert von y kleiner und für $kt = 2\pi$ wird y wieder gleich Null, der Punkt hat seine Gleichgewichtslage wieder erreicht. Das Bewegliche hat also, wenn die Zeit t einen solchen Wert angenommen hat, daß $kT = 2\pi$, eine ganze Schwingung zurückgelegt. Da wir nun als Schwingungsdauer jene T bezeichnet haben, in welcher das Bewegliche eine ganze Schwingung vollführt, so ist T die Schwingungsdauer der Bewegung. Zwischen derselben

d der Quadratwurzel aus der Beschleunigung k im Abstande 1 von der ichgewichtslage besteht somit die Beziehung

$$k = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p}{m}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}}.$$

Ersetzen wir schließlich k in der Gleichung für y durch diesen Wert, wird

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daß diese Gleichung die schwingende Bewegung gerade so ergibt, wie ir sie im vorigen Paragraphen abgeleitet haben, erkennt man unmittelr. Denn gerade so wie die Abstände y sich ändern, wenn t von 0 bis T ächst, gerade so ändern sie sich jedesmal, wenn t von nT bis $(n+1)T$ ächst, wenn also die Zeit t um eine ganze Schwingungsdauer zunimmt. rner erkennt man, daß in zwei Zeitpunkten, welche um eine halbe hwingungsdauer voneinander entfernt sind, die Abstände y auf entgegensetzter Seite der Gleichgewichtslage einander gleich sind, denn die Werte eier Sinus, deren Argumente um π verschieden sind, sind der Größe nach eich, dem Zeichen nach entgegengesetzt.

Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist

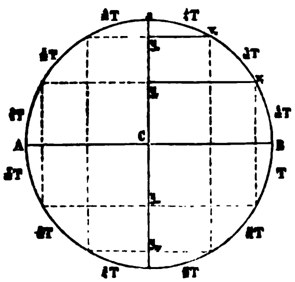
$$v = k\sqrt{\alpha^2 - y^2} = \alpha \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T}} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

ie Gleichung zeigt, daß, wenn $t = 0$, die Geschwindigkeit ihren größten ert hat; dieselbe wird mit wachsendem t kleiner und gleich 0, wenn $= \frac{1}{4} T$, also zur Zeit, in welcher $y = \alpha$ das Bewegliche seinen größten bstand von der Gleichgewichtslage erreicht hat. Wächst t, so wird v gativ, das Bewegliche kehrt gegen die Gleichgewichtslage zurück, und ar, da das negative v wächst, bis $t = \frac{1}{2} T$, $y = 0$ geworden ist, mit achsender Geschwindigkeit, bis das Bewegliche in die Gleichgewichtslage rückgekehrt ist. Bei weiterm Wachsen von t bleibt v negativ, bis $t = \frac{3}{4} T$, $= -\alpha$ geworden, das Bewegliche also den größten Abstand auf der dern Seite der Gleichgewichtslage erreicht hat. Dann ist $v = 0$ und i weiterem Wachsen von t wird es wieder positiv; das Bewegliche kommt n der negativen Seite her mit wachsender Geschwindigkeit in die Gleichwichtslage zurück und hat, wenn es die Gleichgewichtslage erreicht hat, selbe Geschwindigkeit wie bei dem Beginne der Bewegung. Auch das igt somit, daß, wie wir es im vorigen Paragraphen ableiteten, das Beegliche, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, unaufhörlich zwischen selben Grenzen und mit derselben Geschwindigkeit hin und her geht.

Die entwickelte Gleichung setzt uns somit in den Stand, für jeden oment, wenn wir die bewegenden Kräfte kennen, die Lage und Geschwinkeit des Beweglichen vollkommen zu bestimmen, sie gibt uns somit unttelbar das Gesetz der schwingenden Bewegung eines Punktes, wenn auf selben Kräfte wirken, welche dem Abstande des Punktes aus der Gleichwichtslage proportional sind.

Die Bewegung eines nach diesem Gesetze schwingenden Punktes können wir uns leicht graphisch darstellen. Sei C Fig. 226 die Gleichgewichtslage des Punktes, der auf der Linie Ca sich hin und her bewege. Beschreiben wir dann mit dem Radius Ca um C einen Kreis und denken uns, daß ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\alpha \frac{2\pi}{T}$ diesen Kreis durchlaufe, so sind die Projektionen der von dem Punkte in diesem Kreise durchlaufenen Bogen auf den Durchmesser Ca die Strecken, die der Punkt in der schwingenden Bewegung zurückgelegt hat. Geht der Punkt von B aus nach oben, so gibt uns die Projektion des Bogens $\frac{1}{12}T$ gleich Cy_1 den nach $\frac{1}{12}$ Schwingungsdauer zurückgelegten Weg usf. Man sieht also, daß die in gleichen Zeiten bei der schwingenden Bewegung zurückgelegten Wege sehr verschieden sind. Die den gleichen Bogen angehörigen Kosinus sind dann den Geschwindigkeiten proportional, welche den Abständen Cy_1 .. des Punktes von der Gleichgewichtslage entsprechen.

Fig. 226.



Die hier abgeleitete Gleichung der schwingenden Bewegung macht die Voraussetzung, daß der betrachtete Massenpunkt ohne Abgabe von Bewegung, also ohne Widerstand schwingt, denn in Gleichung II setzen wir ausdrücklich die von der schwingenden Masse bei der Rückkehr in die Gleichgewichtslage gewonnene lebendige Kraft gleich der Arbeit, welche dazu verwandt ist, um die Masse aus der Gleichgewichtslage in die abgelenkte Lage α zu bringen. Hat die schwingende Masse bei ihrer Bewegung einen Widerstand zu überwinden, so wird das Gesetz der Bewegung ein anderes. Wir haben schon § 62 bei Besprechung der innern Reibung den Fall behandelt, daß der Widerstand, welchen die Bewegung erfährt, der augenblicklichen Geschwindigkeit proportional ist. Die Gleichung I wird, wie wir dort sahen, dann folgende

$$\frac{dv}{dt} = - k^2 y - \frac{2\gamma}{m} v,$$

wenn γ der Widerstand ist, welcher der Geschwindigkeit Eins entspricht, eine Gleichung, die wir entsprechend wie § 62 schreiben können

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0.$$

Wir haben dort bereits die Lösung dieser Gleichung angegeben. Sind A und B zwei durch die Umstände, unter welchen die Bewegung eingeleitet ist, zu bestimmende Konstanten, so wird

$$y = e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\right\}.$$

Wir fanden dort ebenfalls schon, daß eine schwingende Bewegung nur eintritt, wenn $k > \varepsilon$, somit die Exponenten in der Klammer imaginär werden. Nehmen wir an, das Bewegliche sei zum Beginne der Bewegung um α aus der Gleichgewichtslage gebracht, und es beginne die Bewegung zur Zeit $t = 0$, so wird nach § 62 die Gleichung der Schwingung

$$y = \alpha e^{-\varepsilon t}\left\{\cos t\sqrt{k^2-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2-\varepsilon^2}}\cdot\sin t\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\right\}.$$

Da sowohl der Kosinus als der Sinus alle ihnen möglichen Werte annehmen, wenn t von 0 bis zu einem solchen Werte T zunimmt, daß

$$T\sqrt{k^2-\varepsilon^2} = 2\pi,$$

folgt, daß dieses T die Dauer einer ganzen Schwingung, eines Hin- und Herganges des Beweglichen ist, jedesmal, wenn die Zeit um diesen Wert von T wächst, hat eine ganze Schwingung des Beweglichen stattgefunden. Führen wir diese Schwingungsdauer in die Gleichung ein, so wird

$$y = \alpha e^{-\varepsilon t}\left\{\cos 2\pi\frac{t}{T} + \varepsilon\frac{T}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}.$$

Der wesentliche Unterschied dieser als gedämpfte bezeichneten Schwingungen gegenüber den einfachen Schwingungen ist der, daß die Amplituden kleiner werden, denn es ist zur Zeit

$$t = 0 \qquad \frac{T}{2} \qquad T \qquad 3\frac{T}{2}\ldots$$

$$y = \alpha \qquad -\alpha e^{-\varepsilon\frac{T}{2}} \qquad \alpha e^{-\varepsilon T} \qquad -\alpha e^{-3\varepsilon\frac{T}{2}}\ldots$$

Die Amplituden bilden eine geometrische Reihe, deren Quotient, wenn wir den ursprünglichen Ausschlag nach der einen Seite, sagen wir nach rechts mit dem ersten nach links, den ersten nach links mit dem zweiten nach rechts usf. vergleichen, $e^{-\varepsilon\frac{T}{2}}$ ist. Wir haben im § 62 bereits gesehen, wie der natürliche Logarithmus dieses Quotienten, das logarithmische Dekrement der Schwingungen, das Maß des Widerstandes ist, welches die schwingende Bewegung findet.

Auch wenn $\varepsilon > k$, kann eine Bewegung stattfinden, wenn auch keine schwingende. Wenn das Bewegliche aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und dann sich selbst bezw. den es gegen die Gleichgewichtslage hinziehenden Kräften überlassen wird, so kehrt es in die Gleichgewichtslage zurück ohne Schwingungen um dieselbe zu vollführen. Man nennt die Bewegung eine aperiodisch gedämpfte. Unsere Gleichung

$$y = e^{-\varepsilon t}\left\{Ae^{t\sqrt{\varepsilon^2-k^2}} + Be^{-t\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right\}$$

stellt die Bewegung in der beschriebenen Weise dar, wie eine Bestimmung der Konstanten aus den angegebenen Bedingungen ergibt. Zur Zeit $t = 0$ ist $y = \alpha$, somit

$$\alpha = A + B.$$

Zur Zeit $t = 0$ ist auch die Geschwindigkeit gleich Null, also

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Differenzieren wir nach den Regeln der mathematischen Einleitung, so wird

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{\varepsilon^2-k^2}} + B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right\}$$
$$+ e^{-\varepsilon t}\sqrt{\varepsilon^2-k^2}\left\{A e^{t\sqrt{\varepsilon^2-k^2}} - B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right\}.$$

Setzen wir $t = 0$, so wird

$$0 = -\varepsilon(A+B) + (A-B)\sqrt{\varepsilon^2-k^2}.$$

Aus dieser und der Gleichung für $A + B$ ergibt sich

$$A = \tfrac{1}{2}\alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right); \qquad B = \tfrac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right)$$

und damit

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\left\{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right)e^{-t(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-k^2})} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}\right)e^{-t(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-k^2})}\right\}.$$

Mit wachsendem t wird demnach, da die Exponenten beider Glieder der Klammer negativ sind, der Wert von y stetig kleiner, um, strenge genommen, erst wenn t unendlich wird, gleich Null zu werden. Einen negativen Wert kann y nie annehmen, es kann somit das Bewegliche nie auf die andere Seite der Gleichgewichtslage hinübertreten, es kann keine Schwingung eintreten.

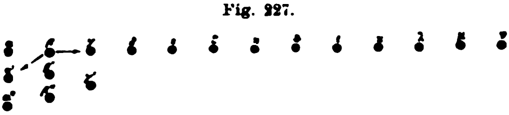
Die aperiodisch gedämpften Bewegungen spielen eine große Rolle in der Galvanometrie; wir werden deshalb in der Elektrizitätslehre auf dieselben zurückkommen. An dieser Stelle betrachten wir überhaupt nur ungedämpfte oder so schwach gedämpfte Schwingungen, daß wir die Dämpfung außer acht lassen dürfen.

§ 127.

Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen. Wenn wir in einer Reihe von Punkten, welche durch Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten tätig sind, in einer bestimmten Lage, der Gleichgewichtslage, festgehalten werden, einen Punkt in eine schwingende Bewegung versetzen, so wird dadurch nicht nur das Gleichgewicht dieses einen Punktes gestört, sondern das der ganzen Reihe. Da die Gleichgewichtslage durch die Wirkung der übrigen Punkte bedingt wird, so muß dadurch, daß der eine Punkt seine Lage ändert, zunächst die der angrenzenden Punkte gestört werden und von diesen sich die Gleichgewichtsstörung auf immer weitere übertragen.

Wir nehmen an, daß die einzelnen Punkte sich anziehen, und daß die Anziehungskraft sich ändert mit der Entfernung der Punkte voneinander. Überdies setzen wir voraus, daß der vollständigen Annäherung der Punkte abstoßende Kräfte entgegenwirken, die ebenfalls mit der Entfernung der Punkte ab-

Fig. 227.



nach einem andern Gesetze als die anziehenden Kräfte sich ändern. Nehmen wir an, daß mit einer Annäherung der Punkte die abstoßenden Kräfte rascher wachsen als die anziehenden, so ist durch ein System solch

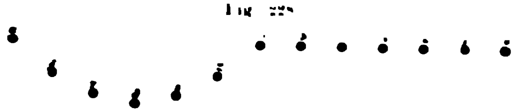
Kräfte die Gleichgewichtslage der Punkte vollständig bestimmt. In dieser sind die an jedem einzelnen Punkte nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte gleich. Wird nun der Punkt α Fig. 227 aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und z. B. nach α' versetzt, so wird dadurch der Abstand zwischen α und β größer. Durch die Änderung des Abstandes $\alpha\beta$ in $\alpha'\beta$ werden die auf β von α wirkenden Kräfte geändert; sowohl die anziehenden als die abstoßenden werden kleiner. Da aber die Abstoßungen sehr viel rascher abnehmen als die Anziehungen, so ist der Erfolg dieser Änderungen, daß β jetzt stärker nach α' gezogen wird. Da in der Gleichgewichtslage die Wirkung der an β angreifenden Kräfte sich aufhebt, so muß jetzt, da die Anziehung nach α' zugenommen hat, der Punkt β sich α zu nähern suchen, aber nicht in der Richtung $\beta\alpha'$, sondern in einer andern Richtung $\beta\beta'$. Denn mit der Bewegung von β nach unten hin ändert sich ebenfalls der Abstand $\beta\gamma$, und auch hier muß wegen der raschern Abnahme der abstoßenden Kräfte die Anziehung überwiegen. Auf den Punkt β wirkt daher eine nach α' und eine nach γ gerichtete Anziehung ein, β wird sich also in der Richtung der Resultierenden nach β' bewegen.

Bewegt sich der Punkt α nach α'', so muß β aus eben den Gründen folgen und sich nach β'' bewegen, zugleich muß aber γ seine Ruhelage verlassen, da jetzt die Anziehung von β auf γ die Abstoßung überwiegt, und von γ sich nach γ' bewegen.

Wenn demnach α das erste Viertel seiner Oszillation zurückgelegt hat, ist die Bewegung auf der Punktreihe bis zum Punkte δ fortgeschritten, α, β, γ haben ihre Ruhelage verlassen; die Gestalt der Punktreihe ist die Fig. 227 dargestellte.

Wenn α in seiner Bewegung umkehrt und in der folgenden Zeit gegen die Ruhelage sich bewegt, wird sich β zunächst wegen der Geschwindigkeit, welche es in β'' besitzt, noch eine Strecke weiter bewegen, und dann ebenfalls durch die von α und γ ausgeübten Anziehungen zur Ruhelage zurückkehren. Das Gleiche wird etwas später mit γ der Fall sein. Hat α dann die Ruhelage erreicht, so wird β, γ die in Fig. 228 angedeutete Lage haben. Die Bewegung von γ hat aber während dieser Zeit die Bewegung von δ zur Folge gehabt, und diese wieder die Bewegung von ε und ζ, gerade wie sich vorhin β und γ infolge der Bewegung von α bewegten. Der Punkt δ hat in dieser Zeit seinen größten Abstand erreicht, da γ denselben schon überschritten, und in dem Fig. 228 dargestellten Momente sowohl γ als ε den Punkt δ gegen seine Gleichgewichtslage hinziehen. Wenn also α in seiner Ruhelage angekommen ist, hat ein in einer gewissen Entfernung von α liegender Punkt seinen größten Abstand erreicht und ist im Begriffe, den Rückweg gegen die Ruhelage anzutreten, und die Bewegung überhaupt hat sich bis zur doppelten Entfernung, nämlich von α bis η, fortgepflanzt. Fig. 228 stellt die gegenseitige Lage der Punkte in diesem Augenblicke dar.

Fig. 228.



In der darauf folgenden Zeit bewegt sich der Punkt α über die Ruhelage hinaus nach α''' (Fig. 229); die Punkte β und γ folgen; der Punkt δ, der im Augenblicke, als α die Ruhelage passierte, seine rückgängige Be-

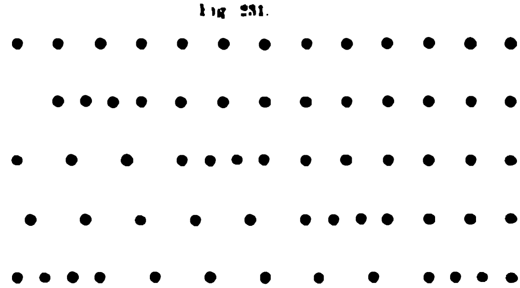
Die Strecke, über welche sich die oszillierende Bewegung während einer ganzen Oszillation des Punktes α verbreitet, hat die Gestalt einer Welle, deshalb nennt man sie eine Welle oder Wellenlänge. Auf dieser Strecke sind alle Oszillationsphasen, welche der einzelne oszillierende Punkt nach und nach annimmt, nebeneinander vorhanden, weil jeder Punkt auf dieser Strecke seine Oszillation um ein wenig später beginnt, und dann gerade so zurücklegt wie der Punkt α.

Die einzelne Welle besteht aus zwei kongruenten Teilen, einem vordern und einem hintern, dem Wellenberge und dem Wellentale, in denen die homologen Punkte, das heißt diejenigen, welche gleich weit vom Anfange jeder Wellenhälfte entfernt sind, mit gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten begabt sind. Die gleich weit von dem Anfange jeder Wellenhälfte liegenden Punkte befinden sich daher in entgegengesetzten Phasen. Um diesen Gegensatz auszudrücken, ist auch der Name Wellenberg und Wellental gewählt worden, jeder der Hälften kann man den Namen Wellenberg und Wellental beilegen.

Bei der fortschreitenden Bewegung teilt sich die Reihe in eine Folge solcher Wellenlängen, und wenn die Verhältnisse in der ganzen Reihe dieselben sind, so ist auch die Länge der Wellen in der ganzen Punktreihe die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit t um die Länge x fortgepflanzt, und ist die Zeit $t = n \cdot T$, wo T wie vorhin die Oszillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge x in n Teile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen α und ν gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oszillationsdauer immer dieselbe ist, so muß, da während der Zeit T die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung konstant sein.

Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten. Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt α anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Fig. 231.



Bewegt sich der Punkt α anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort, daß dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und hergehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen oder longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdich-

tung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und voneinander entfernen (Fig. 231).

Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des zuerst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die Resultierende sämtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

Möglich ist es ferner, daß die longitudinale und transversale Bewegung sich kombiniert und daß die einzelnen Punkte dadurch geneigte oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei einer Art Wasserwellen finden.

§ 128.

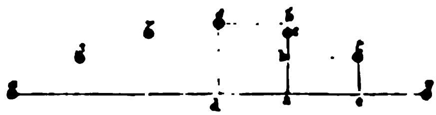
Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe. Um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Reihe vollständig darzustellen, müssen wir für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punktes der Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach bestimmen können. Wir müssen demnach auch hier, wie bei der oszillierenden Bewegung eines Punktes, eine Gleichung aufsuchen, welche uns die zu bestimmenden Größen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage in der Punktreihe wiedergibt, denn nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen hängt der Bewegungszustand eines Punktes der Reihe sowohl von der Zeit, als auch von der Lage des Punktes in der Reihe ab. Für einen gegebenen Zeitmoment ist die Bewegung der Punkte der Reihe je nach ihrer Lage verschieden, und für eine gegebene Lage ist sie eine andere zu verschiedenen Zeiten.

Um zu der Gleichung zu gelangen, betrachten wir einen beliebigen Punkt der Reihe, dessen Entfernung von dem Anfangspunkt der Bewegung, das heißt von dem Punkte, den wir in eine schwingende Bewegung versetzten, gleich x sei, und suchen dessen Bewegung zur Zeit t zu bestimmen. Wir gelangen dazu, indem wir die Kräfte aufsuchen, welche die Bewegung des Punktes bewirken.

Wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, werden die Punkte der Reihe nach und nach von der Bewegung ergriffen, und die Folge davon ist, daß die nebeneinander liegenden Punkte nie gleich weit, sondern der eine mehr, der andere weniger von der Gleichgewichtslage entfernt sind. Die Punkte sind deshalb auch relativ gegeneinander verschoben, das heißt ihre Stellung gegeneinander ist eine andere als die der Gleichgewichtslage entsprechende. Da wir nun voraussetzen, daß die Punkte sich durch die zwischen ihnen tätigen Kräfte im Gleichgewicht halten, so müssen bei einer solchen Verschiebung der Punkte gegeneinander Kräfte tätig sein, welche die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen. Wir setzen voraus, daß die Verschiebungen so klein sind, daß wir, wie bei den elastischen Kräften, immer die Größe dieser Kräfte der Größe der Verschiebung proportional setzen dürfen.

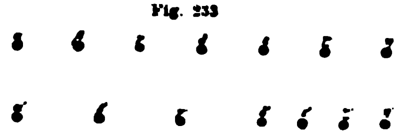
Es stelle nun $\alpha\delta\eta$ (Fig. 232) die Lage der Punkte in einem Stücke r Punktreihe, welches in Bewegung ist, dar, sei es bei transversaler, sei bei longitudinaler Schwingung.

Fig. 232.



: die Bewegung transversal, so id die Abstände der Punkte β, .. von $\alpha\eta$ in der Tat die Abnde der Punkte von der Gleichwichtslage. Schwingen die Punkte ngitudinal, so stellen die Abnde der Punkte von $\alpha\eta$ die rschiebungen der Punkte aus r Gleichgewichtslage (Fig. 233)

Fig. 233



r, indem die Verschiebungen in m Orte der Gleichgewichtslage, B. $\alpha\beta' - \alpha\beta$, $\alpha\gamma' - \alpha\gamma$, .. senkrecht zu $\alpha\eta$ aufgetragen sind.

Betrachten wir irgend drei nebeneinander liegende Punkte, z. B. δ, ε, ζ. ist die Verschiebung des Punktes ε gegen δ der Differenz der senkchten Abstände $d\delta - a\varepsilon$ und ebenso die Verschiebung von ε gegen ζ der ifferenz $a\varepsilon - c\zeta$ proportional. Schwingen die Punkte longitudinal, so nd die Differenzen $\varepsilon b'$ und εb die Verschiebungen der Punkte gegeneinander lbst, wie sich aus der eben angeführten Konstruktion ergibt. Schwingen ie Punkte transversal, so wird, wenn wir voraussetzen, daß die Amplituden er Schwingung sehr klein sind, eine merkliche Veränderung in den Abtänden der Punkte nicht eintreten, es ist $\delta\varepsilon$ von ad nur um eine selbst gen ad verschwindende Größe verschieden. Es bildet dann aber die Verindungslinie beider Punkte mit der Verbindungslinie in der Gleichgewichtsge einen Winkel, in derselben Art, wie wir es bei der Torsion fanden. ie Tangente dieses Verschiebungswinkels, wie wir ihn damals nannten, oder ach da die Winkel so klein sind, daß wir für die Tangente den Bogen eintzen dürfen, der Verschiebungswinkel selbst, ist gleich den Quotienten aus r Verschiebung der Moleküle und dem Abstande der Moleküle in der Gleichwichtslage. Der Verschiebungswinkel zwischen δ und ε ist $\varepsilon\delta b' = \frac{\varepsilon b'}{ad}$, r zwischen ε und ζ ist $\frac{\varepsilon b}{ac}$.

Setzen wir für unsere Punktreihe bezw. für die Reihe von Molekülichten, welche uns die Punktreihe darstellt, die früher erkannten Getze der Elastizität als gültig voraus, so folgt, daß zwischen zwei gegenander verschobenen Molekülschichten Kräfte tätig sind, welche sie in relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen, und welche der öße der Verschiebung proportional sind. Das Maß dieser Kräfte ist der stizitätskoeffizient, die Kraft, mit der die Moleküle gegen ihre Gleichwichtslage hingetrieben werden, wenn die Verschiebung dem ursprüngben der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstande gleich geworden ist. eichnen wir den Elastizitätskoeffizienten mit e, den der Gleichgewichtse entsprechenden Abstand der Moleküle mit dx, so ist die einer Verebung ξ der Moleküle entsprechende Kraft

$$f = \frac{\xi}{dx} e .$$

Wir sahen weiter bei Besprechung der Torsionserscheinungen, daß bei einer Verschiebung der Molekülschichten gegeneinander ohne Vergrößerung des Abstandes der Schichten, eine die Schichten gegen ihre relative Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft auftritt, welche der Größe des Verschiebungswinkels proportional ist. Diese Kraft war für die Einheit des Verschiebungswinkels ein gewisser Bruchteil des Elastizitätskoeffizienten. Ist demnach a eine Konstante, die kleiner als Eins ist, so können wir die einem Verschiebungswinkel α entsprechende Kraft setzen

$$f_1 = a e \alpha.$$

Diese Sätze dürfen wir direkt auf unsere Reihe von Molekülschichten anwenden; wir setzen dann voraus, daß zwischen den Punkten des Systems, von dem die betrachteten Punkte eine Reihe bilden, ebensolche Kräfte wirken, wie wir sie früher als elastische Kräfte erkannt haben.

Da nun in unserer Punktreihe die Verschiebung des Punktes ε gegen δ gemessen nach dem ursprünglichen Abstande der Punkte in der Gleichgewichtslage, bezw. bei transversaler Bewegung der Verschiebungswinkel gleich $\frac{\varepsilon b'}{a d}$ ist, so ist die Kraft, mit welcher der Punkt in seine Gleichgewichtslage in bezug auf δ gezogen wird, also nach b' hin

$$a \frac{\varepsilon b'}{a d} e,$$

wenn wir mit e die Elastizität der Punktreihe bezeichnen, und a die oben angeführte Konstante ist, welche für longitudinale Schwingungen gleich Eins ist.

Die Verschiebung des Punktes ε gegen ζ bewirkt, daß ε gegen b hingetrieben wird, gegen die Stelle, in welcher er gegen ζ in seiner Gleichgewichtslage ist; die Größe der Kraft, welche in diesem Sinne wirkt, ist

$$a \frac{\varepsilon b}{a c} e = a \frac{\varepsilon b}{a d} e.$$

Diese beiden Kräfte wirken auf den Punkt ε nach gerade entgegengesetzter Richtung, die ihn wirklich bewegende Kraft ist somit die Differenz beider, somit

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a d} e.$$

Da wir es hier mit molekularen Kräften zu tun haben, welche von Molekülschicht zu Molekülschicht wirken, so wird die Bewegung des Punktes ε durch weiter entfernte Punkte nicht beeinflußt; die soeben abgeleitete bewegende Kraft ist somit die ganze den Punkt ε bewegende Kraft.

Um die durch diese Kraft dem Punkte ε erteilte Beschleunigung zu erhalten, haben wir nur dieselbe durch die Masse m des bewegten Punktes ε zu dividieren, wir erhalten dann

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a d} \frac{e}{m}.$$

Anstatt der Masse m des einzelnen Punktes oder der einzelnen Molekülschicht, zu welcher der Punkt gehört, können wir bequemer die Masse der Längeneinheit der Punktreihe einführen, die wir als die Dichtigkeit

ktreihe bezeichnen wollen. Die Anzahl der Punkte in der Längeneinheit Reihe ist

$$n = \frac{1}{a\,d}.$$

Dichtigkeit der Punktreihe ist somit

$$n\,m = \frac{m}{a\,d} = \delta.$$

ren wir diesen Wert in obigen Ausdruck ein, so wird die Beschleunigung

$$a\,\frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a\,d}\,\frac{e}{\left(\frac{m}{a\,d}\right)a\,d} = a\,\frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a\,d^2}\,\frac{e}{\delta}.$$

e Beschleunigung ist diejenige, welche der betrachtete Punkt der Reihe lem betrachteten Zeitmoment, also zur Zeit t, nachdem die Bewegung lem Ausgangspunkte derselben begonnen hat, erhält. Dieselbe ist somit :h $\frac{dv}{dt}$, gleich dem Quotienten aus der in der unendlich kleinen der t folgenden Zeit dt stattfindenden Änderung der Geschwindigkeit dv der Zeit dt, es ist also

$$\frac{dv}{dt} = a\,\frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a\,d^2}\,\frac{e}{\delta}.$$

Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$ hängt, wie man schon unmittelbar an der Fig. 232 nnt, ab von der Lage des Punktes ε in der Reihe. Um das auszudrücken, len wir die Entfernung des betrachteten Punktes von dem Ausgangskte der Bewegung mit x bezeichnen und den Abstand ad der einzelnen kte mit dx, sei ferner der Abstand εa des betrachteten Punktes ε von er Gleichgewichtslage gleich y. Da nun die in einem bestimmten Mote, also zur Zeit t, vorhandene Verschiebung der einzelnen Punkte aus Gleichgewichtslage abhängig ist von der Lage des Punktes in der Reihe, von dem Werte von x, so können wir ganz allgemein y als eine Funkvon x bezeichnen, also

$$y = f(x).$$

Abstand des vorhergehenden Punktes δ von der Gleichgewichtslage y' dann, da dieser Punkt dem Anfangspunkt um dx näher liegt,

$$y' = f(x - dx) = y - dy'.$$

man nämlich die Änderung von y, wenn x um dx wächst, mit dem tiven Vorzeichen versieht, so müssen wir die Änderung von y, wenn in die Funktion einen um dx kleinern Wert einführen, mit dem nega- a Vorzeichen versehen.

Der Abstand des auf ε folgenden Punktes ζ vom Anfangspunkte der egung ist $x + dx$, für den Abstand des Punktes von seiner Gleichichtslage $c\zeta = y''$ erhalten wir demnach

$$y'' = f(x + dx) = y + dy''.$$

Da nun $\varepsilon b' = y' - y$, $\varepsilon b = y - y''$, so folgt

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = (y - dy' - y) - (y - (y + dy'')) = dy'' - dy'.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$, welcher die Beschleunigung des betrachteten Punktes proportional ist, ist somit gleich dem Unterschiede zwischen den Veränderungen, welche die $f(x)$, die uns die Abstände y zu einer bestimmten Zeit darstellt, erfährt, wenn der Wert x einmal um dx, das anderemal $2dx$ größer wird. Denn es ist dy' die Änderung, welche y erfährt, wenn wir von δ aus um dx weiter zu ε gehen und dy'' diejenige, wenn wir von ε aus nochmals um dx, also von δ aus um $2dx$ zu ζ gehen. Bezeichnen wir diesen Unterschied in den Veränderungen mit d^2y, so wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{e}{\delta}\frac{d^2y}{dx^2} = c^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn wir den Faktor $a\frac{e}{\delta} = c^2$ und die in dem betrachteten Augenblicke durch die wirksamen Kräfte erteilte Beschleunigung als zweiten Differentialquotienten des Weges y nach der Zeit schreiben. Unsere Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

bestimmt die Beschaffenheit der von uns gesuchten Funktion, welche uns für jeden Moment und für jede Lage des Punktes in der Reihe den Abstand desselben von der Gleichgewichtslage anzugeben in den Stand setzt. Sie sagt nämlich direkt aus, daß die Unterschiede der von einem und demselben Punkte in aufeinander folgenden Zeiten dt durchlaufenen Strecken, dividiert durch das Quadrat der Zeit, proportional sei dem Unterschiede zwischen den Differenzen der in demselben Zeitmomente vorhandenen Abstände der Punkte, welche von dem betrachteten Punkte um dx und um $2dx$ entfernt sind, von der Gleichgewichtslage dividiert durch das Quadrat von dx. Das heißt aber nichts anders, als daß die Werte von y, welche ein bestimmter Punkt nach und nach annimmt, in demselben Momente auf einer gewissen Strecke der Punktreihe nebeneinander vorhanden sein müssen. Die Gleichung, welche uns die Lage der Punkte gibt, muß also so beschaffen sein, daß sie uns für einen gegebenen Punkt, also für ein gegebenes x, dieselben Werte von y nach und nach bei wachsender Zeit liefert, welche sie uns für eine gegebene Zeit für die nebeneinander liegenden Punkte, also für ein wachsendes x, ergibt.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß die gefundene Gleichung allein uns noch keine bestimmte Funktion von x und t liefert, denn nach den Entwicklungen der mathematischen Einleitung erkennt man, daß jede Funktion von der Form $y = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ oder $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ oder auch die Summe zweier solcher Funktionen der gefundenen Bedingungsgleichung entspricht. Denn bilden wir nach den dort gefundenen Regeln für irgend eine beliebige Funktion die in unserer Gleichung stehenden Differentialquotienten, so besteht immer die gefundene Gleichung, welche Funktion wir auch wählen. Es müssen deshalb noch weitere Bedingungen gegeben sein, welche die Natur der Funktion feststellen. In unserm Falle sind dieselben dadurch vorhanden, daß wir die Bewegung des Ausgangspunktes der Bewegung kennen, also die Funktion $y = f(t)$ für x gleich Null. Daß diese Bedingung vollkommen genügt, ergibt sich daraus, daß, wenn wir irgend einen Punkt der Reihe y als Funktion von t kennen, uns der

Zusammenhang zwischen t und x genügt, um sie für jeden Wert anzugeben.

ür den Ausgangspunkt der Bewegung, für welche x gleich Null ist, wir eine einfache schwingende Bewegung vorausgesetzt, welche nach gegeben ist durch

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

α die Amplitude und T die Schwingungsdauer der Bewegung ist. s folgt dann, daß die Bewegung unserer Punktreihe dargestellt wird

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

an erkennt sofort, daß das eine Glied auf der rechten Seite die itung der Bewegung nach der positiven Seite der x, das andere ge nach der entgegengesetzten Seite darstellt. Für $x = 0$ wird die der beiden Glieder der rechten Seite

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot$$

aß diese Gleichung der für die Beschleunigung abgeleiteten ent-, folgt zunächst, wenn man die beiden in derselben vorkommenden nten bildet. Da bei der Berechnung der Differentialquotienten nach t ränderliche x als konstant zu betrachten ist, so wird nach E IV

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) + \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

eiter

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = -\frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y.$$

ur Bildung der Differentialquotienten nach x ist t als konstant zu hten, deshalb wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) - \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{c^2 T^2} y$$

$$c^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

benso ergibt sich aber auch, daß nach der Gleichung für y die Ab-der nebeneinander liegenden Punkte jene Werte zu einer gegebenen aben, welche der einzelne Punkt nacheinander durchläuft, daß also er dargestellte Bewegung jene ist, welche uns die Betrachtungen des n Paragraphen lieferten. Da wir zu diesem Nachweis nur die nach

der einen der beiden Richtungen sich fortpflanzende Bewegung zu ten nötig haben, wollen wir zunächst untersuchen, welches der Glieder uns die Fortpflanzung der Bewegung nach der positiven, jene nach der negativen Seite gibt.

Die Bewegung irgend eines Punktes der Reihe wird von dem] ab, in welchem sich die Bewegung bis zu ihm ausgebreitet hat, wie diejenige des Ausgangspunktes der Bewegung. Denn legen wi Gleichung x einen bestimmten Wert, etwa x_1 bei, so wird die B dieses Punktes dargestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t \pm \frac{x_1}{c}}{T} \right),$$

wo für den betrachteten Punkt auf der rechten Seite der Gleich eine Vorzeichen zu nehmen ist, wenn der Punkt auf der positiven, da wenn er auf der negativen Seite des Ausgangspunktes der Bewegu Ist $t \pm \frac{x_1}{c} = 0$, so beginnt der betrachtete Punkt seine Bewegu jedesmal, wenn von da ab t um T gewachsen ist, hat er ein Schwingung vollführt.

Nennen wir nun τ die Zeit, welche nach dem Beginne der B in deren Ausgangspunkt verstrichen ist, bis die Bewegung zu dem teten Punkte gelangt ist, so wird die Bewegung des letztern ebe gestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t - \tau}{T} \right).$$

Es muß somit

$$t - \tau = t \pm \frac{x_1}{c}$$

sein, oder

$$t - \tau = t - \frac{(\pm x_1)}{c}.$$

Daraus folgt, daß wir für ein positives x von den beiden des Ausdruckes für y dasjenige wählen müssen, welches x mit de tiven Vorzeichen enthält, daß somit, wenn wir der Einfachheit w $\frac{\alpha}{2}$ α setzen, also annehmen würden, in dem Ausgangspunkte der B hätten wir dem Punkte die Amplitude 2α erteilt,

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

die nach der Seite der positiven x sich fortpflanzende Bewegung

Zu irgend einer Zeit $t = nT$ hat der Ausgangspunkt der B n Schwingungen vollführt, also n mal alle Werte zwischen $+ 2\alpha$ u angenommen. In demselben Momente liefert aber auch in der P auf der Strecke $x = n \cdot cT$ unsere Gleichung n mal alle Werte $+ \alpha$ und $- \alpha$ nebeneinander. Denn setzen wir $t = nT$, so wird

$$y = - \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{x}{cT},$$

mit für

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & x = \frac{1}{4}cT & x = \frac{1}{2}cT & x = \frac{3}{4}cT & x = cT \\ y = 0 & y = -\alpha & y = 0 & y = \alpha & y = 0 \end{array}$$

f. Die Reihe zeigt also das nebeneinander, was der Ausgangspunkt der ewegung nacheinander zeigt, mit dem Unterschiede nur, daß die Amplide der Schwingungen nur die Hälfte ist, weil die Bewegung des Ausangspunktes sich nach beiden Seiten der Reihe mitteilt.

Die Strecke $x = cT$ ist jene, welche wir im vorigen Paragraphen als e Wellenlänge der sich fortpflanzenden Bewegung bezeichneten, über elche hin die Bewegung sich jedesmal fortpflanzt, wenn der Ausgangsnkt eine Schwingung vollführt. Die Gleichung zeigt, entsprechend den ntwicklungen des vorigen Paragraphen, daß die Wellenlänge in zwei konente Hälften zerfällt, Wellenberg und Wellental, denn zwischen $x = 0$ nd $x = \frac{1}{2}cT$ sind alle Werte von y negativ, die Punkte befinden sich der einen Seite der Gleichgewichtslage, zwischen $x = \frac{1}{2}cT$ und $x = cT$ nd alle Werte positiv. Dasselbe wiederholt sich in der ganzen Reihe, berall sind die Werte zwischen $x = 2m\frac{cT}{2}$ und $(2m+1)\frac{cT}{2}$ negativ nd zwischen $(2m+1)\frac{cT}{2}$ und $(2m+2)\frac{cT}{2}$ positiv. Der Bedeutung von T als einer Wellenlänge entsprechend, wollen wir

$$cT = \lambda$$

etzen.

Alle um irgend ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ vom Anfangspunkte der Beegung entfernten Punkte befinden sich in der Gleichgewichtslage, sie beden sich aber in entgegengesetzter Phase der Bewegung, denn ihre Gechwindigkeiten sind einander gleich, aber entgegengesetzt. Wir erhalten ie Geschwindigkeiten in dem Quotienten

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha\frac{2\pi}{T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Setzen wir $t = nT$ und $x = m\lambda$, so wird

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha\frac{2\pi}{T}\cos 2\pi(n - m) = \alpha\frac{2\pi}{T};$$

etzen wir dagegen $x = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, so wird

$$v = \alpha\frac{2\pi}{T}\cos\pi(2n - 2m + 1) = -\alpha\frac{2\pi}{T}.$$

Ebenso wie für diese Punkte können wir für alle übrigen der Reihe nd ebenso für jeden Moment aus dieser Gleichung Größe und Richtung er Geschwindigkeit ableiten, so daß also unsere Gleichung für y die Beegung der Punktreihe in allen ihren Einzelheiten bestimmt.

§ 129.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung. Unse wicklung liefert uns weiter die Geschwindigkeit, mit welcher sich (wegung in der Punktreihe ausbreitet. Wie wir schon vorhin bemerk

$$\tau = \frac{x}{c}$$

die Zeit, während welcher sich die Bewegung durch die Strecke ; pflanzt. Die in unserer Gleichung vorkommende Größe c

$$c = \sqrt{a \frac{e}{\delta}}$$

ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung somit nicht von der Schwingungsdauer derselben, sondern nur von d schaffenheit der Punktreihe, deren Elastizität und Dichtigkeit, sowi der Richtung der Schwingungen, ob longitudinal oder transversal ab; für longitudinale Schwingungen ist $a = 1$, für transversale $a < 1$. Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist somit in einer Punktreihe überall di solange der Quotient aus Elastizität und Dichtigkeit nicht geändert

Wir machen jedoch darauf aufmerksam, daß dieser Schluß nur der ausdrücklichen Voraussetzung richtig ist, daß die Amplituden d wegung klein sind gegen die Wellenlänge, wenigstens dann, wen Schwingungen transversale sind. Sind die Amplituden nicht klein, so k wir die bei transversalen Schwingungen geweckte Elastizität nicht (der Verschiebung der Punkte proportional setzen, es tritt dann die De der Punktreihe hinzu. In dem Falle hängt die Fortpflanzungsgeschw keit von der Wellenlänge ab. Wir werden in der Lehre vom Lic diese Frage zurückkommen, wo wir auch Medien eigentümlicher Besc heit kennen lernen werden, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigke der Wellenlänge abhängig ist, auch für Wellen, welche gegen die A tuden groß sind.

Aus der Beziehung zwischen Wellenlänge und Schwingungsdau

$$\lambda = c\,T$$

erhalten wir weiter auch für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{\lambda}{c} = \lambda \sqrt{\frac{\delta}{a e}},$$

ein Ausdruck, der uns die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vo Wellenlänge und der Beschaffenheit der Punktreihe liefert. Gleich erkennen wir, daß zur experimentellen Bestimmung der Fortpflanz geschwindigkeit es nur der Messung der Wellenlängen und der Schwing dauer bedarf.

§ 130.

Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz. We zugleich an verschiedenen Punkten einer Reihe schwingende Beweg erzeugt, so pflanzen sich dieselben von jeder Erregungsstelle aus n

he fort; es fragt sich nun, wie wird die Bewegung derjenigen beschaffen sein, welche von mehreren Bewegungen affiziert werden. ser Punkte, an welchem z. B. zwei Bewegungen zugleich ankom- ührt dann zwei Impulse, es muß somit auch seine Bewegung durch pulse bestimmt werden.

Resultat dieses Zusammenwirkens ergibt sich aus dem Grund- r Mechanik, daß wenn zwei Kräfte einen Punkt angreifen, dann wirkt, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Wirken beide n derselben Richtung, so summieren sie sich einfach, die Be- gung des Punktes ist in jedem Momente gleich der Summe der nigungen, ebenso sind die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen gleich der Summe der einzelnen Geschwindigkeiten und der mit durchlaufenen Strecken. Wirken die Kräfte in verschiedenen Rich- so erhalten wir die resultierenden Beschleunigungen, Geschwin- und durchlaufenen Strecken nach dem Satze vom Kräfteparalle-

ade so müssen wir bei den schwingenden Bewegungen verfahren, resultierende Bewegung zu erhalten. Setzen wir zunächst voraus, gungen seien alle gleichgerichtet, so wird die Beschleunigung, ein Punkt zur Zeit t erhält, gleich der Summe aller einzelnen nigungen, es ist deshalb auch die Geschwindigkeit des Punktes r algebraischen Summe aller Geschwindigkeiten, welche ihm infolge zelnen ankommenden Bewegung erteilt wird. Entgegengesetzt ge- Bewegungen sind bei dieser Summe mit entgegengesetzten Vor- u nehmen.

aus folgt schließlich, daß wenn ein Punkt zur Zeit t infolge der ankommenden Bewegungen die Abstände $y_1, y_2, y_3 \ldots$ von der wichtslage haben würde, sein Abstand Y gleich der Summe aller tände sein muß, oder es ist

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$$

mit sind wir sofort imstande für den Fall gleichgerichteter Be- die resultierende Bewegung anzugeben. Wir betrachten zunächst gen gleicher Schwingungsdauer, und nehmen an, daß in einer ie zwei Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen, deren Anfangs- m d voneinander entfernt seien, und die sich nach gleichen Rich- der Reihe fortpflanzen.

sei der Abstand irgend eines Punktes vom Ursprung der ersten g x, für diesen ist dann die Entfernung von der Gleichgewichts- Zeit t

$$y = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der Bewegung ist dann, wenn wir annehmen, derselbe wäre um d weiter betrachteten Punkte entfernt, $x + d$. Ist α' die Amplitude der Bewegung, so wird die Entfernung des betrachteten Punktes von hgewichtslage, wenn nur diese Bewegung zu ihm käme,

$$y_1 = \alpha' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right).$$

Der resultierende Abstand ist die Summe beider, oder

$$Y = y + y_1 = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right);$$

oder auch

$$Y = \left(\alpha + \alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda}\right) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \alpha' \sin 2\pi\frac{d}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Bestimmen wir nun zwei Größen A und D so, daß

$$A \cos 2\pi\frac{D}{\lambda} = \alpha + \alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda}$$

$$A \sin 2\pi\frac{D}{\lambda} = \alpha' \sin 2\pi\frac{d}{\lambda},$$

so wird der Ausdruck für Y gleich

$$Y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right),$$

und man erkennt, daß die resultierende Bewegung eine schwingende Bewegung von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Wellenlänge λ ist, welche die einzelnen Bewegungen besaßen. Die Amplitude der schwingenden Bewegung ist gleich A; die Phase derselben ist gegen die erste der beiden um D, gegen die zweite um $d - D$ verschoben, das heißt, dieselbe findet so statt, als wenn ihr Ausgangspunkt von dem betrachteten Punkte um die Strecke D weiter entfernt wäre, als der Ausgangspunkt der ersten Bewegung.

Die Amplitude A ergibt sich aus den beiden Gleichungen, welche A und D bestimmen, indem wir beide Gleichungen quadrieren und addieren

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda},$$

und für D erhalten wir

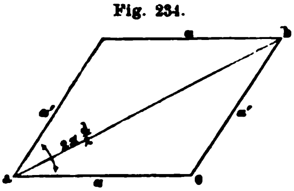
$$\operatorname{tang} 2\pi\frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha' \sin 2\pi\frac{d}{\lambda}}{\alpha + \alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda}},$$

oder auch

$$\sin 2\pi\frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi\frac{d}{\lambda}.$$

Die Gleichung für A zeigt, daß die resultierende Amplitude die Diagonale eines Parallelogrammes ist, welches wir aus den einzelnen Amplituden α und α' mit dem Winkel $2\pi\frac{d}{\lambda}$ (Fig. 234) konstruieren, und zwar jene Diagonale, welche den von α und α' eingeschlossenen Winkel $2\pi\frac{d}{\lambda}$ teilt. Denn es ist

Fig. 234.



$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos c$$

und da der Winkel c Nebenwinkel von $a = 2\pi\frac{d}{\lambda}$ ist, so folgt

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = A^2.$$

rner ist in diesem Parallelogramm der Winkel, den ab und α einhließen, der die Phase bestimmende Winkel $2\pi \frac{D}{\lambda}$, denn es ist

$$ab : \alpha' = \sin c : \sin bac$$

$$\sin bac = \frac{\alpha'}{ab} \cdot \sin c = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}.$$

Die resultierende Amplitude sowohl als die Phase der resultierenden ewegung sind hiernach abhängig von den Amplituden und der Phasenfferenz der gegebenen Bewegungen. Ist die Phasendifferenz d eine bebige Zahl von ganzen Wellenlängen, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos 2n\pi = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'; \quad A = \alpha + \alpha'$$

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \sin 2n\pi = 0; \quad D = 0.$$

t also die Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen Null oder ein bebiges Vielfaches einer Wellenlänge, so ist die resultierende Amplitude leich der Summe der Teilamplituden, und die Phase der resultierenden ewegung ist dieselbe wie diejenige der Teilbewegungen. Man erkennt die otwendigkeit dieser Folgerung auch leicht aus der Natur der schwingenen Bewegung, denn in dem Falle wirken beide Bewegungen immer in erselben Weise zusammen, da die Punkte, deren Entfernung voneinander ine Wellenlänge ist, immer in der gleichen Phase der Bewegung sich efinden.

Ist $d = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1)\pi = -1$$

$$\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = 0,$$

omit

$$A = \alpha - \alpha', \qquad D = 0$$

ie resultierende Amplitude ist die Differenz der Teilamplituden, die Phase t, wenn $\alpha > \alpha'$, jene der ersten, wenn $\alpha < \alpha'$, jene der zweiten Bewegung. enn die Gleichung der resultierenden Bewegung wird

$$Y = (\alpha - \alpha') \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

ie Werte von Y bekommen also entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem $> \alpha'$ oder $\alpha < \alpha'$. Zu gleichen Zeiten t vorhandene entgegengesetzte erte von Y bedeuten aber entgegengesetzte Phasen oder eine Phasenifferenz von einer halben Wellenlänge.

Sind α und α' einander gleich, so wird $A = 0$, die Bewegung hebt ch also auf der ganzen Strecke, auf welcher beide Bewegungen zusammenirken, auf. In der Tat erfahren dann alle Punkte zu gleichen Zeiten t ets entgegengesetzte an Größe gleiche Impulse.

Ist $d = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos(2n + 1)\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin(2n + 1)\frac{\pi}{2} = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2; \qquad \operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Das Quadrat der resultierenden Amplitude ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Amplituden und die Tangente des Winkels, welche die Phase der resultierenden Bewegung bestimmt, ist gleich dem Quotienten der beiden einzelnen Amplituden, wobei im Zähler jene steht, welche gegen die erste Bewegung, von deren Ausgangspunkt die Abstände x gerechnet sind, um eine ungerade Anzahl von ein viertel Wellenlängen verschoben ist.

An diesen Beispielen ist die Abhängigkeit der resultierenden Amplitude und Phase von den sie bestimmenden Umständen hinreichend deutlich zu erkennen.

Es möge nur noch bemerkt werden, daß der letzte Satz über die resultierende Amplitude und Phase, wenn die einzelnen Bewegungen die Phasendifferenz von $\frac{1}{4}\lambda$ besitzen, uns unmittelbar in den Stand setzt, die resultierende Amplitude und Phase einer beliebigen Anzahl von schwingenden Bewegungen zu bestimmen, wenn wir die einzelnen Amplituden und Phasen kennen.

Haben wir nämlich eine Anzahl Bewegungen, deren erste ist

$$y_1 = \alpha_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

deren andere die Amplituden α_2, $\alpha_3 \ldots$ haben und deren Anfangspunkte von dem der ersten um d_2, $d_3 \ldots$ entfernt sind, so sind deren Gleichungen

$$y_2 = \alpha_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_2}{\lambda}\right)$$

$$y_3 = \alpha_3 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_3}{\lambda}\right)$$

$$y_n = \alpha_n \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_n}{\lambda}\right)$$

Die resultierende Bewegung ist dann

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots y_n =$$

$$\left\{\alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi\frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi\frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \cos 2\pi\frac{d_n}{\lambda}\right\} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) -$$

$$\left\{\alpha_2 \sin 2\pi\frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi\frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \sin 2\pi\frac{d_n}{\lambda}\right\} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Nun ist

$$-\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right),$$

so daß die abgeleitete Gleichung für Y uns zeigt, daß wir die durch das Zusammenwirken beliebig vieler schwingender Bewegungen entstehend

ltierende als die Resultierende zweier Wellen darstellen können, welche Phasendifferenz einer viertel Wellenlänge haben, und deren Ampli- n sind

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}$$

$$B = \qquad \alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \sin 3\pi \frac{d_n}{\lambda}.$$

die resultierende Amplitude und Phase erhalten wir dann

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}; \qquad \operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{B}{A}.$$

erhalten also stets eine schwingende Bewegung, welche mit jener der lnen gleiche Schwingungsdauer, somit auch gleiche Wellenlänge hat, n Amplitude R und Phase D wir berechnen können, wenn wir die te von α_1, $\alpha_2 \ldots$ sowie von d_2, $d_3 \ldots$ kennen. Die resultierende Be- ung ist dann gegeben durch die Gleichung

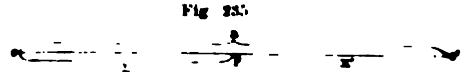
$$Y = R \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + D}{\lambda}\right).$$

§ 131.

Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung pflanzen; Bildung stehender Wellen. Wenn in einer unbegrenzten rtreihe an einer Stelle eine schwingende Bewegung erregt wird, so zt dieselbe sich nach beiden Seiten fort. Wenn deshalb an zwei en der Ausgangspunkt einer solchen Bewegung vorhanden ist, so pflanzen zwischen diesen beiden Stellen die Bewegungen nach entgegengesetzten tungen fort. Die im vorigen Paragraphen entwickelten Interferenz- ze geben uns auch für diesen Fall die resultierende Bewegung als ne der in jenem Augenblicke vorhandenen Teilbewegung. Es ergibt daraus in gewissen Fällen eine Bewegung dieser Strecke der Punkt- von besonderer Art, deren Beschaffenheit wir hier ableiten wollen, ir sie später sehr oft zu betrachten haben. Wir nehmen deshalb hier den einfachsten Fall.

Es seien c und c' zwei um a voneinander entfernte Punkte, in denen hzeitig eine schwingende Be- ung derselben Schwingungs- r T, somit auch derselben enlänge λ und der gleichen litude α beginne. Zur Zeit t

Fig. 233.



der Abstand eines von c um x entfernten Punktes p von der Gleich- htslage gegeben durch

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

ge der von c' nach p kommenden Bewegung wird der Abstand des tes von der Gleichgewichtslage, y_2, gegeben sein durch

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right).$$

wenn wir den Abstand $pc' = x'$ setzen. Für alle Punkte zwischen c ist nun

$$x + x' = a, \qquad x' = a - x,$$

somit

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda}\right).$$

Der resultierende Abstand ist somit

$$y = y_1 + y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda}\right).$$

Nach der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p + q) \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$$

können wir schreiben

$$y = 2\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda}\right) \cos \pi \frac{a - 2x}{\lambda}$$

oder auch, da das Vorzeichen des Kosinus nicht mit demjenigen des B sich ändert,

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x - a}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda}\right).$$

In diesem Ausdrucke für y ist x nicht mehr in der frühern Weise verbunden; es hängt deshalb die Phase der Bewegung nicht mehr, wi der nach einer Richtung fortschreitenden Bewegung von der Lage der P in der Reihe ab. Die für die verschiedenen Punkte zu verschiedenen Z vorhandenen Bewegungszustände hängen von dem die Zeit enthalt Faktor in der Gleichung für y ab, dieser ist aber für alle Werte von gleiche. Die nebeneinander liegenden Punkte der Reihe nehmen also nach und nach dieselbe Phase an, sondern ihre Phase ist in derselbe dieselbe, sie passieren alle zu derselben Zeit die Gleichgewichtslage befinden sich ebenso alle gleichzeitig an dem Ende ihrer Bahn.

Der Koeffizient

$$2\alpha \cos \pi \frac{2x - a}{\lambda}$$

bestimmt die Amplitude der Bewegung; er zeigt, daß diese für die schiedenen Punkte sehr verschieden sein kann. Für gewisse Werte ist dieser Koeffizient gleich Null, diese Punkte verlassen also ihre G gewichtslage niemals. An der einen Seite der ruhenden Punkte is Wert dieses Faktors positiv, an der andern negativ; die ruhenden P bilden also die Grenze zwischen solchen Strecken der Punktreihe, in einer die Punkte alle an der einen, in deren anderer die Punkte a andern Seite der Gleichgewichtslage sich befinden. Die Punkte jeder zwi zwei ruhenden Punkten liegenden Strecke sind also immer in der Phase, die Punkte zweier benachbarter Strecken in entgegengesetzter P Die Punkte einer Strecke vollführen somit gleichzeitig und in gl Phase ihre Schwingungen mit um so kleinerer Amplitude, je näher si ruhenden Punkten liegen. Man nennt deshalb die schwingende Bew eine stehende und die zwischen zwei ruhenden Punkten enthaltene S eine stehende Welle.

Um den Zustand der Reihe näher zu untersuchen, nehmen wir an, s sei

$$a = n\lambda .$$

s wird dann

$$y = 2\alpha \cos \pi \left(\frac{2x}{\lambda} - n\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n}{2}\right)$$

der

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot$$

ür die Zeiten $t = nT$ und ebenso für die Zeiten $t = (2n + 1)\frac{T}{2}$ wird ieser Ausdruck für alle Punkte gleich Null, es passieren also die Punkte n diesem Momente die Gleichgewichtslage. Die Geschwindigkeit der Beregung ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

omit für den Moment $t = nT$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda};$$

ieselbe ist für alle Punkte, die zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\lambda}{4}$ liegen, positiv, wischen $x = \frac{\lambda}{4}$ und $x = 3\frac{\lambda}{4}$ negativ, zwischen $x = 3\frac{\lambda}{4}$ und $x = 5\frac{\lambda}{4}$ ositiv usf. Auf der ersten Strecke bewegen sich die Punkte nach der inen, auf der zweiten nach der andern Seite; für die Punkte $x = \frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{4}$, $5\frac{\lambda}{4} \cdots$, die um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt sind, t die Geschwindigkeit gleich 0, sie verlassen die Gleichgewichtslage nicht. s sind dies somit die stets ruhenden Punkte, deren Abstand voneinander emnach eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit t, so entfernen sich alle Punkte von der Gleichewichtslage und sie haben zur Zeit $t = (4n + 1)\frac{T}{4}$ den größten Abstand on der Gleichgewichtslage erreicht. Für diese Zeit ist

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda},$$

mit für

$$\begin{array}{lllllll} x = 0, & \frac{\lambda}{4}, & 2\frac{\lambda}{4}, & 3\frac{\lambda}{4}, & 4\frac{\lambda}{4}, & 5\frac{\lambda}{4} \cdots \\ y = 2\alpha, & 0, & -2\alpha, & 0, & 2\alpha, & 0 \cdots \end{array}$$

lso auch hier sehen wir wieder, daß die Länge einer stehenden Welle ne halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit, so kehren alle Punkte zur Gleichgewichtslage zurück, reichen sie zur Zeit $(2n + 1)\frac{T}{2}$, überschreiten sie nach der andern Seite n und erreichen dort ihre äußerste Lage zur Zeit $t = (4n + 3)\frac{T}{4}$, nn dann ist

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin (4n + 3)\frac{\pi}{2} = -1 .$$

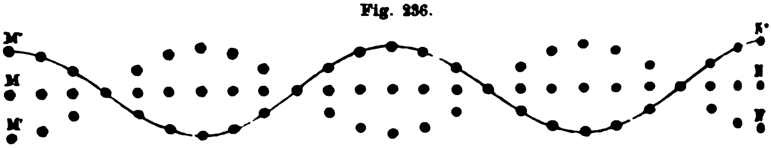
Die Abstände y werden somit für

$$x = \quad 0, \quad \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad \lambda, \quad 5\frac{\lambda}{4} \cdots$$

$$y = -2\alpha, \quad 0, \quad 2\alpha, \quad 0, \quad -2\alpha, \quad 0 \cdots$$

Die Punkte der Reihe, welche sich immerfort in der Gleichgewichtslage befinden, nennt man die Schwingungsknoten, und es ist ersichtlich, daß diese deshalb immer in Ruhe sind, weil stets gleichzeitig durch sie nach entgegengesetzten Richtungen ein Wellenberg und ein Wellental hindurchgeht. Die mitten zwischen den Schwingungsknoten liegenden Punkte sind Schwingungsmaxima, dort treffen immer gleichzeitig zwei Wellenberge oder Täler zusammen. Die Gestalt der Punktreihe ist demnach (Fig. 236) zur

Fig. 236.



Zeit $t = 2n\frac{T}{2}$ eine gerade Linie MN, zur Zeit $t = (4n + 1)\frac{T}{4}$, wenn wir annehmen, daß die Bewegung eine transversale sei, die punktierte Wellenlinie $M'N'$, zur Zeit $(2n + 1)\frac{T}{2}$ wieder die gerade Linie MN, und zur Zeit $t = (4n + 3)\frac{T}{4}$ die ausgezogene Wellenlinie $M''N''$.

Durch die Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortschreitender Wellenbewegungen teilt sich somit die Punktreihe in lauter Strecken von der Länge einer halben Wellenlänge, in deren jeder alle Punkte in derselben Phase der Oszillation sind, von denen aber die Punkte der abwechselnden Strecken in entgegengesetzter Phase der Bewegung sich befinden. Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Schwingung ist gleich der Oszillationsdauer der beiden Wellenbewegungen, deren Resultierende die stehende Schwingung darstellt.

§ 132.

Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen. Wir haben im Bisherigen den besondern Fall der Zusammensetzung der Wellenbewegungen betrachtet, in dem die Vibrationen alle gleich gerichtet sind. Es können nun ebenso gut in einer Punktreihe sich zwei Bewegungen fortpflanzen, deren Richtungen nicht zusammenfallen, eine Wellenbewegung longitudinaler Schwingungen und eine transversaler Schwingungen, oder zwei zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrechte Schwingungen, welche jedoch irgend einen Winkel miteinander bilden.

Wie wir im § 130 sahen, erhalten wir in diesem Falle die aus dem Zusammenwirken der beiden Bewegungen resultierende Kraft durch den Satz vom Parallelogramm der Kräfte; in jedem Augenblicke wird uns die Diagonale des aus den beschleunigenden Kräften der Teilbewegungen ko-

ruierten Parallelogramms der Größe und Richtung nach die resultierende raft geben und somit die Geschwindigkeit und die Bahn des bewegten unktes.

Nehmen wir an, daß die beiden Wellenbewegungen gleiche Oszilla-onsdauer und somit gleiche Wellenlängen besitzen, so muß die resul-erende Bewegung ebenfalls die gleiche Oszillationsdauer haben; die Bahn, elche die Punkte beschreiben, kann aber weder mit der einen noch mit r andern Bewegung zusammenfallen, sie muß jedoch notwendig in die-lbe Ebene fallen, welche durch die Richtung der Bewegungen in den nzelnen Wellen gelegt wird. Um die Gestalt der Bahn zu erhalten, wird am bequemsten sein, von dem mathematischen Ausdrucke für die Be-egung des Punktes infolge jeder einzelnen Bewegung auszugehen und das haltene Resultat dann näher zu betrachten.

Zugleich ist klar, daß wir die Bahn nur eines Punktes zu bestimmen iben, und daß diejenigen aller übrigen Punkte der Reihe damit überein-immen. Denn da der Voraussetzung nach jede der Teilbewegungen sich it gleicher Geschwindigkeit in der Punktreihe fortpflanzt, so sind die ahnen aller Punkte dieselben.

Nennen wir den Abstand eines Punktes der Reihe, welcher vom An-ngspunkte der Bewegung um x entfernt ist, von seiner Gleichgewichts-ge zur Zeit t, y, so haben wir

$$y = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Infolge der zweiten Bewegung, wenn sie allein wirkte, würde der unkt in einer andern Richtung sich von der Gleichgewichtslage entfernen, ei der Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit t gleich z; nehmen ir ferner an, der Anfangspunkt dieser Bewegung sei von dem der ersten m a entfernt, die Bewegung habe aber auch dort im Anfange der Zeit t egonnen, so haben wir für z den Ausdruck

$$z = \beta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x-a}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Entwickeln wir aus diesen beiden Ausdrücken für die Abstände y nd z eine Gleichung zwischen y und z, so gibt uns diese die zueinander ehörigen Abstände in der einen und in der andern Richtung, oder den Ort es Punktes in jedem Augenblicke, wenn wir den Abstand des Punktes ach der einen Richtung aus einer der obigen Gleichungen bestimmen. iese Gleichung gibt uns somit die Bahn des bewegten Punktes.

Aus den beiden obigen Gleichungen erhalten wir unmittelbar die beiden olgenden

$$\frac{y}{\alpha} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\frac{z}{\beta} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\sin 2\pi\frac{a}{\lambda} \quad \ldots \quad (4)$$

us denen wir unter Benutzung von Gleichung (3) die letztere auch hreiben können

$$\frac{z}{\beta} - \frac{y}{\alpha}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2}\,\sin 2\pi\frac{a}{\lambda} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

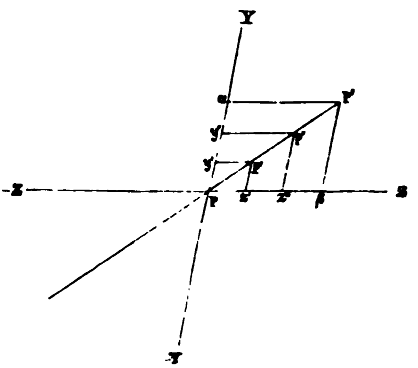
Quadrieren wir Gleichung (5) und ordnen passend, so wird schließlich

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2-2\frac{y}{\alpha}\frac{z}{\beta}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda}=\sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda}\quad\ldots\ldots(6)$$

Die Gleichung (6) gibt uns den Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage parallel der Richtung der ersten Bewegung für jeden Wert, den der Abstand des Punktes parallel der zweiten Bewegung erhalten kann. Die analytische Geometrie zeigt, daß alle Punkte, deren zusammengehörige Abstände parallel zweien festen Richtungen, von einem festen Punkte durch die Gleichung (6) dargestellt werden, auf einer Ellipse liegen, deren Mittelpunkt eben jener feste Punkt ist, von welchem die Abstände y und z gerechnet sind. Wenn sich zwei Wellenbewegungen in einer Punktreihe fortpflanzen, in denen die Schwingungen verschieden gerichtet sind, so bewegen sich demnach die Punkte in Ellipsen um ihre Gleichgewichtslage.

In unseren Ausdruck (6) für die Bahn der Punkte geht auch die Phasendifferenz ein, und je nach dem verschiedenen Werte von a kann die Beziehung zwischen y und z immer eine andere werden; man erhält je nach dem Werte von a für ein bestimmtes z einen immer andern Wert von y. Zwar erfüllen alle diese Werte die Bedingung, daß sie einer Gleichung von der Form (6) genügen, die Bahnen der Punkte sind daher immer Ellipsen, aber die Lage und Gestalt der Ellipsen ist je nach dem Werte von a eine andere. Untersuchen wir die Gestalt der Ellipsen für einige Werte von a.

Fig. 237.



Setzen wir voraus, daß die Schwingungsrichtungen einen Winkel φ miteinander bilden, und daß die Richtung der positiven Abstände z (Fig. 237) des Punktes P, der um z von dem Anfangspunkte der Bewegung entfernt ist, von der Ruhelage nach rechts hin, und die Richtung der positiven y nach oben gerechnet werde, d. h. daß die Bewegung in gleicher Phase in beiden Teilbewegungen ist, wenn der Punkt sich zugleich nach rechts und oben, in entgegengesetzter, wenn er sich zugleich nach rechts und unten bewegt. Ist die Phasendifferenz der beiden komponierenden Bewegungen gleich 0, oder einer geraden Anzahl von halben Wellenlängen, so ist

$$\cos 2\pi\frac{a}{\lambda}=1;\qquad \sin 2\pi\frac{a}{\lambda}=0,$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{2yz}{\alpha\beta}+\frac{z^2}{\beta^2}=0,$$

$$\frac{y}{\alpha}-\frac{z}{\beta}=0,$$

$$\frac{y}{z}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

In diesem Falle stehen also stets die zusammengehörigen Werte von und z in dem konstanten Verhältnisse der Amplituden $\alpha : \beta$. Bestimmen r demnach die den Zeiten t', t'', T entsprechenden Abstände z', z'', β d ziehen von z', z'', β mit Py parallel $z'p'$, $z''p''$, $\beta P'$ so, daß

$$z'p' : z'P = z''p'' : z''P = \beta P' : \beta P = \alpha : \beta,$$

sind die Längen $z'p'$, $z''p''$ usw. die zu diesen Werten von z gehörigen 'erte von y, und die Punkte p', p'', P gehören der Bahn des Punktes L. Aus der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt aber, daß die nkte P, p', p'', P' auf einer geraden Linie liegen; die Bahn des Punktes t demnach eine gerade Linie, welche durch die Gleichgewichtslage des nktes P geht, deren Richtung zwischen die Richtungen der Teilbewegun- n fällt.

Für die Amplitude PP' der resultierenden Bewegung erhalten wir ch dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte

$$PP' = \sqrt{P\beta^2 + P'\beta^2 - 2P\beta \cdot P'\beta \cdot \cos P'\beta P},$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot \cos \varphi};$$

r den Winkel, welchen die Bahn des Punktes mit z bildet, wenn wir n mit ψ bezeichnen, erhalten wir aus der Proportion

$$PP' : P'\beta = \sin P\beta P' : P'P\beta,$$

$$\sin \psi = \frac{\alpha}{A} \sin \varphi.$$

Größe und Richtung der resultierenden Amplitude hängt somit von r Größe der Teilamplituden ab und von dem Winkel, welchen die Teil- wegungen miteinander bilden. Die resultierende Amplitude erhält den ßten Wert für $\varphi = 0$

$$A = \alpha + \beta.$$

Bewegungsrichtung aller drei Bewegungen ist dieselbe, und die resul- rende Amplitude ist die Summe der Teilamplituden.

Wir hätten in diesem Falle, um die Bahn des Punktes zu erkennen, t nötig gehabt, die Gleichung (6) zu entwickeln, da dieses Resultat h unmittelbar aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt, denn ist $a = 0$, r $2n \cdot \frac{\lambda}{2}$, so wird

$$y = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$z = \beta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

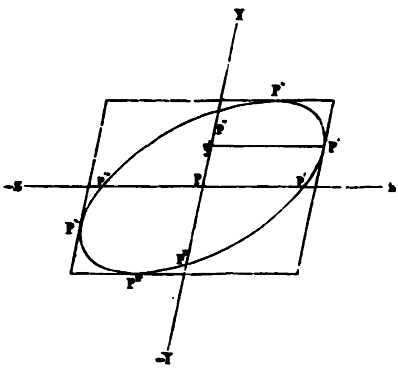
l daraus

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist die Phasendifferenz nicht gleich Null, oder ein gerades Vielfaches r halben Wellenlänge, so wird die Bahn des Punktes eine Ellipse. Bewegungen beginnen zu verschiedenen Zeiten und wachsen nicht

wie im vorigen Falle gleichmäßig; bald nimmt y rascher, bald z rasc zu, ja es kann y selbst abnehmen, wenn z wächst. Ist a kleiner als $\frac{1}{4}$ so hat (Fig. 238) der Punkt P bereits einen Teil seines Weges in d Richtung der z zurückgelegt, we die Bewegung nach y beginnt, er l findet sich in p', denn ist $y = 0$, gibt Gleichung (2) oder Gleichung (

Fig. 238.



$$z = \beta \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

und ist a z. B. $= \frac{3}{16}\lambda$, so wird

$$z = \beta \sin 67^0{,}5 = 0{,}923\,\beta.$$

Während jetzt der Punkt in d Richtung nach z den letzten T seines Weges zurücklegt, bewegt sich aber schon in der Richtung er beschreibt daher den Weg $p'l$ Er ist in P' angekommen, hat also in der Richtung z seinen größten A stand erreicht, wenn nach Gleichung (6)

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + 1 - 2\frac{y}{\alpha}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda},$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - 2\frac{y}{\alpha}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi\frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$y = y' = \alpha \cdot \cos 2\pi\frac{a}{\lambda},$$

also bei dem von uns angenommenen Werte $a = \frac{3}{16}\lambda$, $y = a \cdot \cos 67^0{,}5$ oder gleich $0{,}382\,\alpha$ ist. Während dann der Punkt in der Richtung der sich weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, kehrt er in der Richtung schon wieder zurück, er beschreibt den Weg $P'P''$ und ist in P'' angelangt wo $y = \alpha$ wird, wenn sich der Punkt in der Richtung der z schon wieder bis auf

$$z = \beta \cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = 0{,}382\,\beta$$

dem Anfangspunkte genähert hat.

Von da ab nehmen y und z gleichzeitig ab, z aber, da der Punkt in dieser Richtung der Ruhelage näher ist, rascher als y; der Punkt bewegt sich, bis $z = 0$ wird, nach p'', wo $y = 0{,}923\,\alpha$ ist. Weiter bewegt sich der Punkt dann in der Richtung der z nach der negativen Seite bis P während der Abstand y bis zur 0 abnimmt usf., so daß der Punkt sich über p''', P''', P^{IV}, p^{IV} wieder nach p' bewegt, wenn y wieder gleich geworden ist. Dauern die Impulse nach beiden Richtungen fort, so der Punkt in der folgenden Zeit dieselbe Bahn zurück, die, wie Gleichung uns zeigt, eine Ellipse ist.

Ist $a = \frac{1}{4}\lambda$, so befindet sich der bewegte Punkt nach der Richtung der z in seinem äußersten Abstand von der Gleichgewichtslage und beginnt seine zurückgehende Bewegung, wenn er in der Richtung der y seine

gung beginnt. Während er dann in der Richtung der z zur Ruhelage rückkehrt, erreicht er nach y seinen größten Abstand oder für $z = 0$ $y = \alpha$. Wird dann $z = -\beta$, so wird $y = 0$, und wird z wiederum 0, wird $y = -\alpha$, so daß also die zusammengehörigen Werte von y und z r diese vier Stellungen sind

$$\begin{array}{lllll} y = 0, & y = \alpha, & y = 0, & y = -\alpha, & y = 0, \\ z = \beta, & z = 0, & z = -\beta, & z = 0. & z = \beta. \end{array}$$

Die Ellipse geht demnach in diesem Falle durch die Endpunkte der ilamplituden, ihre Lage und Gestalt ist anders als in dem vorigen Falle, er die Bewegung des Punktes erfolgt in demselben Sinne wie vorher. s geht dies auch aus der Form hervor, welche die Gleichung der Bahn nn annimmt,

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Schwingungsrichtungen bestimmen dann ein Paar konjugierter urchmesser der Ellipse.

Wenn im besondern in diesem Falle die beiden Amplituden gleich, d die Bewegungsrichtungen zueinander senkrecht sind, so wird die Bahn s Punktes ein Kreis. Denn in dem Falle wird unsere Gleichung der ahn

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} = 1,$$

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Da nun die beiden Richtungen x und y zueinander senkrecht sind, bedeutet α den Abstand des Punktes von dem festen Punkte, von dem s die Richtungen y und z gerechnet sind.

Die Punkte der Bahn liegen also alle auf einer Linie, die dadurch stimmt ist, daß der Abstand aller ihrer Punkte von einem festen Punkte ne konstante Größe und zwar gleich α ist; das ist aber bekanntlich die genschaft des Kreises.

Die Gleichungen (1) und (2) geben auch dieses unmittelbar, ohne ß die Gleichung (6) zu Hilfe genommen wird, denn wenn $\alpha = \frac{1}{4}\lambda$, so rden sie

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$z = \alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

d daraus

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

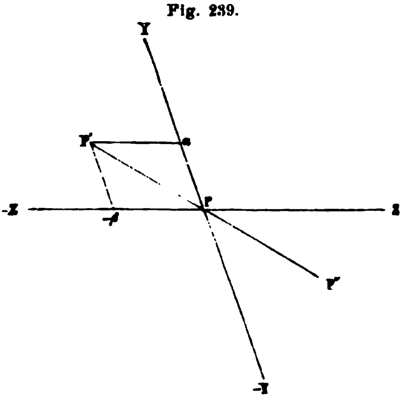
Wenn die Phasendifferenz größer ist, ist die Bahn, bis $a = \frac{1}{2}\lambda$ wird, der in allen Fällen eine Ellipse, deren Lage und Gestalt leicht nach m Bisherigen zu erhalten ist.

Ist $a = \frac{1}{2}\lambda$ geworden, so liefern die Gleichungen (1) und (2) oder) als zusammengehörige Werte von y und z

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z.$$

Die Gestalt der Bahn ist also wieder eine gerade Linie, welche jedoch anders liegt, wie in dem Falle, wo $a = 0$ war. Sie liegt jetzt (Fig. 239) in dem Winkel, den die Richtung der negativen z mit derjenigen der positiven y bildet. Denn jetzt beginnt der Punkt P zugleich sich nach der Richtung der negativen z und der positiven y zu bewegen, und zwar so, daß immer

Fig. 239.



$$\frac{y}{\alpha} = -\frac{z}{\beta}$$

ist; er bewegt sich demnach von P nach P', dann über P nach P'' usf. in der Linie $P'P''$ hin und her, so lange die beiden Impulse dauern.

Bei einem noch größern Werte von a geht die Bahn wieder in eine Ellipse über, in welcher jedoch der Punkt jetzt sich in entgegengesetzter Richtung bewegt als vorher. Betrachten wir den Fall, wo $a = \frac{11}{16}\lambda$ ist. Wenn der Punkt P (Fig. 240) seine Bewegung nach der Richtung y beginnt, wenn also

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0,$$

ist, so ist

$$z = \beta \sin \tfrac{11}{8}\pi = -0{,}923\,\beta.$$

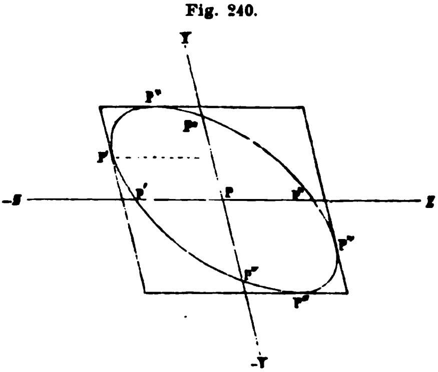
Der Punkt P befindet sich in p'.

Während nun z bis $-\beta$ wächst, bewegt sich der Punkt zugleich in der Richtung der positiven y, bis

$$y = -\alpha \cdot \cos \tfrac{11}{8}\pi = 0{,}382\,\alpha$$

ist. Der Punkt bewegt sich von p' nach P'.

Fig. 240.



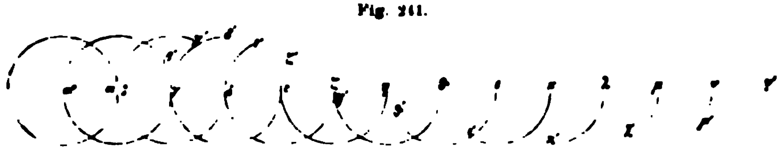
Während sich dann weiter der Abstand y vergrößert, nähert sich der Punkt in der Richtung z wieder der Ruhelage. Ist $y = \alpha$, so ist $z = \beta \cdot \cos \frac{11}{8}\pi = -0{,}382\beta$, der Punkt befindet sich in P'', hat also den Weg $P'P''$ durchlaufen. Im weitern Verlaufe nähert sich der Punkt anfangs sowohl in der Richtung der y als z der Gleichgewichtslage, bis er in p'' ist, dann entfernt er sich in der Richtung der positiven z, während er in der Richtung y dem Ausgangspunkte der Bewegung noch näher kommt; er bewegt sich nach p''', P''' usf., so daß der Punkt die Bahnellipse in der Richtung P', P'', P''', P^{IV} durchläuft, also in entgegengesetzter Richtung wie Fig. 238, wo die Phasendifferenz gleich $\frac{3}{16}\lambda$ war.

Zwischen der Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$ und λ durchläuft der Punkt die jedesalige Bahnellipse, die nach Lage und Gestalt für jeden Wert von a verhieden ist, immer in der zuletzt betrachteten Richtung. Die Gestalt der lipse nimmt dabei dieselben Änderungen an, wie in der vorhin betrachten Periode der Phasendifferenzen, sie wird anfangs bis $a = \frac{3\lambda}{4}$ gewölbter d von da ab bis $a = \lambda$ wieder flacher, bis sie für den letzten Wert der asendifferenz wieder eine gerade Linie wird, welche ebenso liegt, wie dem Falle, wo $a = 0$ war.

Im Falle also die komponierenden Bewegungen gleiche Perioden haben, d die Bahnen der einzelnen Punkte der Reihe Ellipsen, und zwar für le Punkte dieselben Ellipsen. Die Verschiedenheit in den gleichzeitigen wegungszuständen der einzelnen Punkte der Reihe besteht darin, daß an verschiedenen Punkten der Ellipse sich befinden und dort mit verhiedener Geschwindigkeit sich bewegen.

Die Gestalt, welche die Punktreihe infolge der Bewegung der Punkte nimmt, ist verschieden je nach der Richtung, in der die komponierenden wegungen erfolgen. Ist die eine Bewegung longitudinal, die andere

Fig. 241.



ansversal, so beschreiben die Punkte Ellipsen, deren Ebenen die Richtung, der die Bewegung sich fortpflanzt, in sich aufnehmen. Die Punktreihe ird also eine ähnliche Gestalt haben, wie bei einer transversalen Wellenwegung. Sei z. B. eine Punktreihe zugleich in longitudinale und transersale Schwingungen versetzt; die longitudinale Bewegung sei der transersalen um ein viertel Wellenlänge voraus und die Amplituden haben leiche Größe, so stellt Fig. 241 die gegenseitige Lage der Punkte in einer Fellenlänge dar, $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ ist die Lage der Punkte in der Ruhelage. er Punkt α ist im Begriffe, eine neue Bewegung in transversaler Richtung u beginnen, in longitudinaler hat er das erste Viertel seiner Oszillation urückgelegt: er befindet sich in α'. Der Punkt δ hat in longitudinaler ichtung gerade eine Oszillation vollendet, dagegen befindet er sich in ansversaler erst am Ende des dritten Viertels einer Oszillation, in seinem rößten Abstande nach negativer Richtung. Für den Punkt γ' ist, um unsre vorige Bezeichnung beizubehalten, $y = 0$, $z = -\beta$, für x ist $y = \alpha$, $= 0$ und für ν wieder $y = 0$ und $z = \beta$. Die einzelnen Kreisbogen igen die Bahnen der Punkte an, welche von $t = \frac{1}{4}T$ an, in welchem Momente die transversale Bewegung der Punkte ihren Anfang nahm, durchlaufen sind.

Sind beide Bewegungen transversal, so stehen die Ebenen der elliptischen Bahnen auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht, die Reihenfolge er Bahnebenen bildet einen elliptischen Zylinder, dessen Achse die Punktreihe in der Ruhelage ist. Eine auf dem Zylinder gezogene Schrauben-

linie, deren Höhe gleich ist der Länge der Welle, nimmt, wie man leicht übersieht, die Punkte in den verschiedenen Phasen auf.

§ 133.

Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge. Wir haben im Bisherigen die Zusammensetzung der Schwingungen in ihrem einfachsten Falle betrachtet, unter der Voraussetzung nämlich, daß die Schwingungen sämtlich dieselbe Periode, dieselbe Schwingungsdauer und somit auch dieselbe Wellenlänge haben. Es fragt sich nun, ob sich in einer Punktreihe gleichzeitig Schwingungen fortpflanzen und zu einer resultierenden Schwingung zusammensetzen können, welche eine verschiedene Schwingungsdauer besitzen, und welches die resultierende Bewegung dann sein wird.

Die Möglichkeit der gleichzeitigen Fortpflanzung von Bewegungen verschiedener Periode ergibt sich unmittelbar aus unserer Ableitung der schwingenden Bewegung in einer Punktreihe im § 128. Wir fanden dort, daß die Beschleunigung eines Punktes in dem Abstande x von dem Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung in der Reihe bedeutet.

Es können demnach alle die schwingenden Bewegungen in der Punktreihe gleichzeitig bestehen und sich ausbreiten, welche diesem Beschleunigungsgesetze entsprechen.

Wenn wir voraussetzen, daß in dem Ausgangspunkte der Bewegung, also für $x = 0$, dieselbe gegeben sei durch

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so erkannten wir, daß obige Gleichung für die fortgepflanzte Bewegung, also für die eines Punktes, der um x vom Anfangspunkt entfernt ist, auf die Gleichung führt

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Setzen wir dagegen jetzt voraus, daß der Ausgangspunkt eine ganze Reihe von Impulsen erhalte von verschiedener Periode, so ist seine Bewegung gegeben durch die Summe

$$Y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + 2b \sin 2\pi \frac{t + \tau_2}{T_2} + \cdots 2p \sin 2\pi \frac{t + \tau_n}{T_n},$$

worin $T_1\, T_2 \cdots T_n$ die Schwingungsdauern der verschiedenen Bewegungen und $\tau_2 \cdots \tau_n$ die Zeiten bedeuten, um welche die zweite, dritte, nte Bewegung später oder früher beginnt als die erste. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, wie wir imstande sind, dem Ausgangspunkte der Bewegung eine solche zusammengesetzte Bewegung zu erteilen.

ler Ausgangspunkt, für den $x = 0$ ist, diese Bewegung, so er-
ganz in derselben Weise wie für die einfache Schwingung, daß
ung eines um x von dem Ausgangspunkte entfernten Punktes
ung haben muß

$$2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + b \sin 2\pi\left(\frac{t + \tau_2}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2}\right) + \cdots p \sin 2\pi\left(\frac{t + \tau_n}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n}\right),$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ die Wellenlängen der einzelnen Bewegungen be-
lso setzen

$$\lambda_1 = c T_1, \quad \lambda_2 = c T_2 \cdots \lambda_n = c T_n.$$

ichtigkeit dieser Gleichung für die resultierende Bewegung läßt
sehr leicht noch nachträglich zeigen, indem man aus derselben
on mehrfach durchgeführten Weise die Quotienten $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$
man findet, daß aus derselben sich ergibt

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

die Form der Gleichung für die aus dem Zusammenwirken
chwingungen verschiedener Periode resultierende Bewegung gibt
en, daß dieselbe keine einfach periodische ist, bei der das Be-
ich ebenso weit und ebenso lange an der einen Seite der Gleich-
ge bewegt, als an der andern. Denn es läßt sich kein Wert
l λ angeben, der für alle Werte von t und x den Abstand Y
einfache Gleichung von der Form

$$Y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

von x und t unabhängigen Werte der Amplitude A wieder-
. Die Bewegung ist vielmehr eine zusammengesetzt periodische,
r Punkt während der durch das erste Glied der den Wert von Y
Summe dargestellten hin und her gehenden Bewegung noch nach
erioden bewegt wird. Infolgedessen bewegt sich der Punkt bald
ld langsamer nach der einen Seite als nach der andern, bald
plitude nach der einen Seite größer bald kleiner als nach der
nach der Größe der Perioden und der Amplituden der kom-
n Schwingungen. Ein allgemeines Gesetz dieser kompliziert
n Bewegungen läßt sich außer dem angegebenen nicht aufstellen;
nur, um ein Bild derselben zu bekommen, einige Fälle der-
achten, und zwar den einfachsten Fall, daß sich zwei Wellen
ktreihe fortpflanzen, deren Schwingungsdauern und Wellenlängen
: 2 verhalten. In dem Falle wird, wenn wir die größere der
wingungsdauern mit T und die größere Wellenlänge mit λ be-
nd gleichzeitig $\tau = 0$ setzen, also annehmen, beide Bewegungen
zu gleicher Zeit, der Ausdruck für Y

$$Y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda}\right)$$

$$Y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

oder auch

$$Y = \left(a + 2b \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

ein Ausdruck, der die doppelte Periodizität der Bewegung deutlich erk läßt, da er zeigt, daß wir die sich ausbreitende Bewegung auffassen nen als eine solche der längern Periode, deren Amplitude aber wi derselben Periode veränderlich ist.

Fixieren wir den Moment, in welchem $t = nT$, somit $\sin 2n\pi$ $\cos 2n\pi = 1$, so erhalten wir

$$Y = -\left(a + 2b \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Hiernach wird für

$$\begin{array}{lll}
x = \frac{1}{8}\lambda & Y = -\left(a + 2b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} & = -a\sqrt{\frac{1}{2}} - b \\
\frac{2}{8}\lambda & \quad -(a + 0) & = -a \\
\frac{3}{8}\lambda & \quad -\left(a - 2b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} & = -a\sqrt{\frac{1}{2}} + b \\
\frac{4}{8}\lambda & \quad -(a - 2b)\cdot 0 & = 0 \\
\frac{5}{8}\lambda & \quad +\left(a - 2b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} & = +a\sqrt{\frac{1}{2}} - b \\
\frac{6}{8}\lambda & \quad +(a + 0) & = +a \\
\frac{7}{8}\lambda & \quad +\left(a + 2b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} & = +a\sqrt{\frac{1}{2}} + b \\
\frac{8}{8}\lambda & \quad +(a + 2b)0 & = 0.
\end{array}$$

Fig. 242 zeigt die Wellenform, welche diesen Werten von Y spricht, und zwar für $b = 2a$; $b = a$; $b = \frac{1}{2}a$.

Die punktierten Linien deuten die einzelnen Wellen an, die zogenen geben die resultierenden Wellen. Die Figuren zeigen, daß Bewegung eine doppelperiodische ist, und daß je nach dem Verhältnis Amplituden die Art der Bewegung eine sehr verschiedene sein kann. kann sie im allgemeinen dahin charakterisieren, daß die Bewegung mi größten Amplitude der resultierenden Bewegung ihre Periode als char ristisch aufdrückt, und daß dann durch die übrigen Bewegungen inne dieser Perioden wieder periodische Verschiedenheiten auftreten. So man die Welle (Fig. 242a) als eine solche von der Periode $\frac{\lambda}{2}$ betrac in welcher durch die zweite Bewegung innerhalb $2\frac{\lambda}{2}$ jedesmal der Wellenberg und das letzte Wellental verstärkt erscheinen, während Welle (Fig. 242c) entschieden als schwingende Bewegung von der Pe λ erscheint, welche von der einfachen Schwingung sich dadurch u scheidet, daß der schwingende Punkt mit großer Geschwindigkeit sich der positiven Seite von seiner Gleichgewichtslage entfernt, dann aber viel langsamer sich derselben wieder nähert und sich über dieselbe hi bis zu seinem größten Abstande an der negativen Seite bewegt.

In derselben Weise setzen sich die Bewegungen zusammen, wenn komponierenden Wellen in weniger einfachem Verhältnis stehen; in je Falle kann man in der angegebenen Weise die resultierende Bewe konstruieren.

Mit einer Verschiebung der Phase der einen der komponierenden Wellen rt sich die resultierende Welle ebenfalls, wenn auch im übrigen die ponierenden Bewegungen ganz ungeändert bleiben. Die oben für die tierende Bewegung hingeschriebene Gleichung läßt das auch sofort nen; wird die zweite Bewegung um ein viertel Wellenlänge, also um r längern Welle λ verschoben, so wird der Ausdruck für Y

$$Y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \sin 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - b \cos 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

Fig. 242 a.

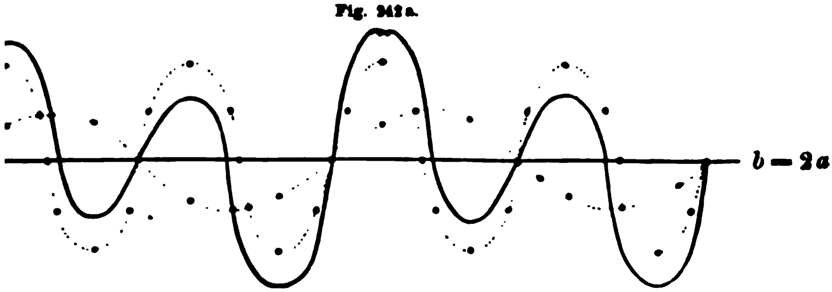


Fig. 242 b.

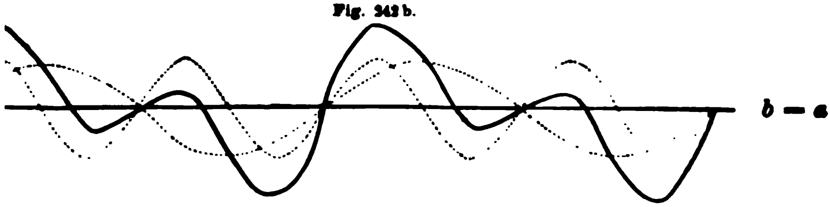
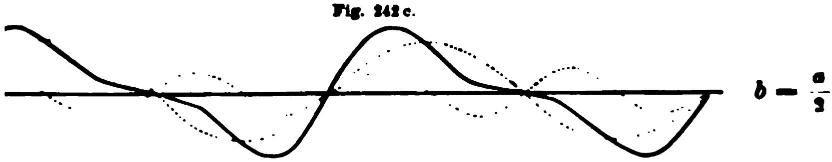


Fig. 242 c.



die zweite Bewegung um eine halbe Wellenlänge verschoben, so wird

$$Y = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - b \cdot \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Darnach sind die Werte von Y für diese beiden Fälle folgende, wenn wieder den Moment $t = nT$ fixieren,

	Phasendifferenz $= \frac{1}{4}\lambda$	$= \frac{1}{2}\lambda$
$x = \frac{1}{8}\lambda \cdots$	$Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{2}{8}\lambda \cdots$	$-a \quad + b$	$-a \quad \pm 0$
$\frac{3}{8}\lambda \cdots$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{4}{8}\lambda \cdots$	$0 \quad - b$	$0 \quad \pm 0$

ieinen die von den einzelnen Punkten nacheinander und die von den ander folgenden Punkten der Reihe gleichzeitig beschriebenen Kurven lieden sind. Daß letzteres der Fall ist, ergibt sich daraus, daß bei zeitiger Ausbreitung von Schwingungen verschiedener Periode die ein-. Punkte von den komponierenden Wellen nicht immer in derselben getroffen werden. Denken wir uns z. B. in einer Punktreihe zwei zu-ler senkrechte transversale Schwingungen fortgepflanzt, deren Phase ehr wenig verschieden ist, so daß durch den Unterschied der Phase 'harakter der Kurven nicht alteriert wird, daß dieselben Ellipsen n; nehmen wir z. B. an, die Schwingungsdauern der Punkte verhalten rie 100 : 101 und die beiden Bewegungen beginnen gleichzeitig. Ist mplitude beider Bewegungen gleich, so wird die erste Schwingung ıfangspunkte eine lineare sein, welche mit jeder der komponierenden Winkel von 45° bildet. Bei der zweiten Schwingung ist die eine der ı aber schon 0,01 Schwingung voraus, die Bahn des Punktes wird elliptisch, und nach 19 Schwingungen ist die Phasendifferenz der ngungen gleich $\frac{3}{16}$ Oszillation, die Bahn des Punktes wird eine Ellipse ig. 238. Nach 25 Schwingungen ist die Phasendifferenz $\frac{1}{4}$ Oszillation, ahn wird ein Kreis, nach 50 Oszillationen ist sie $\frac{1}{2}$ Oszillation, die wird wieder eine Linie, welche zu der ersten Schwingung senkrecht kurz man sieht, daß nach 100 Schwingungen der Punkt nach und alle die Bahnen durchlaufen hat, welche wir im vorigen Paragraphen ›chen haben. Alle diese Bahnen, welche der erste Punkt nacheinander läuft, sehen wir dann in den ersten 100 Wellenlängen gleichzeitig einander. Denn jeder Punkt durchläuft nacheinander dieselben Bahnen ler erste Punkt. Macht nun der erste Punkt der 100. Welle die Schwingung, so findet in der 75. Welle die 25. Schwingung statt, schwingt also geradeso wie der Anfangspunkt bei der 25. Schwin-usw.

In einem Falle tritt diese Verschiedenheit der Schwingungen nicht ein. ı die Schwingungen in einem einfachen rationalen Verhältnis, also 1 : 2 oder 1 : 3, 2 : 3 usw., so sind die Bahnen jedes Punktes der immer dieselben. Wir wollen auch hier nur den einfachsten Fall be-en, um zu zeigen, in welcher Weise die Frage nach der resultieren-lewegung zu behandeln ist, da wir an einer andern Stelle nochmals iesen Punkt zurückkommen werden. Wir denken uns in einer Punkt-zwei zueinander senkrechte Bewegungen sich fortpflanzen, deren nlängen sich verhalten wie 1 : 2. Die Gleichung der einen Be-ıg sei

$$y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

ler zweiten hierzu senkrechten

$$z = b \sin 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x-d}{\frac{1}{2}\lambda}\right),$$

was dasselbe ist

$$z = b \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

d die Phasendifferenz der komponierenden Bewegungen bedeutet.

is $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ab, so wächst z negativ wieder bis a und wird mit y
. Diese Hälfte der Kurve besteht also aus zwei kongruenten
Ganz ebenso ist die andere Hälfte der Kurve für die negativen
on y beschaffen.
die zweite Bewegung der ersten um den achten Teil ihrer Schwingung
so haben wir, da wir mit λ die Wellenlänge der Schwingungen
ern Periode bezeichnet haben, für d einzusetzen $\frac{1}{16}\lambda$. Damit wird
hung der resultierenden Kurve, indem wir für $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
ert einsetzen,

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{2y}{a}\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,a\left(1 - 2\frac{y^2}{a^2}\right).$$

. 244 β zeigt die durch diese Gleichung dargestellte Kurve; wir
der Kurve entsprechend aus der Gleichung die Werte

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ für $y = 0$

„ $y = \pm a\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}} = \pm 0{,}382\,68\,a$

„ $y = \pm \frac{1}{2}a\sqrt{2 \pm \sqrt{2}} = \pm 0{,}923\,85\,a$ und $\pm 0{,}382\,68\,a$

$\cdot a\sqrt{\frac{1}{2}}$ „ $y = \pm a$

$\cdot a$ „ $y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 0{,}923\,85\,a.$

: man sieht, unterscheidet sich diese Kurve von der vorigen nur
daß der Schnittpunkt der einzelnen Kurvenäste nach der Seite
iven z verschoben ist, und die Kurve in ihren beiden Hälften mehr
ıt ist. Je mehr die zweite Bewegung der ersten voraus ist, um so
ückt der Schnittpunkt nach oben, bis er für ein Vorauseilen um
ıgung in den Wert $z = a$ fällt, wo dann gleichzeitig die Kurve
ılt Fig. 244 γ annimmt, der Punkt bewegt sich in der Linie qau
her. Die Gleichung der Kurve erhalten wir, wenn wir in Glei-
1) $d = \frac{1}{4}\lambda$ setzen

$$z = a\left(1 - 2\frac{y^2}{a^2}\right).$$

nach ist

$$z = a \quad \text{für } y = 0$$
$$z = 0 \quad „\ y = \pm a\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$z = -a \quad „\ y = \pm a,$$

ıuch obige Kurve zeigt.
ımt die Phasendifferenz der Bewegungen weiter zu, so tritt zu-
rieder die Kurve Fig. 244 β auf; sie behält diese Gestalt, jedoch
der Punkt q immer näher an 0 heranrückt, bis die zweite Be-
der ersten um $\frac{1}{2}$ Schwingung voraus, d also $\frac{1}{2}\lambda$ wird. Der Unter-
egen vorhin ist nur der, daß der Punkt die Kurve in entgegen-
Richtung durchläuft. Ist $d = \frac{1}{2}\lambda$, so tritt wieder die Kurve
α auf, welche von dem Punkte aber in entgegengesetzter Richtung
fen wird wie vorher, als $d = 0$ war.

Bei noch weiterer Zunahme der Phasendifferenz tritt wieder die Kurve Fig. 244β auf, aber in umgekehrter Lage, wir erhalten z. B. die Kurve für $d = \frac{5}{16}\lambda$, wenn wir uns Fig. 244β und für $d = \frac{3}{8}\lambda$, wenn wir uns Fig. 244γ einfach auf den Kopf gestellt denken.

Sind die Schwingungsverhältnisse der beiden Bewegungen nicht genau 1 : 2, sondern etwa 50 : 99, so durchläuft jeder Punkt nach und nach die soeben abgeleiteten Bahnen, und ebenso sehen wir dann in der Punktreihe innerhalb 50 λ alle die Kurven nebeneinander.

Sind die Verhältnisse der Schwingungsdauern weniger einfach, so werden die Kurven verwickelter, ihre Bestimmung gelingt indes immer auf dem angedeuteten Wege.

§ 134.

Schwingungen eines Systems von Punkten. Wenn in einem im Raum verteilten System von Punkten das Gleichgewicht eines Punktes gestört wird, so muß auch das aller übrigen gestört werden, wenn wir voraussetzen, daß auch hier, wie in den in den vorigen Paragraphen betrachteten Punktreihen, das Punktsystem durch anziehende und abstoßende Kräfte, welche zwischen den einzelnen Punkten tätig sind, im Gleichgewicht gehalten wird. Man kann jedes System von Punkten, welche irgendwie im Raume verteilt sind, als aus Punktreihen zusammengesetzt betrachten, die man erhält, wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes nach allen möglichen Richtungen gerade Linien legt. Diese Linien laufen von dem Punkte aus, wie die Radien einer Kugel von dem Mittelpunkte, und jeder dieser unendlich vielen Radien stellt eine Punktreihe dar. Wird der erste Punkt in eine oszillierende Bewegung versetzt, so muß sich diese in allen den Punktreihen nach den bisherigen Gesetzen fortpflanzen, da der Punkt allen Reihen gleichzeitig angehört.

Je nach der Art und Weise, wie die Punkte im Raum verteilt sind, kann die Fortpflanzung der Bewegung im Systeme verschieden sein. Wie wir sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung nur ab von dem Quotienten $\sqrt{a\frac{e}{d}}$, der Elastizität der Punktreihe und ihrer Dichtigkeit. Sind nun die Punkte in dem Systeme so verteilt, daß nach den einzelnen Richtungen hin auf der ganzen Länge der Radien dieser Quotient denselben Wert hat, wie wir es bei Betrachtung der Punktreihen voraussetzten, so nennt man das System ein homogenes. In einem solchen System pflanzt sich eine Wellenbewegung nach jeder Richtung hin mit konstanter Geschwindigkeit fort, auf der ganzen Länge jedes Radius ist die Wellenlänge dieselbe. Die schwingende Bewegung in einem solchen Systeme können wir unmittelbar mit Hilfe unserer Entwickelungen über die Schwingungen von Punktreihen erhalten.

Behalten auf den einzelnen Radien in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte Elastizität und Dichtigkeit der Punktreihen nicht denselben Wert, ändert sich die Elastizität allein oder die Dichtigkeit, oder ändern sich beide in einem verschiedenen Verhältnisse, so ist das Punktsystem ein nicht homogenes oder ein heterogenes.

In einem solchen System pflanzt sich die Bewegung in verschiedenen [E]ntfernungen nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, die Wellenlängen [sin]d nicht auf der ganzen Länge der Radien gleich, sondern ändern sich [übe]rall dort, wo auf denselben eine Änderung der Elastizität oder Dichtig[kei]t eintritt, denn überall dort findet eine Änderung des Quotienten $\sqrt{a\frac{e}{d}}$ statt.

Die homogenen Punktsysteme können entweder isotrop oder anisotrop [sei]n. Isotrope Punktsysteme sind solche, bei denen für sämtliche Schwin[gun]gen der Quotient $\sqrt{a\frac{e}{d}}$ derselbe ist, also nicht nur auf jedem Radius [de]s Systems für sich betrachtet, sondern auch auf allen verschiedenen [Ra]dien, einerlei nach welcher Richtung auf denselben die Schwingungen [erf]olgen. Gleichartige Schwingungen, also auf allen Radien longitudinale, [ode]r auf allen Radien transversale, pflanzen sich nach allen Richtungen mit [de]rselben Geschwindigkeit fort. Ein derartiges Punktsystem würden wir [z.] B. erhalten, wenn wir nach drei zueinander senkrechten Richtungen des [Ra]umes die Punkte in ganz gleichen Abständen verteilt denken und an[ne]hmen, daß überall in gleichen Abständen die Punkte mit gleichen Kräften [au]feinander wirken. Die Punkte würden also auf Ecken von Würfeln [lie]gen, welche im ganzen System gleiche Seiten haben.

Ist der Quotient $\sqrt{a\frac{e}{d}}$ nicht nach allen Richtungen hin derselbe, so [ne]nnt man das System ein anisotropes oder heterotropes; es ist das der [Fa]ll, wenn die Dichtigkeit der verschiedenen Punktreihen oder die Elasti[zit]ät derselben verschieden ist, wenn also die Punkte in einer Richtung [sic]h näher liegen oder mit stärkerer Kraft in ihrer Gleichgewichtslage ge[ha]lten werden als in einer andern, oder auch, wenn in einer und derselben [Re]ihe der Wert von e verschieden ist, je nach der Richtung, nach welcher [de]r Punkt bei transversaler Schwingung aus seiner Gleichgewichtslage ge[rü]ckt ist. In jeder Punktreihe pflanzt sich dann eine gegebene Schwin[gu]ng mit konstanter Geschwindigkeit fort, welche aber von Punktreihe zu [Pu]nktreihe oder je nach der Richtung der transversalen Schwingung ver[sch]ieden ist.

Betrachten wir die Fortpflanzung der Wellenbewegung in isotropen [Mi]tteln etwas genauer und nehmen wir an, die Schwingungen haben über[all] in bezug auf die Punktreihen die gleiche Richtung.

Bezeichnen wir wie früher die Oszillationsdauer der schwingenden Be[we]gung mit T und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung [mi]t c, so hat sich nach Verlauf der Zeit T die schwingende Bewegung [de]n Punkten einer Kugel mitgeteilt, welche mit dem Radius $R = cT$ [um] den Anfangspunkt α der Bewegung beschrieben wird, da sich in diesem [Sy]steme die schwingende Bewegung nach allen Richtungen mit gleicher [Ge]schwindigkeit fortpflanzt. Die auf der Kugelfläche befindlichen Punkte [beg]innen gerade ihre schwingende Bewegung, während der Punkt α eine [gan]ze Schwingung vollbracht hat, und die Punkte, welche die einzelnen [Ra]dien der Kugel bilden, sich in den verschiedensten Oszillationsphasen [bef]inden, diejenigen, welche um $\frac{cT}{4}$ von α entfernt sind, haben $\frac{3}{4}$ ihrer

Schwingung vollbracht, die um $\frac{cT}{2}$ entfernten die Hälfte usf. Man ersieht, wie alle Punkte, welche auf einer um α beschriebenen Kugel liegen, in der gleichen Phase sich befinden.

Der Bewegungszustand, der innerhalb der Kugel, die mit dem Radius $R = cT$ beschrieben war, am Ende der Zeit T stattfindet, pflanzt sich in der folgenden Zeit T in der Richtung der Radien weiter fort, so daß am Ende der Zeit $2\,T$ alle Punkte einer Kugel vom Radius $2cT$ an der Bewegung teilnehmen. Die Punkte, die auf der Fläche dieser Kugel liegen, sind im Begriffe, ihre schwingende Bewegung zu beginnen, und die Punkte auf der Kugel vom Radius cT haben ihre erste Oszillation zurückgelegt. Die Punkte, welche in der von diesen beiden Kugeln eingeschlossenen Schale sich befinden, haben alle einen größeren oder kleineren Teil einer Oszillation zurückgelegt; sie befinden sich in derselben Phase, wie die entsprechend liegenden Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT zur Zeit T. Die von α um $\frac{5}{4}cT$ entfernten Punkte haben $\frac{3}{4}$, die um $\frac{3}{2}cT$ entfernten $\frac{1}{2}$ Undulation zurückgelegt.

Die Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT befinden sich, wenn die Erregung im Mittelpunkt der Bewegung fortdauert, in denselben Oszillationsphasen wie zur Zeit T, jetzt aber bei Zurücklegung ihrer zweiten Oszillation.

In der folgenden Zeit T pflanzt sich der Bewegungszustand der Kugelschale, die zwischen den Kugeln vom Radius $2cT$ und cT enthalten ist, in der Richtung der Radien auf die Punkte fort, welche weniger als $3cT$ von dem Punkte α entfernt sind; eine Kugel vom Radius $3cT$ ist die Grenze der Bewegung. Dort beginnen die Punkte ihre erste Oszillation, während sie auf der Kugelfläche, welche zur Zeit $2\,T$ die Grenze der Bewegung war, ihre zweite Oszillation beginnen; alle zwischen diesen Kugeln befindlichen Punkte haben größere oder kleinere Teile ihrer Oszillation vollführt, je nach ihren Abständen vom Anfangspunkte oder von der Kugel, die in der vorigen Zeit die Grenze der Bewegung bildete.

Man sieht, wie nach und nach der Raum rings um den Punkt α sich in eine Reihe von Kugelschalen teilt, deren Dicke jedesmal gleich cT ist, und in denen die gleichweit von der Grenze der Schalen entfernten Punkte in den gleichen Phasen der Oszillation sich befinden. Jeder Radius, den wir von dem Punkte α nach der äußersten Grenze der Bewegung ziehen, hat sich ebenso in eine Anzahl Wellenlängen geteilt, wie wir es früher für die einzelnen Punktreihen gesehen haben. Deshalb nennt man auch hier die Dicke der einzelnen Kugelschalen, welche durch Kugeln vom Radius ncT und $(n - 1)cT$ begrenzt werden, die Wellenlänge, und diese Kugelschalen selbst Wellen.

Es geht demnach aus dem Gesagten hervor, daß in einem isotropen Punktsystem die schwingende Bewegung sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzt.

Hört nach einiger Zeit die schwingende Bewegung des Punktes α auf, so gelangen dadurch auch die auf α folgenden Punkte auf allen einzelnen Radien zur Ruhe, da die schwingende Bewegung des Punktes α es ist, welche die Bewegung der folgenden Punkte veranlaßt, indem er bei seiner Bewegung die folgenden Punkte nach sich zieht. Dadurch entsteht sich

r äußern Grenze der Wellenbewegung eine innere, an der die Bewegung r Punkte aufhört.

Diese innere Grenze muß ebenso eine Kugel sein, deren Mittelpunkt α und deren Radius stetig mit der Zeit t gerade so wächst, wie der Ra-us der äußern Grenze. Daraus folgt, daß von der Zeit an, wo α auf-rt sich zu bewegen, eine Kugelschale die sämtlichen bewegten Punkte ıfaßt, deren Dicke gleich ist ct, wenn wir mit t die Zeit bezeichnen, ährend welcher der Punkt α sich bewegte. Zur Zeit t' werden die Gren-ı dieser Kugelschalen die beiden Kugeln vom Radius ct' und $c(t'-t)$ n, erstere die äußere, letztere die innere. Mit wachsender Zeit erweitert h diese Schale immer mehr, aber die Dicke derselben ist immer

$$ct' - c(t' - t) = ct,$$

o konstant.

In nicht isotropen Systemen kann eine Wellenbewegung sich auch ht in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, dort hängt der Abstand, bis zu lchem sich in den verschiedenen Richtungen die Bewegung in gleichen iten überträgt, ab von der Dichtigkeit der einzelnen Radien sowie von : Elastizität dieser Reihen. Um demnach die Grenzen der Bewegung in sem Falle zu erhalten, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem h die Eigenschaften der Punktreihen ändern. Wir werden später, in der hre vom Lichte, die Fortpflanzung von schwingenden Bewegungen in ichen Systemen zu betrachten haben.

Die nicht homogenen Punktsysteme können wir als eine Verbindung einander grenzender homogener Punktsysteme ansehen. Die Fortpflanzung r schwingenden Bewegungen in denselben können wir demnach auf die rtpflanzung der Bewegung in homogenen Punktsystemen zurückführen, r ist es notwendig, die Änderungen zu untersuchen, welche die schwin-nde Bewegung erfährt beim Übergange aus einem homogenen System ein anderes ebenfalls homogenes System.

§ 135.

Huyghenssches Prinzip. Man kann sich von der Fortpflanzung ier Wellenbewegung noch eine andere Vorstellung bilden, welche zuerst n Huyghens angewandt ist und die auf dem von uns in § 130 be-its zum Teil ausgesprochenen und angewandten Prinzip der Koexistenz einer Bewegungen beruht. Dieses Prinzip läßt sich vollständig so aus-rechen: Ein Punkt eines Systemes, der durch mehrere Impulse erregt rd, vollführt eine Bewegung, die sich als Resultante nach dem Satze vom ırallelogramm der Kräfte bestimmen läßt. Wenn durch die Bewegung ıes Punktes auch benachbarte Punkte des Systems bewegt werden, die wegung der letztern aber nur Folge ist einer der komponierenden Be-gungen des zuerst bewegten Punktes, so bewegen sich dieselben gerade , als besäße der ursprünglich bewegte Punkt nur diese Teilbewegung.

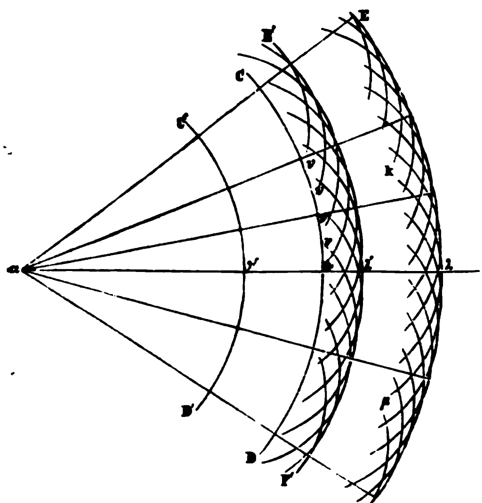
Wenn nun in einem Punktsystem eine Wellenbewegung vorhanden ist d die Bewegung bis zu einer gewissen Fläche fortgeschritten ist, so ist Bewegung irgend eines nicht in dieser Fläche liegenden Punktes des

Systems die Resultante aller jener Teilbewegungen, welche die verschiedenen Punkte der Welle zu ihm hinsenden.

Sei CD (Fig. 245) die äußere, $C'D'$ die innere Grenze einer Welle, welche von dem Punkte α ausgegangen ist. Wir können alle Punkte, welche zwischen den Grenzen CD und $C'D'$ liegen, als neue Wellenmittelpunkte betrachten, von denen aus sich eine schwingende Bewegung nach allen Richtungen hin fortpflanzt, gerade wie vom Punkte α aus.

Diese von den einzelnen Punkten ausgehenden Wellen sind bei der Voraussetzung, daß das System ein isotropes ist, ebenso kugelförmig, wie die Flächen, deren Durchschnitte CD und $C'D'$ sind.

Fig. 245.



Von dem Punkte ν wird sich z. B. die Bewegung während einer Zeit t auf die mit dem Radius $\nu\lambda = ct$ beschriebene Kugel fortgepflanzt haben, deren Mittelpunkt der Punkt ν ist. Gleiches gilt für alle Punkte der Kugelfläche CD, von allen gehen nach allen Richtungen Bewegungen aus in der Form von kugelförmigen Wellen, deren Radien gleich ct sind.

Die äußere Grenze, bis zu der sich auf diese Weise die Wellenbewegung fortgepflanzt hat, wird die Fläche sein, welche alle diese einzelnen Kugeln berührt, welche also alle diese Kugeln einhüllt. Diese Fläche ist aber offenbar eine Kugel EF, welche den Punkt α zum Mittelpunkt hat, und deren Radius gleich ist $\alpha\nu + ct = \alpha\lambda$. Denn die von α am weitesten entfernten Punkte der einzelnen Kugeln sind diejenigen, wo deren Radien $\nu\lambda$ mit dem Radius $\alpha\nu$ gerade Linien bilden; diese liegen aber auf einer Kugelfläche, deren Radius gleich $\alpha\lambda$ ist.

Gleiches gilt auch von den Bewegungen aller übrigen zwischen CD und $C'D'$ liegenden Punkte, auch von diesen gehen Bewegungen nach allen Richtungen aus, und der Schwingungszustand der auf irgend einer zwischen CD und $C'D'$ liegenden Kugelfläche befindlichen Punkte hat sich so auf eine um ct von α weiter entfernte Kugelfläche übertragen. Die innere Grenze der Welle ist demnach die Kugelfläche $E'F'$, welche mit dem Radius $\alpha\nu' + \nu'\lambda'$ um α beschrieben ist, da diese Kugelfläche alle jene einzelnen Kugeln berührt, welche von allen ν' der Kugelfläche $C'D'$ mit den Radien $\nu'\lambda'$ beschrieben werden.

Wir erhalten somit durch Anwendung der Huyghensschen Konstruktion, indem wir jeden Punkt einer Welle als Bewegungsmittelpunkt ansehen, von dem aus sich die Bewegung weiter fortpflanzt, ganz dieselbe Wellenfläche, als wenn wir von dem bewegenden Mittelpunkte α aus in der Richtung der Radien fortgeschritten wären.

aben jedoch nicht nur zu zeigen, daß die jedesmalige Begren-
Velle nach dieser Konstruktion dieselbe ist, als wenn wir eine
rbreitung nach den durch den Bewegungsmittelpunkt gelegten
ehmen, sondern auch nachzuweisen, daß die Bewegung der ein-
rte in diesen abgeleiteten Wellen dieselbe ist, wie nach unserer
tellung und somit die dort stillschweigend gemachte Voraus-
geradlinigen Verbreitung von Wellen in einem Punktsystem zu
n.

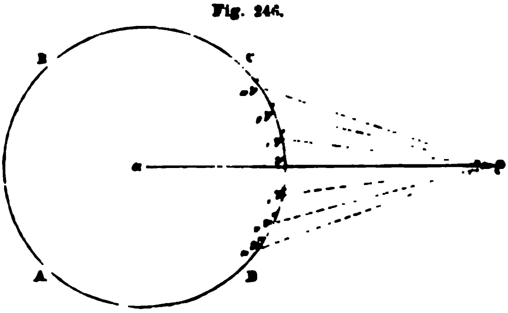
dem Ende die um den Mittelpunkt α beschriebene Kugel $ABCD$
läche zu irgend einer Zeit t, und μ ein Punkt des Systems, der
e δ von dem Punkte ν auf dem Radius $\alpha\nu$ entfernt liegt

unkt μ hat, wenn die Bewegung sich fortpflanzt, nach einer
eit τ zunächst eine Bewegung durch die von ν in der Rich-
adius $\nu\mu$ sich fortpflanzende Bewegung. Nehmen wir an, daß
ν am Ende der Zeit t' oder im Beginne der Zeit τ seine Be-
ade beginnt, so
e der Oszillation
es μ bestimmt
Gleichung

$$2\pi\left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

nit a die Ampli-
die Oszillations-
nit λ die Wellen-
chwingenden Be-
eichnen.

Fig. 246.



unserer Annahme
unkte der Wellenfläche Mittelpunkte der Bewegung, von denen
gungen nach allen Richtungen hin fortpflanzen. Zur Zeit τ
on allen Punkten der Wellenfläche $ABCD$ eine Bewegung auf
μ übertragen. Da aber die Abstände der einzelnen Punkte ν'
sich sowohl als von $\nu\mu$ verschieden sind, so sind die gleichzeitig
amenden Bewegungen zu verschiedenen Zeiten von der Welle
gegangen, es folgt daraus, daß die Phasen aller gleichzeitig
nkt μ wirkenden Bewegungen unter sich sowohl als von der
ehenden Bewegung verschieden sind. Nennen wir die Entfer-
Punktes ν' von μ nun δ', so erhalten wir als Abstand des
von der Gleichgewichtslage infolge dieser Bewegung

$$y' = a \sin 2\pi\left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta'}{\lambda}\right)$$

asendifferenz der beiden Bewegungen die Differenz

$$\frac{\delta' - \delta}{\lambda}.$$

h der Lage des Punktes ν' hat diese Differenz immer andere
wächst stetig, je weiter der Punkt ν' von ν entfernt liegt, so
gleichzeitig Bewegungen in allen möglichen Phasen auf den

Punkt μ einwirken. Um die Resultierende aus diesen sämtlichen wegungen zu erhalten, denken wir uns durch Kreise, deren Mittelp auf $\alpha\mu$ liegen, und die zu $\alpha\mu$ senkrecht sind, die Wellenfläche CD in Reihe von Zonen $,\nu'$ $,,\nu'$ $,,\nu''$ $,\nu''$ zerlegt, so zwar, daß die Abständ aufeinander folgenden Punkte ν von μ sich immer um $\frac{1}{2}\lambda$ untersche so daß also

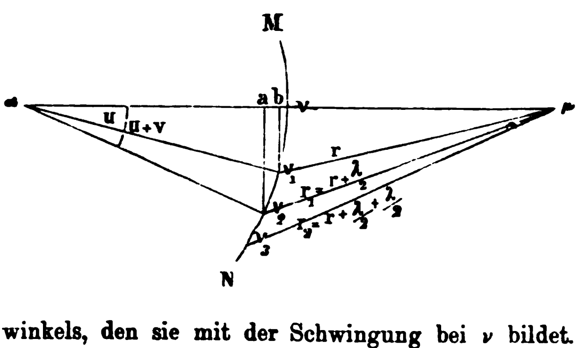
$$,,\nu'\mu - ,\nu'\mu = ,\nu'\mu - \nu\mu = ,,\nu''\mu - ,\nu''\mu = ,\nu''\mu - \nu\mu = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Die sämtlichen Bewegungen, welche von den auf der zunächst u liegenden Zone befindlichen Punkten ausgehen, treiben zur Zeit t Punkt μ nach derselben Richtung, da die Phasendifferenz dieser Bewegu kleiner als $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Die von den Punkten der zweiten Zone $,\nu'$ $,,\nu'$ $,\nu''$ ausgehenden Bewegungen treiben den Punkt μ dagegen nach entge gesetzter Richtung, da alle Strahlen dieser Zone gegen die entsprec liegenden der vorigen, zunächst um ν liegenden Zone um eine halbe Wel länge verschoben sind. Die von der dritten Zone ausgehenden Bewegu sind gegen die der ersten um eine ganze Wellenlänge verschoben, sie sitzen also keine Phasendifferenz gegen jene und bewegen demnach Punkt μ wieder in demselben Sinne. Ihnen entgegen wirken aber Strahlen der vierten Zone, welche eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda$ mit von den Punkten der dritten Zone herrührenden Bewegungen besitzen.

Ebenso ist es mit allen folgenden Zonen, so daß die abwechseln Zonen stets Bewegungen in μ erzeugen, welche eine Phasendifferenz v einer halben Wellenlänge besitzen, welche sich also gegenseitig schwäch

Die resultierende Bewegung in μ wird also wesentlich von der Am tude abhängig sein, welche jede der Zonen in μ erzeugt. Diese aber hä von zwei Umständen ab, einmal nämlich von der Anzahl der in jeder Zo schwingenden Punkte, und dann von der Neigung der in jeder Zone st findenden Schwingungen gegen die in μ durch den Punkt ν des Ra erregte Schwingung. Denn betrachten wir nur transversale Schwingung so kann z. B. von d sechsten Zone her n die Komponente in B tracht kommen, wel zu $\nu\mu$ senkrecht i Zur Berechnung Resultierenden wir also die S der von allen Z kommenden Sch gungen bilden, multipliziert mit Kosinus des Neig

Fig. 247.



winkels, den sie mit der Schwingung bei ν bildet. In dieser Form die Lösung des Problems die größte Schwierigkeit bieten. Glücklicher kann man das Problem auch anders anfassen, indem man nur die kungen der unmittelbar benachbarten Zonen vergleicht, also die der z mit jenen der ersten und dritten, die der vierten mit jenen der d und fünften. Da die Neigungen der unmittelbar benachbarten Zon

rst wenig verschieden sind, so können wir bei dieser Betrachtungs- die Verschiedenheit derselben vernachlässigen und die von jeder Zone erregte Bewegung der Größe der Zone, der Anzahl der in ihr schwingen Punkte, proportional setzen. Wir haben deshalb nur die Größe der lnen Zonen zu berechnen; sei zu dem Ende MN der Durchschnitt durch Stück der primären Welle, welche nach μ ihre Schwingungen sendet, seien $\nu_1\ \nu_2$, $\nu_2\ \nu_3$ die Durchschnitte durch zwei benachbarte Zonen, laß die Abstände ihrer Grenzen von μ sich um $\frac{\lambda}{2}$ unterscheiden, so also

$$r_1 = r + \frac{\lambda}{2}\,,\quad r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2}$$

. Denken wir uns den Durchschnitt um $a\mu$ als Achse rotiert, so beibt der Bogen MN das betreffende Stück der primären Welle, und Bogen $\nu_1\nu_2$ die zwischen r und $r + \frac{\lambda}{2}$ liegende Zone. Um die Größe lben zu erhalten, denken wir uns bei ν_1 ein unendlich kleines Stück Schnittes, dessen Länge im Bogenmaß wir mit du bezeichnen, dessen e in Linienmaß also $a\,du$ ist, wenn wir den Radius der primären e mit a bezeichnen. Der Abstand dieses Elementes von der Drehungs- ist $\nu_1 b$, die Größe der von demselben beschriebenen Zone somit gleich $\nu_1 b \cdot a\,du$. Setzen wir jetzt den Winkel $\nu_1 a\mu$ gleich u, so ist $= a \sin u$ und damit die Größe der von dem Element du beschriebe- Zone $2\pi a^2 \sin u\,du$. Jedes Element du des Durchschnittes $\nu_1\nu_2$ beibt eine solche Zone, und die Summe aller dieser Elementarzonen ist gesuchte Zone. Die einzelnen Elementarzonen erhalten wir, wenn wir m eben abgeleiteten Ausdrucke nach und nach für u alle Werte ein- n von $u = \nu_1 a\mu = u$ bis $u = \nu_2 a\mu = u + v$, wenn wir den Winkel $_2 - v$ setzen. Wir können diese Summe schreiben, wenn wir die Größe Zone gleich Z_n setzen

$$Z_n = \int_u^{u+v} 2\pi a^2 \sin u\,du = 2\pi a^2 \int_u^{u+v} \sin u\,du$$

erhalten dann in oft gemachter Anwendung der Regeln der mathe- schen Einleitung

$$Z_n = 2\pi a^2 \{\cos u - \cos(u + v)\}.$$

Setzen wir den Abstand der primären Welle von μ gleich b, also $a + b$, so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$r^2 = (a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b)\cos u$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b)\cos(u + v)$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r^2 = r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} = 2a(a + b)\{\cos u - \cos(u + v)\}$$

$$\cos u - \cos(u + v) = \frac{1}{2a(a + b)}\left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right),$$

so daß schließlich die gesuchte Größe der Zone wird

$$Z_n = \frac{\pi a}{a+b}\left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Die Größe der folgenden Zone erhalten wir aus diesem Ausdrucke sofort, indem wir für r einsetzen $r_1 = r + \frac{\lambda}{2}$, dieselbe wird damit

$$Z_{n+1} = \frac{\pi a}{a+b}\left(r\lambda + 3\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

und die Größe der auf diese folgenden Zone, wenn wir zu r nochmals $\frac{\lambda}{2}$ addieren, also

$$Z_{n+2} = \frac{\pi a}{a+b}\left(r\lambda + 5\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Wir sehen also, daß die Größen der aufeinander folgenden Zonen nicht gleich sind, daß aber

$$Z_{n+1} = \tfrac{1}{2}(Z_n + Z_{n+2}),$$

oder die Größe jeder einzelnen Zone ist genau gleich der halben Summe der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone. Mit diesem Satze ist unsere Aufgabe gelöst, denn es folgt nach der vorhin gemachten Bemerkung, daß die Wirkung der zweiten Zone durch die halbe erste und halbe dritte, die der vierten durch die halbe dritte und halbe fünfte Zone aufgehoben wird, und so fort über die ganze primäre Welle, soweit von derselben Bewegung nach μ kommt. Es bleibt somit nur die von der halben unmittelbar um ν liegenden Zone ausgehende Bewegung übrig; die Bewegung des Punktes μ ist also ganz dieselbe, als wenn nur in der Richtung $a\nu$ die Bewegung sich fortgepflanzt hätte, also in der Richtung des durch a und ν gelegten Radius.

Wir gelangen demnach durch die Huyghenssche Konstruktion ganz zu denselben Resultaten wie nach der im vorigen Paragraphen dargelegten Anschauung über die Fortpflanzung der Wellenbewegung; wir werden daher in spätern Fällen sowohl die eine als die andere Anschauungsweise anwenden können.

§ 136.

Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen. Ein nicht homogenes Punktsystem können wir, wie bereits erwähnt, als aus homogenen Punktsystemen zusammengesetzt ansehen. In den einzelnen Teilen des Systems wird daher die Fortpflanzung der Wellenbewegung denselben Gesetzen folgen, wie in einem homogenen System. Die Bewegung wird sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, wenn die einzelnen Systeme isotrop sind, in anders geformten, wenn sie anisotrop sind. Um demnach die Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen vollständig zu bestimmen, haben wir nur die Erscheinungen zu untersuchen, welche beim Übergange einer Wellenbewegung aus dem einen Punktsysteme in ein anderes sich darbieten.

Wenn eine Wellenbewegung sich in einem homogenen Mittel, das heißt in einem von gleichförmiger Dichte und Elastizität fortpflanzt, ist

niemals zurückkehren, vielmehr läßt sie beim Übergange auf neue n die vorhergehenden in absoluter Ruhe zurück. Ebenso wie eine wenn sie auf eine zweite von gleicher Masse stößt, an diese ihre eschwindigkeit abgibt und nach dem Stoße in Ruhe zurückbleibt, trägt auch jeder schwingende Punkt auf den ihm an Größe genau folgenden seine ganze Geschwindigkeit. In der Ruhelage anten, verläßt er dieselbe daher nicht mehr, wenn nicht ein neuer von dem bewegenden Mittelpunkt her ihn trifft. Die Wellenbewegung t daher in einem homogenen Punktsystem einfach voran, ohne je kehren.

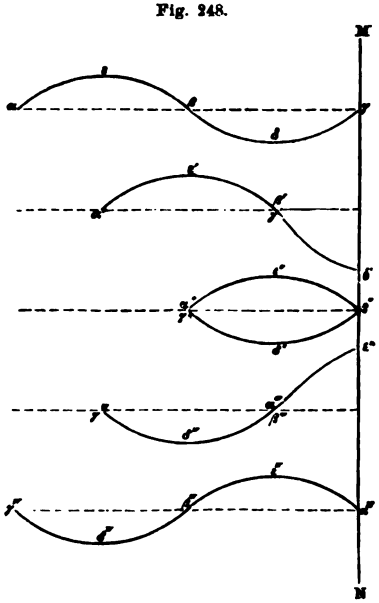
ders jedoch, wenn eine Wellenbewegung die Grenze zweier ver- er Punktsysteme trifft. Wenn eine Kugel auf eine zweite stößt, mehr oder weniger Masse als die erste besitzt, so bleibt sie in Fällen nach dem Stoße noch in Bewegung. Hat die zweite Kugel asse als die erste, so wird die erste Kugel zurückgeworfen, die ge- Kugel bewegt sich vorwärts, die stoßende ihrer frühern Bewegung n zurück. Hat die zweite Kugel eine geringere Masse, so fährt die e Kugel fort, sich in gleichem Sinne wie vorhin zu bewegen. So auch bei der Wellenbewegung sein, wo die Bewegung der einzelnen Folge der Einwirkung der benachbarten Punkte ist. Kommt eine ng an der Grenze zweier Mittel an, so wird die Bewegung in das Mittel übergehen und dort eine Wellenbewegung erzeugen, die sich n für dieses System gültigen Gesetzen fortpflanzt. Zugleich bleiben ch die in der letzten Schicht des ersten Mittels liegenden Punkte gung.

das zweite System weniger dicht, so werden die in der Grenzschicht n Punkte einfach ihre Bewegung fortsetzen, nur wird die Amplitude enden Bewegung kleiner sein. Dadurch werden diese Punkte Mittel- neuer Wellen, welche sich rückwärts im ersten Systeme ausbreiten, die Bewegungen der Mittelpunkte dieser neuen Wellen gerade so , als wären sie Folge neuer Impulse von ankommenden Wellen, en auch die von der Grenze zurückkehrenden Wellen einfach die ung der ankommenden Wellen sein, d. h. die Phasen der Schwin- in den zurückkehrenden Wellen sind in irgend einem Abstande von nze ganz dieselben, als wenn sich die Bewegung in ihrer ursprüng- Richtung um eine gleiche Strecke weiter fortgepflanzt hätte.

elle $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 248) eine an der Grenze zweier Mittel, von denen ite Mittel weniger dicht ist als das erste, ankommende Welle vor. nkt γ wird infolge der einfallenden Welle bewegt und nach $\frac{1}{4}$ Un- sich in δ' befinden. Da derselbe aber an die weiter liegenden des zweiten Mittels nur einen Teil seiner Geschwindigkeit abgibt, lt er einen Teil der an ihn übertragenen Bewegung bei. Dieses dasselbe, als wenn er seine ganze Bewegung abgäbe, zugleich aber euen Impuls in derselben Richtung, in der er sich bewegt, erhalten eshalb pflanzt sich in dem Augenblicke, wo sich der Punkt γ be- ie nach unten gerichtete Bewegung, das Wellental, auch nach rück- ort. Da sich nun die Bewegung in der Punktreihe nach rückwärts selben Geschwindigkeit fortpflanzt, mit der sie ankommt, ist die rte Bewegung nach $\frac{1}{4}$ Undulationszeit bis γ' vorgeschritten, so daß

die vordere Hälfte des reflektierten Tales und die hintere des ankommenden Tales in $\beta'\delta'$ oder $\gamma'\delta'$ zusammenfallen; die Tiefe des an der Grenze entstehenden Wellentales ist also die Summe der Tiefen des ankommenden und des reflektierten Tales. Weiter nach $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer ist γ wieder in seiner Ruhelage angekommen, in β'', und der Wellenberg $\alpha\varepsilon\beta$ ist bis an die Grenze $\alpha''\varepsilon''\beta''$ vorgeschritten. Das reflektierte Tal hat sich aber ebenfalls um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge nach rückwärts fortgepflanzt und befindet sich in $\gamma''\delta''\beta''$. An der Grenze wird daher für einen Augenblick die Bewegung gestört, indem durch Interferenz der ankommenden und reflektierten Welle die zwischen α'' und β'' befindlichen Punkte nur durch die Differenz der entgegengesetzten Impulse bewegt wird.

Fig. 248.



Nach einer weitern $\frac{1}{4}$ Schwingungszeit ist das reflektierte Tal bis $\gamma'''\delta'''\beta'''$ fortgeschritten, der in der Grenze befindliche Punkt hat infolge des eingetroffenen Wellenberges sich nach der entgegengesetzten Seite, nach ε''' bewegt. Wieder aber hat sich die Bewegung dieses Punktes an die rückwärts liegenden übertragen, da er wegen der geringern Dichtigkeit des zweiten Mittels nicht einen so großen Teil seiner Geschwindigkeit an die folgenden Punkte abgegeben hat. Die Höhe des Wellenberges an der Grenze ist daher viel bedeutender als diejenige in den fortschreitenden Wellen, und von der Grenze aus pflanzt sich dem vorher reflektierten Tale folgend ein Wellenberg fort. Nach einer weitern $\frac{1}{4}$ Undulation befindet sich das reflektierte Tal in $\gamma^{IV}\delta^{IV}\beta^{IV}$ und ihm folgend der vollständig reflektierte Berg $\beta^{IV}\varepsilon^{IV}\alpha^{IV}$.

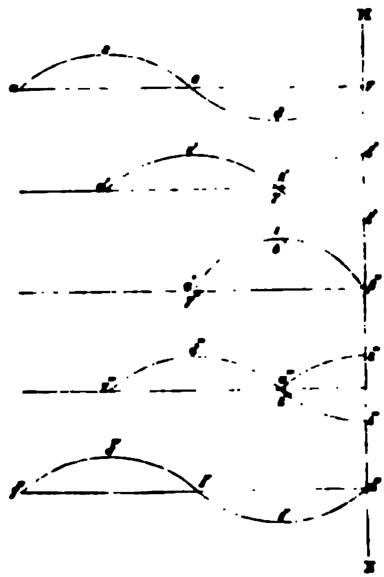
Gerade also wie in der ankommenden Wellenbewegung das Wellental dem Wellenberge vorausgeht, so auch im reflektierten, die Bewegung ist in der reflektierten Welle dieselbe, wie wenn sie ungestört, nur mit kleinerer Amplitude fortgeschritten wäre. Gerade wie das Wellental fortschreitend in der nächsten Strecke der Punktreihe ein Wellental und der Wellenberg einen Wellenberg erzeugt, so erzeugt auch bei der Reflexion das ankommende Wellental ein rückkehrendes Wellental und der ankommende Wellenberg einen zurückkehrenden Berg.

Anders verhält es sich, wenn das zweite Mittel eine größere Dichtigkeit besitzt. Die bei der longitudinalen Schwingung sich gegen das zweite Mittel bewegenden Punkte werden zurückgestoßen, und die sich von der Grenze entfernenden zurückgezogen, in jedem Falle also wird die ankommende Bewegung in die entgegengesetzte verwandelt; so auch bei der transversalen Bewegung; die sich in dem einen oder andern Sinne von der Gleichgewichtslage entfernenden Punkte werden von den folgenden

ı des zweiten Mittels stärker zurückgezogen, als wenn die folgen-
ichten gleiche Dichtigkeit hätten. Die Wirkung des dichtern Mit-
also dieselbe, als wenn die in der Grenze befindlichen Punkte,
e Bewegung gehemmt wird, einen ihrer Bewegung entgegengesetzten
erhalten hätten. Dadurch werden sie Mittelpunkte einer neuen,
Augenblick, wo die erste ankommt, beginnenden Bewegung, welche
htung nach der ankommenden entgegengesetzt ist. Diese der an-
nden entgegengesetzte Bewegung pflanzt sich in dem ersten Punkt-
rückwärts fort.

ellt demnach $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 249) eine an der Grenze zweier Mittel,
weites rechts von MN dichter ist, ankommende Welle dar, so wird
ommende Wellental als Wellen-
flektiert; nach der Zeit von $\frac{1}{4}$
gung ist daher die Stellung der
n β' und der Grenze gelegenen
durch die Differenz der an-
nden und reflektierten Welle
nt, das Wellental hat eine viel
Tiefe, als es bei ungehinder-
tpflanzung der Bewegung haben
Nach einer folgenden $\frac{1}{4}$ Schwin-
eit ist der aus dem ankommen-
d reflektierte Berg in die Stel-
$''\delta''\beta''$ fortgepflanzt, und ebenso
Wellenberg $\alpha\varepsilon\gamma$ bis $\alpha''\varepsilon''\beta''$ vor-
, an der Wand bildet sich ein
iden Bergen resultierender stär-
Wellenberg. In der folgenden
ckt der reflektierte Berg nach
$'''$, der ankommende ist zur Hälfte
$'''$, zur Hälfte als Tal reflektiert
an der Wand besteht ein Berg
ringerer Höhe. Nach weiterm
f einer $\frac{1}{4}$ Undulationszeit ist
lich der aus dem Wellental reflektierte Wellenberg nach $\gamma^{IV}\delta^{IV}\beta^{IV}$
ickt und der zuletzt an der Grenze angekommene Wellenberg ist
llental reflektiert und hat die Lage $\beta^{IV}\varepsilon^{IV}\alpha^{IV}$.

Fig. 249



ährend also bei der ankommenden Bewegung das Wellental dem
berge vorausging, geht in der reflektierten umgekehrt der Wellen-
em Wellentale voraus. Die reflektierte Bewegung hat also mit der
menden entgegengesetzte Phasen; bei ungestörter Fortpflanzung wäre
kommende Tal in der nächsten Strecke wieder Anlaß zur Bildung
Tales geworden, hier hat es einen Berg hervorgerufen. Durch die
on ist also der reflektierte Strahl gegen den einfallenden um eine
Wellenlänge verschoben.

ie in beiden Fällen reflektierten Bewegungen sind demnach ebenfalls
chen Abständen von der Grenze in entgegengesetzter Phase, wo in
rsten das Wellental ist, ist in dem zweiten der Wellenberg und um-
t.

Es folgt also, wenn eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Systeme ankommt, in denen der Koeffizient $\sqrt{a\frac{e}{d}}$ verschiedene Werte hat, so bewirkt sie immer, daß von der Grenzstelle aus sich zwei Wellensysteme weiter bewegen, eine in das erste Mittel zurück, eine reflektierte oder zurückgeworfene Welle, und eine zweite, welche in dem zweiten Mittel sich weiter bewegt.

Nehmen wir an, die beiden Punktsysteme seien isotrop, so erhält man mit Hilfe der Huyghensschen Konstruktion leicht die fortschreitende und zurückgeworfene Welle. Beginnen wir mit der letztern und setzen wir voraus, daß eine kugelförmige Welle an der ebenen Grenze zweier Mittel antreffe.

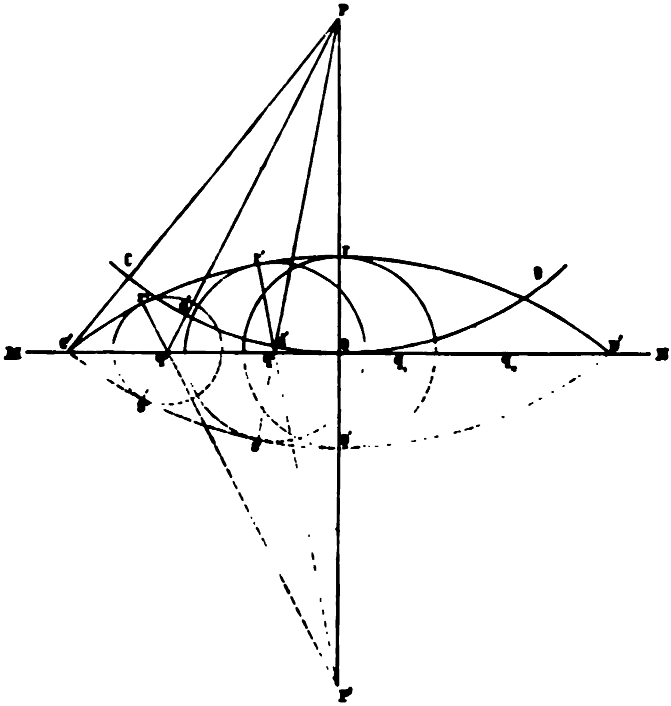
Es sei P (Fig. 250) der Mittelpunkt der Welle im ersten Mittel, CD sei ein Durchschnitt der Welle und MN ein Durchschnitt der das erste Mittel begrenzenden Ebene. Ferner sei PQ senkrecht zu MN, also Q der erste Punkt, welcher von der Wellenbewegung getroffen wird. Jeder Punkt der Grenze wird ein Mittelpunkt einer neuen in das erste Mittel zurückkehrenden Welle, sowie er von der ankommenden Bewegung getroffen wird. Es wird sich demnach zunächst von dem Punkte Q eine Bewegung in das erste Mittel ausbreiten. Da nun, wie wir sahen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem elastischen Punktsystem nur abhängt von dem Quotienten $\sqrt{a\frac{e}{d}}$, so verbreitet sich die zurückgeworfene Welle mit eben derselben Geschwindigkeit, mit welcher sich die einfallende Welle verbreitet; in der Zeit also, in welcher von den Punkten D oder C, von denen wir der Symmetrie halber annehmen, daß sie gleichweit von Q entfernt sind, sich die schwingende Bewegung bis D' oder C' fortgepflanzt hat, wo also von diesen Punkten aus die Wellenbewegung reflektiert zu werden beginnt, pflanzt sich von Q aus die Bewegung bis zu einer Halbkugel fort, deren Radius $Qr = CC'$ ist. Die neben Q liegenden Punkte der Grenzschicht q', q'', $q_{,}$, $q_{,,}$, werden immer später von der Wellenbewegung getroffen, und zwar so viel später, als die Bewegung der ankommenden Welle braucht, um die Strecke $d'q'$, $d''q''$ zu durchlaufen. In derselben Zeit daher, in welcher sich die Bewegung von Q bis zu einer Halbkugel vom Radius Qr fortpflanzt, verbreitet sie sich von q' bis zu einer Halbkugel vom Radius $q'r' = Qr - q'd'$, von q'' bis zu einer Halbkugel vom Radius $q''r'' = Qr - q''d''$ und so von allen übrigen Punkten bis zu einer Halbkugel, deren Radius um die Länge kleiner ist als Qr, welche die Wellenbewegung noch hat durchlaufen müssen, um den betreffenden Punkt in Schwingungen zu versetzen.

Die Grenze, bis zu der sich demnach die Wellenbewegung in dem ersten Mittel rückwärts ausgebreitet hat, ist die Fläche, welche alle diese einzelnen Kugeln berührend umhüllt. Es ist leicht ersichtlich, daß diese Fläche $C'r''r'rD'$ eine Kugelfläche sein muß, deren Mittelpunkt P' ebensoweit hinter MN liegt, als der Punkt P, von welchem die ankommende Welle ausging, vor MN liegt. Denn denken wir uns, daß die Welle ungehindert hätte fortschreiten können, so geben die andern Hälften der von uns um Q, q', q'' ... beschriebenen Kugeln, nach der Huyghensschen Konstruktion, die Wellenfläche $C'Q'D'$, bis zu der sich die Bewegung in derselben Zeit fortgepflanzt hätte, in der sie in der Richtung PC sich bis

rtpflanzte. Die diese Kugeln nach der einen Seite einhüllende Fläche r, wie wir sahen, eine Kugel vom Radius $PC' = PQ' = PD'$. Die , welche diese Kugeln von der andern Seite einhüllt, muß daher ugel von demselben Radius sein, die ihre Konvexität jedoch nach der ngesetzten Seite richtet, deren Mittelpunkt also in P' liegt, so daß $P'r$, oder da $Qr = QQ'$, $P'Q = PQ$ ist.

'on einer ebenen Grenze zweier Punktsysteme wird demnach eine an- nde Welle gerade so reflektiert, als ginge sie von einem Mittelpunkte 'elcher ebenso weit hinter dieser Grenze liegt, wie der Mittelpunkt ikommenden Welle vor der Grenze.

Fig. 250.



lieser Satz läßt sich in etwas anderer Form aussprechen, in welcher manchen Fällen leichter angewandt wird.

us der Gleichheit $P'Q = PQ$ folgt, daß die Dreiecke $P'C'Q$ und $P'q''Q$ und $Pq''Q$, $P'q'Q$ und $Pq'Q$ usw. sich decken und daraus, e Winkel

$$P'q''Q = Pq''Q,$$
$$P'q'Q = Pq'Q \text{ usw.},$$

a die Winkel $P'q''Q = r''q''C''$ und $P'q'Q = r'q'C'$ sind als Scheitel- , daß die Winkel

$$Pq''Q = r''q''C''$$
$$Pq'Q = r'q'C',$$

oder die Winkel, unter welchen die Radien der ankommenden und reflektierten Wellen die Grenzfläche schneiden, einander gleich sind. Nach unserer ersten Anschauung von der Art der Fortpflanzung der Wellenbewegung in einem Punktsystem waren die Radien der Wellenfläche die einzelnen Punktreihen, in welchen sich die Bewegung fortpflanzte. Nennen wir mit Rücksicht darauf die Radien die Wellenstrahlen, so können wir obigen Satz auch so aussprechen, daß bei der Reflexion einer Wellenbewegung die reflektierten Strahlen und die ankommenden mit der reflektierenden Fläche gleiche Winkel bilden.

Man bezeichnet gewöhnlich die Vertikale, welche in dem Punkte der Trennungsfläche beider Mittel errichtet wird, als das Einfallslot und den Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben bildet, als Einfallswinkel, den hingegen, welchen der reflektierte Strahl mit ihm einschließt, als Reflexionswinkel.

Sind nun die Winkel, welche der ankommende und der reflektierte Strahl mit der reflektierenden Fläche einschließen, einander gleich, so sind es auch diejenigen, welche sie mit dem Einfallslote bilden, woraus dann folgt, daß eine Wellenbewegung so reflektiert wird, daß der einfallende und reflektierte Strahl mit dem Einfallslot in einer Ebene liegen, und daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

Diese Form unseres Satzes ist besonders bequem, um die Gesetze der Reflexion an krummen Flächen zu erhalten. Wir können diese als eine stetige Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, deren Normalen nicht wie bei einer Ebene einander parallel, sondern immer anders gerichtet sind. Für jede noch so kleine Ebene gilt unser Reflexionsgesetz; kennt man daher das Gesetz, nach welchem die Normalen der aufeinander folgenden kleinen Ebenen geneigt sind, so hat man darin zugleich an allen Punkten die Richtung, nach welcher ein einfallender Strahl und somit eine ankommende Wellenbewegung reflektiert wird.

Ist z. B. die Grenze zweier Mittel eine Kugelfläche, so fallen die in jedem Punkte der Fläche errichteten Senkrechten mit den Radien der Kugel zusammen. Eine an der Grenze ankommende Wellenbewegung wird daher so zurückgeworfen, daß die an jedem einzelnen Punkte reflektierten Strahlen und die ankommenden mit den Radien der Grenzfläche gleiche Winkel bilden. Kommt die Wellenbewegung aus dem Mittelpunkte der Kugel, also in der Richtung der Radien an, so wird jeder Strahl nach dem Mittelpunkte zurückgeworfen, die Bewegung kehrt in den Mittelpunkt der Kugel zurück.

§ 137.

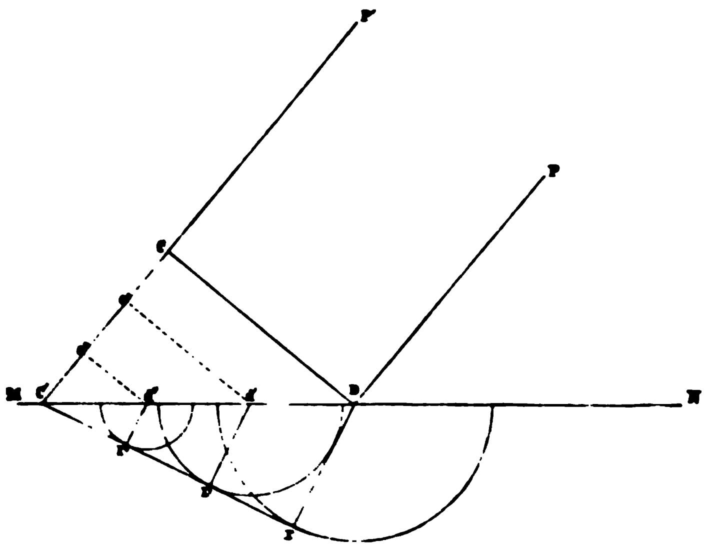
Brechung der Wellen. Von der Grenze zweier Punktsysteme pflanzt sich, wie wir sahen, außer in das erste System zurück, auch eine Wellenbewegung in das zweite System fort. Jeder Punkt der Grenzschicht wird, sobald als die ankommende Bewegung ihn trifft, Mittelpunkt einer Welle, die sich in das zweite System fortpflanzt, mit einer andern Geschwindigkeit jedoch, als sich die Bewegung in dem ersten Systeme fortpflanzt.

Ist das zweite System dichter als das erste, d. h. ist der Quotient [illegible] kleiner für das zweite System als für das erste, so pflanzt sich die B[illegible]

gung im zweiten Mittel langsamer, ist derselbe größer, so pflanzt sich selbe rascher fort.

Sei CD (Fig. 251) ein sehr kleines Stück einer Wellenfläche, welches dem ersten System sich in der Richtung PD gegen die Grenze MN sier Mittel bewegt. Nehmen wir ferner an, daß der Mittelpunkt der kommenden Welle, von der CD ein Stück ist, so weit entfernt sei, daß r CD als eine zur Ebene NDP senkrechte Ebene und die Wellenstrahlen D und $P'C$ als parallel ansehen können. In dem Augenblicke, in welchem s Wellenstück CD bei D die Grenze MN berührt, verbreitet sich von D s eine Welle in dem zweiten Systeme.

Fig. 251.



Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ersten System v und dem zweiten v', so verhalten sich die Strecken, durch welche sich die ellenbewegung in gleichen Zeiten fortpflanzt, wie v zu v'.

Der Radius Dr der Kugel, über welche sich die Wellenbewegung im eiten Mittel ausbreitet, während dieselbe im ersten sich von C bis C' rtpflanzt, ist daher

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v} \cdot$$

Von den zwischen D und C' gelegenen Punkten verbreiten sich ebenlls Wellenbewegungen in das zweite Mittel, aber um so später, als sie bst von der fortschreitenden Wellenbewegung getroffen werden. Von gend einem Punkte d' beginnt sich die Bewegung erst zu verbreiten, wenn e Bewegung im ersten Mittel bis $c'd'$ fortgeschritten ist. Hat sich die wegung im ersten Mittel bis C' fortgepflanzt, so hat sich von d' dieselbe zweiten Mittel über eine Kugel ausgebreitet, deren Radius ϱ gleich ist

$$\varrho = c'C' \cdot \frac{v'}{v} \cdot$$

Die Grenze, bis zu der sich die Bewegung im zweiten Mittel fortgepflanzt hat, wenn sie im ersten Punktsystem bis C' fortgeschritten ist, ist dann die Fläche, welche alle Kugeln, die um die verschiedenen Punkte d beschrieben sind, berührt.

Diese Fläche erhalten wir, wenn wir durch C' eine Tangente an den um D beschriebenen Halbkreis ziehen und durch diese eine zur Ebene $C'Dr$ senkrechte Ebene legen. Denn diese Ebene berührt nicht nur die um D mit dem Radius Dr beschriebene Kugel, sondern auch sämtliche mit den betreffenden Radien um die Punkte d beschriebenen Kugeln. Denn ziehen wir von d' aus $d'r'$ senkrecht zu $C'r$, so sind die Dreiecke $C'rD$ und $C'r'd'$ ähnlich, somit

$$d'r' : Dr = C'd' : C'D.$$

Ebenso sind aber auch die Dreiecke CDC' und $c'd'C'$ ähnlich und somit

$$C'd' : C'D = c'C' : CC'.$$

Da nun ferner

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v},$$

so ist

$$d'r' : CC' \cdot \frac{v'}{v} = c'C' : CC',$$

oder

$$d'r' = C'c' \cdot \frac{v'}{v},$$

das heißt die von d' auf $C'r$ herabgelassene Senkrechte ist der Radius der Kugel, die mit dem Radius ϱ um d' beschrieben ist, oder $C'r$ ist Tangente an dem Durchschnitt der Kugel mit der Ebene NDP und somit die durch Cr gelegte Ebene Tangentialebene an die um d' beschriebene Kugel. Ebenso gilt es für alle um die Punkte d' beschriebenen Kugeln.

Bezeichnen wir nun die Winkel CDC' und $DC'r$, welche die ankommende und die in das zweite System übergegangene Welle mit der Grenzfläche bilden, mit φ und φ', so haben wir

$$\sin\varphi = \frac{CC'}{C'D},$$

$$\sin\varphi' = \frac{Dr}{C'D} = \frac{\frac{v'}{v} \cdot CC'}{C'D},$$

und daraus

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{v}{v'}.$$

Der Winkel, welchen die in das zweite Mittel übergegangene Welle mit der Grenzebene bildet, ist also ein anderer als derjenige, welchen die ankommende Welle mit der Grenzfläche bildet, oder was dasselbe ist, die in das zweite Mittel übergegangenen Wellenstrahlen bilden mit dem Einfallslote andere Winkel als die ankommenden Strahlen. Da aber das Verhältnis $\frac{v}{v'}$ für zwei Mittel konstant ist, so folgt, daß die ankommende Welle unter einem Winkel ankommen kann, unter welchem sie will, sie

bewegt sich stets unter einem solchen Winkel gegen die Grenzebene weiter, daß das Verhältnis der Sinus des Winkels, unter welchem sie ankommt, und des Winkels, unter dem sie weiter geht, konstant ist. Zugleich sieht man, daß der einfallende und gebrochene Wellenstrahl und das Einfallslot in derselben Ebene liegen.

Jede an der Grenzebene ankommende kugelförmige Welle können wir als eine Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, die alle verschieden gegen die Grenzfläche geneigt sind, deren Neigung gegen die Grenzfläche daher bestimmt wird durch den Winkel, welche die zu ihnen gehörenden Wellenstrahlen, die einzelnen Radien, mit dem Einfallslot bilden. Mit Hilfe des obigen Satzes ist es leicht, die fortgepflanzte Welle im zweiten Punktsystem zu konstruieren.

Wir erhalten als unmittelbare Folge aus unserem Satze, daß beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Punktsystem in ein zweites, für welches der Quotient $\sqrt{a\frac{e}{d}}$ kleiner ist als für das erste, der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslote bildet, kleiner ist als der Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben einschließt. Ist dagegen dieser Quotient größer für das zweite als für das erste Mittel, so ist der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslote bildet, größer. Beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Mittel in ein zweites werden daher die einzelnen Wellenstrahlen stets gebrochen; beim Übergange in ein Mittel von größerer Dichtigkeit werden sie zum Einfallslote hingebrochen, beim Übergange in ein Mittel von geringerer Dichtigkeit werden die Strahlen vom Einfallslote fortgebrochen.

Jede krumme Fläche können wir, wie schon bemerkt wurde, als eine Reihenfolge unendlich kleiner Ebenen betrachten, welche in steter Folge gegeneinander geneigt sind. Für krumme Begrenzungen zweier Mittel muß daher das Brechungsgesetz dasselbe sein; um den Weg der einzelnen Strahlen zu bestimmen, muß man aber das Gesetz kennen, nach welchem die einzelnen, unendlich kleinen Ebenen oder deren Einfallslote gegeneinander geneigt sind.[1])

1) Die in diesem Kapitel vorgetragenen Sätze finden sich vorzugsweise in den Abhandlungen von *Fresnel* und andern über die Undulationstheorie des Lichtes zuerst in ähnlicher Form entwickelt. Es gilt das besonders von der Ableitung der Gleichungen für die schwingende Bewegung § 125 bis § 129. Dieselben befinden sich in:

Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumiere. Mémoires de l'Acad. de France. 5. 1826. Poggend. Ann. **30**. p. 100 1836 Oeuvres complètes. T. I.

Die Sätze über Interferenz der Wellen, § 130, in derselben Abhandlung von *Fresnel* und in dem Buche von *Schwerd*, die Beugungserscheinungen des Lichtes. Mannheim 1835.

Die stehenden Wellen durch Interferenz entgegengesetzter Wellenzüge leitet *Fresnel* ähnlich ab in seiner Abhandlung über die Doppelbrechung des Lichtes: Mémoires de l'Acad. de France. 7. p. 45. 1827. Poggend. Ann **23**. p. 372 u. p. 494 1831. Oeuvres complètes. T. II. p. 479 ff.

Auf die elliptischen Schwingungen machte zuerst aufmerksam *Fresnel* in seiner Abhandlung über Reflexion des polarisierten Lichtes: Annales de chim. et de phys. **46**. 1830 Poggend. Ann. **22**. p 68 u. p. 90. 1831. *Airy*, Über die Doppelbrechung im Bergkristall im 4. Bande der Transactions of the Cambridge

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung fester Körper.

§ 138.

Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper infolge der Elastizität. Die im vorigen Kapitel aus den früher erkannten Gesetzen über die Wirkung von Kräften theoretisch abgeleiteten Bewegungserscheinungen können wir in der mannigfachsten Weise in den Körpern hervorbringen. Alle Körper bestehen nach den Entwickelungen des § 47 aus kleinen Teilen, welche durch anziehende und abstoßende zwischen ihnen tätige Kräfte entweder allein wie bei den festen Körpern oder mit Hilfe äußerer Kräfte wie bei den flüssigen und gasförmigen Körpern im Gleichgewicht gehalten werden.

Durch eine Änderung der auf die Körper wirkenden Kräfte wird stets auch eine Änderung dieses Gleichgewichtszustandes herbeigeführt; es treten Gestaltsänderungen der festen Körper oder Bewegungen in den flüssigen oder gasförmigen Körpern hervor, welche wir in dem zweiten Abschnitte ausführlich betrachtet haben.

Beschränken wir uns zunächst auf die festen Körper, so sahen wir, wie Stäbe durch angehängte Gewichte verlängert, oder durch Druck verkürzt wurden, wie durch Drehung um eine im Innern derselben liegende Achse die einzelnen Schichten der Stäbe gegeneinander verschoben wurden, oder wie durch Biegung denselben eine andere Gestalt gegeben werden konnte.

Zugleich sahen wir aber stets bei der Änderung des Gleichgewichtszustandes eines Körpers eine Reaktion auftreten, die uns zeigte, daß infolge dieser Änderung eine gewisse Spannung zwischen den Molekülen des Körpers auftritt, durch welche sie sich bestreben, in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Diese Rückkehr trat ein, wenn die Änderung in den wirkenden Kräften aufhörte; überschritt die Verlängerung oder Verkürzung eines Stabes infolge der angebrachten Gewichte nicht die Elastizitätsgrenze, so kehrte der Stab nach Abnahme der Gewichte zu seiner ursprünglichen Länge zurück, war die Biegung nicht so stark, daß die Teilchen eine neue

---

Philosophical society. Poggend. Ann. 28. p. 204. 1831. Die von uns gegebene Ableitung ist im wesentlichen die von *Neumann* in der Abhandlung über die Reflexion an Metallen. Poggend. Ann. 26. p. 89. 1832. Man sehe darüber auch *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853. Die Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge ist besonders von *Lissajous* studiert und für akustische Zwecke nutzbar gemacht. Annales de chim. et de phys. 51. (3) p. 147. 1857.

Die Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen und das Huyghenssche Prinzip ist zuerst von *Huyghens* in seinem Werke Traité de la lumière, Leiden 1690, entwickelt, ebenso die Ableitung des Reflexions- und Refraktions-Gesetzes. Vollständiger von *Fresnel* in der erwähnten Abhandlung über die Beugung des Lichtes und in einem Zusatz derselben: Erklärung der Refraktion des Lichtes nach der Undulationstheorie. Auf den Unterschied der Reflexion an dichtern und dünnern Systemen machte zuerst *Thomas Young* aufmerksam. On the theory of light and colours. Philosoph. Transact. of the Royal Society. 92. 1802.

richgewichtslage angenommen hatten, so nahm der Stab seine ursprüngbe Gestalt wieder an.

Vorzüglich bei dieser Rückkehr in den Gleichgewichtszustand treten n aber Bewegungen auf, welche wir damals, wo wir unser Augenmerk r auf den endlichen Zustand der Körper richteten, außer acht ließen, ren Natur zu erkennen uns aber nach dem vorigen leicht ist.

Wenn wir einen Stab von gegebener Länge und gegebenem Querschnitt rch ein Gewicht verlängerten, so ergab der Versuch, daß seine Vergerung proportional war der wirksamen Kraft. Diese Verlängerung war endliche Zustand, in welchen der Körper durch die dauernde Wirkung Kraft übergeführt wurde, er trat ein, wenn die durch die Entfernung Teile voneinander auftretende Elastizitätskraft dem ziehenden Gewichte ich wurde. Die Verlängerung ist eine Entfernung der einzelnen Schichten s Stabes voneinander, deshalb sind die Entfernungen den Verlängerungen oportional, das heißt, bei doppelter, dreifacher, überhaupt n-facher Vergerung des Stabes haben sich auch die einzelnen Schichten des Stabes n die doppelte, dreifache, überhaupt n-fache Größe voneinander, oder was selbe ist, von ihrer Gleichgewichtslage entfernt.

Da nun die Verlängerungen des Stabes den spannenden Gewichten oportional sind, und da bei dem endlichen Zustande die Kräfte, mit denen e einzelnen Schichten sich rückwärts anziehen, den spannenden Gewichten Größe genau gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind, so lgt, daß die Kraft, mit der irgend eine Schicht des Stabes, wenn sie ßerhalb der Gleichgewichtslage sich befindet, gegen diese hingezogen wird, m Abstande derselben von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Bei der Rückkehr jeder Schicht in ihre Gleichgewichtslage ist daher e Bewegung derselben eine beschleunigte, in derselben angekommen, betzt sie eine gewisse Geschwindigkeit, vermöge welcher sie sich über die leichgewichtslage hinaus bewegt. Wenn sie dieselbe überschritten hat, irken aber die Kräfte in entgegengesetztem Sinne auf sie ein und verchten so allmählich die der Schicht vorher erteilte Geschwindigkeit. Dann er tritt, da jetzt wieder dieselben Elastizitätskräfte auf die Schicht einirken, eine rückgängige Bewegung ein, bei der sich dasselbe wiederholt: e Schicht erhält also eine schwingende Bewegung. Da das Gesetz, nach elchem die wirkenden Kräfte mit der Entfernung der Schicht von der leichgewichtslage sich ändern, dasselbe ist, welches wir der Ableitung der hwingenden Bewegung von Punkten zugrunde legten, so können wir e dort erhaltenen Resultate unmittelbar auf die so entstehenden Schwinngen der festen Körper übertragen.

Ganz das Gleiche gilt von den Bewegungen, welche ein Körper, der rch Biegung oder Torsion aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, i der Rückkehr in dieselbe vollführt; auch in diesem Falle ist die Biegung d Torsion der wirkenden Kraft, also die bei der Biegung oder Torsion ftretende elastische Kraft dem Abstande der einzelnen Teile von der leichgewichtslage proportional. Bei der Rückkehr in dieselbe muß deneh der Körper schwingende Bewegungen vollführen, welche den vorhin twickelten Gesetzen folgen.

§ 139.

Longitudinale Schwingungen der Stäbe. Wenn man einen Stab in seiner Mitte oder an einem oder beiden Enden festhält und ihn an einem Ende rasch mit einem Hammer schlägt, oder seiner Länge nach mit der Hand, nachdem sie mit etwas Kolophonium eingerieben ist, oder mit einem nassen Tuche stark reibt, so geraten die Teile des Stabes in longitudinale Schwingungen, das heißt sie bewegen sich in der Richtung der Längsachse des Stabes hin und her. Bei dieser Bewegung ändert der Stab seine äußere Gestalt nicht merklich, sondern es bilden sich in seinem Innern nur abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen, die sich in der § 128 dargestellten Weise durch den Stab verbreiten, in einem begrenzten Stabe an der Grenze reflektiert werden und dadurch zu stehenden Schwingungen des Stabes Anlaß geben.

Die longitudinalen Schwingungen eines Stabes sind nicht unmittelbar sichtbar; indes hat Savart[1]) sie auf folgende Weise sichtbar gemacht. Er befestigte Glas- oder Metallstäbe von verschiedenen Dimensionen auf einer 80^{kg} schweren Bleimasse. Ein Sphärometer mit horizontaler Schraube wurde mit dem einen Ende des Stabes zur Berührung gebracht und die Stellung der Schraube abgelesen, dann wurde die Schraube zurückgedreht und der Stab in Schwingungen versetzt. Darauf wurde die Schraube dem Stabe wieder vorsichtig genähert und bei einer bestimmten Stellung zeigte sich, daß die Schraube von dem Stabe in bestimmten Zwischenräumen gestoßen wurde, ein Beweis, daß der Stab sich in seiner Längsrichtung abwechselnd ausdehnte und zusammenzog.

Es bedarf übrigens nicht einmal solcher Methoden, um die longitudinalen Schwingungen wahrnehmbar zu machen; sie sind am deutlichsten zu erkennen durch den Ton, welchen sie hervorbringen. Diesen können wir jedoch erst im nächsten Abschnitte betrachten, in welchem wir auch die meisten der sofort abzuleitenden Gesetze experimentell nachweisen werden.

Über die Fortpflanzung der Bewegung in einem unbegrenzten Stabe haben wir hier nichts hinzuzufügen, sie muß nach den Gesetzen erfolgen, welche wir § 128 ff. ganz allgemein über die Fortpflanzung schwingender Bewegungen in Punktreihen abgeleitet haben. Zwar haben wir es hier nicht mit einfachen Punktreihen zu tun, indes kann man die dort abgeleiteten Gesetze deshalb einfach übertragen, weil alle Punkte einer zur Längsachse parallelen Schicht dieselbe Bewegung haben, wir also die Stäbe als ein Bündel paralleler Punktreihen betrachten können.

Auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem solchen Stabe muß der § 129 entwickelte Ausdruck gelten

$$c = \sqrt{a\frac{e}{d}}.$$

Setzen wir für e, die Elastizität, den Elastizitätsmodulus E der betreffenden Substanz und für d die Masse der Längeneinheit des Stabes von der Einheit des Querschnittes ein, auf welche sich auch der Elastizitätskoeffizient bezieht, so ist nach unserer Ableitung des § 128 die konstante

1) *Savart* in Annales de chim. et de phys. 65. p. 337. 1837.

…öße $\sqrt{a} = 1$ zu setzen, da die dort von uns mit e bezeichnete Größe, … bei longitudinaler Bewegung der Punkte der Reihe geweckte Elastizität, den Elastizitätskoeffizienten des betreffenden Materials bedeutet. Für …en Stab vom Querschnitt q wird demnach[1])

$$c = \sqrt{\frac{Eq}{dq}} = \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Da somit aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung …r Querschnitt verschwindet, so folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen von dem Querschnitte der Stäbe, in denen … stattfinden, unabhängig ist.

Daß in der Tat die rechte Seite der Gleichung eine Geschwindigkeit …rstellt, ergibt sich auch aus der Bestimmung der Dimension des Ausdruckes. Wir haben für die Elastizitätskoeffizienten

$$E = z_1 [\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}],$$

… die Dichtigkeit

$$d = z_2 [\mu \lambda^{-3}],$$

…mit

$$\frac{E}{d} = z [\lambda^2 \tau^{-2}],$$

…er die Quadratwurzel des Ausdruckes ist eine Geschwindigkeit.

Man findet häufig den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit …ngitudinaler Schwingungen in etwas anderer Form. Setzen wir für E …inen Wert nach § 49 in den Krafteinheiten des absoluten Maßes, so ist

$$E = g \frac{P}{q\delta},$$

…nn P das an den Stab vom Querschnitte q gehängte Gewicht bedeutet, …lches demselben die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge ausgedrückte …rlängerung δ erteilt. Nehmen wir an, das Gewicht P sei das eines …abes des gleichen Materials vom Querschnitt q und der Länge l, so ist

$$P = q d l,$$

…mit

$$E = g \frac{qd}{q\delta} l = g \frac{d}{\delta} l,$$

…nd

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{gl}{\delta}}.$$

Setzen wir schließlich die Länge l gleich der Längeneinheit und be…ichnen mit δ_1 die Verlängerung des Stabes durch ein Gewicht P, welches …eich dem eines Stabes von dem gleichen Material, dem gleichen Quer…hnitt q und der Längeneinheit ist, so ist

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta_1}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in einem

1) Man sehe auch *Poisson* in Mémoires de l'Acad. Royale de France. 8 … 441 1829

Stabe ist demnach gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel aus der Beschleunigung bei dem freien Fall und der Quadratwurzel aus der in Bruchteilen der Stablänge gegebenen Verlängerung, welche er durch das Gewicht eines Stabes gleichen Materials, gleichen Querschnitts und der Einheit der Länge erfährt. Letztere Verlängerung können wir auch als jene bezeichnen, welche ein Stab von der Länge eins durch ein seinem eigenen gleiches Gewicht erfährt.

Wir werden im nächsten Abschnitte in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in langen Stäben den experimentellen Beweis für die Richtigkeit dieser Ausdrücke erhalten.

§ 140.

Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe. Wird an irgend einer Stelle eines begrenzten Stabes eine longitudinale Schwingung hervorgerufen, so breitet sich dieselbe durch den Stab aus bis zu den Enden desselben; an den Enden wird die Bewegung reflektiert und durchläuft dann den Stab nach entgegengesetzter Richtung. Da die Reflexion an beiden Enden des Stabes erfolgt, so pflanzen sich kurze Zeit nach Beginn der Schwingungen in dem Stabe Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort; es müssen sich somit in dem Stabe stehende Wellen bilden. Die Stäbe geraten also in Schwingungen, deren Dauer von der Länge und dem Material, aus welchem die Stäbe gemacht sind, abhängig ist, und außerdem von der Art, wie die Stäbe befestigt sind. Wir wollen zunächst einen Stab betrachten, der wie ab (Fig. 252) nur in seiner Mitte leicht gehalten wird, im übrigen aber und besonders an seinen Enden frei ist. Wir nehmen an, das Ende b sei etwa durch Klopfen mit einem Hammer oder dadurch, daß der Stab mit einem feuchten Tuche von der Mitte gegen b hin gestrichen wird, in eine schwingende Bewegung versetzt, deren Amplitude α und deren Schwingungsdauer T sei. Die Bewegung pflanzt sich dann durch den Stab bis zu dem Ende a fort, wird dort reflektiert und kehrt in dem Stabe gegen b zurück. Da die Dichtigkeit der Luft gegenüber derjenigen des festen Körpers eine sehr kleine ist, wird die Amplitude der Bewegung bei der Reflexion so wenig geschwächt, daß wir dieselbe auch für die gegen b zurückkehrende Bewegung gleich α setzen können. Die Reflexion geschieht ferner, da das zweite Mittel ein dünneres ist, ohne Umkehr des Vorzeichens der Schwingungen. Die stetig von b ausgehenden und die von a reflektierten Schwingungen sind es dann, welche sich in dem Stabe zu stehenden Wellen zusammensetzen.

Fig. 252.

Rechnen wir die Zeit t von dem Momente an, in welchem das Ende b eine Schwingung beginnt, so wird zur Zeit t die Bewegung einer Molekülschicht, welche von b um die Strecke x entfernt ist, durch folgende Gleichungen gegeben sein. Erstens ist der Abstand y_1 der Molekülschicht von der Gleichgewichtslage durch die bei b erregte Bewegung

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

ie Bewegung, welche von b ausgeht, wird bei a reflektiert, nachdem sie ie Länge l des Stabes durchlaufen hat; sie hat dann noch, um zu der trachteten um x von b entfernten Molekülschicht zu gelangen, den Weg $- x$ zurückzulegen. Da sie nun bei a ohne Änderung des Vorzeichens flektiert wird, so ist der Abstand y_2 der betrachteten Schicht von der leichgewichtslage zur Zeit t infolge dieser Bewegung

$$y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right),$$

ie resultierende Bewegung ist deshalb

$$Y = y_1 + y_2 = 2a \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die Gleichung zeigt, daß die Bewegung diejenige stehender Wellen von er Schwingungsdauer T ist. Die Anzahl der sich auf dem Stabe ausildenden stehenden Wellen hängt ab von der Länge des Stabes und der chwingungsdauer T. Welche stehende Wellen sich auf dem Stabe überaupt ausbilden können, ergibt sich aus der Bedingung, daß jedenfalls n den Enden des Stabes ein Schwingungsmaximum sein muß, das heißt lso, daß dort die Amplitude der Bewegung jedenfalls den größten Wert u haben muß. Da die Amplitude der Bewegung der verschiedenen durch en Abstand x vom Ende b gegebenen Molekülschichten durch den Faktor

$$2a \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$$

egeben ist, so folgt, daß

$$\cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} = \pm 1 \text{ sein muß für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Es muß somit

$$\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1; \qquad 2\pi \frac{l}{\lambda} = n\pi; \qquad l = n \frac{\lambda}{2}.$$

s muß also die Länge des Stabes irgend ein Vielfaches einer halben Vellenlänge sein. Oder es können nur solche Schwingungen in dem Stabe u stehenden Wellen Anlaß geben, deren Oszillationsdauern so sind, daß rährend einer oder zwei oder irgend einem Vielfachen einer halben Oszillaionsdauer die Bewegung sich durch die ganze Länge des Stabes fortpflanzt.

Die langsamsten Schwingungen, welche der Stab annehmen kann, ind somit solche, für welche $l = \frac{1}{2}\lambda$. Da nun, wenn c die Fortpflanzungseschwindigkeit der Bewegung im Stabe ist, somit

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}},$$

wischen λ und T die Beziehung besteht

$$\lambda = cT = T \sqrt{\frac{E}{d}},$$

o folgt für die Dauer der langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c} = 2l \sqrt{\frac{d}{E}}.$$

Die Schwingungsdauer des Stabes ist also gleich der doppelten Länge des Stabes dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Stabe; sie ist deshalb unabhängig von der Größe und der Form des Querschnitts, sie wird nur bedingt von der Länge, dem Elastizitätskoeffizienten und dem spezifischen Gewichte des Materials, aus dem der Stab besteht.

Die in einer Sekunde von dem Stabe vollführte Anzahl von Schwingungen ist

$$N = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{d}},$$

sie ist also gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der doppelten Länge des Stabes.

Die Bewegung, welche die einzelnen Teile des Stabes vollführen, ergibt sich aus der Betrachtung der Werte y, wenn wir den Moment fixieren, in dem

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) = 1.$$

Dann ist

$$y = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda};$$

somit ist für

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{8}\lambda & x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}\lambda & x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{8}\lambda & x = l = \frac{\lambda}{2} \\ y = -2\alpha & y = -\alpha\sqrt{2} & y = 0 & y = \alpha\sqrt{2} & y = 2\alpha. \end{array}$$

Die Mitte des Stabes ist somit ein Knotenpunkt, der stets in Ruhe bleibt, und die beiden Hälften des Stabes schwingen jede wie eine halbe stehende Welle, so daß die beiden Hälften stets in entgegengesetzter Phase schwingen.

Gibt man den erregten Schwingungen die halbe Dauer, so kann ebenfalls der Stab in stehende Schwingungen geraten. Es ist dann $l = \lambda$

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{l}{c} = \frac{2l}{2c}.$$

Die Bewegung des Stabes erhalten wir wieder, indem wir die Werte von y betrachten, wenn der von der Zeit abhängige Koeffizient der Gleichung für $y = 1$ ist.

Dann wird, da jetzt $l = \lambda$ für

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}\lambda & x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}\lambda & x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{4}\lambda & x = l = \lambda \\ y = 2\alpha & y = 0 & y = -2\alpha & y = 0 & y = 2\alpha. \end{array}$$

In dem Stabe sind somit zwei Knotenpunkte in $\frac{1}{4}l$ und $\frac{3}{4}l$; das zwischen den beiden Knotenpunkten liegende Stück schwingt als eine stehende Welle, und die beiden Viertel zwischen den Knotenpunkten und den Enden als halbe stehende Wellen; diese beiden halben stehenden Wellen sind unter sich in gleicher Phase, das zwischen den Knotenpunkten liegende Stück ist in gerade entgegengesetzter Phase.

Die Schwingungsanzahl ist in diesem Falle die doppelte von vorher

$$N_1 = 2\,\frac{c}{2l}.$$

Allgemein können in dem Stabe stehende Wellen existieren, deren hwingungsdauern T_n und Schwingungszahlen N_n sind

$$T_n = \frac{2l}{nc} \qquad N_n = n\frac{c}{2l},$$

rin n jede ganze Zahl sein kann. Es entstehen dann in dem Stabe n otenpunkte, von denen die den Enden nächsten von den Enden um entfernt sind, und welche überhaupt im Stabe einen Abstand von $\frac{l}{n}$ sitzen. Einer Ableitung im einzelnen wird es nach dem Vorigen nicht dürfen.

Mit denselben Schwingungszahlen kann ein Stab schwingen, wenn ine beiden Enden fest eingeklemmt sind, jedoch ist der Bewegungszustand er die Verteilung der Bewegung in dem Stabe dann eine ganz andere. folgt das schon daraus, daß in dem Falle die Enden des Stabes, da sie st eingeklemmt sind, stets in Ruhe sein müssen. Um die Bewegung des abes zu erhalten, nehmen wir an, es sei an irgend einer Stelle des abes etwa durch Reiben eine schwingende Bewegung erzeugt, und es sei durch im Abstande a von dem Ende b ein Schwingungsmaximum entanden. Wir rechnen die Zeit t von dem Beginne der Schwingungen an eser Stelle, das heißt, von da ab, wo die betreffende Stabsschicht an dieser telle die Gleichgewichtslage verläßt. Von hier aus pflanzt sich die Bewegung im Stabe nach beiden Seiten fort, wird an den Grenzen a und b flektiert und geht von beiden Enden im Stabe wieder zurück. Da die iden Stabenden als fest vorausgesetzt werden, so geschieht die Reflexion , wie an einem Mittel von unendlich großer Dichtigkeit; somit tritt ein echsel des Vorzeichens der Bewegung oder Verlust einer halben Wellenlage an beiden Enden ein, die reflektierte Amplitude hat aber merklich iselbe Größe wie die ankommende.

Die Bewegung, welche eine um x von b entfernte Molekülschicht inlge jeder der beiden zu ihr kommenden Bewegungen erhält, ist durch lgende beiden Gleichungen gegeben. Erstens für die an b reflektierte ewegung

$$y_1 = -\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

eitens für die an a reflektierte

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l-a}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right);$$

mit wird die resultierende Bewegung

$$y = y_1 + y_2 = -2\alpha\cos 2\pi\frac{l-a-x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

e in dem Stabe möglichen Bewegungen ergeben sich wieder aus den für Stabenden vorhandenen Bedingungen, daß für diese stets $y = 0$ sein uß. Es muß deshalb für $x = 0$ und für $x = l$ der Wert von y immer ll sein. Wir zerlegen in unserer Gleichung für y den Kosinus und setzen

$$= -2\alpha\left\{\cos 2\pi\frac{l-x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} + \sin 2\pi\frac{l-x}{\lambda}\sin 2\pi\frac{a}{\lambda}\right\}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Da das erste Glied in der Klammer für $x = l$ nur Null sein kann, wenn

$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0, \qquad a = (2n+1)\frac{\lambda}{4},$$

so folgt zunächst, daß ein Maximum der Schwingung nur in einem Abstande a von dem Ende b auftreten kann, welcher gleich einem ungeraden vielfachen von $\frac{1}{4}\lambda$ ist. Mit Beachtung dieses Umstandes wird unsere Gleichung

$$y = -2\alpha \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)$$

und dieser Ausdruck wird für $x = 0$ nur Null, wenn

$$l = n \frac{\lambda}{2},$$

wenn also der Stab irgend ein vielfaches einer halben Wellenlänge ist. Daraus folgt gleichzeitig, daß das Schwingungsmaximum auch vom dem andern Stabende eine ungerade Anzahl von $\frac{1}{4}\lambda$ entfernt ist. Für die Schwingungszahl N_n und die Schwingungsdauer unseres Stabes folgt wie vorhin, wenn auf demselben $n\frac{\lambda}{2}$ vorhanden sind

$$N_n = n \frac{c}{2l} \qquad T_n = \frac{1}{n}\frac{2l}{c}.$$

Die Verteilung der Bewegung im Stabe ist leicht zu erhalten. Setzen wir in unsere Gleichung

$$\lambda = \frac{2l}{n},$$

so wird unter Beachtung, daß $\sin n\pi = 0$ $\cos n\pi = \pm 1$

$$y = \pm 2\alpha \sin \pi n \frac{x}{l} \sin 2\pi \frac{t}{T_n}.$$

Die langsamste Bewegung erhalten wir für $n = 1$. Nehmen wir an, das von der Zeit abhängige Glied sei ± 1, alle Punkte seien also in der ihnen möglichen größten Entfernung von der Gleichgewichtslage, so wird für

$$x = 0 \qquad x = \tfrac{1}{4}l \qquad x = \tfrac{1}{2}l \qquad x = \tfrac{3}{4}l \qquad x = l$$
$$y = 0 \qquad y = \pm \alpha\sqrt{2} \qquad y = \pm 2\alpha \qquad y = \pm \alpha\sqrt{2} \qquad y = 0.$$

Der Stab schwingt als eine stehende Welle, deren Knotenpunkte die Endpunkte des Stabes sind.

Ist $n = 2$, so wird für

$$x = 0 \qquad x = \tfrac{1}{4}l \qquad x = \tfrac{1}{2}l \qquad x = \tfrac{3}{4}l \qquad x = l$$
$$y = 0 \qquad y = 2\alpha \qquad y = 0 \qquad y = -2\alpha \qquad y = 0.$$

Der Stab erhält in der Mitte einen Knotenpunkt, jede Hälfte schwingt wie eine stehende Welle.

Ist $n = 3$, so zerfällt der Stab in drei stehende Wellen, die Knotenpunkte liegen in $^1/_3$ der Stablänge von den Enden und voneinander. Allgemein zerfällt der Stab in n stehende Wellen, und die Knotenpunkte liegen $\frac{1}{n}$ Stablänge voneinander.

Wollen wir die Zeit nicht von dem Momente an rechnen, wann die
d liegende Stabschicht die Gleichgewichtslage passiert, sondern wann
am Ende ihrer Bahn ist, etwa am negativen Ende, so daß sie zur
it $t = \frac{T}{4}$ die Gleichgewichtslage nach der positiven Seite passiert, so
en wir in den Gleichungen für y_1 und y_2 an Stelle von t zu setzen
$-\frac{T}{4}$; es bedarf wohl keines besondern Nachweises, daß die Gleichung
y dann wird

$$y = \pm 2\alpha \sin \pi n \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T_n}.$$

Die Schwingungszahlen werden andere, wenn wir den Stab an einem
de, etwa bei a fest einklemmen, dagegen das Ende b freilassen. Be-
chten wir das Ende b als den Ursprung der Bewegung, so werden die
ichungen für eine Molekülschicht im Abstande x von b, da die von b
gehenden Bewegungen bei a mit Wechsel des Vorzeichens reflektiert
rden,

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)$$

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right).$$

mit wird die resultierende

$$y = y_1 + y_2 = 2\alpha \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen erhalten wir auch hier
eder aus den Bedingungen für die Enden des Stabes. Am Ende b, also
$x = 0$ ist, müssen die Amplituden den größten Wert haben, da das
de frei ist, am Ende a, wo $x = l$ ist, muß y zu allen Zeiten gleich
ll sein. Letzteres ist schon nach der Form der Gleichung erfüllt. Zur
stimmung der Beziehung zwischen l und λ haben wir daher nur zu
chten, daß

$$\sin 2\pi \frac{l}{\lambda} = 1$$

$$2\pi \frac{l}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Es können demnach nur solche stehende Wellen in dem Stabe be-
hen, für welche die Länge des Stabes eine viertel Wellenlänge oder ein
erades Vielfaches von einer viertel Wellenlänge ist. Da auch hier
Beziehung besteht $\lambda = cT$, so folgt für die Schwingungsdauer und
wingungsanzahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n+1)c} \qquad N_n = (2n+1)\frac{c}{4l}.$$

langsamsten Schwingungen sind jene, für welche $n = 0$, also $l = \frac{1}{4}\lambda$
die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{4l}{c}.$$

langsamsten Schwingungen eines an einem Ende festen, an dem andern

Ende freien Stabes haben also die doppelte Dauer, als wenn der Stab an beiden Enden frei oder an beiden Enden fest ist.

In dem Falle nehmen die Werte von y, wenn der von der Zeit abhängige Faktor der Gleichung gleich 1 ist, ab von $y = 2\alpha$, wenn $x = 0$ ist, bis $y = 0$, wenn $x = l$ ist. Der Stab schwingt daher wie eine halbe stehende Welle.

Die nächst rascheren Schwingungen sind jene, für welche $n = 1$ ist, deren Dauer ist

$$T = \frac{4l}{3c}.$$

Man findet leicht, daß dann in $\frac{1}{3}$ des Stabes vom freien Ende ein Knotenpunkt vorhanden ist, so daß $\frac{2}{3}$ des Stabes als eine stehende Welle und das letzte Drittel am freien Ende als eine halbe stehende Welle schwingt.

Dann können Schwingungen im Stabe bestehen, deren Anzahl die fünffache, siebenfache usw. ist, so daß die überhaupt möglichen Schwingungszahlen sich verhalten, wie die Reihe der ungeraden Zahlen. Bei der fünffachen Schwingungszahl entstehen in dem Stabe drei, bei der siebenfachen fünf, überhaupt bei der $(2n + 1)$fachen $n + 1$ Knotenpunkte, es entstehen n ganze und eine halbe stehende Welle. Einer Ableitung im einzelnen wird es nicht bedürfen.

Die soeben als möglich erkannten Teilungen der Stäbe bei longitudinalen Schwingungen sind ziemlich schwierig herzustellen; man kann sie dadurch hervorrufen, daß man die vorher bestimmten Stellen festhält, indes gelingt es selten, willkürlich eine ganz bestimmte Teilung des Stabes mit vielen Knotenpunkten zu erhalten. Die Teilung tritt aber häufig auch ohne Festhalten der verschiedenen Stellen ein durch fortgesetztes Reiben des Stabes der Länge nach oder mehrfaches Schlagen an seinen Enden; wir werden im nächsten Abschnitt das an den verschiedenen Tönen erkennen, welche der Stab gibt.

Die in dem letzten Paragraphen für an beiden Enden feste Stäbe abgeleiteten Sätze gelten unmittelbar auch für zwischen zwei festen Punkten ausgespannte Saiten, da dieselben nichts anders sind, als Stäbe von sehr geringem Querschnitt.

Schließlich sei erwähnt, daß nach den Untersuchungen des § 133 alle diejenigen Schwingungen, welche in einem Stabe überhaupt möglich sind, auch gleichzeitig in demselben vorkommen können.

§ 141.

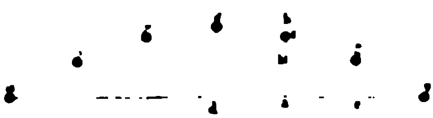
Transversale Schwingungen der Saiten. Spannt man eine dünne möglichst vollkommen biegsame Schnur von großer Länge aus und versetzt dieselbe durch rasches Auf- und Abbewegen des einen Endes in transversale Schwingungen, so sieht man, wie diese an der Stelle, an der man sie hervorbrachte, verschwinden, sofort aber an immer anderen Stellen derselben auftreten; sie pflanzen sich als Wellenberg und Wellental auf der Schnur fort, nach und nach erhalten immer andere Teile der Schnur die Gestalt einer Welle, wie wir sie in dem vorigen Kapitel bei den transversalen Schwingungen einer Punktreihe abgeleitet haben.

Die transversalen Schwingungen einer Schnur bestehen in auf- und abgehenden gegen die Längsrichtung senkrechten Bewegungen der einzelnen Punkte, sie haben demnach eine Gestaltsänderung derselben zur Folge, welche unmittelbar sichtbar ist und bei nicht zu raschen Bewegungen recht gut beobachtet werden kann.

Die Gesetze der Fortpflanzung transversaler Wellen in dünnen Schnüren oder Saiten, die an sich nicht elastisch aber durch Gewichte schwach gespannt sind, so daß jeder Punkt eine bestimmte Ruhelage hat, müssen mit den im vorigen Kapitel abgeleiteten Gesetzen über die Fortpflanzung transversaler Wellen in Punktreihen übereinstimmen, so lange die Schnüre oder Saiten eine so geringe Dicke haben, daß wir annehmen dürfen, alle Punkte eines Querschnittes bewegen sich ganz in gleicher Weise und die Ausbiegungen seien so klein, daß wir die bei einer Ausbiegung stattfindende Verlängerung vernachlässigen können. An Stelle der durch die Verschiebung der Punkte in einer elastischen Punktreihe geweckten elastischen Kraft tritt einfach die Spannung der Saite.

Um das zu zeigen, können wir direkt die Entwicklungen des § 128 hier anwenden, welche uns die Beschleunigung eines Punktes in einer schwingenden Punktreihe lieferten. Ist aa_1 (Fig. 253) ein Stück der schwingenden Saite, etwa eine halbe Wellenlänge, und sind α, β, γ . . benachbarte Querschnitte einer an dem einen Ende befestigten, durch ein an dem andern Ende angehängtes Gewicht p gespannten Saite, so wird auch hier infolge der Spannung jeder einzelne Querschnitt nach beiden Seiten gegen die benachbarten Querschnitte hingezogen, und zwar mit einer in den Einheiten des absoluten Systems ausgedrückten, der Spannung gp gleichen Kraft. Der Querschnitt ε wird demnach einerseits gegen δ, andererseits gegen ζ mit der Kraft gp hingezogen; infolgedessen suchen sich die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zu ziehen, in welcher sie alle in einer geraden Linie, der Ruhelage der Saite sich befinden. Die Gleichgewichtslage von ε in bezug auf ζ ist b, in bezug auf δ ist b'. Die Kraft, mit welcher der Punkt nach b getrieben wird, ist gleich der zu εb parallelen Komponente der Spannung, also gleich $gp \sin \varepsilon\zeta b$; und ebenso ist die ihn nach b' treibende Kraft gleich $gp \sin \varepsilon\delta b'$. Die den Punkt ε nach der Gleichgewichtslage, also gegen a hintreibende Kraft ist somit

Fig. 253.



$$gp(\sin \varepsilon\zeta b - \sin \varepsilon\delta b').$$

Nun ist

$$\sin \varepsilon\zeta b = \frac{\varepsilon b}{\varepsilon\zeta}; \qquad \sin \varepsilon\delta b' = \frac{\varepsilon b'}{\varepsilon\delta},$$

worin wir, da ausdrücklich vorausgesetzt wurde, daß wir die Verlängerung der Saite vernachlässigen dürfen, $\varepsilon\zeta = \varepsilon\delta = ad$ setzen dürfen. Die den Querschnitt ε gegen a treibende Kraft ist somit

$$gp \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad}.$$

Die Beschleunigung wird deshalb, wenn m die Masse des Querschnittes ist

$$\frac{gp}{m} \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad},$$

oder auch, wenn δ die Masse der Längeneinheit der Saite ist,

$$\frac{gp}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad^2}.$$

Wir erhalten somit ganz denselben Ausdruck wie § 128, mit dem Unterschiede nur, daß an Stelle der Elastizität ae, welche in der Punktreihe durch die Verschiebung der Punkte geweckt wird, die Spannung gp tritt. Bezeichnen wir mit α die Amplitude und mit T die Schwingungsdauer der erregten Bewegung, ferner mit λ die Wellenlänge, so ergibt sich deshalb auch aus einer der im § 128 gemachten identisch gleichen Entwicklung zur Zeit t nach Beginn der Schwingung für den Abstand y eines Punktes, welcher vom Ausgangspunkt der Bewegung um die Strecke x entfernt ist:

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, so ist auch hier $\lambda = cT$ und

$$c = \sqrt{\frac{gp}{\delta}}.$$

Ist q der Querschnitt und s das spezifische Gewicht der Saite, so ist

$$\delta = qs,$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{gp}{qs}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist demnach der Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte direkt, derjenigen aus dem Querschnitt der Saite und ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportional.[1]) Die Gebrüder W. und E. H. Weber haben durch Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen auf dünnen Schnüren die volle Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachgewiesen.

Fig. 254.

Sie wandten zu ihren Versuchen eine runde aus sehr feinem Baumwollfaden auf Maschinen geklöppelte Schnur an, welche sehr gleichförmig biegsam, wenig elastisch war und bei einer Länge von $16{,}058^{\mathrm{m}}$ $52{,}612^{\mathrm{gr}}$ wog. Dieselbe wurde dadurch horizontal aufgespannt, daß man sie an ihrem Ende mit einer Schraube und mit ihrem andern Ende an einem Rade befestigte (Fig. 254). Das Rad hatte einen Durchmesser von über 30^{cm} und war in einer sehr genau gearbeiteten Achse aufgehängt, um es recht frei beweglich zu machen. Die Schnur war bei a in einem Abstande von $14{,}4^{\mathrm{cm}}$ von der Achse des

1) *Euler* in den Actis Petropolitanis pro 1779 Tom I. Petrop. 1782.

Rolle befestigt, so daß sie nach der Tangente des Rades zog. Bei b war eine Schnur befestigt, an der sich ein Körbchen befand, bestimmt die spannenden Gewichte aufzunehmen.

Die Wellen wurden 15^{cm} vom Ende der Schnur durch einen raschen Stoß erregt, und man sah sie dann zu dem einen Ende der Schnur hinlaufen und als reflektierte Wellen, die Berge als Täler und umgekehrt, da die Schnur bei a fest war, also an ein dichteres Mittel grenzte, wieder zurückkehren.

Die Zeit, welche die Welle brauchte, um die Schnur zu durchlaufen, wurde mittels einer Uhr gemessen, welche noch $\frac{1}{60}$ einer Sekunde angab und stets die Zeit beobachtet, in welcher die vom Rade ausgehende Welle einmal oder zweimal oder viermal zum Rade zurückkehrte.

Die Versuche ergaben erstens, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen unabhängig ist von der Größe der Wellen, denn stets brauchte eine Welle dieselbe Zeit zum Durchlaufen der Schnur, mochte sie durch ein kurzes und schwaches Schnellen mit dem Finger oder durch ein länger dauerndes und stärkeres Schlagen erzeugt werden. Im erstern Falle muß aber die Welle kürzer sein, wie es auch die Beobachtung ergab.

Ferner fanden die Gebrüder Weber, daß die Wellen, wie es auch unsere Theorie verlangt, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, denn um die Schnur 2, 3, 4 .. mal zu durchlaufen, brauchte die Welle auch die doppelte, drei- und vierfache Zeit.

Nach diesen Versuchen machten sie genaue Messungen und fanden recht gut die von Euler gegebene Formel bestätigt. Die Schnur wurde nacheinander durch drei verschiedene Gewichte gespannt, nämlich mit $610{,}5 - 2027{,}5 - 4226{,}4^{g}$.[1])

Es ergab sich, daß im ersten Falle die Welle eine Strecke von $33{,}244^{m}$ in 46 Sechzigstel, im zweiten dieselbe Strecke in 24,8 Sechzigstel und im dritten Falle in 16,25 Sechzigstel Sekunden durchlief. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder die in diesen drei Fällen in einer Sekunde durchlaufenen Räume sind demnach

$$\text{im ersten Falle } c_1 = \frac{60 \cdot 33^{m},244}{46} = 43^{m},361,$$

$$\text{im zweiten Falle } c_2 = \frac{60 \cdot 33^{m},244}{24,8} = 80^{m},429,$$

$$\text{im dritten Falle } c_3 = \frac{60 \cdot 33^{m},244}{16,25} = 122^{m},713.$$

Um diese Zahlen mit unserer Formel zu vergleichen, haben wir in unserem Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{gp}{q s}}$$

für p die betreffenden spannenden Gewichte, für qs das Gewicht der Längeneinheit der Schnur und für g die Beschleunigung der Schwere, 9,808, einzusetzen.

---

1) Wellenlehre, auf Experimente gegründet usw. von den Brüdern *E. H.* und *W. Weber*. Leipzig 1825. p. 464 ff.

Das Gewicht der ganzen Schnur von $16{,}622^{m}$ Länge war $52{,}612^{g}$, daher das Gewicht der Längeneinheit

$$qs = \frac{52{,}612}{16{,}622}$$

und setzen wir die betreffenden Zahlenwerte in die Formel ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 610{,}5 \cdot 16{,}622}{52{,}612}} = 43^{m}{,}483,$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 2027{,}5 \cdot 16{,}622}{52{,}612}} = 79^{m}{,}254,$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 4226{,}4 \cdot 16{,}622}{52{,}612}} = 114^{m}{,}434.$$

Man sieht, die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Zahlen ist so groß, daß sie ein Beweis für die Richtigkeit der Theorie sowie für die Genauigkeit der Messungen ist.

Vergleichen wir den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen mit dem für die longitudinalen Wellen, so ergibt sich eine merkwürdig einfache Beziehung.[1])

Für die longitudinalen Wellen hatten wir

$$c = \sqrt{\frac{E}{\delta}}$$

oder da für longitudinale Schwingungen einfach $\delta = s$, wenn wir mit s das spezifische Gewicht bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

für die transversalen

$$c' = \sqrt{\frac{gp}{qs}},$$

daraus ergibt sich

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{gp}{qs}} : \sqrt{\frac{E}{s}} = \sqrt{\frac{gp}{qE}}.$$

Wir sahen früher, daß die Längenzunahme C eines Stabes von der Länge l, dem Querschnitt q, durch ein Gewicht p, wenn E der Elastizitätsmodulus ist, gleich ist

$$C = \frac{1}{E}\frac{gpl}{q},$$

demnach

$$\frac{C}{l} = \varphi = \frac{gp}{qE}.$$

Es folgt also

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\varphi}$$

oder das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen und derjenigen der longitudinalen Wellen in einem durch Spannung elasti-

1) *Poisson*, Mémoires de l'Académie de France. 8. p. 422 u. 442. 1829.

en fadenförmigen Körper ist gleich der Quadratwurzel aus der Vergerung, welche die Längeneinheit des Körpers durch das spannende richt erfährt, vorausgesetzt, daß durch dasselbe die Elastizitätsgrenze ht überschritten wird.

§ 142.

Stehende Schwingungen von fadenförmigen durch Spannung stischen Körpern. Wenn man eine gespannte Saite in irgend einer ise, etwa durch Zupfen an einer Stelle, in Schwingungen versetzt, so nzen sich diese Schwingungen bis an die Enden fort, werden dort, da Enden der Saiten stets fest sein müssen, mit Umkehr des Vorzeichens ektiert und pflanzen sich dann in der Saite rückwärts fort. Die sich gegenkommenden Schwingungen müssen stehende Wellen liefern, deren wingungsdauer von der Größe der Spannung, der Länge und Dicke Saite und dem spezifischen Gewichte des Materials abhängig ist.

Die in der Saite möglichen Schwingungen und deren Dauer ergeben h ganz genau in derselben Weise, wie wir die Schwingungen longitudinal wingender Stäbe erhielten, welche an beiden Enden fest sind. Wir angen durch eine der im § 140 für den Fall der festen Enden durchührten wörtlich gleiche Entwicklung zu dem Resultate, daß in einer pannten Saite alle jene Schwingungen stehende Wellen veranlassen nen, für welche die Länge der Saite irgend ein Vielfaches einer halben llenlänge ist. Da, wenn T die Schwingungsdauer, c die Fortpflanzungschwindigkeit und λ die Wellenlänge der Bewegung ist,

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

folgt, da l immer gleich $n\frac{\lambda}{2}$, somit

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

, wenn n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann, daß die glichen Schwingungsdauern gegeben sind durch

$$T = \frac{2l}{nc}.$$

Die Schwingungszahlen, welche gleich dem reziproken Werte der wingungsdauern sind, werden deshalb

$$N = n\frac{c}{2l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche n gleich 1 ist, diesen schwingt die ganze Saite als eine stehende Welle zwischen den en Endpunkten hin und her. Die Schwingungsdauer ist dann

$$T = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{q\varkappa}{gP}}.$$

Dieselbe ist somit der Länge der Saite und der Quadratwurzel aus dem rschnitte und dem spezifischen Gewichte der Saite direkt, der Quadrat-

wurzel aus der Spannung derselben umgekehrt proportional. Nehmen wir, was meistens der Fall ist, an, daß die Saite einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius r hat, so ist $q = r^2\pi$, und wir können setzen

$$T = 2lr\sqrt{\frac{\pi s}{gp}},$$

oder die Schwingungsdauer der Saite ist ihrem Durchmesser direkt proportional.

Dieses aus der Theorie sich ergebende Resultat ist von den Gebrüdern Weber[1]) experimentell geprüft worden durch direkte Messung der Schwingungsdauer der Schnur, welche ihnen zu den im vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen gedient hatte. Der Ausdruck für die langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c}$$

zeigt, daß die Schwingungsdauer gleich der Zeit ist, in welcher die fortschreitende Bewegung, aus welcher die stehende Schwingung entstanden ist, die doppelte Länge der Schnur durchlaufen würde.

Diese Zeit war in den Weberschen Versuchen resp. 46 — 24,8 — 16,25 Tertien (sechzigstel Sekunden). In dem ersten der drei Fälle, in welchem die Schnur mit 610,5^g gespannt war, erhielten sie als Schwingungsdauer

$$T = 46{,}375 \text{ Tertien} = 0{,}773 \text{ Sekunden}$$

als Mittel aus vielen Versuchen; eine Zahl, welche sich nicht um ein Hundertstel des beobachteten Wertes von dem aus der Theorie folgenden unterscheidet.

Eine weitere experimentelle Bestätigung dieses Satzes werden uns besonders für kürzere und stärker gespannte Saiten im nächsten Abschnitt die durch die Schwingungen der Saiten entstehenden Töne liefern.

Ist n größer als 1, so teilt sich die Saite in mehrere für sich schwingende, durch ruhende Knotenpunkte voneinander getrennte Teile. Ist $n = 2$, so entsteht ein Knotenpunkt in der Mitte und jede Hälfte der Saite schwingt für sich; ist $n = 3$, so entstehen zwei Knotenpunkte, die je $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge voneinander entfernt sind.

Man kann die Teilung der Saite bei transversalen Schwingungen leicht hervorrufen und beobachten.

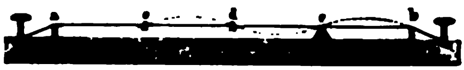
Man unterstützt die Saite ab (Fig. 255) in einem Punkte c, so daß die Länge bc gleich $\frac{1}{n}$ der Länge der Saite ist, z. B. $\frac{1}{4}$, und hängt dann auf die Saite eine Anzahl sogenannter Reiterchen, kleiner leichter Häkchen von Papier. Streicht man dann die Saite in der Nähe von b oder zupft man sie irgendwo zwischen b und c, so werden die Reiterchen überall von der Saite abgeworfen, nur an den Stellen der Schwingungsknoten bei d und e bleiben sie hängen, ohne eine bedeutende Bewegung zu zeigen.

Es folgt daraus, daß die Saite sich in eine Anzahl für sich schwingender Stücke, ae, ed, dc, cb geteilt hat, welche durch nicht bewegte Punkte

1) Wellenlehre, auf Experimente gegründet von *E. H.* und *W. Weber*. Leipzig 1825. p. 466.

die Schwingungsknoten getrennt sind. Wendet man möglichst biegsame Fäden bei diesen Versuchen an, so findet man die Lage der Knoten, also die Teilung der Saite genau der Theorie entsprechend, man findet immer $n-1$ Knotenpunkte, welche um $\frac{1}{n}$ der Saitenlänge von den Enden der Saiten und voneinander entfernt sind.

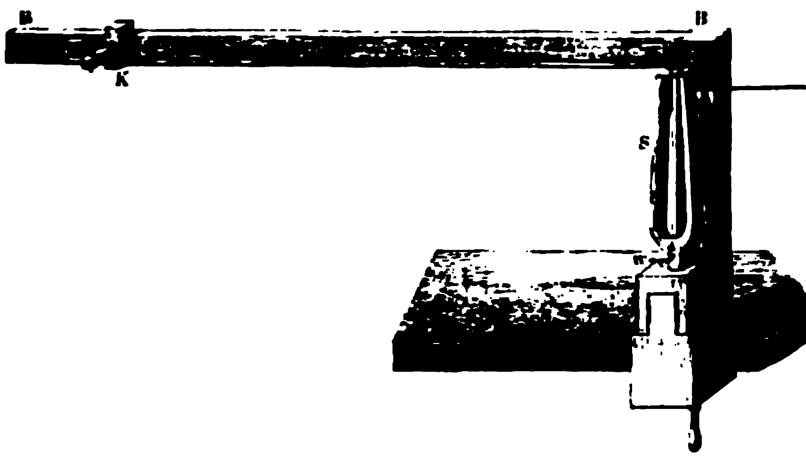
Fig. 255.



Der in Fig. 255 dargestellte Versuch ist auch deshalb interessant, weil er zeigt, daß bei einer gespannten Saite der Knotenpunkt die Quelle der Bewegung für dieselbe werden kann. Der Punkt c (Fig. 255) ist durch einen Steg unterstützt, und trotzdem pflanzt sich die Bewegung durch ihn hindurch auf den andern Teil der Saite fort. Man sieht leicht, daß diese Ausbreitung der Bewegung über c hinaus durch die periodischen longitudinalen Impulse veranlaßt wird, die der Punkt c infolge der Bewegung des Stückes bc erfährt.

Die Teilung der Saiten und die Entstehung der stehenden Wellen aus der Interferenz der fortgepflanzten und reflektierten Wellen läßt sich sehr hübsch durch eine von Melde[1]) zuerst benutzte Versuchsanordnung zeigen, welche Fig. 256 darstellt. Auf einem Fußbrett ist vertikal eine gebogene Stahllamelle, eine sogenannte Stimmgabel S (Fig. 256) aufgestellt. Die eine Zinke der Gabel trägt ein kleines Hütchen h, durch welches ein Seidenfaden gezogen ist, welcher an dem in der Biegung der Gabel befestigten

Fig. 256.



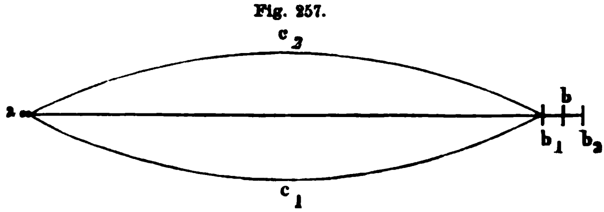
Wirbel w befestigt ist. Das Hütchen h befindet sich vertikal über dem Stiele der Gabel, so daß, wenn die Gabel um den Stiel gedreht wird, das in dem Hütchen befindliche Ende des Fadens sich in der Drehungsachse befindet. Das andere Ende des Fadens ist an dem auf dem Holzstabe BB befindlichen Schieber K befestigt. Der Holzstab BB wird von dem hinter der Stimmgabel befindlichen Brette getragen; derselbe ist dort auf eine Achse

1) Melde, Poggend. Ann. 109. 1860 und 111 1860.

gesetzt, so daß er in vertikaler Ebene drehbar, in jeder Neigung gegen den Horizont festgeklemmt werden kann.

Ist der Faden am Stabe horizontal ausgespannt, und ist die Stimmgabel, wie es die Figur zeigt, so aufgestellt, daß die beiden Zinken in der durch den Faden gelegten Vertikalebene sich befinden, so sieht man bei einer bestimmten Spannung des Fadens denselben in der Form einer stehenden Welle schwingen, wenn man die Zinken der Gabel in Schwingung versetzt. Die Schwingungen der Gabel kann man entweder dadurch hervorrufen, daß man in der Nähe ihres obern Endes die Gabel mit einem Violinbogen in einer dem gespannten Faden parallelen Richtung streicht, oder daß man, in der Weise, wie wir es später bei dem Vokalapparate von Helmholtz beschreiben werden, die Zinken zwischen die Arme eines Elektromagnetes stellt, der in rascher Folge periodisch magnetisiert wird. Die Bildung dieser stehenden Schwingung ergibt sich am einfachsten folgendermaßen. Ist Fig. 257 ab der Faden, welcher bei b an der Stimmgabel

Fig. 257.



befestigt ist, so bewegt sich, wenn die Gabel schwingt, der Befestigungspunkt b zwischen b_2 und b_1 hin und her. Wenn sich der Punkt nach b_1 bewegt hat, ist der Abstand ab_1 kleiner als die Länge des Fadens, der Faden ist nicht mehr gespannt und die Teile des Fadens sinken durch ihr Gewicht hinab. Das Hinabsinken beginnt bei b, und bei einer gewissen Spannung des Fadens wird es sich bis a fortgepflanzt haben, wenn b bis b_1 gekommen ist. Geht nun b zurück bis b_2, so verlängert sich der Abstand ab und der Faden nähert sich, indem die Teile desselben nach und nach emporgezogen werden, wieder der geraden Linie, die er bei der angenommenen Spannung des Fadens erreicht, wenn b in b_2 angekommen ist. Geht nun der Befestigungspunkt das zweite Mal von b_2 nach b, so muß der dann nicht mehr gespannte Faden sich krümmen, aber, da seine Teilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage eintraten, jetzt nach oben hin, und der Faden nimmt bei der vorausgesetzten Spannung die Lage ac_2b_1 an, wenn der Befestigungspunkt sich bis b_1 bewegt hat. Geht b_1 dann wieder bis b_2 zurück, so kommt der Faden wieder in die Lage ab_2. Es ergibt sich somit, daß der Faden eine ganze Schwingung macht, wenn die Gabel zwei Schwingungen vollführt.

Die Entstehung der schwingenden Bewegung der Saite bei dieser Anordnung ist ganz analog der in Fig. 255 dargestellten, denn auch hier ist der Punkt b für diese Bewegung ein Knotenpunkt, gerade wie der durch den Steg gestützte Punkt der Saite Fig. 255, und wie dort sind es auch hier die longitudinalen Impulse, welche die schwingende Bewegung veranlassen.

Vermindert man die Spannung der Saite auf $\frac{1}{4}$ derjenigen, welche sie ei dem ersten Versuche hatte, so pflanzt sich die Bewegung in ihr nur alb so rasch fort; da die nur von der Bewegung der Gabel abhängige chwingungsdauer aber dieselbe bleibt, so zerlegt sich die Saite in zwei hwingende Abteilungen, welche durch einen Knotenpunkt in der Mitte oneinander getrennt sind. Die Amplituden der Schwingungen sind bei iesen Versuchen so groß, daß die Teilung der Saite in ihre Abteilungen eithin sichtbar ist.

Vermindert man die Spannung auf $\frac{1}{9}$ der anfänglichen, so pflanzt sich ie durch die erste Schwingung der Gabel erzeugte Halbwelle nur durch der Saite fort, und der Faden zerlegt sich infolge der Interferenz der on b ausgehenden und von a reflektierten Schwingungen in drei stehende Vellen, deren jede $\frac{1}{3}$ der Fadenlänge hat.

Bei hinreichend langen Fäden kann man die Teilung derselben noch eträchtlich weiter treiben.

Da die Anzahl der stehenden Wellen in einem solchen Faden der ortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung umgekehrt proportional ist, kann man durch Anwendung verschiedener Fäden von ungleichem uerschnitt und verschieden dichtem Material die Gesetze der Fortpflanungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen unmittelbar anschaulich achen.

Eine derartige Bildung der stehenden Wellen tritt nicht nur ein, wenn ie Ebene der Gabelzinken der durch den Faden gelegten Vertikalebene arallel ist, sondern auch wenn die Gabel zu dieser Ebene senkrecht steht. ie Schwingungen der Gabel, die dann senkrecht zur Längsrichtung des adens geschehen, übertragen sich unmittelbar als Transversalschwingungen uf den Faden; bei der Kleinheit der Exkursionen der Gabel gegenüber nen des Fadens verhält sich aber auch dann das an der Gabel befestigte nde im allgemeinen wie ein Knotenpunkt, es ist eine dem Knotenpunkt hr nahe liegende Stelle der Welle. Bei gleicher Spannung des Fadens ist er in diesem Falle die Anzahl der stehenden Wellen immer die doppelte an der bei der vorhin besprochenen Befestigungsweise. Der Grund hierfür egt darin, daß jetzt die Schwingungen der Saite jener der Gabel isochron nd, indem jede Schwingung der Gabel eine Schwingung des Fadens ver nlaßt, während, wie wir vorhin sahen, bei der andern Befestigungsweise wei Schwingungen der Gabel erforderlich waren, um eine ganze Schwingung es Fadens zu geben. Ist demnach bei beiden Befestigungen die Spannung es Fadens und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe, so muß ei der zweiten Stellung der Gabel die Wellenlänge halb so groß, die Zahl er Wellen also doppelt so groß sein als bei der ersten. Damit bei der weiten Stellung dieselbe Anzahl von Wellen entstehe, muß die Spannung es Fadens viermal so groß sein als bei der ersten Stellung.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten wir die zuerst von oisson angegebene Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit er longitudinalen und der transversalen Schwingungen der gespannten aiten; dieselbe Beziehung muß, wie sich unmittelbar ergibt, zwischen den ansversalen und longitudinalen Schwingungszahlen bestehen.

Die Schwingungszahl einer longitudinal schwingenden, an ihren beiden nden befestigten Saite ist allgemein

$$N = \frac{n}{2} \frac{c}{l},$$

für die transversalen Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2} \frac{c'}{l}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{N'}{N} = \frac{c'}{c} = \sqrt{\delta},$$

wo wie vorhin δ das Verhältnis der Verlängerung der schwingen infolge des spannenden Gewichtes p zur Länge der Saite, oder dehnung eines Stückes der Saite von der Längeneinheit durch das s Gewicht bedeutet.

Dieses von der Theorie geforderte Resultat ist durch einen von Cagniard Latour, den Poisson in seinem Mémoire sur le ments des corps élastiques mitteilt, bestätigt worden.[1])

Eine Saite von $14{,}8^m$ Länge wurde einmal in longitudinale in transversale Schwingungen versetzt, und die Schwingungszahlen b Es fand sich

$$\frac{N'}{N} = 0{,}0593.$$

Die Verlängerung δ der Längeneinheit der Saite ist gleich d tienten aus der Verlängerung der ganzen Saite α und der Läng selben, wir erhalten demnach

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{l}},$$

$$\alpha = l \left(\frac{N'}{N}\right)^2 = 14^m{,}8 \cdot 0{,}003\,513 = 0^m{,}052.$$

Aus dem Verhältnis der longitudinalen und transversalen Schwi berechnet sich somit die Verlängerung der Saite zu $0^m{,}052$ inf spannenden Gewichtes. Die Messung Cagniard Latours ergab

$$\alpha = 0^m{,}05,$$

eine Zahl, welche sich nur um $\frac{1}{25}$ von der berechneten untersche

1) *Poisson,* Mémoires de l'Acad. royale de France. 8. p. 436. 1829. Stelle der Abhandlung, wo dieser Versuch mitgeteilt ist, hat sich wirrung eingeschlichen, da anfänglich $\frac{N'}{N} = \frac{7}{188}$ und $\frac{\alpha}{l} = \sqrt{\frac{N'}{N}}$ ge Die erste Zahl ist fehlerhaft, da sie auf ein ganz anderes Resultat fül die Gleichung für $\frac{\alpha}{l}$ ist, wie man sieht, falsch. Da die Gleichung nicht Angabe für $\frac{N'}{N}$ auf $\alpha = 0{,}052$ führt, so habe ich letztere von Poisson berechnete α angegebene Zahl als richtig genommen und daraus $\frac{N'}{N}$ be Das so berechnete Verhältnis ist $\frac{7}{118}$.

§ 143.

Einfluß der Steifigkeit der Saiten. Wenn man die Versuche über › Lage der Schwingungsknoten und die Schwingungszahlen der Saiten t großer Sorgfalt anstellt, so findet man besonders bei Metallsaiten merkhe Abweichungen des Resultates von der Theorie. Diese Abweichungen rden um so größer, je kürzer und dicker die Saiten werden. Der Grund ser Abweichungen ist leicht einzusehen, er liegt besonders darin, daß › Saiten nicht, wie es bei den theoretischen Entwicklungen vorausgesetzt rde, absolut biegsam sind und nur durch die spannenden Gewichte Elasität erhalten haben, sondern daß sie selbst an sich schon steif sind. Es rd also durch die gegenseitige Anziehung der einzelnen Moleküle diesen on eine gewisse Gleichgewichtslage gegeben.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß die eigene Steifheit der Saiten rade so wirkt, als wäre die Saite absolut unelastisch, aber durch ein rkeres Gewicht gespannt als das angehängte und in Rechnung gezogene. e Schwingungszahlen werden daher größer sein als die aus der Theorie geleiteten.

Dieses Resultat haben auch die Versuche N. Savarts[1]) ergeben, der sich zur Aufgabe gestellt hatte, das Gesetz aufzusuchen, nach welchem e Schwingungszahlen durch die eigene Steifheit der Saiten sich ändern.

N. Savart befestigte die Saiten an einem festen eisernen Schraubstock, chdem er sie in Klemmen eingeklemmt hatte, die mit Blei gefüttert ren. Durch ein angehängtes Gewicht P, welches nach und nach geändert rde, wurde die Saite gespannt und nun von der Saite ein Stück von $)^{mm}$,5 Länge mittels zwei weitern Schraubstöcken an seinen beiden Enden nz fest eingelegt.

Die Schwingungszahlen der Saite von unveränderlicher Länge bei verhiedenen spannenden Gewichten wurden mittels der beobachteten Töne, lche durch die Schwingungen entstanden, bestimmt, und zugleich nach r Formel

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{gP}{qs}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gP}{lp}}\,,$$

enn wir mit $p = qls$ das Gewicht der schwingenden Saite bezeichnen, eoretisch berechnet.

Bezeichnen wir die wirklich beobachteten Schwingungszahlen mit N, fand N. Savart in der Tat, daß N stets größer war als n.

Er zog weiter aus seinen Versuchen den Schluß, daß die Differenz ischen den Quadraten der Schwingungszahlen konstant sei, oder

$$N^2 - n^2 = C$$

i. Die Konstante C soll nach Savart das Quadrat der Schwingungszahl in, welche der Saite zukommt, wenn sie nur infolge ihrer eigenen Steifit schwingt. Bezeichnen wir die Schwingungszahl in dem Falle mit n_0, soll also

$$N^2 = n^2 + n_0^2$$

in.

1) *N. Savart*, Ann. de chim et de phys 6 (3) 1842; auch Poggend. Ann. 1843.

Duhamel[1]) hat es versucht, diese von Savart aus seinen Versu abgeleitete Regel durch eine einfache Betrachtung theoretisch zu erkl

Bezeichnet man nämlich mit n und gP die Schwingungszahl und Spannung einer absolut biegsamen Saite, so ist nach dem Vorigen

$$n^2 = \frac{g}{4lp} P,$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere, l die Länge und p das Gewi der Saite bedeutet.

Hat man nun eine wirkliche Saite von eben der Länge l und de selben Gewichte p, so hat dieselbe durch ihre Steifigkeit eine gewi Elastizität, vermöge welcher sie ohne spannendes Gewicht eine Schwingun zahl n_0 hat. Der absolut biegsamen Saite können wir nun durch ein G wicht P_0 eine Spannung erteilen, so daß sie genau dieselbe Bewegu annimmt, welche bei der steifen Saite aus der Elastizität hervorgeht u bei der sie n_0 Schwingungen zurücklegt. In dem Falle hat man für diesel

$$n_0^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P_0.$$

Fügt man nun zur Spannung P_0 der biegsamen Saite noch die Spa nung P_1 hinzu, so befindet sie sich in demselben Zustande wie die stei Saite, wenn sie durch das Gewicht P_1 gespannt ist. Die Spannung d absolut biegsamen Saite ist dann aber $g(P_0 + P_1)$ und ihre Schwingung zahl N gegeben durch

$$N^2 = \frac{g}{4lp}(P_0 + P_1),$$

oder da für eine Saite von gegebener Länge und gegebenem Gewichte d Schwingungszahl bei der konstanten Spannung P_0 konstant ist,

$$N^2 = n^2 + n_0^2.$$

Ist es gleichgültig, ob eine Saite durch eigene Elastizität oder dur ein angehängtes Gewicht eine gewisse Spannung erhält, so muß auch fü die steife Saite, welche infolge ihrer eigenen Elastizität n_0 Schwingunge vollführt, die wirkliche Schwingungszahl N bei der Spannung P sein

$$N = \sqrt{n^2 + n_0^2}.$$

August Seebeck[2]) hat indes nachgewiesen, daß die letztere An nahme Duhamels nicht strenge und nur für einen bestimmten Fall rich tig ist, da dieser Satz auf eine bestimmte Gestalt der schwingenden Sai führt. Wenn man nämlich auch durch ein Gewicht P_0 der unelastischen Saite dieselbe Schwingungszahl geben kann, so läßt sich derselben doch nicht im allgemeinen in allen Teilen dieselbe Bewegung erteilen, wie die Teile der steifen Saite sie annehmen. Zur Herleitung der Savartschen Regel darf er deshalb nicht angewandt werden, weil die Saiten in den Versuche von Savart nicht der Bedingung entsprechen, die aus dem Satze von Duhamel folgt.

1) *Duhamel,* Comptes Rendus. **14.** 1842. Poggend. Ann. **57.** 1842.

2) *A. Seebeck,* Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissensch 1846—47; auszügl. von *Seebeck* selbst Dove, Repertorium. **8.** Akustik p. 3 1

Die Savartsche Regel darf daher auch nur als eine angenäherte gelten.

Seebeck gibt für die Schwingungszahlen der steifen Saiten einen andern Ausdruck, den er theoretisch ableitet und durch Versuche bestätigt. Für gewöhnliche Saiten, deren Steifheit nur sehr gering ist, wird dieser Ausdruck ziemlich einfach, nämlich

$$n = n_1\left(1 + \frac{r^2}{l}\cdot\sqrt{\frac{E\pi}{gP}}\right),$$

worin n_1 die Schwingungen der absolut biegsamen Saite bei der Spannung gP, r den Radius, l die Länge und E den Elastizitätskoeffizienten der Saite, im den Einheiten des absoluten Maßsystems, bedeutet.

Man sieht, wie das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen sich immer mehr der Einheit nähert, je größer das spannende Gewicht wird, oder je kleiner der Quotient der beiden Kräfte $\frac{E}{gP}$ ist. Es ist das zu erwarten, da der Einfluß der Steifheit, also der eigenen Elastizität der Saite, um so mehr zurücktreten muß.

§ 144.

Transversalschwingungen von Stäben. Wenn man irgend einem elastischen prismatischen oder zylindrischen Stabe eine Biegung erteilt und ihn dann sich selbst überläßt, so gelangt derselbe in stehende Schwingungen. Auch in diesem Falle können wir die stehenden Wellen als ein Resultat der miteinander interferierenden nach entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzenden an den beiden Enden reflektierten Wellen betrachten.

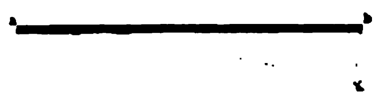
Die Schwingungsdauer solcher Stäbe läßt sich demnach ebenso wie die Schwingungsdauer der stehenden Wellen bestimmen, oder wir haben wieder

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

wie im § 126. Wir haben hier indes die Größe k etwas anders zu bestimmen, da wir es hier nicht mit der Bewegung von Punktreihen, wie in den bisherigen Fällen, zu tun haben.

Sei ab (Fig. 258) ein Stab, der an seinem Ende b durch ein Gewicht gebogen wird, so sahen wir früher im zweiten Abschnitte, daß die Biegung, der Abstand bb', abhängt von der Größe des Gewichtes, ferner der Länge, Breite und Dicke des Stabes. Setzen wir denselben als prismatisch voraus und setzen wir seine Länge gleich l, die Breite gleich β und die Dicke gleich h, so war, wenn wir das biegende Gewicht mit P bezeichnen[1],

Fig. 258.



$$bb' = \frac{4}{E}\,\frac{gPl^3}{\beta h^3},$$

oder die elastische Kraft gP, welche den gebogenen Stab in die Gleich-

1) Man sehe § 54.

gewichtslage zurücktreibt,

$$gP = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3} \cdot bb',$$

worin, wie immer, E den Elastizitätskoeffizienten des Stabes in de
heiten des absoluten Maßsystems bedeutet.

Da die elastische Kraft der Biegung proportional ist, so folg
der einmal gebogene und dann sich selbst überlassene Stab um seine
gewichtslage isochrone Schwingungen vollführen wird.

Nennen wir die bewegende Kraft bei einer Biegung, bei welcher l
ist, gp, so haben wir

$$gP = gp \cdot bb',$$

$$gp = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3}.$$

Dies ist somit die Kraft, welche den gebogenen Stab von der I
wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, wenn das E
sich im Abstande 1 von der Gleichgewichtslage befindet. Diese Kr
am Ende b angebracht. Um die Schwingungsdauer des Stabes zu er
haben wir

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

wo k die beschleunigende Kraft der Bewegung bedeutet, also

$$k^2 = \frac{gp}{m}$$

ist, wenn m die bewegte Masse bedeutet. Bezeichnen wir die Mas
Stabes mit m', so werden wir haben

$$m = f'm',$$

worin f' für einen Stab von gegebener Form eine Konstante bed
denn um die beschleunigende Kraft zu erhalten, müssen wir für m d
Punkte b anzubringende Masse einsetzen, welche dort die Masse des S
ersetzt, da die Kraft p im Punkte b angreift. Diese Masse ist aber j
falls derjenigen des Stabes proportional.

Für die beschleunigende Kraft der Bewegung erhalten wir somi

$$k = \frac{gp}{m} = \frac{E\beta h^3}{4f'm'l^3}.$$

Bezeichnen wir das spezifische Gewicht des Stabes mit s, so haben

$$m' = \beta h l s$$

und somit

$$k = \frac{h^2}{4f'l^4} \frac{E}{s}$$

und daraus für die Schwingungsdauer eines solchen Stabes

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{h^2}{4f'l^4} \frac{E}{s}}} = A \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{s}{E}},$$

wenn wir setzen

$$2\pi\sqrt{4f'} = A.$$

Für die Schwingungszahlen der Stäbe erhalten wir daraus

$$N = \frac{1}{T} = A' \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Derselbe Ausdruck gilt für zylindrische Stäbe, wenn wir anstatt der Dicke h den Radius r derselben einsetzen, jedoch wird dann die Konstante A' eine andere, wie sich aus dem Ausdrucke ergibt, den wir für gP erhalten, wenn wir anstatt parallelepipedischer Stäbe zylindrische Stäbe anwenden.

Wir haben diesen Ausdruck zunächst entwickelt unter der Voraussetzung, daß der Stab an seinem einen Ende fest sei, indes ergibt die Theorie der Elastizität, daß er auch, mit verschiedenen Werten von A', gültig ist, im Falle beide Enden fest oder frei sind, da der Ausdruck für gP sich in den Fällen nur durch andere Konstanten unterscheidet.

Es ergibt sich daraus, daß allgemein die Schwingungszahl elastischer Stäbe dem Quadrate ihrer Länge umgekehrt proportional ist, während sie der Dicke derselben oder dem Radius derselben direkt proportional, von der Breite derselben jedoch unabhängig ist.

Gerade wie wir bei den longitudinalen Schwingungen eine Reihe von Fällen unterscheiden mußten, je nach der Befestigungsweise des Stabes, so auch hier wieder.

Wir können jedoch hier nicht wie in den früheren Fällen die Schwingungszahlen und Teilungen der Stäbe theoretisch ableiten, sondern müssen uns begnügen, die von Euler, Poisson, Cauchy, Seebeck u. a., teils theoretisch, teils experimentell erhaltenen Resultate mitzuteilen. Wir unterscheiden folgende Fälle.[1])

1) Ein Ende des Stabes ist frei, das andere fest, der Stab schwingt seiner ganzen Länge nach hin und her, er bildet eine halbe stehende Welle. Es ist unter Annahme eines zylindrischen Stabes

$$N = 0{,}28 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

2) Beide Enden des Stabes sind fest, oder beide Enden des Stabes sind frei; die Zahl der langsamsten Schwingungen wird in beiden Fällen:

$$N = 1{,}78 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

3) Es kann ferner das eine Ende des Stabes auf eine Unterlage gelegt werden und das andere ganz fest in einen Schraubstock eingeklemmt werden oder ganz frei sein. In beiden Fällen erhält man für die langsamsten Schwingungen, welche der Stab vollführen kann,

$$N = 1{,}23 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

1) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France 8. p. 384. 1829. — *Cauchy*, Exerc. de Math. 3. p. 270 ff. — *Seebeck*, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1846—47. p. 159. Dove, Rep. 8. p. 46. 1849.

4) Schließlich können beide Enden des Stabes nur aufgelegt sein dann ist für die langsamsten Schwingungen

$$N = 0{,}785\,\frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Seebeck vereinigt die Ausdrücke für alle diese Fälle in folgenden[1])

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2}\sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin dann nur ε seinen Wert von einem Falle zum andern ändert, und zwar ist

$\varepsilon = 0{,}596\,86$, wenn ein Ende des Stabes fest, das andere frei ist,
$\varepsilon = 1{,}505\,62$, wenn beide Enden des Stabes fest oder frei sind,
$\varepsilon = 1{,}249\,87$, wenn ein Ende aufgelegt, das andere fest oder frei ist,
$\varepsilon = 1$, wenn beide Enden des Stabes aufgelegt sind.

In allen diesen Fällen können noch eine Reihe von Schwingungszahlen auftreten, die alle häufigern Schwingungen der Stäbe entsprechen; die Stäbe zerlegen sich dann in eine Reihe selbständig schwingender Teile, welche durch Knotenpunkte voneinander getrennt sind.

Seebeck gibt folgende Tabelle der Werte von ε in allen vier Fällen:

1. Fall. Das eine Ende des Stabes ist fest, das andere frei. Die Reihenfolge der Schwingungszahlen ergibt sich aus den Werten

$$\varepsilon = 0{,}596\,86;\quad 1{,}494\,18;\quad 2{,}500\,25;\quad 3{,}4999\,\cdots\cdots\frac{2n-1}{2}.$$

Wie man sieht, werden die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes von der Länge l und dem Radius r von der dritten an dargestellt durch

$$N = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ weichen die Schwingungszahlen hiervon ab, indem die hiernach berechneten Zahlen für $n = 1$ zu klein, für $n = 2$ zu groß werden.

2. Fall. Die beiden Enden des Stabes sind entweder fest oder frei. Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Werten

$$\varepsilon = 1{,}505\,62;\quad 2{,}499\,75;\quad 3{,}5001;\quad 4{,}5000\,\cdots\cdots\frac{2n+1}{2}.$$

Setzen wir also für die langsamsten Schwingungen $n = 1$, so werden auch hier die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes dargestellt durch

$$N = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2,$$

jedoch ebenfalls erst von der dritten Schwingungszahl an, und zwar um so genauer, je weiter man in der Ordnung der Schwingungszahlen aufsteigt.

3. Fall. Ist das eine Ende des Stabes aufgelegt, das andere ganz fest oder ganz frei, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn für ε eingesetzt wird

1) *Seebeck*, a. a. O.

$$\varepsilon = \frac{4n+1}{4},$$

wieder n die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet, und für die nsten Schwingungen $n = 1$ zu setzen ist. Für diese gaben wir an 2498; man sieht, wie schon dieser Wert nur äußerst wenig von ach der Formel berechneten abweicht.

. Fall. Sind beide Enden des Stabes einfach aufgelegt, so ergibt sich he der Schwingungszahlen, wenn wir für die langsamsten $\varepsilon = 1$ und folgenden die Reihe der natürlichen Zahlen einsetzen, also $\varepsilon = n$. hwingungszahlen verhalten sich also wie 1, 4, 9 ....

ı diesem Falle erhält also die Gleichung für die Schwingungszahlen nfachste Gestalt, sie wird

$$N = \frac{n^2 \pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

nach und nach für n die Werte 1, 2, 3 ... einzusetzen sind.

ie Schwingungszahlen eines und desselben Stabes können also sehr eden sein, je nach der Art seiner Befestigung; setzen wir die lang- Schwingungen bei der ersten Befestigungsart gleich 1, so erhalten Schwingungszahlen

1. Fall	...	1;	6,26;	17,54;	34,38;	56,84;
2. „	...	6,36;	17,54;	34,38;	56,84;	84,91;
3. „	...	4,38;	14,21;	29,50;	50,70;	77,22;
4 „	...	2,807;	11,23;	25,26;	44,91;	70,17.

m aus dieser kleinen Tabelle die wirklichen Schwingungszahlen zu n, haben wir bei zylindrischen Stäben dieselben nur mit

$$\frac{0{,}356\,24\,\pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

ltiplizieren.

uch die Schwingungszahlen parallelepipedischer Stäbe können wir uf dieselbe Weise erhalten, wir haben in die Formel anstatt des r des Zylinders nur $\frac{h}{\sqrt{3}}$ einzusetzen, wenn wir wie vorhin mit h ke der Stäbe bezeichnen.[1])

ie größern Schwingungszahlen haben auch hier ihren Grund in einer der Stäbe in eine Anzahl stehender Wellen, indes teilen sich hier be nicht in eine Anzahl gleicher Teile, sondern die Endglieder sind elen von den Abständen der Knoten im Stabe selbst. Die Lage der en Knoten läßt sich indes ebenso berechnen, wie die der Schwingungs- So findet Seebeck z. B. für die Entfernung der Knoten von den n Enden eines an beiden Enden freien Stabes sehr nahe:

des ersten	des zweiten	des dritten	des m-ten
$\frac{1{,}322}{4n+2}\,l$	$\frac{4{,}9820}{4n+2}\,l$	$\frac{9{,}0007}{4n+2}\,l$	$\frac{4m-3}{4n+2}\,l$.

ei der langsamsten Schwingung bilden sich also zwei Knoten, die um

1) Cauchy a. a. O.

0,2242 von den Enden liegen und um 0,5516 der Stablänge voneinander entfernt sind. Bei der zweiten, schnellern Schwingung bilden sich drei Knoten, einer in der Mitte, wie sich aus dem Ausdruck für den zweiten Knoten ergibt, der für den Abstand von dem nächsten freien Ende 0,498 ergibt, die beiden andern sind um 0,132 von den Enden des Stabes entfernt. Bei der dritten Schwingungszahl bilden sich vier Knoten, welche um 0,0944 und 0,3558 von den Enden des Stabes entfernt sind. Der Abstand der beiden mittlern Knoten ist 0,2888 und der mittlern von den äußern 0,2614.

In dem folgenden Falle bilden sich fünf Knoten, deren Lage sich ebenso berechnen läßt und so fort.

Man kann diese theoretischen Resultate experimentell nachweisen. Daß die Schwingungszahlen mit den angegebenen übereinstimmen, werden wir im nächsten Abschnitte zeigen.

Die Lage der Knotenpunkte läßt sich am besten auf einem dünnen Streifen von ziemlicher Breite und Länge bestimmen. Strehlke[1]) wandte Stahlstäbe von $1^m - 1^m,3$ Länge, $12 - 15^{mm}$ Breite und 4^{mm} Dicke an und bestreute sie auf der obern Fläche nach dem Vorgange von Chladni[2]) mit trocknem, staubfreiem Sand. Der Sand wird von den schwingenden Stellen des Stabes fortgeworfen und an den ruhenden Stellen angesammelt, so daß man dadurch die Lage der Knoten sichtbar machen kann. Man spannt diese Stäbe zwischen zwei konischen Spitzen an der Stelle zweier Knoten ein und bringt die Stäbe durch Anstreichen mit dem Violinbogen in Schwingung. Der Sand wandert dann nach den Knotenlinien hin und bleibt dort in Ruhe.

Die Knotenlinien stellen sich als feine, zur Längsachse des Stabes senkrechte Linien dar, und ihre Lage ist nach den Messungen von Strehlke genau der Theorie entsprechend.

In gleicher Weise hat Lissajous[3]) die Lage der Knotenlinien für alle vorhin betrachteten Fälle gemessen und volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung gefunden.

In seiner Abhandlung über die Bewegung elastischer Körper macht Poisson auf die einfache Relation auch der transversalen und longitudinalen Schwingungen von Stäben aufmerksam, wenn sie ihre langsamsten Schwingungen vollführen.[4]) Ist der Stab an beiden Enden frei oder fest, so haben wir für die Zahl der transversalen Schwingungen

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Für die longitudinalen Schwingungen der langsamsten Art hatten wir § 140

$$N' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

1) *Strehlke*, Poggend. Ann. 27. p. 505. 1833. Dove, Repert. 3. p. 111. 1839.
2) *Chladni*, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787.
3) *Lissajous*, Ann. de chim et de phys. 30. (3.) p. 385. 1850. Krönigs Journal. 1. p. 97. 1851.
4) *Poisson*. Mémoires de l'Acad. de France. 8. p. 486. 1829.

Man erhält demnach

$$\frac{N}{N'} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2\pi\,\frac{r}{l} = 3{,}5608\,\frac{r}{l}\,.$$

F. Savart hat durch Versuche diese von Poisson zuerst aufgestellte lation nachgewiesen. Es wurden die longitudinalen Schwingungen eines beau 1^m langen zylindrischen homogenen Stabes beobachtet und darauf transversalen Schwingungen eines Stückes des Stabes, welches genau der Länge des Stabes betrug. Die Schwingungszahlen wurden nach einer nächsten Abschnitte auseinander zu setzenden Methode aus den Tönen r Stäbe bestimmt.

Um vergleichbare Zahlen zu haben, wurde die beobachtete Zahl der ngitudinalen Schwingungen des ganzen Stabes mit 8 multipliziert, wodurch n die Schwingungszahl eines Achtels des Stabes erhielt. Aus diesen hlen wurde nach obiger Gleichung die Schwingungszahl der transversalen hwingungen berechnet und die so berechnete Zahl

$$N = 3{,}5608\,\frac{r}{l}\,N'$$

it der beobachteten Schwingungszahl verglichen. Die Resultate der Verche sind folgende:[1])

Stab von		N beobachtet	N berechnet	Differenz
Messing	$l = \frac{1}{8}\cdot 0{,}825$, $r = 2^{mm},4$, $N' = 17066$	1422	1415	$-\ 7$
Kupfer	$l = \frac{1}{8}\cdot 0{,}825$, $r = 1^{mm},7$, $N' = 18432$	1067	1082	$+\ 15$
Eisen	$l = \frac{1}{8}\cdot 0{,}88$, $r = 2^{mm},25$, $N' = 22757$	1843	1842	1

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung sind so klein, ß sie vollkommen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachngsfehler liegen.

§ 145.

Transversale Schwingungen von Platten. Chladnis Klangfiguren.
enn man eine dünne Platte von Glas oder Metall oder eine an ihrem mfange durch Gewichte gespannte Membran anschlägt oder an ihrem ande streicht, so kann man dieselbe ebenso wie Streifen oder Stäbe in ebende Schwingungen versetzen. Eine theoretische Ableitung dieser hwingungen aus den Prinzipien der Wellenbewegung ist uns hier nicht öglich, ja dieselbe ist überhaupt erst nur für einige spezielle Fälle ercht worden. Die Bewegungsgesetze von Membranen sind zuerst von

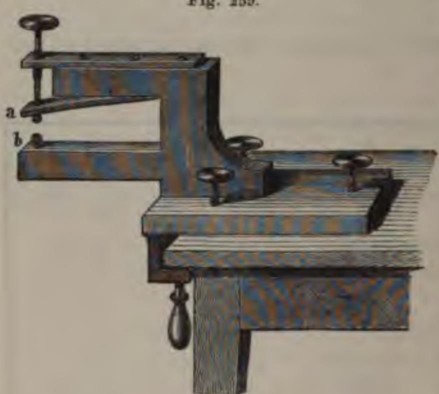
1) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. 8. p. 487. 1829.

Poisson entwickelt worden[1]) und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff[2]) hat indes von der letztern nachgewiesen, daß sie nicht in allen Punkten richtig ist und an Stelle der Poissonschen eine neue Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten gegeben. Wir werden die Resultate der Kirchhoffschen Theorie nachher mit den Versuchen zusammenstellen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen oder sich in schwingende Teile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, Knotenlinien, voneinander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere durch Knotenlinien getrennte schwingende Teile. Theorie und Versuche beweisen, daß die Teilung der Platten höchst mannigfaltig sein kann.

Um die Teilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Teil der Platte für sich schwingt, und um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das vorhin schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die zu untersuchenden Platten mit trocknem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Teilen der Platte fortgeworfen wird und sich auf den ruhenden Stellen, den Knotenlinien, ansammelt. Es entstehen so auf der Platte regelmäßige Figuren, welche von Chladni Klangfiguren genannt sind.

Fig. 259.



Um die Platte in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer andern Stelle mit der von Strehlke[3]) angegebenen Gabel (Fig. 259), indem man sie mittels der Schraube zwischen den beiden mit Tuch überbundenen Köpfen *a* und *b* befestigt. Diese über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht ritzen. Die Platte wird mit einem mit Kolophonium versehenen Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten. Der Bogen muß senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen solange fortgesetzt werden, bis keine vereinzelten Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Teile, welche gleichzeitig

1) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. **8.** p. 499. 1829.
2) *Kirchhoff*, Crelles Journal f. Mathematik. **40.** 1850. Man sehe auch *Clebsch*, Elastizitätslehre. p. 264.
3) *Strehlke*, Poggend. Ann. **4.** p. 205. 1825.

nach entgegengesetzten Richtungen schwingen: es geht daraus hervor, daß die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Teilen zerlegen muß, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abteilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Größe und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgeteilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q'}{q}\,\frac{d}{d'}.$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2\pi, \qquad q' = r'^2\pi,$$

demnach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2}{r^2}\,\frac{d}{d'}.$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schließt das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heißt, bei denen die homologen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich bei gleicher Teilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen.

Ist nämlich bei kreisrunden Platten z. B. der Radius der einen Platte r, der der andern ar, und ebenso die Dicke der einen d, der andern ad, so ist nach dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2r^2}{r^2}\,\frac{d}{ad} = \frac{a}{1}$$

und wie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem ersten Satze gezogene Folgerung.

Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu den Versuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese die Theorie von Kirchhoff, daß in ihnen eine große Zahl verschiedener Teilungen möglich ist, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder teilt sich die Platte in eine Reihe konzentrischer Zonen, oder in eine stets gerade Anzahl von gleich großen Sektoren, welche durch diametrale Knotenlinien voneinander getrennt sind, oder endlich beide Teilungsarten treten gleichzeitig auf.

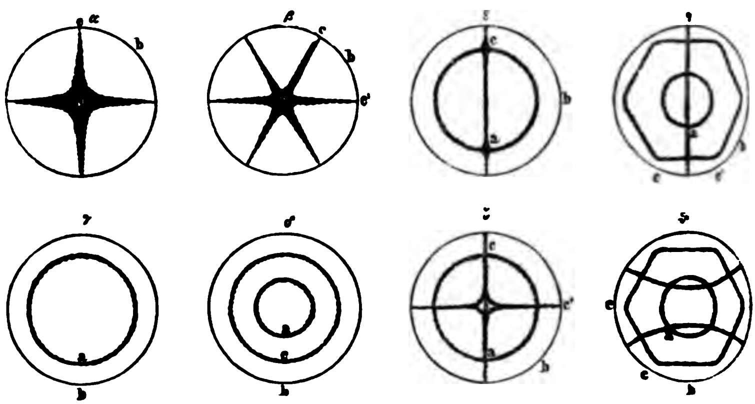
Alle diese Teilungsarten hat schon Chladni beobachtet; um sie hervorzubringen, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem andern Punkte ein und berührt sie außerdem an einem oder mehreren Punkten und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungspunkten. Fig. 260 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungspunkte sind in allen einzelnen Figuren mit a bezeichnet, der Punkt, an dem die Platte zu streichen ist, mit b, und die Berührungspunkte mit c. Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radiale

Figur (260α und β) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit zwei oder drei Durchmessern; klemmt man die Platte exzentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 260γ und δ).

Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur Bestimmung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, dessen numerischer Wert wesentlich von dem Werte des von uns mit μ bezeichneten Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation abhängt.

Kirchhoff war zur Zeit, als er diese Untersuchung durchführte, noch nicht zu dem Resultate gelangt, daß der Koeffizient der Querkontraktion für jede Substanz besonders bestimmt werden müsse, er nahm noch an, daß der Koeffizient für alle festen Körper denselben Wert hätte, ließ es aber zweifelhaft, ob der Wert von μ nach der Poissonschen Annahme gleich $\frac{1}{4}$ oder nach derjenigen von Wertheim gleich $\frac{1}{3}$ sei. Er berechnete

Fig. 260.



deshalb mit beiden Annahmen die Knotenkreise und die Schwingungszahlen kreisförmiger Platten und verglich dieselben mit den Messungen von Strehlke und Chladni.[1]) Für die Lage der Knotenkreise führen die Rechnungen mit den beiden Annahmen auf Zahlen, die sich nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler unterscheiden. So wird der Durchmesser des Knotenkreises Fig. 260γ

$$\text{für } \mu = \tfrac{1}{4} \text{ gleich } 0{,}680\,62, \qquad \text{für } \mu = \tfrac{1}{3} \text{ gleich } 0{,}679\,41$$

des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mitteilt, fand sich der Durchmesser

$$0{,}6819; \quad 0{,}6798; \quad 0{,}6812.$$

Strehlke beobachtete die Knotenkreise an vier Glasscheiben und zwei Messingscheiben; die Dicke der Glasscheiben war zwischen 1,5 und 2,5$^{\text{mm}}$,

1) Die Zahlen finden sich in *Kirchhoffs* Abhandlung, Poggend. Ann. 81. p. 258. 1850, welche die experimentellen Resultate seiner Abhandlung in Crelles Journal wiedergibt. Man sehe *Strehlke*, Poggend. Ann. 95. p. 577. 1855.

Durchmesser zwischen 16 und 19^{cm}. Die Messingscheiben waren 1,5^{mm} k und hatten die eine den Durchmesser gleich 13,5, die andere 16,2^{cm}.

Für die vier Glasscheiben fand Strehlke den Durchmesser

0,6792; 0,6782; 0,6780; 0,6770,

die Messingscheiben

0,6781; 0,6783.

Für die Knotenkreise Fig. 260δ findet Kirchhoff mit $\mu = \frac{1}{4}$

0,391 51; 0,842 00.

Strehlke erhielt an zwei Glasscheiben

0,3915; 0,8414; . . . . . 0,3911; 0,8411.

Die Figuren 260ε und 260ζ zeigen die beiden Teilungsarten gleichtig. Für den Durchmesser des Knotenkreises, Fig. 260ε, gibt die Theorie t $\mu = \frac{1}{4}$ den Wert 0,781 36, Strehlke fand auf den beiden zuletzt erähnten Glasscheiben

0,7800; 0,7792.

Für Fig. 260ζ soll der Knotenkreis gleich 0,821 94 sein, Strehlke id 0,8210 und 0,8205.

Wie man sieht, stimmen die Messungen Strehlkes mit den Messungen rchhoffs ganz vortrefflich überein.

Die Figuren 260η und 260ϑ zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, lche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei a klemmt und bei b anstreicht. Außer der gezeichneten können noch le Figuren hervorgebracht werden, Chladni[1]) gibt in seiner ersten Mitlung 80 an, dieselben sind aber alle aus Kreisen und Durchmessern, n denen letztere je zwei immer denselben Winkel einschließen, zusammensetzt, oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl wie aus den Beobachtungen ergibt sich, daß Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Teile, in welche sich Platte teilt, in einem sehr komplizierten Verhältnisse zunimmt. Die gsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Teilung durch zwei urchmesser ohne Knotenkreis. Ist r der Radius der Platte, d die halbe cke, E der Elastizitätskoeffizient und s das spezifische Gewicht der Platte, wird nach Kirchhoff die Schwingungszahl mit der Annahme

$$\mu = \tfrac{1}{4} \qquad N = 1{,}046\,04\,\frac{d}{r^2}\sqrt{\frac{E}{s}}$$

$$\mu = \tfrac{1}{3} \qquad N = 1{,}023\,57\,\frac{d}{r^2}\sqrt{\frac{E}{s}},$$

E in absolutem Maße gegeben sein muß.

Man sieht, daß die Schwingungszahlen erheblich stärker durch den ert von μ beeinflußt werden als die Werte für die Durchmesser der otenkreise.

1) Chladni, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787. Man he auch Savart, Ann. de chim. et de phys. 36. 1827.

Die übrigen Teilungen geben größere Schwingungszahlen, auf die Teilung in zwei Durchmessern folgt die Teilung der Scheibe durch einen Knotenkreis, Fig. 260γ, dann folgen die Teilungen Fig. 260β, 260ε, 260ζ, 260δ. Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt, für die angegebenen und noch einige andere Teilungen nach der Theorie von Kirchhoff, mit $\mu = \frac{1}{4}$ berechnet, und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit K überschriebene Spalte enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl n von Durchmessern durchschnitten sind.

K	$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0					1,0	1,000	2,2	2,312	4,0	4,048
1	1,6	1,613	3,9	3,703	6,0	6,408	9,5	9,644	12,7	13,393
2	6,4 +	6,956	10,1	10,838	14,4	15,305	19,0	20,325	—	—
3	15,1	15,908								

Die Schwingungszahlen wurden in später zu besprechender Weise aus den Tönen bestimmt; das Zeichen + gibt an, daß der betreffende Ton einer etwas größern Schwingungszahl entsprach. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, noch mehr weichen die mit $\mu = \frac{1}{4}$ berechneten Zahlen von den beobachteten ab, da die beobachteten Zahlen alle kleiner sind als die berechneten und die mit $\mu = \frac{1}{3}$ berechneten Zahlen noch größer sind; es ist indes dabei zu beachten, daß eine scharfe Bestimmung der Schwingungszahlen aus den Tönen mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Sehr viel besser mit der Theorie unter Voraussetzung des Wertes $\mu = 0{,}25$ stimmen die von Kirchhoff mitgeteilten[1]) Messungen Strehlkes an sechs Glasplatten überein. Wird auch jetzt die langsamste Schwingung $k = 0$, $n = 2$ gleich eins gesetzt, so erhielt Strehlke für $k = 1$, $n = 0$ Werte zwischen 1,607 und 1,613, im Mittel 1,6103; für $k = 0$, $n = 3$ Werte zwischen 2,308 und 2,313, im Mittel 2,3115; für $k = 1$, $n = 1$ Werte zwischen 3,694 und 3,700, im Mittel 3,698. Wie man sieht, weichen die gefundenen Werte von den theoretischen, 1,613—2,312—3,703 nur wenig ab, so daß für dieses Glas der Wert von μ jedenfalls sehr nahe gleich 0,25. Daß auch die von Strehlke gefundenen Werte alle etwas kleiner sind wie die theoretischen, deutet, wie es auch Voigt gefunden hat, darauf hin, daß μ für Glas noch etwas kleiner ist.

Die Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nur experimentell bestimmen; die Teilungen quadratischer Platten und damit die auf denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als diejenigen auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systeme von Knotenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel

1) *Kirchhoff*, Berl. Monatsber. Jahrg. 1877. p. 259.

n Seiten des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und hließlich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

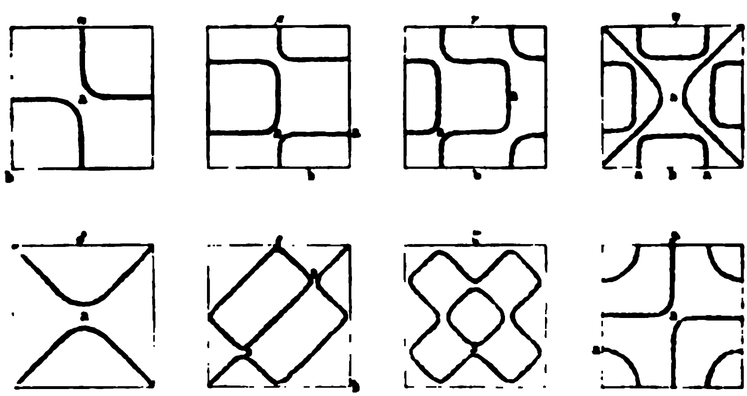
So erhält man Fig. 261 α, wenn man die Platte in der Mitte unterützt und an einer Ecke z. B. bei b anstreicht, Fig. 261 β, wenn man an n beiden Punkten a die Platte unterstützt und bei b anstreicht. Ebenso i allen übrigen Figuren sind die zu unterstützenden Punkte mit a, und ie, an denen zu streichen ist, mit b bezeichnet.

Diese Figuren sind nach der Angabe von Strehlke[1]) gezeichnet, der chgewiesen hat:

1) Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfigur sammensetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren α d δ durch zwei hyperbolische Äste gebildet.

2) Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Durchschneiden den meisten Fällen rührt daher, daß man zu viel Sand auf die Scheibe bracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen schwach werden, als daß der Sand fortgeworfen werden kann.

Fig. 261.



Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen.

In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, elche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen teilen sich die Glocken in vier Teile, die ruhenden inien liegen um einen Bogen von 90° voneinander entfernt und durchsen die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Teilung sehr icht sichtbar machen dadurch, daß man die Glocke bis etwas über ihre lbe Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung ird das Wasser stark zurückgestoßen und in wellenförmige Bewegung setzt, während es an den 45° davon entfernten Stellen der Knoten in uhe bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten hwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine it lang halten und in regelmäßigen Figuren angesammelt werden können

---

1) *Strehlke*, Poggend. Ann. 4. 1825. Doves Repertorium. 3. 1839. Poggend. nn. 27. p. 537. 1833; 95. p. 577. 1855.

Eine eigentümliche Art von Figuren hat Savart[1]) auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit staubigem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut.

Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Mitte der Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, außer den eigentlich ruhenden Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von ovaler Form (Fig. 262), jedoch immer so, daß der zugespitzte Teil der Basis der Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Bewegung der Scheibe schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe halbkugelförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 263 erscheint, wenn man die Ecken festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, daß durch diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken gehen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Teilungsart der Platte. Nach ihm ist die Scheibe der Sitz vieler übereinander

Fig. 262.

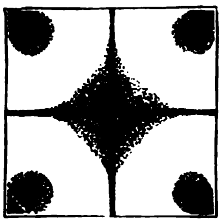
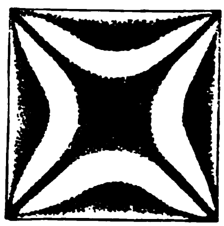


Fig. 263.



greifender Teilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, daß in der Mitte der schwingenden Abteilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf denen die Teilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Gegen diese Erklärung wandte Faraday[2]) ein, daß selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von 6 bis 10°, die jedenfalls viel größer sei als die Neigung der schwingenden Teile, ein Aufsteigen des Lycopodium der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten stattfinde und der Staub solange sich dort halten kann, als die Platte kräftig erschüttert werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche von den Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung hinwehen. Damit stimmt es überein, daß nur bei Anwendung des leichten Staubes sich diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen nicht fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stückchen von Karten

1) *Savart,* Annales de chim. et de phys. 36. 1827.

2) *Faraday,* Philosophical Transact. 121. 1831. Poggend. Ann. 26. p 193. 1832.

Winkelform in der Nähe der Vibrationszentra so befestigt wurden, daß Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe (Fig. 263) parallel lag, dann der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den nden der Karte aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch geut und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach der tte, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen lärung bildet aber das Verhalten der mit Lycopodium bestreuten Platte luftverdünnten Raum. Eine Glasscheibe wurde auf vier Korkfüßen er die Glocke der Luftpumpe gelegt und vermittelst eines an der Platte krecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Stopfbüchse der Glocke herausgeleitet war und außerhalb der Glocke in longitunale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibrieren gebracht. Da der b senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitunale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. Solange Luft unter der Glocke die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft besaß, gte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise. War r die Luft bis auf 5–3^{cm} Quecksilberdruck verdünnt, so ging das lver quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, wie es Sand in freier Luft tut, und die Wolken an den Vibrationsmittel nkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, daß diese ubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu tun haben, ß sie also nicht, wie Savart sie nannte, sekundäre Klangfiguren und lge einer zweiten Teilung der Scheibe sind, sondern daß zu ihrer Bildung Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung d, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte f die umgebende Luft. So wie der schwingende Teil der Platte sich aufrts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und ar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun die Platte m Anfange der zweiten Hälfte der Oszillation in ihre Gleichgewichtslage ückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung bedliche Luft, welche eine von der Platte fort gerichtete Geschwindigkeit sitzt, nicht so schnell als die Platte zurückkehren. Es bildet sich daher leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe , über die Platte hin eindringt. Dadurch muß notwendig ein Luftstrom tstehen, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der rksten Schwingung gerichtet ist und das Lycopodium mit sich an diese lle hinführt. Natürlich muß diese Luft auf einem andern Wege zu den otenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oszillation stauen h die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender ftstrom, der sich daran erkennen läßt, daß sich das Lycopodium über Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte der seitwärts geführt wird.[1]

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die

1 Man sehe auch *Kundt*, Poggend. Ann. **140**. p. ..

Platte mit einer Flüssigkeit bedeckte. Durch die entstehenden Ströme konnte selbst die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilicht oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

§ 146.

Drehende Schwingungen von Stäben. Außer den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir benutzten sie damals, um mit Hilfe der Pendelgesetze den Torsionskoeffizienten von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versahen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heißt, bei einer denselben erteilten Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Teil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einfach proportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen, wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so muß an dieser Grenze eine Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der primären und der reflektierten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.

Fig. 264.

Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns wie § 53 den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsachse parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab tordiert, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, welche auf einem Zylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Achse des Stabes. Die in der Richtung der Stabachse übereinander liegenden Querschnitte der Faser haben dann gegeneinander eine Verschiebung erhalten, und die Kraft, welche diese Querschnitte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, ist nach § 53 dem Verschiebungswinkel proportional. Stellt $amoq$ (Fig. 264) eine Faser in tordierten Zustande des Stabes vor, welche im Gleichgewichtszustande die Lage ab hat, so ist der Winkel oms der Verschiebungswinkel des Querschnitts o der Faser gegen den Querschnitt m, der Winkel qov derjenige des Querschnittes q gegen o. Die Kraft, mit welcher der Querschnitt o in seine Gleichgewichtslage in bezug auf m, also nach s hin getrieben wird, ist nach § 53

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot oms \cdot dq,$$

wenn wir mit dq den Querschnitt der Faser bezeichnen. Ebenso ist

$$\frac{E}{1(1+\mu)} \cdot qov \cdot dq$$

Kraft, welche den Querschnitt o in bezug auf q, also von s fort in ne Gleichgewichtslage treibt. Die den Querschnitt dq nach s, also auch gen seine Gleichgewichtslage nach p hin treibende Kraft ist dann

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\, dq(oms - qov).$$

Nennen wir den Abstand der Faser von der Stabachse r, so erhält r Querschnitt des Stabes, zu welchem dq gehört, infolge dieser an dq greifenden Kraft das Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\, r\,dq\,(oms - qov).$$

Das Drehungsmoment, welches der ganze Querschnitt des Stabes gegen ne Gleichgewichtslage erhält, ist dann gleich der Summe der für alle ächenelemente dq dieses Querschnittes sich ergebenden Momente. Zur ldung dieser Summe können wir zunächst das Flächenelement dq ersen durch einen Ring von der Breite dr, dessen Radius gleich r, gleich m Abstande der betrachteten Faser von der Stabachse ist, denn für alle sen Ring zusammensetzenden Elemente dq hat r und ebenso der Verhiebungswinkel genau denselben Wert. Die Fläche dieses Ringes ist $\pi r dr$, und damit wird das Drehungsmoment von den an diesem Ringe greifenden Kräften

$$2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\, r^2 dr(oms - qov).$$

Nun sei der Winkel, um welchen der um x von dem Ende des Stabes tfernte Querschnitt m gedreht ist, gleich φ, damit ist die Länge des ogens $r\varphi$. Der Querschnitt o, der um dx weiter vom Stabende entfernt t, sei dann um den Winkel φ' gedreht, so daß der Bogen $op = r\varphi'$ ist. dem rechtwinkligen Dreiecke osm ist dann $os = r(\varphi' - \varphi)$, somit

$$\operatorname{tang} oms = \frac{os}{sm} = \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx}.$$

Nennen wir den Winkel, um welchen der Querschnitt q gedreht ist, ", so wird ebenso

$$\operatorname{tang} qov = \frac{r(\varphi'' - \varphi)}{dx}.$$

Bei der Kleinheit der Winkel können wir die Bögen durch ihre Tanten ersetzen und erhalten dann für das Drehungsmoment

$$2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\, r^3 dr\,\frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi)}{dx}.$$

Das den ganzen Querschnitt zurückdrehende Moment erhalten wir in r Summe der für alle einzelnen Ringe gebildeten Momente, somit, wenn r Radius des Stabes gleich ϱ ist,

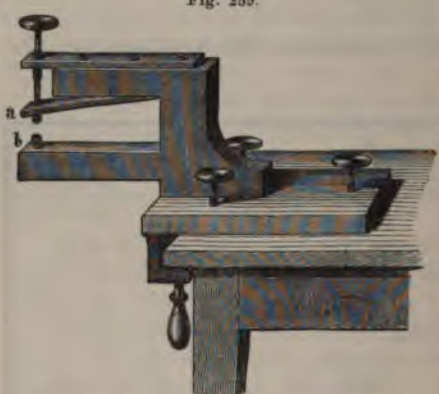
$$\int_0^{\varrho} 2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\,\frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi)}{dx}\cdot r^3 dr.$$

Poisson entwickelt worden[1]) und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff[2]) hat indes von der letztern nachgewiesen, daß sie nicht in allen Punkten richtig ist und an Stelle der Poissonschen eine neue Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten gegeben. Wir werden die Resultate der Kirchhoffschen Theorie nachher mit den Versuchen zusammenstellen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen oder sich in schwingende Teile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, Knotenlinien, voneinander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere durch Knotenlinien getrennte schwingende Teile. Theorie und Versuche beweisen, daß die Teilung der Platten höchst mannigfaltig sein kann.

Um die Teilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Teil der Platte für sich schwingt, und um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das vorhin schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die zu untersuchenden Platten mit trocknem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Teilen der Platte fortgeworfen wird und sich auf den ruhenden Stellen, den Knotenlinien, ansammelt. Es entstehen so auf der Platte regelmäßige Figuren, welche von Chladni Klangfiguren genannt sind.

Fig. 259.



Um die Platte in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer andern Stelle mit der von Strehlke[3]) angegebenen Gabel (Fig. 259), indem man sie mittels der Schraube zwischen den beiden mit Tuch überbundenen Köpfen *a* und *b* befestigt. Diese über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht ritzen. Die Platte wird mit einem mit Kolophonium versehenen Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten. Der Bogen muß senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen solange fortgesetzt werden, bis keine vereinzelten Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Teile, welche gleichzeitig

1) *Poisson,* Mémoires de l'Acad. de France. **8.** p. 499. 1829.
2) *Kirchhoff*, Crelles Journal f. Mathematik. **40.** 1850. Man sehe auch *Clebsch,* Elastizitätslehre. p. 264.
3) *Strehlke,* Poggend. Ann. **4.** p. 205. 1825.

nach entgegengesetzten Richtungen schwingen: es geht daraus hervor, daß die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Teilen zerlegen muß, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abteilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Größe und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgeteilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q'}{q} \frac{d}{d'} .$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2 \pi, \qquad q' = r'^2 \pi,$$

demnach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2}{r^2} \frac{d}{d'} .$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schließt das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heißt, bei denen die homologen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich bei gleicher Teilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen.

Ist nämlich bei kreisrunden Platten z. B. der Radius der einen Platte r, der der andern ar, und ebenso die Dicke der einen d, der andern ad, so ist nach dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2 r^2}{r^2} \frac{d}{ad} = \frac{a}{1}$$

und wie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem ersten Satze gezogene Folgerung.

Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu den Versuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese die Theorie von **Kirchhoff**, daß in ihnen eine große Zahl verschiedener Teilungen möglich ist, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder teilt sich die Platte in eine Reihe konzentrischer Zonen, oder in eine stets gerade Anzahl von gleich großen Sektoren, welche durch diametrale Knotenlinien voneinander getrennt sind, oder endlich beide Teilungsarten treten gleichzeitig auf.

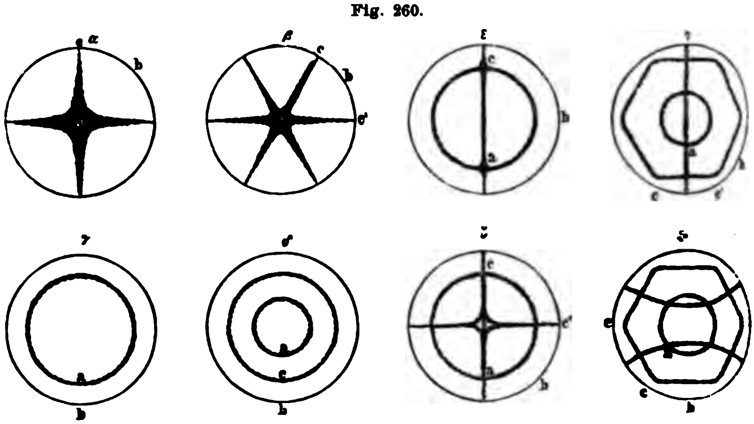
Alle diese Teilungsarten hat schon **Chladni** beobachtet; um sie hervorzubringen, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem andern Punkte ein und berührt sie außerdem an einem oder mehreren Punkten und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungspunkten. Fig. 260 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungspunkte sind in allen einzelnen Figuren mit a bezeichnet, der Punkt, an dem die Platte zu streichen ist, mit b, und die Berührungspunkte mit c. Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radiale

Figur (260α und β) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit zwei oder drei Durchmessern; klemmt man die Platte exzentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 260γ und δ).

Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur Bestimmung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, dessen numerischer Wert wesentlich von dem Werte des von uns mit μ bezeichneten Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation abhängt.

Kirchhoff war zur Zeit, als er diese Untersuchung durchführte, noch nicht zu dem Resultate gelangt, daß der Koeffizient der Querkontraktion für jede Substanz besonders bestimmt werden müsse, er nahm noch an, daß der Koeffizient für alle festen Körper denselben Wert hätte, ließ es aber zweifelhaft, ob der Wert von μ nach der Poissonschen Annahme gleich $\frac{1}{4}$ oder nach derjenigen von Wertheim gleich $\frac{1}{3}$ sei. Er berechnete

Fig. 260.



deshalb mit beiden Annahmen die Knotenkreise und die Schwingungszahlen kreisförmiger Platten und verglich dieselben mit den Messungen von Strehlke und Chladni.[1]) Für die Lage der Knotenkreise führen die Rechnungen mit den beiden Annahmen auf Zahlen, die sich nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler unterscheiden. So wird der Durchmesser des Knotenkreises Fig. 260γ

$$\text{für } \mu = \tfrac{1}{4} \text{ gleich } 0{,}68062, \qquad \text{für } \mu = \tfrac{1}{3} \text{ gleich } 0{,}67941$$

des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mitteilt, fand sich der Durchmesser

$$0{,}6819; \quad 0{,}6798; \quad 0{,}6812.$$

Strehlke beobachtete die Knotenkreise an vier Glasscheiben und zwei Messingscheiben; die Dicke der Glasscheiben war zwischen 1,5 und 2,5$^{\text{mm}}$,

1) Die Zahlen finden sich in *Kirchhoffs* Abhandlung, Poggend. Ann. 81. p. 258. 1850, welche die experimentellen Resultate seiner Abhandlung in Crelles Journal wiedergibt. Man sehe *Strehlke*, Poggend. Ann. 95. p. 577. 1855.

Durchmesser zwischen 16 und 19^{cm}. Die Messingscheiben waren 1,5^{mm} k und hatten die eine den Durchmesser gleich 13,5, die andere 16,2^{cm}.

Für die vier Glasscheiben fand Strehlke den Durchmesser

$$0{,}6792;\quad 0{,}6782;\quad 0{,}6780;\quad 0{,}6770,$$

r die Messingscheiben

$$0{,}6781;\quad 0{,}6783.$$

Für die Knotenkreise Fig. 260 δ findet Kirchhoff mit $\mu = \frac{1}{4}$

$$0{,}391\,51;\quad 0{,}842\,00.$$

Strehlke erhielt an zwei Glasscheiben

$$0{,}3915;\quad 0{,}8414;\quad \ldots\ldots\quad 0{,}3911;\quad 0{,}8411.$$

Die Figuren 260 ε und 260 ζ zeigen die beiden Teilungsarten gleichtig. Für den Durchmesser des Knotenkreises, Fig. 260 ε, gibt die Theorie t $\mu = \frac{1}{4}$ den Wert 0,781 36, Strehlke fand auf den beiden zuletzt erhnten Glasscheiben

$$0{,}7800;\quad 0{,}7792.$$

Für Fig. 260 ζ soll der Knotenkreis gleich 0,821 94 sein, Strehlke id 0,8210 und 0,8205.

Wie man sieht, stimmen die Messungen Strehlkes mit den Messungen rchhoffs ganz vortrefflich überein.

Die Figuren 260 η und 260 ϑ zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, lche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei a klemmt und bei b anstreicht. Außer der gezeichneten können noch le Figuren hervorgebracht werden, Chladni[1]) gibt in seiner ersten Mitlung 80 an, dieselben sind aber alle aus Kreisen und Durchmessern, n denen letztere je zwei immer denselben Winkel einschließen, zusammensetzt, oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl wie aus den Beobachtungen ergibt sich, daß Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Teile, in welche sich Platte teilt, in einem sehr komplizierten Verhältnisse zunimmt. Die gsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Teilung durch zwei rchmesser ohne Knotenkreis. Ist r der Radius der Platte, d die halbe cke, E der Elastizitätskoeffizient und s das spezifische Gewicht der Platte, wird nach Kirchhoff die Schwingungszahl mit der Annahme

$$\mu = \tfrac{1}{4} \qquad N = 1{,}046\,04\,\frac{d}{r^2}\sqrt{\frac{E}{s}}$$

$$\mu = \tfrac{1}{3} \qquad N = 1{,}023\,57\,\frac{d}{r^2}\sqrt{\frac{E}{s}},$$

E in absolutem Maße gegeben sein muß.

Man sieht, daß die Schwingungszahlen erheblich stärker durch den rt von μ beeinflußt werden als die Werte für die Durchmesser der otenkreise.

1) Chladni, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787. Man e auch Savart, Ann. de chim. et de phys. 36. 1827.

Die übrigen Teilungen geben größere Schwingungszahlen, auf die Teilung in zwei Durchmessern folgt die Teilung der Scheibe durch einen Knotenkreis, Fig. 260γ, dann folgen die Teilungen Fig. 260β, 260ε, 260ζ, 260δ. Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt, für die angegebenen und noch einige andere Teilungen nach der Theorie von Kirchhoff, mit $\mu = \frac{1}{4}$ berechnet, und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit K überschriebene Spalte enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl n von Durchmessern durchschnitten sind.

K	$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0					1,0	1,000	2,2	2,312	4,0	4,048
1	1,6	1,613	3,9	3,703	6,0	6,408	9,5	9,644	12,7	13,393
2	6,4 +	6,956	10,1	10,838	14,4	15,305	19,0	20,825	—	—
3	15,1	15,903								

Die Schwingungszahlen wurden in später zu besprechender Weise aus den Tönen bestimmt; das Zeichen + gibt an, daß der betreffende Ton einer etwas größern Schwingungszahl entsprach. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, noch mehr weichen die mit $\mu = \frac{1}{3}$ berechneten Zahlen von den beobachteten ab, da die beobachteten Zahlen alle kleiner sind als die berechneten und die mit $\mu = \frac{1}{3}$ berechneten Zahlen noch größer sind; es ist indes dabei zu beachten, daß eine scharfe Bestimmung der Schwingungszahlen aus den Tönen mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Sehr viel besser mit der Theorie unter Voraussetzung des Wertes $\mu = 0{,}25$ stimmen die von Kirchhoff mitgeteilten[1]) Messungen Strehlkes an sechs Glasplatten überein. Wird auch jetzt die langsamste Schwingung $k = 0$, $n = 2$ gleich eins gesetzt, so erhielt Strehlke für $k = 1$, $n = 0$ Werte zwischen 1,607 und 1,613, im Mittel 1,6103; für $k = 0$, $n = 3$ Werte zwischen 2,308 und 2,313, im Mittel 2,3115; für $k = 1$, $n = 1$ Werte zwischen 3,694 und 3,700, im Mittel 3,698. Wie man sieht, weichen die gefundenen Werte von den theoretischen, 1,613—2,312—3,703 nur wenig ab, so daß für dieses Glas der Wert von μ jedenfalls sehr nahe gleich 0,25. Daß auch die von Strehlke gefundenen Werte alle etwas kleiner sind wie die theoretischen, deutet, wie es auch Voigt gefunden hat, darauf hin, daß μ für Glas noch etwas kleiner ist.

Die Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nur experimentell bestimmen; die Teilungen quadratischer Platten und damit die auf denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als diejenigen auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systeme von Knotenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel

1) *Kirchhoff*, Berl. Monatsber. Jahrg. 1877. p. 259.

den Seiten des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und schließlich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

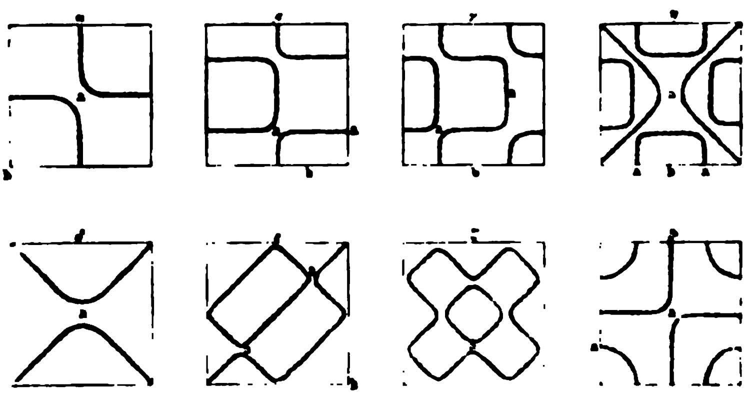
So erhält man Fig. 261 α, wenn man die Platte in der Mitte unterstützt und an einer Ecke z. B. bei *b* anstreicht, Fig. 261 β, wenn man an den beiden Punkten *a* die Platte unterstützt und bei *b* anstreicht. Ebenso bei allen übrigen Figuren sind die zu unterstützenden Punkte mit *a*, und jene, an denen zu streichen ist, mit *b* bezeichnet.

Diese Figuren sind nach der Angabe von Strehlke[1]) gezeichnet, der nachgewiesen hat:

1) Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfigur zusammensetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren α und δ durch zwei hyperbolische Äste gebildet.

2) Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Durchschneiden in den meisten Fällen rührt daher, daß man zu viel Sand auf die Scheibe gebracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen zu schwach werden, als daß der Sand fortgeworfen werden kann.

Fig. 261.



Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen.

In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, welche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen teilen sich die Glocken in vier Teile, die ruhenden Linien liegen um einen Bogen von 90° voneinander entfernt und durchsetzen die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Teilung sehr leicht sichtbar machen dadurch, daß man die Glocke bis etwas über ihre halbe Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung wird das Wasser stark zurückgestoßen und in wellenförmige Bewegung gesetzt, während es an den 45° davon entfernten Stellen der Knoten in Ruhe bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten Schwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine Zeit lang halten und in regelmäßigen Figuren angesammelt werden können.

---

1) *Strehlke*, Poggend. Ann. 4. 1825. Doves Repertorium 3. 1839. Poggend. Ann. 27. p. 537. 1833; 95. p. 577. 1855.

Eine eigentümliche Art von Figuren hat Savart[1]) auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit staubigem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut.

Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Mitte der Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, außer den eigentlich ruhenden Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von ovaler Form (Fig. 262), jedoch immer so, daß der zugespitzte Teil der Basis der Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Bewegung der Scheibe schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe halbkugelförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 263 erscheint, wenn man die Ecken festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, daß durch diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken gehen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Teilungsart der Platte. Nach ihm ist die Scheibe der Sitz vieler übereinander

Fig. 262.

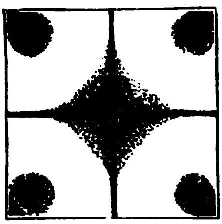
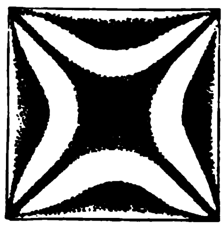


Fig. 263.



greifender Teilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, daß in der Mitte der schwingenden Abteilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf denen die Teilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Gegen diese Erklärung wandte Faraday[2]) ein, daß selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von 6 bis 10°, die jedenfalls viel größer sei als die Neigung der schwingenden Teile, ein Aufsteigen des Lycopodium der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten stattfinde und der Staub solange sich dort halten kann, als die Platte kräftig erschüttert werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche von den Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung hinwehen. Damit stimmt es überein, daß nur bei Anwendung des leichten Staubes sich diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen nicht fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stückchen von Karten

1) *Savart,* Annales de chim. et de phys. **36.** 1827.

2) *Faraday,* Philosophical Transact. **121.** 1831. Poggend. Ann. **26.** p. 193. 1832.

in Winkelform in der Nähe der Vibrationszentra so befestigt wurden, daß ein Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe (Fig. 263) parallel lag, daß dann der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den Wänden der Karte aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch gestreut und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach der Platte, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen Erklärung bildet aber das Verhalten der mit Lycopodium bestreuten Platte im luftverdünnten Raum. Eine Glasscheibe wurde auf vier Korkfüßen unter die Glocke der Luftpumpe gelegt und vermittelst eines an der Platte senkrecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Stopfbüchse aus der Glocke herausgeleitet war und außerhalb der Glocke in longitudinale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibrieren gebracht. Da der Stab senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitudinale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. Solange die Luft unter der Glocke die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft besaß, zeigte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise. War aber die Luft bis auf 5—3^{cm} Quecksilberdruck verdünnt, so ging das Pulver quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, wie es der Sand in freier Luft tut, und die Wolken an den Vibrationsmittelpunkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, daß diese Staubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu tun haben, daß sie also nicht, wie Savart sie nannte, sekundäre Klangfiguren und Folge einer zweiten Teilung der Scheibe sind, sondern daß zu ihrer Bildung das Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung sind, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte auf die umgebende Luft. So wie der schwingende Teil der Platte sich aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und zwar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun die Platte beim Anfange der zweiten Hälfte der Oszillation in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung befindliche Luft, welche eine von der Platte fort gerichtete Geschwindigkeit besitzt, nicht so schnell als die Platte zurückkehren. Es bildet sich daher ein leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe ist, über die Platte hin eindringt. Dadurch muß notwendig ein Luftstrom entstehen, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der stärksten Schwingung gerichtet ist und das Lycopodium mit sich an diese Stelle hinführt. Natürlich muß diese Luft auf einem andern Wege zu den Knotenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oszillation stauen sich die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender Luftstrom, der sich daran erkennen läßt, daß sich das Lycopodium über den Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte wieder seitwärts geführt wird.[1]

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die

[1] Man sehe auch *Kundt*, Poggend. Ann. 140. p. 297. 1870.

Platte mit einer Flüssigkeit bedeckte. Durch die entstehenden Ströme konnte selbst die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilicht oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

§ 146.

Drehende Schwingungen von Stäben. Außer den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir benutzten sie damals, um mit Hilfe der Pendelgesetze den Torsionskoeffizienten von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versahen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heißt, bei einer denselben erteilten Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Teil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einfach proportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen, wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so muß an dieser Grenze eine Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der primären und der reflektierten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.

Fig. 264.

Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns wie § 53 den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsachse parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab tordiert, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, welche auf einem Zylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Achse des Stabes. Die in der Richtung der Stabachse übereinander liegenden Querschnitte der Faser haben dann gegeneinander eine Verschiebung erhalten, und die Kraft, welche diese Querschnitte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, ist nach § 53 dem Verschiebungswinkel proportional. Stellt $amoq$ (Fig. 264) eine Faser im tordierten Zustande des Stabes vor, welche im Gleichgewichtszustande die Lage ab hat, so ist der Winkel oms der Verschiebungswinkel des Querschnitts o der Faser gegen den Querschnitt m, der Winkel qov derjenige des Querschnittes q gegen o. Die Kraft, mit welcher der Querschnitt o in seine Gleichgewichtslage in bezug auf m, also nach s hin getrieben wird, ist nach § 53

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot oms \cdot dq,$$

wenn wir mit dq den Querschnitt der Faser bezeichnen. Ebenso ist

$$\frac{E}{1(1+\mu)} \cdot qov \cdot dq$$

ie Kraft, welche den Querschnitt o in bezug auf q, also von s fort in ine Gleichgewichtslage treibt. Die den Querschnitt dq nach s, also auch egen seine Gleichgewichtslage nach p hin treibende Kraft ist dann

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\,dq(oms - qov).$$

Nennen wir den Abstand der Faser von der Stabachse r, so erhält er Querschnitt des Stabes, zu welchem dq gehört, infolge dieser an dq ngreifenden Kraft das Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\,r\,dq(oms - qov).$$

Das Drehungsmoment, welches der ganze Querschnitt des Stabes gegen eine Gleichgewichtslage erhält, ist dann gleich der Summe der für alle Flächenelemente dq dieses Querschnittes sich ergebenden Momente. Zur Bildung dieser Summe können wir zunächst das Flächenelement dq ersetzen durch einen Ring von der Breite dr, dessen Radius gleich r, gleich dem Abstande der betrachteten Faser von der Stabachse ist, denn für alle diesen Ring zusammensetzenden Elemente dq hat r und ebenso der Verschiebungswinkel genau denselben Wert. Die Fläche dieses Ringes ist $2\pi r dr$, und damit wird das Drehungsmoment von den an diesem Ringe angreifenden Kräften

$$2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\,r^2 dr(oms - qov).$$

Nun sei der Winkel, um welchen der um x von dem Ende des Stabes entfernte Querschnitt m gedreht ist, gleich φ, damit ist die Länge des Bogens $r\varphi$. Der Querschnitt o, der um dx weiter vom Stabende entfernt ist, sei dann um den Winkel φ' gedreht, so daß der Bogen $op = r\varphi'$ ist. In dem rechtwinkligen Dreiecke osm ist dann $os = r(\varphi' - \varphi)$, somit

$$\operatorname{tang} oms = \frac{os}{sm} = \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx}.$$

Nennen wir den Winkel, um welchen der Querschnitt q gedreht ist, φ'', so wird ebenso

$$\operatorname{tang} qov = \frac{r(\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Bei der Kleinheit der Winkel können wir die Bögen durch ihre Tangenten ersetzen und erhalten dann für das Drehungsmoment

$$2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\,r^3 dr\,\frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Das den ganzen Querschnitt zurückdrehende Moment erhalten wir in der Summe der für alle einzelnen Ringe gebildeten Momente, somit, wenn der Radius des Stabes gleich ϱ ist,

$$\int_0^{\varrho} 2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\,\frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}\cdot r^3 dr.$$

Da in dieser Summe nur r veränderlich ist, so wird dieselbe

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\varrho^4 \pi}{2} \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Um die dem Querschnitt gegen die Gleichgewichtslage hin ert schleunigung zu erhalten, müssen wir das Drehungsmoment durch d heitsmoment desselben dividieren. Nennen wir die Dichtigkeit des also die Masse der Volumeinheit d, und die Dicke des betrachtete schnittes, die wir gleich dem Abstande zweier Querschnitte setzen dx, so wird nach § 19 das Trägheitsmoment

$$d \frac{\varrho^4 \pi}{2} dx,$$

und damit die Beschleunigung

$$\frac{E}{2(1+\mu)d} \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx^2}.$$

Der Zähler des zweiten Bruches in diesem Ausdruck ist nichts als das zweite Differential $d^2\varphi$; die Gleichung, welche der Bewegu Stabes zugrunde liegt, wird demnach

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{E}{2(1+\mu)d} \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

dieselbe, hier auf die Winkelbeschleunigung sich beziehende Gleich der wir § 128 gelangten. Wird also an irgend einer Stelle ein begrenzten Stabes durch Torsion eine schwingende Bewegung erzeu der Amplitude 2α, so pflanzt sich dieselbe durch den Stab nach dem erkannten Gesetze fort, so daß im Abstande x von der Erregungsste Zeit t die Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right),$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Beweg

$$c = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

somit die Wellenlänge

$$\lambda = cT = T \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

und die Schwingungsdauer

$$T = \lambda \sqrt{2(1+\mu)} \sqrt{\frac{d}{E}}$$

ist.

Alle diese Ausdrücke unterscheiden sich von den für die longitudi Schwingungen nur durch den Faktor $\sqrt{2(1+\mu)}$, also nur so weit an Stelle des Elastizitätskoeffizienten der Torsionskoeffizient tritt.

Daraus folgt, daß die Gesetze der drehenden Schwingungen drischer Stäbe vollständig mit denen der longitudinalen Schwing (§ 140) zusammenfallen, so daß es überflüssig ist, dieselben im ein zu entwickeln; es genügt eine kurze Andeutung.

Ein an seinem einen Ende fester Stab kann nur solche stehende Wellen halten, für welche die Länge des Stabes eine ungerade Anzahl von ein Viertel Wellenlängen beträgt; es folgt somit für die Schwingungsdauer und Schwingungsanzahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n+1)c} \qquad N_n = (2n+1)\frac{c}{4l},$$

Die langsamsten sind jene, für welche $n = 0$, somit die Schwingungsdauer

$$T = \frac{4l}{c}.$$

Dieselbe ist somit gleich der vierfachen Stablänge, dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung.

Ist der Stab an beiden Enden fest oder frei, so kann derselbe alle diejenigen Schwingungen vollführen, für welche seine Länge irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist; die langsamsten Schwingungen sind

$$T = \frac{2l}{c};$$

die Schwingungsdauer ist somit die Hälfte, die Schwingungsanzahl die doppelte von derjenigen eines an seinem einen Ende festen Stabes. Die übrigen Schwingungszahlen sind gegeben durch den Ausdruck

$$N_n = n\frac{c}{2l},$$

worin n jede ganze Zahl sein kann.

Zwischen den gleichen Teilungen zylindrischer Stäbe entsprechenden Schwingungszahlen der longitudinalen und drehenden Schwingungen ergibt sich eine äußerst einfache Beziehung.[1] Dividieren wir die einer gleichen Teilung entsprechende Anzahl longitudinaler Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2l}\cdot\sqrt{\frac{E}{d}}$$

durch jene der drehenden Schwingungen, so wird

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{2(1+\mu)}.$$

Eine Vergleichung der Schwingungszahlen kann also ebenfalls über den Wert von μ, des Verhältnisses von Querkontraktion zur Längendilatation Aufschluß geben. Nach den Versuchen von Chladni[2] soll das Verhältnis der Schwingungszahlen wie 3 zu 2 sein, danach wäre $\mu = 0{,}125$; nach Versuchen von Savart[3] wäre $\frac{N'}{N} = \frac{10}{6}$, somit $\mu = 0{,}39$. Ausführlichere Versuche zur Bestimmung dieses Verhältnisses hat Wertheim angestellt.[4] Folgende kleine Tabelle enthält die Resultate der Versuche:

1) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. 8. p. 456. 1829.
2) *Chladni*, Akustik p. 110.
3) *Savart* in dem zitierten Memoire von Poisson. p. 456.
4) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. 50. (3). p. 262. 1857.

Stab von	Länge	Radius	Schwingungszahl longit. N'	Schwingungszahl drehend N	$\frac{N'}{N}$	μ
Eisen.	2m,061	8mm,220	1255,6	766,5	1,637	0,339
Eisen.	2,005	5,501	1267,8	771,1	1,643	0,349
Gußstahl . . .	2,000	5,055	1286,4	787,7	1,638	0,333
Messing. . . .	2,000	5,031	864,5	531,1	1,628	0,325

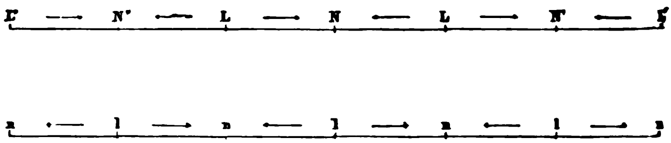
Schneebeli[1]) fand an Stahlstäben von nahe 1m Länge und 15 bis 20mm Dicke, nachdem er sie durch sorgfältiges Erwärmen möglichst homogen gemacht hatte, im federharten Zustande $\frac{N'}{N} = 1{,}6102$, woraus das schon § 53 mitgeteilte Resultat dieser Versuche $\mu = 0{,}296$ folgt. Im weichen Zustande gaben die Stäbe $\frac{N'}{N} = 1{,}613$ und $\mu = 0{,}302$.

Interessant ist der von Schneebeli bei diesen Versuchen geführte experimentelle Nachweis, daß auch für die zweiten Schwingungen, bei welchen der Stab mit zwei Knoten schwingt, das Verhältnis der Schwingungszahlen genau das gleiche ist, wie es die Theorie verlangt.

§ 147.

Zusammengesetzte Schwingungen. Wenn man einen Stab seiner Länge nach reibt, so sahen wir, daß er in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Diese longitudinalen Schwingungen treten indes, wie zuerst F. Savart[2]) gezeigt hat, fast niemals allein auf, sondern stets in Verbindung mit transversalen Schwingungen. Bestreut man nämlich einen longitudinal schwingenden parallelepipedischen oder zylindrischen Stab mit Sand, so ordnet sich nach den Beobachtungen Savarts der Sand auf den Stäben in gewissen Linien, indem er nicht hüpfend wie bei der transversalen Schwingung der Stäbe, sondern der Oberfläche parallel sehr rasch verschoben wird. So bilden sich solche Knotenlinien schon auf Stäben, welche an beiden Enden frei ihre langsamsten longitudinalen Schwingungen vollführen, in großer Zahl, während doch der Stab in bezug auf die longitudinalen

Fig. 265.



Schwingungen nur eine Knotenlinie in der Mitte besitzt. Der Sand verschiebt sich auf der Oberfläche, $L'L''$ Fig. 265, wie die Pfeilstriche es angeben, von den Punkten L zu den Punkten N.

1) *Schneebeli,* Poggend. Ann. **140**. p. 598. 1870.
2) *F. Savart,* Annales de chim. et de phys. **14**. **1820**; **25**. **1824**. Doves Repertorium. **6**. 1842.

Ferner fand Savart, wenn man auf der obern Seite des Stabes die Linien der Sandanhäufungen markiert, dann den Stab umkehrt und ihn mit Sand bestreut, nachdem man ihn in Schwingung versetzt hat, daß die Linien der Sandanhäufung auf dieser Seite zwischen denen der obern Seite liegen, daß sie (Fig. 265) von den Punkten *l*, welche gerade den Punkten *N* der obern Seite gegenüber liegen, sich nach den Punkten *n* bewegen.

Auf Stäben mit quadratischem oder kreisförmigem Querschnitt liegen sie auf einer schraubenförmigen Linie, die sich entweder rechts oder links gewunden, oder von der Mitte aus nach der einen Seite rechts, nach der andern links gewunden um den Stab herumlegt.

Durch viele Versuche an Stäben, welche an beiden Enden frei waren, gelangte Savart zu folgenden die Zwischenräume zwischen den Sandanhäufungen bedingenden Gesetzen.[1])

Die Zwischenräume der Sandanhäufungen sind

1) in Stäben von rechteckigem Querschnitt konstant bei verschiedener Breite, wenn nur die Länge und Dicke der Stäbe ungeändert bleibt;

2) proportional der Quadratwurzel aus der Dicke bei gleicher Länge;

3) proportional der Quadratwurzel aus der Länge bei gleicher Dicke.

Schon aus diesen Gesetzen folgt, daß diese Sandanhäufungen von Transversalschwingungen des Stabes herrühren, welche die longitudinalen begleiten und ihnen isochron sind.

Denn nach dem ersten Gesetze sind sie von den Breiten der Stäbe unabhängig, wir wissen, daß das sowohl für die longitudinalen als die transversalen Schwingungen der Fall ist.

Nach dem zweiten Gesetze sind sie proportional den Quadratwurzeln aus den Dicken. Die longitudinalen Schwingungen sind von der Dicke der Stäbe unabhängig, die transversalen derselben umgekehrt proportional. Sollen daher die Schwingungen isochron sein, so müssen sich die transversalen stehenden Wellen bei dickern Stäben soviel verlängern, daß sie wieder in demselben Verhältnisse langsamer werden, als sie wegen der geänderten Dicke bei gleicher Länge rascher geworden wären. Die Schwingungsdauer der transversalen Schwingungen ist nun dem Quadrate der Längen proportional. Verhalten sich demnach die Längen der stehenden Wellen bei verschiedener Dicke der Stäbe wie die Quadratwurzeln aus den Dicken, so sind die Schwingungen isochron.

Ebenso stimmt das dritte Gesetz, denn da die Dauer einer longitudinalen Schwingung der Länge des Stabes, die einer transversalen Schwingung aber dem Quadrate derselben proportional ist, so müssen bei verschiedener Länge des Stabes die Längen der Transversalwellen proportional der Quadratwurzel dieser Länge geändert werden, um den longitudinalen Schwingungen isochron zu sein.

So findet auch Savart bei gespannten Streifen oder Saiten die Zwischenräume jener Knoten proportional der Länge und der Quadratwurzel aus der Spannung in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Linien von einer isochronen Transversalbewegung herrühren.

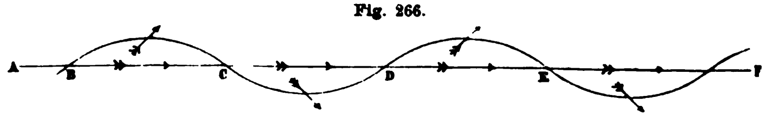
1) *F. Savart*, Annales de chim. et de phys. 65. 1837. Doves Repertorium p. 60. 1842. (Dargestellt von *Seebeck*.)

Ferner auch, wenn man auf einem Stabe die Sandstellen bezeichnet und ihn sodann mit dem Bogen in gewöhnliche transversale Schwingungen versetzt, so daß die Länge der stehenden Welle gleich ist dem Abstande von einer Sandstelle der obern Seite bis zur nächsten Sandstelle der untern Fläche, so sind die Schwingungszahlen in der Tat dieselben, als die der longitudinalen Schwingungen; dasselbe ist der Fall bei gespannten Saiten oder Streifen. Die Erklärung, welche Savart von diesen Linien gibt, anzuführen, wollen wir hier unterlassen, da Seebeck die Unrichtigkeit derselben nachgewiesen hat und statt dessen die Seebecksche Erklärung folgen lassen.[1]

Infolge der koexistierenden transversalen und longitudinalen Schwingungen der Teilchen der Stäbe beschreiben die Teilchen derselben die Resultante aus beiden Bewegungen, im allgemeinen elliptische Bahnen, § 132. Ist nun die Resultante gegen die Sandkörner gerichtet, so stößt sie dieselben in ihrer Richtung, das heißt unter einem spitzen Winkel gegen die wagerechte Fläche des Stabes fort; ist sie aber während der nächsten Halbschwingung von den Sandkörnern weggerichtet, so läßt sie dieselben liegen. Daraus ergibt sich ganz einfach, daß der Sand auf die abwechselnden Knoten der transversalen Wellen getrieben werden müsse.

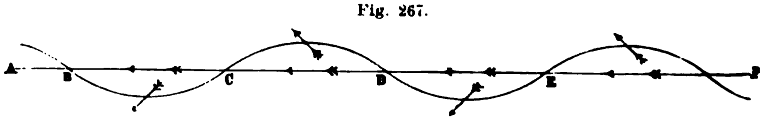
Es sei z. B. AF ein Stück des Stabes (Fig. 266), welches in longitudinaler Schwingung nach rechts gedacht werde, während die Ordinaten

Fig. 266.



der gezeichneten Wellenlinien die transversalen Geschwindigkeiten darstellen mögen, so daß also die zwischen B und C liegenden Punkte sich zugleich nach rechts und oben, die zwischen C und D liegenden nach rechts und unten bewegen usf. Alsdann haben die aus beiden Bewegungen resultierenden Geschwindigkeiten zwischen B und C sowohl als in den andern Strecken die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile und man sieht leicht, daß der über BC liegende Sand nach C, der über DE liegende nach E getrieben wird, während der über CD und EF liegende Sand jetzt liegen bleibt. In der folgenden Zeit gehen beide Bewegungen in die entgegengesetzten über (Fig. 267). Die longitudinale Bewegung ist auf der

Fig. 267.



ganzen Strecke AF von der Rechten zur Linken gerichtet, die transversale zwischen BC und DE nach unten, zwischen CD und EF nach oben. Die resultierende Bewegung hat die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile, und man sieht, wie jetzt der Sand von CD nach C, von EF nach

1) *Seebeck* in Dove, Repertorium. 8. p. 53. 1849.

E geschoben wird, während er jetzt zwischen *BC* und *DE* liegen bleibt. Daher wird sich der Sand in *C* und *E* ansammeln, dagegen die Stellen *B, D, F* leer werden, oder die alternierenden Schwingungsknoten der transversalen Schwingungen müssen mit Sand bedeckt werden.

Kehrt man den Stab um, so daß die vorhin untere Seite zur obern wird, so ergibt sich aus obiger Entwicklung unmittelbar, daß jetzt die vorher unbedeckten Knotenlinien bedeckte werden, und die vorhin bedeckten leer werden müssen, d. h. auf der untern Seite sammelt sich der Sand in *B, D, F*, und *C* und *E* werden leer.

Diese Erklärung hat Seebeck durch einen Versuch bestätigt. An einem circa 1^m langen Spiegelglasstreifen entsprach die Dauer der langsamsten Longitudinalschwingungen den Transversalschwingungen, bei denen der Streifen 14—15 Knoten erhielt, etwas näher den letztern als den erstern. Nachdem nun Seebeck die Sandanhäufungen auf dem longitudinal schwingenden Stabe bezeichnet hatte, versetzte er durch Streichen mit dem Bogen denselben in die Transversalschwingungen mit 15 Knoten, und fand so, daß die Sandanhäufungen bei den longitudinalen Schwingungen auf der einen Seite dem 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, auf der andern Seite dem 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15 Knoten der transversalen Schwingungen entsprachen.

Die weniger hüpfende als gleitende Bewegung des Sandes zeigt an, daß die transversale Bewegung schwächer ist als die longitudinale, womit auch die geringere Energie der Bewegung und die Störung der Regelmäßigkeit der Sandanhäufungen in der Mitte, in der Nähe des Schwingungsknotens der longitudinalen Bewegung übereinstimmt.

Auf die mit den longitudinalen stets gleichzeitig auftretenden transversalen Schwingungen hat Kundt auch die zuerst von W. Weber[1]) beobachteten eigentümlichen Bewegungen zurückgeführt, welche elastische Körper, wie Korkpfropfen, in longitudinal schwingenden Röhren annehmen. W. Weber nahm eine 1 bis $1{,}5^m$ lange zylindrische Glasröhre von 6 bis 10^{mm} lichtem Durchmesser und 1^{mm} Glasdicke, verschloß das eine Ende mit einem Korkpfropfen, der genau an der Röhre abgeschnitten wurde, hielt die Röhre in vertikaler Stellung, das verschlossene Ende abwärts gekehrt, locker in der Mitte und rieb die obere Hälfte mit einem nassen Tuche stark von oben nach unten; er sah dann den Stöpsel in die Höhe rücken, bis er in der Mitte der Röhre, in der sich der Schwingungsknoten befindet, stehen blieb.

Kundt[2]) zeigte zunächst, daß eine derartige Bewegung des Korks nur eintrat, wenn derselbe eine konische Gestalt hat, und daß dann der Pfropf stets in der Richtung von der breitern Basis zur spitzern Endfläche sich bewegt. Ein und derselbe Kork wandert in der Röhre vom Ende gegen die Mitte, wenn die breitere Basis nach außen, von der Mitte gegen das Ende, wenn dieselbe gegen das Innere der Röhre hin liegt. Ebenso wie ein in der Röhre befindlicher Kork wandert ein auf die Röhre gesetzter Ring, der konisch durchbohrt ist, und zwar stets von der Spitze seiner konischen Öffnung gegen die breitere Grundfläche hin. Genau zylindrische Pfropfen in der Röhre oder genau und glatt zylindrisch durchbohrte Ringe

1) *W. Weber*, Schweiggers Journal für Chemie und Physik. 53. 308.
2) *A. Kundt*, Poggend. Ann. 126. p. 513. 1865.

nehmen keine Bewegung an. Sehr viel energischer wird die Bewegung, wenn man dem Kork in der Röhre eine sägenförmige Gestalt gibt wie Fig. 268; und wenn man ein viereckiges Korkstück auf seiner untern Fläche sägenförmig zuschneidet wie Fig. 269, so kann man die Bewegung ebenfalls auf einem schwingenden Glasstreifen beobachten. Die Bewegung geschieht dann stets in der Richtung der Pfeile, also von den Berührungsstellen der Sägezacken nach den hohlen Stellen der Säge. Bei dem Kork Fig. 269 konnte Kundt die Bewegung noch mit ungeminderter Energie beobachten, als er denselben mit Gewichten im Betrage von 200^g belastete.

Fig. 268.

Fig. 269.

Daß diese Bewegung Folge ist der die longitudinale begleitenden Transversalschwingung, zeigte Kundt bei der Anordnung (Fig 269), indem die Bewegung sich ganz ebenso zeigte, als der Glasstreifen in transversale Schwingungen versetzt wurde. Der Glasstreifen wurde an zwei Punkten unterstützt, horizontal hingelegt und durch einen vertikalen Schlag mit einem Hammer oder vertikales Streichen mit einem Bogen in transversale Schwingungen versetzt. Der Kork wanderte dann von einem Ende des Streifens bis zum andern, über alle Knotenpunkte der transversalen Schwingungen fort. Da in diesem Falle die longitudinalen Schwingungen die Bewegung hervorgebracht haben, und da die Bewegung ganz dieselbe ist, wie bei den longitudinalen Schwingungen des Streifens, so darf man schließen, daß auch dort die transversalen Schwingungen es sind, welche die Bewegung erzeugen.

Da die Form des Körpers für die Bewegung überhaupt und besonders für die Richtung derselben allein maßgebend ist, so muß dieselbe in etwas anderer Weise zustande kommen als die Bewegung des Sandes in den Versuchen von Savart. Kundt denkt sich den Vorgang folgendermaßen. Durch die nach außen gerichtete transversale Bewegung wird der auf dem Streifen liegende elastische Körper etwas zusammengedrückt. Sobald der Stoß aufhört, suchen die zusammengedrückten Teilchen ihre Gleichgewichtslage wieder anzunehmen und stoßen bei ihrer Ausdehnung auf die feste Unterlage. Da diese nicht nachgibt, so wird der Körper ein wenig in die Höhe geschleudert, und zwar nach einer Richtung, welche jener, nach welcher der Rückstoß erfolgt, entgegengesetzt ist. Diese Richtung hängt aber wesentlich ab von der Gestalt des gestoßenen Körpers. Hat der Körper eine zur vertikalen symmetrische Form, so werden die Zusammendrückungen der Teilchen um die vertikale herum ganz gleichmäßig sein und infolgedessen der aus der Ausdehnung resultierende Rückstoß vertikal sein; ein solcher Körper hüpft also einfach in die Höhe und erhält keinen seitlichen Antrieb. Deshalb wird ein glattes Korkstück von parallelepipedischem Querschnitt auf einem Streifen oder ein glatter Zylinder in einer Röhre nicht verschoben. Ein konischer Kork dagegen oder ein wie Fig. 269 gearbeitetes Stück wird vermöge seiner Form schief zusammengedrückt,

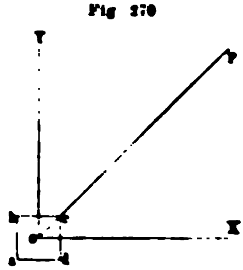
d erfährt deshalb einen schiefen Rückstoß; die vielfach immer in derben Richtung wiederholten Stöße müssen ein solches Stück in horizoner Richtung verschieben. Würde der Kork die schwingende Fläche nur einer Linie berühren, so ginge die Bewegung nur bis zu der nächsten otenlinie der Transversalschwingungen. Da er aber den Stab immer in iger Ausdehnung berührt, so treffen ihn, auch wenn er sich über einer otenlinie befindet, die Stöße der benachbarten Wellen und er bewegt h über die Knotenlinien fort bis zur longitudinalen Knotenlinie, wo die ile des Stabes in größerer Ausdehnung in Ruhe sind.

Nach dieser Erklärung der besprochenen Bewegung ist die Natur des wegten Körpers für die entstehende Bewegung von größtem Einfluß; rte Körper dürfen nach derselben keine Bewegung annehmen; in der Tat gte Kundt, daß Stücke von Holz oder Metall sich nicht bewegten, daß r solche Körper verschoben werden, welche wie Kork und Kautschuk cht zusammendrückbar sind.

Wenn so bei Stäben durch einfaches Streichen fast stets zu den longiinalen auch transversale Schwingungen kommen, so können wir es leicht eichen willkürlich bei Stäben transversale Schwingungen verschiedener chtung hervorzurufen und so die in § 132 und 133 besprochenen Schwingsfiguren darzustellen. Nimmt man einen homogenen Stab von quadrachem Querschnitt, und versieht denselben an seinem obern freien Ende t einem glänzenden Knöpfchen, so daß man durch etwa vom hellen mmel oder einer leuchtenden Flamme herkommenden und an dem Knöpfen reflektierten Lichte in dem Knöpfchen einen hellen Punkt sieht, so ält man leicht die Schwingungsfiguren des § 132.

Sei ac (Fig. 270) der quadratische Querschnitt des Stabes; stoßen wir in der Richtung OX an, so wird er in dieser chtung schwingen, und der glänzende Punkt als ie parallel OX erscheinen. Stoßen wir ihn rallel OY, so erscheint er als glänzende Linie rallel OY. Da wir den Stab als homogen vorsetzen und seine Dicke $ab = bc$ ist, so sind die hwingungen nach beiden Richtungen von gleicher riode Stoßen wir das Stäbchen nach einer dern Richtung, so können wir die eintretenden wegungen als zusammengesetzt ansehen aus er solchen parallel OX und einer parallel OY; r erhalten, da die beiden Bewegungen ohne asendifferenz sind, eine gerade Linie, welche parallel der Richtung des ßes ist.

Fig. 270



Erteilen wir dagegen dem Stäbchen eine Bewegung parallel der einen chtung, etwa OX, und geben dann dem schwingenden Stabe einen Stoß ch OY, so treten Ellipsen auf, deren Gestalt von der Phasendifferenz abngt, welche die beiden Bewegungen dann haben. Wir erhalten z. B. die ipse Fig. 238 und, von oben angesehen, eine Bewegung des Knöpfchens gegengesetzt der des Zeigers einer Uhr, wenn wir das Stäbchen in der chtung nach Y stoßen, wenn es nach X hin $\frac{3}{4}$ seines Weges zurückgelegt hat, einen Kreis, wenn wir es in dem Augenblicke, wo es den größten stand nach X erreicht hat, ebenso stark nach Y stoßen, wie vorher

nach X hin. Stoßen wir das Stäbchen nach Y hin, wenn es $\frac{3}{4}$ seines Weges nach der entgegengesetzten Seite, nach $-X$ hin zurückgelegt hat, so erhalten wir die Ellipse (Fig. 240) und die Bewegung ist von der Linken zur Rechten im Sinne des Zeigers einer Uhr.

Wenn das Stäbchen nach der einen Richtung ab dicker ist als nach der andern, so geschehen die Schwingungen nach Y rascher als nach X. Ist der Unterschied nur sehr unbedeutend, so daß die Schwingung nach Y nur sehr wenig rascher ist, so hat das, wenn wir den Stab in einer gegen OX und OY geneigten Richtung stoßen, denselben Erfolg, als wenn wir bei gleicher Oszillationsdauer nach und nach die verschiedenen Phasendifferenzen hervorbrächten; wir sehen deshalb nach und nach alle die Figuren entstehen, die wir § 132 ableiteten. Bei der ersten Schwingung, wenn wir den Stab nach P hinstoßen, sehen wir eine Linie parallel OP. Die Schwingung nach der positiven Seite der Y beginnt zum zweiten Mal etwas früher als die nach X, die gerade Linie geht daher in eine sehr flache Ellipse über, der Punkt dreht sich wie der Zeiger einer Uhr, die große Achse der Ellipse liegt im Quadranten YOX.

Bei den folgenden Schwingungen wird die Phasendifferenz immer größer, da die Schwingung nach Y immer mehr voreilt, die Ellipse wird daher anfangs immer weniger flach, geht einen Augenblick in einen Kreis über und flacht sich wieder ab, aber so, daß jetzt die große Achse in dem Quadranten $YO-Y$ sich befindet. Bei weiterer Phasendifferenz wird die Ellipse wieder eine gerade Linie, die senkrecht zu OP ist usf., es treten alle die Figuren nacheinander auf, welche, wie wir sahen, bei Stäben mit quadratischem Querschnitt durch verschiedenes Stoßen erzeugt werden können.

Ist der Unterschied der Dicke bedeutend, so erhält man die in § 133 besprochenen Figuren; macht der Stab nach Y z. B. zwei Schwingungen, nach X eine, so erhält man je nach der Phasendifferenz die Kurven Fig. 244, und ist das Verhältnis nicht genau 1 : 2, so bekommt man nach und nach die dort besprochenen Kurven.

Das Kaleidophon oder phonische Kaleidoskop von Wheatstone[1]) zeigt diese Kurven und außer diesen manche aus andern Schwingungsverhältnissen zusammengesetzte; der Apparat besteht aus mehreren Stäbchen mit glänzenden Spitzen, die nach den beiden Richtungen ihres Querschnitts von verschiedenen Dimensionen sind. Eine recht hübsche Verbesserung des Wheatstoneschen ist das Universalkaleidophon, welches fast gleichzeitig von Melde und von Lippich[2]) angegeben ist. Dasselbe besteht aus zwei federnden Metallstreifen, der eine größere wird an einen Tisch angeklemmt, und der kleinere wird mit einer Klemme an das obere Ende des größern so befestigt, daß seine Ebene senkrecht ist zur Ebene des größern. Am obern Ende des kleinern ist ein hell poliertes Metallknöpfchen angebracht. Der kleinere Streifen ist in seiner Klemme verschiebbar, so daß man die Länge des frei schwingenden obern Endes und damit die Schwingungs-

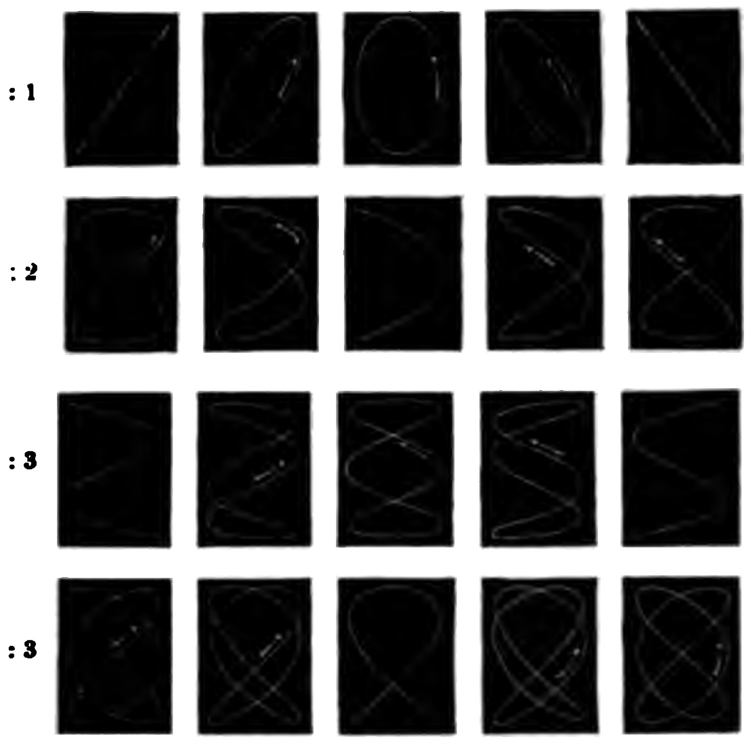
1) *Wheatstone,* Quarterly Journal of science etc. New series No. 11. Wieder in Schweigger-Seidels Jahrbuch. **50**.

2) *Melde,* Poggend. Ann. **115**. 1862. *Lippich,* Sitzungsberichte der Wiener Akademie. **45**. 1862; Poggend. Ann. **117**. 1862.

r beliebig variieren kann. Läßt man die untere Feder allein schwingen, ewegt sich das Knöpfchen mit derselben nach der einen, bewegt sich obere allein, so schwingt das Knöpfchen nach der zur ersten senkten Richtung. Läßt man die untere Feder schwingen und stößt hzeitig die obere, so erhält man die aus beiden Bewegungen resultiee Kurve, deren Form von dem Schwingungsverhältnis und der Phasenrenz der Einzelbewegungen abhängt.

Zuerst Lissajous[1]) und später Melde[2]) haben die aus zueinander rechten Schwingungen der verschiedensten Periode sich zusammensetzen-

Fig. 271.



Schwingungskurven zum Gegenstande eines besondern Studiums gest. Fig. 271 zeigt eine Anzahl dieser Kurven nach Lissajous; das ältnis der Schwingungszahlen ist neben jeder Reihe angegeben; die chiedenen Figuren derselben Horizontalreihe zeigen die Kurven für die chiedenen Phasendifferenzen. Die erste gibt die Kurve, wenn beide ringungen gleichzeitig die Gleichgewichtslage nach der positiven Seite eren, die zweite, wenn die raschere horizontale Bewegung $^1/_8$, die dritte, sie $^1/_4$, die vierte, wenn sie $^3/_8$, die fünfte, wenn sie $^1/_2$ ihrer Schwin-

1) *Lissajous*, Ann. de chim. et de phys. 51 3. p. 147 1857

2) *Melde*, Die Schwingungskurven. Leipzig 1864.

gung voraus ist. Entsprechen die Schwingungsverhältnisse nicht genau den einfachen Zahlen, so werden die Kurven nacheinander sichtbar, wie wir schon vorhin erwähnten.

Lissajous wandte zur Darstellung der Figuren ein optisches Verfahren an, welches wir ohne zu weit ausholen zu müssen hier nicht im einzelnen darlegen können; man befestigt vor einem in horizontaler Ebene schwingenden Stabe, am besten der einen Zinke einer Stimmgabel einen Spiegel, so daß seine spiegelnde Ebene senkrecht ist zur Längsrichtung des Stabes, und sendet auf den Spiegel einen von einer punktförmigen Lichtquelle herkommenden Lichtstrahl, so daß derselbe auf einen zweiten Spiegel fällt, der vor der einen Zinke einer in vertikaler Richtung schwingenden Stimmgabel befestigt ist. Den von diesem zweiten Spiegel reflektierten Strahl fängt man auf einem passend aufgestellten vertikalen Schirm auf. Schließlich bringt man zwischen die Lichtquelle und den ersten Spiegel eine Linse und stellt dieselbe so, daß auf dem Schirm ein scharfes Bild der punktförmigen Lichtquelle erscheint. Streicht man die erste Stimmgabel, so daß der Spiegel in horizontaler Richtung hin und her geht, so erscheint infolge der Schwingung auf dem Schirm eine horizontale Lichtlinie; streicht man nur die zweite Gabel, so erscheint eine vertikale Lichtlinie. Streicht man beide, so erscheint auf dem Schirme die Schwingungskurve, welche dem Schwingungsverhältnisse und der Phasendifferenz der beiden Schwingungen entspricht. Will man die Figuren nicht objektiv darstellen, so genügt es mit Fortlassung der Linse in den zweiten Spiegel mit freiem Auge oder einem Fernrohr hineinzusehen, so daß man bei ruhendem Spiegel den Lichtpunkt scharf sieht. Schwingen die Spiegel, so sieht man an Stelle des Lichtpunktes die betreffende Schwingungsfigur.[1])

§ 148.

Zusammengesetzte Schwingungen gespannter Saiten. Wir haben schon in § 142 bei der Besprechung der Schwingungen von Saiten gesehen, daß eine solche Saite alle Schwingungen vollführen kann, deren Schwingungszahlen der Gleichung

$$N = n\,\frac{c}{2l}$$

entsprechen, wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung auf der Saite, l die Länge der Saite ist und worin n jede ganze Zahl sein kann. Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche n gleich eins ist; nennen wir T die Schwingungsdauer dieser Schwingungen und a_1 ihre Amplitude, so ist die Gleichung derselben nach § 142 und 140

$$y = a_1 \sin \pi\,\frac{x}{l}\,\sin 2\pi\,\frac{t}{T}\,.$$

Nennen wir die Amplitude der $n$ten Schwingung a_n, deren Schwingungsdauer $\frac{1}{n}\,T$ ist, so ist deren Gleichung

$$y_n = a_n \sin n\pi\,\frac{x}{l}\,\sin 2n\pi\,\frac{t}{T}\,.$$

1) *Lissajous*, Ann. de chim. et de phys. 51. (3.) p. 147. 1857.

Das die Zeit enthaltende Glied wird statt des Sinus der Kosinus, wenn zur Zeit $t = 0$ die Punkte der Saite an dem äußersten Ende ihrer Bahn sind

Nach § 142 können in einer Saite alle diese Schwingungen gleichzeitig vorhanden sein, und in der Tat treten bei Erregung von Saitenschwingungen fast immer mehrere dieser Schwingungen gleichzeitig auf. Werden Saiten gestrichen oder gezupft oder mit dem Hammer angeschlagen, so treten stets aus verschiedenen Perioden zusammengesetzte Schwingungen auf: welche Schwingungen gleichzeitig auftreten, das hängt von der Art und Weise ab, in welcher die Schwingungen der Saiten erregt werden.

Nach § 133 erhält eine schwingende Punktreihe, wenn wir sie zu der Zeit ins Auge fassen, in welcher der von der Zeit abhängige Faktor seinen größten Wert hat, eine je nach der Zahl und der Periode und Phasendifferenz der in ihr vorhandenen Schwingungen bestimmte Form. Sind in unserer schwingenden Saite gleichzeitig n Schwingungen mit den Amplituden $a_1, a_2, a_3 \ldots$ und den Schwingungsdauern $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T$ usf., so wird, wenn der von der Zeit abhängige Faktor für alle Schwingungen gleichzeitig gleich $+1$ ist, die Form der Saite dargestellt durch die Gleichung

$$y = a_1 \sin \pi \frac{x}{l} + a_2 \sin 2\pi \frac{x}{l} + a_3 \sin 3\pi \frac{x}{l} + \cdots \quad \text{(a)}$$

Geben wir nun der Saite die durch diesen Ausdruck dargestellte Form und lassen sie los, so vollführt die Saite alle diese Schwingungen, die Saite nimmt nach jeder Zahl ganzer Schwingungen die ihr ursprünglich gegebene Form wieder an. Denn geradeso, wie wir die Bewegung für alle Punkte einer Reihe angeben konnten (§ 128), wenn wir dieselbe für den Punkt $x = 0$ kennen, ebenso können wir die Bewegung derselben angeben, wenn wir die Lage der Punkte zur Zeit $t = 0$ als Funktion von x kennen, wir erhalten als Gleichung für y zur Zeit t

$$\left.\begin{aligned} y = a_1 \sin \pi \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T} + a_2 \sin 2\pi \frac{x}{l} \cos 4\pi \frac{t}{T} \\ + a_3 \sin 3\pi \frac{x}{l} \cos 6\pi \frac{t}{T} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

Ziehen wir z. B. eine Saite in 0,3 ihrer Länge zur Seite, so geben wir ihr sehr nahe die Form, welche durch drei Schwingungen der Periode $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T$ mit den Amplituden $a_1, \frac{1}{4}a_1, \frac{1}{9}a_1$ dargestellt wird. Für die Zeit $t = 0$ erhalten wir für die verschiedenen Stellen der Saite die Werte von y, indem wir in die Gleichung (a) für x die betreffenden Werte einsetzen. Setzen wir $a_1 = 1$, so werden die Werte für

$x =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$y =$	0,546,	0,932,	1,081,	1,032,	0,889,	0,739,	0,605,	0,456,	0,252.

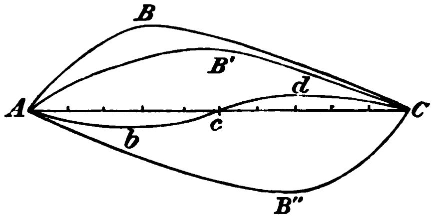
In Fig. 272 ist die Gestalt der Saite hiernach dargestellt; die Ausschläge sind der Deutlichkeit wegen erheblich zu groß dargestellt; man sieht, annähernd nimmt die Saite die Gestalt zweier in B sich treffender gerader Linien an, mit sanfter Abrundung, wie sie etwa dem Zupfen mit einem weichen Finger entspräche. Lassen wir die Saite los, so werden die Werte y zur Zeit t durch die Gleichung (b) gegeben. Für die Zeit $t = \frac{1}{4}T$

würde in dem ersten Gliede der Gleichung (b) $\cos \frac{\pi}{4}$, im zweiten $\cos \frac{\pi}{2}$, im dritten $\cos 3 \frac{\pi}{4}$ als von der Zeit abhängiger Faktor eintreten, die Werte von y werden sein

$x = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$y = 0{,}281$,	0,490,	0,589,	0,718,	0,784,	0,729,	0,543,	0,341,	0,155.

Die Kurve $AB'C$ gibt die Gestalt der Saite an. Für $t = \frac{1}{4} T$ bleibt nur das zweite Glied der Gleichung (b) übrig, der Kosinus hat den Wert -1, die Saite zeigt also nur die Form, wie wenn die Schwingung von $\frac{1}{2} T$ allein in ihr vorhanden wäre, $AbcdC$ zeigt die Form der Saite in diesem Augenblick. Für die Zeit $t = \frac{1}{2} T$ wird das erste und dritte Glied der Gleichung (b) negativ, da $\cos \pi = \cos 3\pi = -1$, das zweite bleibt positiv.

Fig. 272.



Die Werte von y werden allesamt negativ, und zwar wird für

$x = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$y = 0{,}252$,	0,456,	0,605,	0,739,	0,889,	1,032,	1,081,	0,932,	0,546.

Die Werte von y folgen sich von C aus gerade so wie bei $t = 0$ von A, die Form der Saite ist also in doppelter Weise umgekehrt, wie Fig. 272 $AB''C$ sie darstellt.

Welche Form wir auch der Saite geben, wir können dieselbe nach einem von Fourier bewiesenen Satze immer durch eine strenge genommen unendliche Reihe darstellen, deren einzelne Glieder nach vielfachen des Bogens $\pi \frac{x}{l}$ fortschreiten, also durch

$$y = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin n\pi \frac{x}{l},$$

wenn n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ bezeichnet. Ist die Form zur Zeit $t = 0$ bekannt, so lehrt die Theorie der Fourierschen Reihen gleichzeitig die Koeffizienten der einzelnen Glieder dieser Reihen in Form bestimmter Integrale berechnen.

Beginnt die Bewegung der Saite zur Zeit $t = 0$, so daß also für $t = 0$ die Geschwindigkeit in allen Punkten der Saite gleich Null ist, so ist die Form der Saite zur Zeit t gegeben, wenn wir jedes Glied der Reihe mit $\cos 2n\pi \frac{t}{T}$, wo für n die dem betreffenden Gliede zukommende Zahl zu setzen ist, multiplizieren; es wird also zur Zeit t

$$y = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos 2n\pi \frac{t}{T}.$$

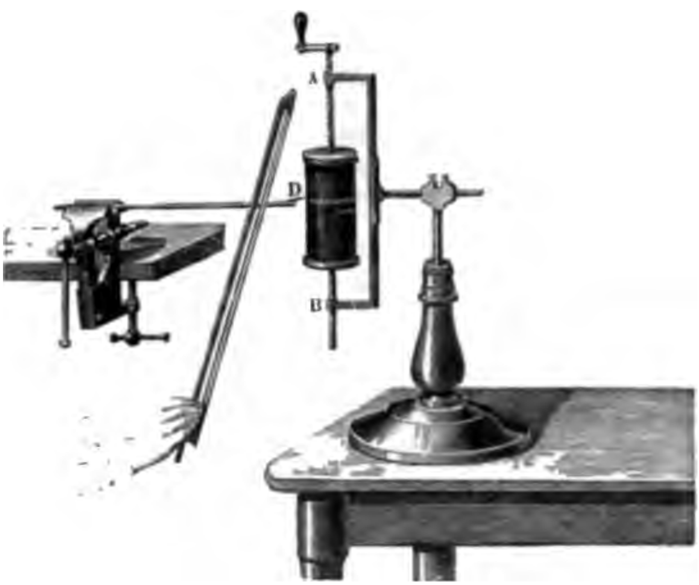
Setzen wir die Saite in Schwingung, indem wir an einer Stelle die

lag von bestimmter Dauer erteilen, so erhalten die Teilchen, welche zur t $t = 0$, im Augenblicke des Schlages, in der Gleichgewichtslage, $y = 0$ l, eine an den verschiedenen Stellen verschiedene Geschwindigkeit. Wir nen, wenn uns die Geschwindigkeit als Funktion von x bekannt ist, diese durch eine Fouriersche Reihe darstellen und aus dieser die Einzelwingungen erkennen, welche die Bewegung der Saite zusammensetzen. in allen Fällen.

Wir können selbstverständlich auf diese Rechnungen nicht eingehen l verweisen deshalb auf die betreffenden mathematischen Werke.[1])

Um die Schwingungen der Saite zu analysieren, bedient man sich weder graphischer Methoden oder des Vibrationsmikroskopes. Bei der phischen Methode, wie sie zuerst von Savart und Duhamel[2]) ange-

Fig. 273



ndt ist, versieht man den schwingenden Körper mit einem feinen leichten ft, etwa einer Schweinsborste, die man mit etwas Wachs anklebt, und ht vor demselben einen Zylinder, der mit Ruß geschwärzt ist. Fig. 273 gt die Anordnung, wenn man etwa die Schwingungen eines Stabes aufhnen will. Die Spitze berührt den Zylinder nur ganz leicht. Die Achse Zylinders ist mit einem Schraubengewinde versehen, so daß er bei dem hen gleichzeitig fortbewegt wird. Dreht man den Zylinder, wenn der wingende Körper sich nicht bewegt, so zieht die Spitze auf dem Zylin eine einfache Spirallinie; wenn der Körper und mit ihm die Spitze der Anordnung Fig. 273 in vertikaler Richtung schwingt, so erhält

1) Man sehe z. B. *Riemann-Hattendorff*, Partielle Differentialgleichungen unschweig 1869. *Helmholtz*, Tonempfindungen Braunschweig 1863
2) *Duhamel*. L'Institut 1840. p. 19 u. p. 41.

die Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des schwingenden Körpers. Wenn der Stab in einer komplizierten Form schwingt, wenn gleichzeitig Schwingungen verschiedener Periode vollführt werden, so prägen sich dieselben in der Welle vollständig aus, da die nacheinander stattfindenden Bewegungen sich auf dem Zylinder nebeneinander darstellen.

Eine wesentliche Verbesserung des graphischen Verfahrens rührt von Raps und Krigar Menzel[1]) her. Bei dem soeben beschriebenen Verfahren wird die Schwingung der Saite durch die angebrachte Spitze immer etwas beeinflußt, da die Spitze mit dem Klebstoff die Saite an der betreffenden Stelle immer etwas belastet. Raps und Krigar Menzel haben deshalb das Schreiben durch die Photographie ersetzt. Der Punkt der Saite, dessen Schwingungen dargestellt werden sollen, wird auf einem um einen Zylinder gewickelten photographischen Papier abgebildet; der Zylinder ist drehbar und bei der Drehung wird das Papier allmählich abgezogen. Zur Abbildung der Schwingungen wird die Saite in Bewegung versetzt; das Abbild des Punktes auf dem photographischen Papier geht dann in genau gleichem Rythmus hin und her wie der schwingende Punkt selbst. Wird nun das Papier abgewickelt, so werden die nacheinander stattfindenden Bewegungen des Punktes auf dem Papier nebeneinander photographiert, wie sie der schreibende Stift auf dem berußten Zylinder hinschreibt.

Zur Ausführung der Versuche wurde ein schmaler Spalt durch eine elektrische Lampe intensiv beleuchtet, und von diesem Spalt mit Hilfe von Linsen ein reelles Bild an der Stelle erzeugt, wo die Saite in Schwingung versetzt werden sollte. Ein Bild dieses Spaltbildes wurde auf dem photographischen Papier entworfen, und in diesem Bilde erschien die Stelle der Saite, deren Schwingungen abgebildet werden sollten, als ein scharfer dunkler Fleck. Um die sich abbildenden Wellen recht gleichmäßig zu machen, wurde der das photographische Papier (Bromsilber-Gelatine-Papier) tragende Zylinder durch ein Uhrwerk gedreht. Wegen des Details des Verfahrens verweisen wir auf die Abhandlungen von Krigar Menzel und Raps.

Um zu übersehen, in welcher Weise sich die Schwingungen darstellen, wollen wir die Wellen bestimmen, wenn die Bewegung die vorhin untersuchte, also durch die Gleichung gegeben ist

$$y = a \sin \pi \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \tfrac{1}{4} a \sin 2\pi \frac{x}{l} \cos 4\pi \frac{t}{T}$$
$$+ \tfrac{1}{9} a \sin 3\pi \frac{x}{l} \cos 6\pi \frac{t}{T}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, es würden die Schwingungen der Saitenmitte graphisch dargestellt.

Für die Saitenmitte ist $x = \frac{1}{2} l$, somit für die Zeit $t = 0$

$$y = a \sin \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{4} a \sin \pi + \tfrac{1}{9} a \sin \tfrac{3}{2}\pi = a - 0{,}111\, a.$$

Man sieht sofort, daß die Saitenmitte die Schwingungen der Periode $\frac{1}{2} T$ gar nicht erkennen läßt, da die Saitenmitte für diese Schwingung ein Knotenpunkt ist. Alle die Schwingungen, welche in dem Punkte

1) *Krigar Menzel* und *Raps,* Wiedem. Ann. **44**. p. 623. 1891. Ähnlich *Schönrock,* Bull. de l'Acad. de Petersb. **16**. p. 125. 1902.

sen Bewegungen graphisch dargestellt werden, einen Knotenpunkt haben, nen in der Darstellung nicht sichtbar sein. Die Saitenmitte kann also r die ungradlinigen Schwingungen zeichnen.

Die Werte von y zur Zeit t erhalten wir aus der Gleichung

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T} - 0{,}111\, a \cos 6\pi \frac{t}{T}\,.$$

Die nach dieser Gleichung für die einzelnen Zehntel T berechneten erte von y sind unter Voraussetzung $a = 1$ folgende. Für

$t = 0$	$0{,}1\,T$	$0{,}2\,T$	$0{,}3\,T$	$0{,}4\,T$	$0{,}5\,T$	$0{,}6\,T$
$= 0{,}889,$	$0{,}843,$	$0{,}399,$	$-0{,}399,$	$-0{,}843,$	$-0{,}889,$	$-0{,}843,$

$t =$	$0{,}7\,T$	$0{,}8\,T$	$0{,}9\,T$
$y =$	$-0{,}399,$	$0{,}399,$	$0{,}843.$

Fig. 274.

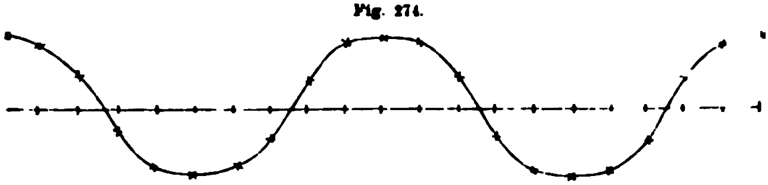


Fig. 275.

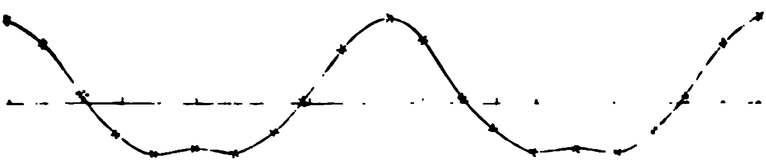


Fig. 276.

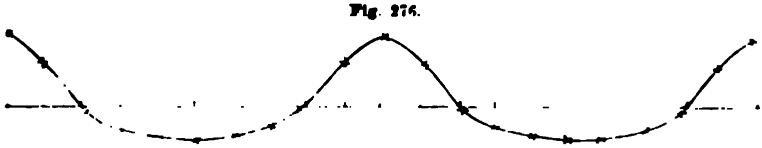


Fig. 274 stellt die Wellenlinie, die durch Aufzeichnung der Saiten-tte sich ergibt, dar.

In den äußersten Lagen bleibt die Saitenmitte 0,2 der Schwingungs-er hindurch fast in Ruhe und geht in 0,3 der Schwingungsdauer von r einen äußersten Lage zu der andern über.

Läßt man die Bewegung des Punktes in 0,3 der Saitenlänge sich bilden, so wird die Gleichung der Welle

$$y = 0{,}809 \cos 2\pi \frac{t}{T} + 0{,}238 \cos 4\pi \frac{t}{T} + 0{,}034 \cos 6\pi \frac{t}{T}\,.$$

Die Werte werden für

$t = 0$	$0{,}1\,T$	$0{,}2\,T$	$0{,}3\,T$	$0{,}4\,T$	$0{,}5\,T$	$0{,}6\,T$
$= 1{,}081,$	$0{,}783,$	$0{,}030,$	$-0{,}414,$	$-0{,}637,$	$0{,}605,$	$-0{,}637,$

$t =$	$0{,}7\,T$	$0{,}8\,T$	$0{,}9\,T$
$y =$	$-0{,}414,$	$0{,}030,$	$0{,}783.$

Fig. 275 zeigt diese Welle; sie fällt von der einen äußersten Lage rasch ab zur andern, bleibt in dieser ein Fünftel der ganzen Schwingungszeit und steigt rasch wieder zu der andern äußersten Lage.

Fig. 276 zeigt die Form der Welle, wenn die Schwingungen der Stelle 0,2 der Saitenlänge aufgezeichnet werden. Die Zahlenwerte für die Zehntel der Schwingungsperiode sind:

$t = 0$	$0{,}1\ T$	$0{,}2\ T$	$0{,}3\ T$	$0{,}4\ T$	$0{,}5\ T$	$0{,}6\ T$
$y = 0{,}93,$	$0{,}52,$	$-0{,}08,$	$-0{,}28$	$-0{,}38,$	$-0{,}45,$	$-0{,}38.$

$t = 0{,}7\ T$	$0{,}8\ T$	$0{,}9\ T$
$y = -0{,}28,$	$-0{,}08,$	$0{,}52.$

Man wird die verschiedenen Formen je nach der Stelle der Saite, welche ihre Schwingungen abbildet, stets durch die Überlegung erhalten, daß diejenigen Schwingungen, welche an der betreffenden Stelle einen Knotenpunkt haben, in der Figur gar nicht, diejenigen, welche an derselben ein Schwingungsmaximum haben, am stärksten vertreten sind.

Weiter erkennt man, daß in der schwingenden Saite Schwingungen überhaupt nicht vorkommen können, welche an der Stelle der Erregung einen Knotenpunkt haben, da die Stelle der Erregung notwendig eine Bewegung annehmen muß, dort also kein Knotenpunkt entstehen kann.

Das zuerst von Lissajous[1]) konstruierte Vibrationsmikroskop benutzt zur Erkennung der Schwingungen ein anderes Mittel. Sieht man durch eine ruhende Lupe einen ruhenden glänzenden Punkt an, so erscheint der letztere in Ruhe; wird aber die Lupe rasch bewegt, so scheint sich der Punkt in einer der Bewegungsrichtung der Lupe parallelen Richtung zu bewegen, eine Erscheinung, die wir in der Lehre vom Licht besprechen und erklären werden. Wird deshalb eine solche Lupe in eine einfach schwingende Bewegung versetzt, so scheint der Punkt in derselben Richtung hin und her zu schwingen und man sieht statt des Punktes eine glänzende Linie. Wird nun der Punkt gleichzeitig in einer zu der erstern senkrechten Richtung bewegt, so kombiniert sich die wirkliche Bewegung mit der scheinbaren, und man sieht den Punkt die Kurve beschreiben, welche sich als die resultierende der beiden einzelnen Bewegungen nach den Sätzen des § 133 ergibt.

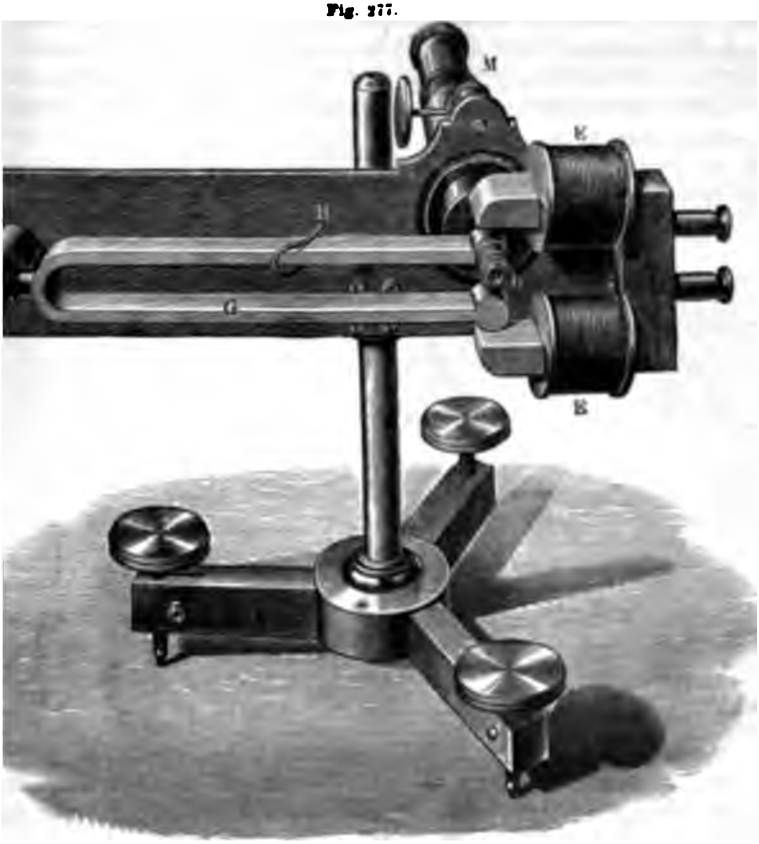
Die Form, welche von Helmholtz[2]) dem Vibrationsmikroskop gegeben, zeigt Fig. 277. Die zur Beobachtung dienende Lupe ist an dem Ende einer Zinke der Stimmgabel G befestigt; dieselbe besteht aus Sammellinsen, wie sie als Objektivlinsen von Mikroskopen gebraucht werden. In der Öffnung der Metallplatte, welche die Stimmgabel trägt, ist ein Rohr R angebracht, in welchem sich eine Okularlinse befindet und die so eingestellt wird, daß man, während die Stimmgabel nicht schwingt, den auf dem schwingenden Körper angebrachten glänzenden Punkt scharf sieht. Durch den Elektromagnet E, der durch intermittierende elektrische Ströme periodisch erregt wird, wird die Stimmgabel in vertikale Schwingungen versetzt. Der Körper, etwa eine Saite, wird dann vor dem Mikroskop so aufgestellt

1) *Lissajous.* Ann. de chim. et de phys. 51. (3.) p. 147. 1857.
2) *von Helmholtz,* Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863 p. 138.

r in horizontaler Richtung schwingt, und auf demselben gerade vor Mikroskop etwa durch Aufkleben eines Stärkekörnchens ein glänzenunkt markiert.

Helmholtz [1]) hat über die zusammengesetzten Schwingungen der , wenn sie geschlagen oder gezupft werden, ausführliche theoretische xperimentelle Untersuchungen angestellt. Als allgemeines Resultat ch dabei ergeben, daß die Intensität und Anzahl der in den zusammen-

Fig. 277.



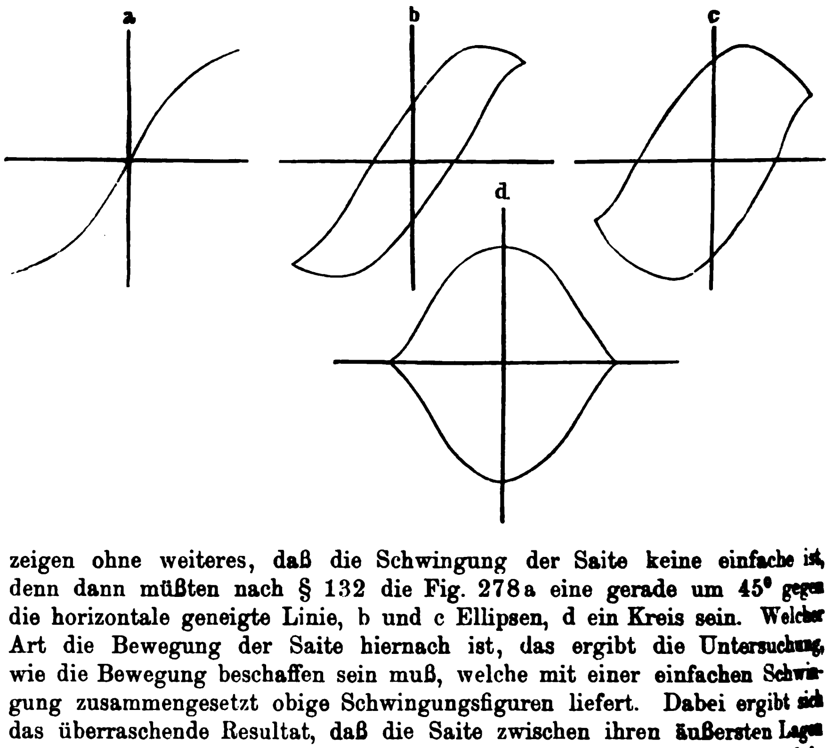
ten vorhandenen Einzelschwingungen außer von der Stelle, wo die angeschlagen ist, von der Art und Dauer des Anschlags, sowie von icke, Steifigkeit und Elastizität der Saite abhängt. Wir werden auf Fragen im nächsten Abschnitte nochmals zurückkommen (Man sehe .)

Sehr viel komplizierter sind die Schwingungen einer Saite, wenn die nicht geschlagen oder gezupft, sondern mit einem Bogen gestrichen

Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen Braunschweig 1863. p 128 ff. 568 Man sehe auch Braun, Über den Einfluß von Steifigkeit, Befestigung mplitude auf die Schwingungen der Saiten. Poggend. Ann. 147. 1872.

wird. Helmholtz[1]) hat das Vibrationsmikroskop vorzugsweise benutzt, um die Schwingungen einer Violinsaite zu studieren, welche in gewöhnlicher Weise in der Nähe des Steges mit dem Bogen gestrichen wird. Die Schwingungsfigur, welche die Mitte der Saite dann zeigte, wenn die Saite einen reinen vollen Ton gab, ein Beweis, daß die Schwingungen ganz regelmäßig waren, ist in Fig. 278 abgebildet für den Fall, daß die Schwingungszahlen der Saite und der Gabel ganz genau gleich waren. Fig. 278a zeigt die Figur, wenn die Schwingungen ohne Phasendifferenz stattfanden, 278b wenn die vertikal schwingende Gabel $\frac{1}{12}$, 278c wenn sie $\frac{2}{12}$, 278d wenn sie $\frac{3}{12}$ Schwingung voraus ist. Dabei ist die Bewegung als ohne Phasendifferenz vorausgesetzt, wenn dieselbe gleichzeitig nach rechts und oben geht, und angenommen, daß beide Amplituden gleich sind. Die Figuren

Fig. 278.



zeigen ohne weiteres, daß die Schwingung der Saite keine einfache ist, denn dann müßten nach § 132 die Fig. 278a eine gerade um 45° gegen die horizontale geneigte Linie, b und c Ellipsen, d ein Kreis sein. Welcher Art die Bewegung der Saite hiernach ist, das ergibt die Untersuchung, wie die Bewegung beschaffen sein muß, welche mit einer einfachen Schwingung zusammengesetzt obige Schwingungsfiguren liefert. Dabei ergibt sich das überraschende Resultat, daß die Saite zwischen ihren äußersten Lagen sich mit ganz konstanter Geschwindigkeit hin und her bewegt. Daß in der Tat obige Schwingungsfiguren aus einer vertikalen einfachen Schwingung und einer horizontalen mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und hergehenden Bewegung sich ergeben, das zeigt die Konstruktion Fig. 279a, welche die Fig. 278a und b, und Fig. 279b, welche Fig. 278c und d liefert. Die Konstruktion ist der in § 126 angewandten ganz analog. Um die einfachen Schwingungen in ihrer einzelnen Phase darzustellen, ist

1) *Helmholtz,* Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 1[illegible]

n den Mittelpunkt O mit der Amplitude der Schwingungen ein Kreis ge-gen und dieser in zwölf gleiche Teile geteilt. Entsprechend der Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ben dann auf dem vertikalen Durchmesser die Sinus dieser Bögen $O\alpha$, $O\beta$ .. die von dem Vibrationsmikroskope in $\frac{1}{12}T$, $\frac{2}{12}T$ .. zurückgelegten Wege, so α, β, γ .. die Lage des einfach schwingenden Punktes in den angegebenen Momenten. Der horizontale Durchmesser ist in sechs gleiche Teile teilt, so daß a, b, c die Lage des mit gleichförmiger Bewegung horizon-l schwingenden Punktes nach $\frac{1}{12}T$, $\frac{2}{12}T$ .. angibt. Bewegt sich der nkt nach beiden Richtungen, so ist die Lage, wenn keine Phasendifferenz rhanden ist, zu den Zeiten $\frac{1}{12}T$, $\frac{2}{12}T$ .. durch O, αa, βb usw. gegeben, nn die Phasendifferenz $\frac{1}{12}T$ beträgt, durch α, βa, γb, βc usw., er ist ch der vertikalen jedesmal $\frac{1}{12}$ voraus. Die Verbindungslinien der so er-

Fig. 279a.

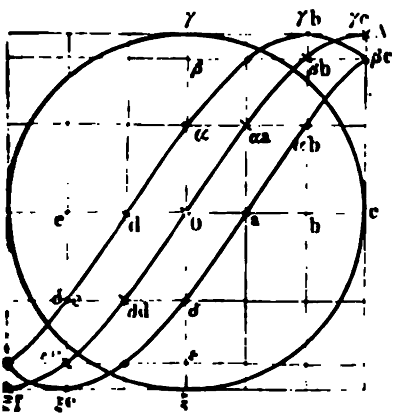
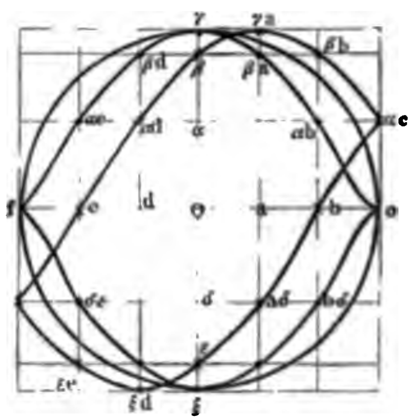


Fig. 279b.



lltenen einzelnen Punkte geben dann die Bahn desselben, und man sieht, ß die so in Fig. 279 konstruierten Kurven mit den in Fig. 278 abge-ldeten identisch sind.

Auch die graphische Methode zeigt, daß die Mitte einer an ihrem de gestrichenen Saite mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und her-ht. Die Schwingungskurven müssen in dem Falle gegen die horizontale ichgeneigte auf- und absteigende gerade Linie sein. Fig. 280a zeigt e Abbildung der von Krigar Menzel und Raps[1]) photographierten hwingungskurven der Saitenmitte, wenn die Saite in $\frac{1}{15}$ ihrer Länge strichen wurde. Auch die andern Punkte der Saite bewegen sich mit ichförmiger Bewegung, doch ist der Anstieg, das heißt wenn die Saite m streichenden Bogen folgt, ein langsamerer als die Rückkehr, das heißt, nn sie von dem streichenden Bogen losgelassen wieder gegen ihre Gleich-wichtslage schwingt; die Fig. 280b zeigt die von dem Punkte $\frac{1}{3}$, c die-

1) *Krigar Menzel* und *Raps*, Wiedem. Ann. **44**. p. 623. 1891.

von $^1/_4$, d die von $^1/_6$, e die von $^1/_7$, f die von $^1/_{10}$ der Saitenlänge beschriebene Kurve, immer, wenn in $^1/_{15}$ der Saitenlänge gestrichen wurde.

Der Mechanismus der Erregung einer Saite durch das Streichen eines durch aufgestrichenes Harz klebrig gemachten Bogens läßt eine solche Bewegung der Saite voraussehen. Der angestrichene Punkt der Saite klebt an den harzigen Bogenhaaren; er folgt deshalb dem Bogen, der mit gleichförmiger Geschwindigkeit an der Saite her gezogen wird. Bei der mit wachsender Elongation des Punktes wachsenden Spannung der Saite reißt sich die Saite endlich los und gleitet mit starker Reibung gegen den Bogen, deshalb mit konstanter Geschwindigkeit am Bogen zurück, bis sie wieder gefaßt und wieder wie zuerst hinausgeführt wird.

Fig. 280 a.

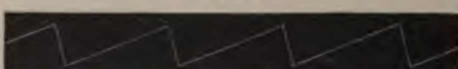
Fig. 280 b.

Fig. 280 c.

Fig. 280 d.

Fig. 280 e.

Fig. 280 f.



Die Bewegung der Saite ist demnach zunächst eine erzwungene, das Resultat ist aber doch eine zusammengesetzte Form der der Saite natürlich zukommenden Schwingungen. Denn jede der durch den Bogen einmal erzwungenen Bewegungen pflanzt sich auf der Saite fort, und wird an den Enden reflektiert. Die an den Enden reflektierten Schwingungen setzen sich dann zu den in der Saite möglichen stehenden Wellen zusammen. Wenn sich die Schwingungen nach der Reflexion an der Streichstelle wieder treffen, setzen sie sich zu derselben periodischen Schwingung wieder zusammen, wie die war, die sie ursprünglich hervorrief. Der Bogen, dessen Bewegung nichts periodisches an sich hat, tut, wie Krigar Menzel und Raps sich ausdrücken, jetzt zu der Bewegung gar nichts hinzu, als daß er durch seinen klebrigen Zwang die Bewegung nur ebenso wieder verstärkt, als sie durch Abgabe der Bewegung an den festen Enden, die ja nicht absolut fest sind, geschwächt war.

Welche Schwingungen in den verschiedenen in der Praxis gebrauchten Erregungen der Saiten in denselben vorhanden sind, werden wir § 165 besprechen.[1])

1) Die Schwingungen geschlagener Saiten hat *W. Kaufmann*, Wiedem. Ann. **54**. p. 675. 1895, jene elektromagnetisch bewegter *G. Klinkert*, Wiedem. Ann. 65 p. 849. 1898 nach der Methode von *Krigar Menzel* und *Raps* untersucht.

Drittes Kapitel.

Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

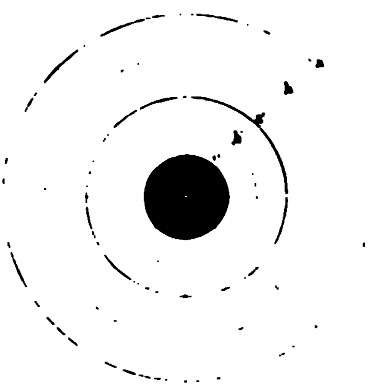
§ 149.

Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen. Gase und ssigkeiten haben, wie wir sahen, keine selbständige Gestalt; in ihnen nnen daher infolge der Elastizität keine schwingenden Bewegungen entthen, welche mit einer Gestaltsänderung des Körpers verbunden sind, ine transversalen Schwingungen. Da aber die Flüssigkeiten ein selbindiges Volumen haben und, wie wir früher sahen, elastisch sind, und da enso die Luft infolge des Druckes, unter dem sie an der Erdoberfläche ht, eine bestimmte Dichtigkeit und Elastizität hat, so können in beiden igitudinale Wellen bestehen und sich fortpflanzen.

Da das Wasser sowohl als die Luft, als Typus der tropfbar und stisch flüssigen Körper, homogen und isotrop sind, so müssen nach dem ähern die an einer Stelle im Innern derselben erregten Wellen sich in r Form von Kugeln ausbreiten.

Um von der Entstehung und Fortpflanzung dieser Wellen ein deutbes Bild zu erhalten, denken wir uns eine Kugel C (Fig. 281) im Innern ier Flüssigkeit in longitudinale Schwingen versetzt, so daß also die Kugel h in rascher Folge abwechselnd verßere und verkleinere. Eine Verßerung der Kugel wird alle die Kugel gs umgebenden Flüssigkeitsteile in · Richtung der Radien fortstoßen, also sen Teilchen eine rings von der gel fortgerichtete Bewegung erteilen. olge dieser nach außen gerichteten wegung tritt rings um die Kugel eine rdichtung der Flüssigkeit ein, und olge dieser Verdichtung übt diese ssigkeitsschicht auf die folgenden en stärkern Druck von innen nach ßen als umgekehrt die umgebende ssigkeit von außen nach innen entgegendrückt. Daraus ergibt sich an, daß diese fortschreitende Bewegung sich rings um die Kugel immer iter ausbreitet.

Fig. 281.



Hat die Kugel das Maximum ihrer Ausdehnung erreicht, so zieht sie h wieder zusammen. In den durch diese Zusammenziehung entstehenden ren Raum wird wegen des Druckes der Umgebung die Flüssigkeit von en Seiten her sich hineinbegeben; die Flüssigkeitsschicht erhält also gs um die Kugel eine rückgängige Bewegung. Dadurch tritt rings um Kugel eine Verdünnung ein, und wegen dieser Verdünnung erhalten ch die folgenden Schichten eine rückgängige Bewegung. Die Verdünnung d somit die rückgängige Bewegung pflanzt sich, auf die Verdichtung und

fortschreitende Bewegung folgend, somit gerade so um die Kugel fort wie die letztere.

Durch die Vibration der Kugel gelangen also zunächst die Flüssigkeitsteile, welche unmittelbar an der Kugel anliegen, in eine schwingende Bewegung und diese schwingende Bewegung pflanzt sich auf jedem Radius einer Kugel, die wir um den Mittelpunkt der Kugel C uns gelegt denken, fort wie die Schwingungen in den früher betrachteten Punktreihen, wie die longitudinalen Schwingungen in den Stäben der festen Körper.

Die longitudinalen Schwingungen in einer Flüssigkeit, sei sie tropfbar oder elastisch flüssig, sind also ein Fall der früher betrachteten Fortpflanzung einer Wellenbewegung in einem elastischen Punktsysteme. Bezeichnen bei einer kontinuierlichen Schwingung die Kreise a und a' die Stellen, in denen die Punkte in den gleichen Phasen der Bewegung sind, wo sie z. B. ihre fortschreitende Bewegung, in a zum ersten Male, in a' zum zweiten Male beginnen, so ist der Abstand der beiden Kreise eine Wellenlänge, und auf der Strecke aa' sind alle Oszillationsphasen vertreten. Der Kreis b bezeichnet dann alle die Punkte rings um die Kugel, welche eine halbe Oszillation zurückgelegt haben und gerade im Begriffe sind, von der Gleichgewichtslage aus ihre rückschreitende Bewegung zu beginnen. Bezeichnen wir demnach auch hier jene Strecke der Radien, in denen sich die Flüssigkeitsteilchen auf der einen Seite ihrer Gleichgewichtslage befinden, als Wellenberg, jenen Teil, wo sie sich auf der andern befinden, als Wellental, so sind die Strecken ba, $b'a'$ Wellenberge, die Strecken ba', $b'c$ Wellentäler.[1])

Da diese longitudinalen Wellen nur in der Elastizität der Flüssigkeiten ihren Grund haben und durch die zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilchen tätige elastische Kraft fortgepflanzt werden, so können wir zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unmittelbar unsere früher erhaltene Gleichung anwenden:

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin e die elastische Kraft und d die Dichtigkeit der Flüssigkeit in der früher erwähnten Weise bedeuten.

Um demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten, haben wir nur diese beiden Größen für die jetzt vorliegenden Fälle zu bestimmen. Beginnen wir mit den tropfbaren Flüssigkeiten.

Die Größe e ist, wie wir sahen, die Kraft, mit der die einander genäherten Teilchen sich abstoßen, die entfernten sich anziehen, wenn die Verschiebung der Teilchen der Einheit gleich geworden ist, mit der wir also die Größe der Verschiebung multiplizieren müssen, um die einer vorhandenen Verschiebung entsprechende Anziehung oder Abstoßung zu erhalten. Denken wir uns eine Flüssigkeitssäule in einem Gefäße eingeschlossen, dessen Wände sich nicht ausdehnen können, und komprimieren wir diese Flüssigkeit etwa parallel der Längsachse des Gefäßes, so wird die

1) An dieser Auffassung der Wellenbewegung in Gasen brauchen wir auch infolge der dynamischen Gastheorie nichts zu ändern, da wir im vorigen Abschnitt sahen, daß den Gasmolekülen mitgeteilte Bewegungen sich einfach den Molekularbewegungen superponieren.

ser Kompression entsprechende elastische Kraft gleich jener sein, welche s schwingende Bewegung veranlaßt und fortpflanzt, da auch bei dieser r eine Zusammendrückung und Ausdehnung nach der Richtung der Radien attfindet, weil jeder parallel einem Radius liegende Flüssigkeitsfaden von r umgebenden Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Ist v das Volumen der in dem Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit, $\varkappa$ der Kompressionskoeffizient der Flüssigkeit, wenn der Druck für die ächeneinheit um die Größe p zunimmt, so ist die einer Volumverminderung entsprechende Druckzunahme dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \varkappa \cdot \frac{dp}{p}$$

er

$$dp = \frac{p}{\varkappa} \frac{dv}{v}.$$

Der Quotient $\frac{dv}{v}$ gibt uns die Volumverminderung der Flüssigkeit in uchteilen des ursprünglichen Volumens. Da nun der Voraussetzung nach Volumverminderung nur durch eine Verkürzung der Flüssigkeitssäule rallel einer Richtung, wie bei den longitudinalen Schwingungen, stattdet, so gibt uns der Quotient gleichzeitig die Verschiebung der Flüssigitsteile gegeneinander gemessen nach ihrem ursprünglichen Abstand. Da r weiter wissen, daß die durch eine Kompression geweckte elastische aft stets gleich ist der äußern dieselbe bewirkenden Kraft, so folgt, daß gleich ist der zwischen den Molekülen in der Flächeneinheit tätigen aft, wenn dieselbe um die Größe $\frac{dv}{v}$, dieselbe gegeben in Bruchteilen ursprünglichen Abstandes, einander genähert sind. Daraus folgt, daß Größe e gegeben ist durch

$$e = \frac{p}{\varkappa} q,$$

nn wir mit q den Querschnitt der betrachteten oder schwingenden üssigkeitssäule bezeichnen.

Die Größe d ist die Masse der Längeneinheit der schwingenden Flüssigitssäule, es ist somit, wenn s das spezifische Gewicht derselben bedeutet,

$$d = sq.$$

Wir erhalten demnach für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der hwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{p}{\varkappa s}},$$

er wenn wir den der Druckeinheit entsprechenden Kompressionskoeffienten mit $\varkappa_1$ bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varkappa_1 s}}.$$

Der reziproke Wert von $\varkappa_1$ ist nach den Entwicklungen des § 64 der astizitätskoeffizient der Flüssigkeit E in denjenigen Druckeinheiten, welche n Werte $\varkappa_1$ zugrunde liegen, so daß wir für die in Flüssigkeiten sich

fortpflanzenden longitudinalen Wellen genau zu demselben Ausdruck gelangen wie für die longitudinalen Wellen in festen Körpern

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Da wir die Masse der Längeneinheit der Flüssigkeitsschicht ihrem Gewichte gleich gesetzt haben, muß E in den Einheiten des absoluten Systems gegeben werden.

Im § 64 haben wir für einige Flüssigkeiten nach den Versuchen von Grassi u. a. die Werte von E in Kilogrammen für das Quadratmillimeter ausgedrückt. Um dieselben in das *C. G. S*-System zu übertragen, haben wir die dort angegebenen Werte mit 98 100 000 zu multiplizieren. Wir gaben damals für Wasser von der Temperatur 4° C.

$$E = 205.$$

Der Wert wird im *C. G. S*-System

$$E = 201{,}1 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Da in diesem System die Längeneinheit das Zentimeter, somit s die Masse eines Kubikzentimeters Wasser bei 4° ist, so ist $s = 1$, und es wird in Zentimetern

$$c = \sqrt{201{,}1 \cdot 10^8} = 141\,800^{\text{cm}}$$

oder in Metern $c = 1418^{\text{m}}$.

Für Quecksilber ergibt sich aus dem § 64 angegebenen Werte von $E = 2582$

$$E = 2582 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist 13,5959, also

$$c = \sqrt{\frac{2582 \cdot 10^8}{13{,}5959}} = 138\,000^{\text{cm}} = 1380^{\text{m}}.$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, haben Colladon und Sturm[1]) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Wasser ganz der Theorie entsprechende Werte gefunden, nämlich für die Temperatur 8° den Wert 1435^{m}.

Wir können auch dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Flüssigkeiten dieselbe zweite Form geben, die wir für die festen Körper ableiteten. Wir denken uns ein Kubikzentimeter Flüssigkeit in einem unausdehnsamen Würfel und üben auf die obere Fläche der Flüssigkeit einen Druck durch ein Kubikzentimeter derselben Flüssigkeit. Der von dieser Flüssigkeit ausgeübte Druck ist in den Einheiten des *C. G. S*-Systems gleich gs. Die dadurch eintretende Volumverminderung in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens ist

$$\delta = \varkappa_1 g s = \frac{gs}{E}.$$

1) *Colladon* und *Sturm*, Ann. de chim. et de phys. 36. 1827. Poggend. Ann. 12. 1828.

Daraus folgt

$$\frac{E}{\varkappa} = \frac{g}{\delta}$$

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \, .$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist also ich der Quadratwurzel aus der Beschleunigung beim freien Fall dividiert rch die Quadratwurzel aus der Volumverminderung, welche die Volumheit durch einen Druck erfährt, der dem Gewichte der Volumeinheit der ssigkeit entspricht, oder wie man sich kurz ausdrückt, welche die Volumheit durch ihr eigenes Gewicht erfährt.[1])

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Gasen alten wir, wenn wir in dem ersten für die Flüssigkeiten abgeleiteten sdrucke $\varkappa = 1$ setzen; denn nach dem Mariotteschen Gesetze ist die Volumverminderung dv entsprechende Druckvermehrung dp durch die ichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p} \, .$$

Denn haben wir ein Volumen v eines Gases unter dem Drucke p d wächst der Druck um dp, so nimmt das Volumen um dv ab, so daß h dem Mariotteschen Gesetze

$$pv = (p + dp)(v - dv) = pv + v\,dp - p\,dv - dp\,dv \, .$$

Bei den hier betrachteten schwingenden Bewegungen ist dv so klein, ß wir $dp\,dv$ gleich Null setzen dürfen, dann folgt aber aus dieser ichung

$$v\,dp - p\,dv = 0 \quad \text{oder} \quad dp = p\,\frac{dv}{v} \, .$$

Wir haben somit für die Größe e in jedem Falle den Druck einzuzen, unter welchem das Gas augenblicklich steht. Bedeutet demnach ch jetzt s das spezifische Gewicht des Gases, so wird

$$c = \sqrt{\frac{p}{s}} \, .$$

Ist s' die Dichtigkeit des Gases unter dem Druck p' der Atmosphäre, ist nach dem Mariotteschen Gesetze

$$\frac{p}{s} = \frac{p'}{s'} \, ,$$

mit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'}} \, .$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen hängt demnach, da chtigkeit und Elastizität des Gases sich im gleichen Verhältnis ändern, ht von dem Drucke, unter welchem das Gas steht, ab, sondern ist für e Drucke dieselbe.

1) Man sehe auch Poisson, Traité de mécanique, livre sixième, chap II. 67.

An dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Gasen müssen wir eine Korrektion anbringen, die, wie wir später in der Wärmelehre nachweisen werden, ihren Grund darin hat, daß jede Kompression der Gase eine Erwärmung, jede Ausdehnung eine Abkühlung zur Folge hat. Diese Erwärmung und Abkühlung bewirkt, daß von den Stellen der Verdichtung die Moleküle mit größerer Kraft zu denen der Verdünnung getrieben werden, so zwar, daß die elastische Kraft im Verhältnis 1 zu k, wenn k der Quotient aus der spezifischen Wärme des Gases bei konstantem Druck und derjenigen bei konstantem Volumen ist, vergrößert wird.[1]) Wir müssen deshalb den vorhin bestimmten Wert von c mit $\sqrt{k}$ multiplizieren und erhalten somit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'} k}.$$

Bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen ist ferner darauf zu achten, daß die Dichtigkeit derselben bei einem gegebenen Drucke wesentlich von der Temperatur abhängig ist. Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit s_0, so ist bei einer Temperatur t, dieselbe nach Graden der hundertteiligen Skala gemessen,

$$s' = \frac{s_0}{1 + 0{,}003\,67\,t}.$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bei der Temperatur t erhalten wir demnach

$$c = \sqrt{\frac{p'k}{s_0}(1 + 0{,}003\,67\,t)}.$$

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist unter dem Drucke einer Atmosphäre und bei der Temperatur 0^0 gleich 0,001 293. Für Luft ist der Wert von k, wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, 1,405. Der Druck der Atmosphäre ist in den Einheiten des $C.\ G.\ S$-Systems

$$p' = 10\,136 \cdot 10^2\ \frac{G}{CS^2}.$$

Wir setzen zur Bestimmung von p' den Normaldruck zu Paris, also berechnet mit dem Pariser g ein, weil die Dichtigkeit s_0 der Luft von Regnault zu Paris bestimmt ist. Mit diesen Werten wird

$$c = 33\,180\sqrt{1 + 0{,}003\,67\,t}\ \mathrm{Cm} = 331{,}8\sqrt{1 + 0{,}003\,67\,t}\ \mathrm{M}.$$

Für ein anderes Gas haben wir die betreffenden Werte von k und s_0 einzusetzen; nennen wir das spezifische Gewicht des Gases bezogen auf Luft σ, so können wir für ein beliebiges Gas die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen schreiben

$$c = 331{,}8\sqrt{\frac{k}{1{,}405 \cdot \sigma}(1 + 0{,}003\,67\,t)}.$$

1) Man sehe im zweiten Bande den Paragraphen: Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen.

Bestätigungen dieser Ausdrücke werden wir bei Besprechung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen kennen lernen.

§ 150.

Stehende Wellen in Flüssigkeitszylindern. Wenn man in ein
lindrisches Gefäß eine Flüssigkeit einschließt und man erregt an einer
elle des Flüssigkeitszylinders eine schwingende Bewegung, so pflanzt sich
selbe durch die Säule fort, wird an den Enden reflektiert und es ent-
hen durch Interferenz der direkten und reflektierten Welle stehende
hwingungen. Da wir auf die Wellenbewegung dieser Art nach dem
rigen Paragraphen unmittelbar unsere frühere Theorie der longitudinalen
hwingungen anwenden können, so haben wir für die Schwingungsdauer
ser stehenden Wellen den Ausdruck

$$T = 2L\sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2L}{c}$$

d wir haben nur die Länge L der stehenden Welle zu bestimmen, in
lcher die Flüssigkeitssäule schwingt.

Wir können auch hier die Fälle unterscheiden, wo die Flüssigkeits-
ule an beiden Seiten frei ist, oder wo sie an einem Ende frei ist, am
dern befestigt. Ersteres ist dann der Fall, wenn wir eine Flüssigkeits-
ule in einer heberförmigen an beiden Seiten offenen Glasröhre oder in
er in eine Flüssigkeitsmasse getauchten Glasröhre zum Schwingen bringen.
nn auch in dem letztern Falle ist die umgebende Flüssigkeit gewisser-
ßen weniger dicht als die in der Röhre eingeschlossene, da die Flüssig-
it außerhalb der Röhre bei einer an dem Ende der Röhre ankommenden
rdichtung nach allen Seiten und deshalb leichter ausweichen kann, als die
üssigkeit in der Röhre, welche sich nur der Längsrichtung der Röhre
ch bewegen kann. In diesen beiden Fällen tritt demnach eine Reflexion
ne Wechsel des Vorzeichens, ohne Verlust einer halben Wellenlänge ein.

Der zweite Fall ist vorhanden, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in
ner geraden unten geschlossenen Glasröhre zum Schwingen bringen, es
tt dann an der untern Grenze eine Reflexion mit Verlust einer halben
ellenlänge ein: ein ankommender Wellenberg wird als Wellental re-
ktiert.

Die Oszillationsdauern und Schwingungszahlen solcher Flüssigkeits-
linder ergeben sich daher unmittelbar wie diejenigen longitudinal schwin-
nder Stäbe, wenn wir dasselbe Verfahren anwenden wie § 140. Für den
beiden Enden freien Flüssigkeitszylinder von der Länge l wird

$$T = \frac{2l}{c}.$$

Die Länge der stehenden Welle ist gleich der Länge des Flüssigkeits-
linders, und daraus

$$N = \frac{c}{2l}.$$

Für den zweiten Fall wird

$$T = \frac{4l}{c}.$$

die stehende Welle hat die doppelte Länge des Flüssigkeitszylinders, die Schwingungsdauer ist die doppelte des vorigen Falles. Die Schwingungszahl ist die Hälfte

$$N = \frac{c}{4l}.$$

Diese Zahlen entsprechen den langsamsten Schwingungen, welche die Flüssigkeitszylinder vollführen können. Auch hier können sich die Zylinder in schwingende Teile zerlegen, welche selbständig schwingen und wegen der geringern Länge größere Schwingungszahlen haben. Durch ein gleiches Verfahren, wie wir es im § 140 anwandten, findet man, daß die möglichen Schwingungszahlen einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule sind

$$N = n\frac{c}{2l},$$

worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann; und für die in einer geschlossenen Röhre enthaltene Flüssigkeitssäule

$$N = (2n - 1)\frac{c}{4l}.$$

Da die experimentelle Bestätigung dieser Gesetze hauptsächlich durch die von den Schwingungen der Flüssigkeit erzeugten Töne gegeben wird, so werden wir die Versuche von Cagniard Latour und Wertheim und ebenso die von Kundt und Lehmann erst im nächsten Abschnitte besprechen.

Luftsäulen, welche in Röhren eingeschlossen sind, können ebenfalls durch Erregung einer vibrierenden Bewegung an ihrem einen Ende in stehende Schwingungen versetzt werden. Sind die Röhren an dem einen Ende geschlossen, so tritt dort Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein; sind sie offen, so tritt eine Reflexion an der umgebenden Luft ein ohne Verlust einer halben Wellenlänge, da die Luftteilchen außerhalb der Röhre nach allen Richtungen und somit freier beweglich sind als in der Röhre. Die an die Röhre angrenzende Luft ist somit gewissermaßen weniger dicht als jene in der Röhre. Die sich ergebenden Schwingungsdauern und Schwingungszahlen sind daher in offenen Röhren von der Länge l, für die langsamsten Schwingungen

$$T = 2l\sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2l}{c},$$

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{2l}$$

und die überhaupt möglichen Schwingungen

$$N = n\frac{c}{2l}.$$

Für an dem einen Ende geschlossene Röhren erhalten wir statt dessen

$$T = 4l\sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{4l}{c},$$

$$N = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{4l}$$

und als mögliche Schwingungszahlen

$$N = (2n - 1)\frac{c}{4l}.$$

Wenn auch in den letzten Jahren die Gesetze der in Pfeifen schwingenden Luftsäulen durch manometrische Methoden in ausgedehnter Weise experimentell verfolgt sind, so wollen wir doch des historischen Ganges wegen diese Methode erst besprechen, wenn wir in den von offnen und gedeckten Pfeifen gelieferten Tönen die Gesetze dieser Bewegungen experimentell untersucht haben. Die manometrischen Methoden geben so eine schöne Bestätigung der auf akustischem Wege schon länger aufgefundenen Beziehungen.

Ebenso wie in Luftsäulen kann man auch plattenförmige Luftmengen in stehende Schwingungen versetzen, das heißt dünne Luftschichten, welche zwischen ebenen Platten eines festen Körpers, etwa zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen sind, sowohl wenn man die Luftplatten seitlich fest begrenzt, das heißt die Ränder der beiden ebenen Platten, welche die Luftplatte einschließen, durch einen festen Rahmen verbindet, als wenn man sie seitlich unbegrenzt läßt. Die Untersuchung der schwingenden Bewegung solcher Platten hat ein großes Interesse, weil man die Theorie dieser Bewegungen vollständig durchführen kann. In einer ausführlichen theoretischen und experimentellen Untersuchung hat Kundt[1] für die ganz geschlossenen, das heißt rings von einem festen Rande umgebenen Luftplatten die volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen, während für die offenen, das heißt rings nicht mit einem festen Rand umgebenen Luftplatten sich Abweichungen zwischen der Theorie und der Erfahrung zeigen, wie wir sie im nächsten Abschnitt auch für die offenen Luftsäulen, die offenen Orgelpfeifen finden werden. Wir müssen uns hier begnügen, auf die interessante Arbeit von Kundt hinzuweisen, da eine Behandlung dieses speziellen Falles zu viel Raum in Anspruch nehmen würde.

§ 151.

Transversale Wellen in Flüssigkeiten. Außer den longitudinalen Schwingungen kann man den tropfbar flüssigen Körpern auch transversale Schwingungen erteilen. Die in einem Gefäße eingeschlossene Flüssigkeit hat nämlich eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage, und die auf eine der Schwere unterworfene Flüssigkeit wirkenden Kräfte veranlassen, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene bildet. Wird das Gleichgewicht der Flüssigkeit an irgend einer Stelle gestört und dort eine Bewegung eingeleitet, so pflanzt sich die Gleichgewichtsstörung nach und nach auf andere Stellen der Flüssigkeit fort.

Wirft man einen Stein in eine ruhende Wassermasse, oder läßt man einen Tropfen auf die Oberfläche einer in einem weiten Gefäße befindlichen Flüssigkeit fallen, so sieht man bald die Flüssigkeit in einem Kreise rings um die getroffene Stelle wallförmig sich emporheben. Dieser Flüssigkeitswall breitet sich ringsum aus, an der Stelle aber, wo zuerst die Flüssigkeit

1 *Kundt*, Poggend. Ann. 150. 1873.

über das Niveau sich erhob, zeigt sich dann eine Vertiefung der Flüssigkeit. Sowie die wallförmige Erhöhung sich rings durch die Flüssigkeit ausbreitet, so auch diese Vertiefung. Meist zeigt sich auf eine solche Störung des Gleichgewichts nicht nur eine solche Erhöhung und Vertiefung, sondern mehrere, die nacheinander, abwechselnd eine Erhöhung und eine Vertiefung als ebenso viele Wellenberge und Wellentäler, sich über der Flüssigkeitsoberfläche verbreiten.

Daß wir es hier mit einer wirklichen Wellenbewegung, daß heißt mit einer hin und her gehenden Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, nicht mit einer fortschreitenden zu tun haben, ergibt sich aus den Versuchen der Gebrüder E. H. und W. Weber auf das entschiedenste.[1])

Um die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu untersuchen, bedienten sich die beiden Weber der Wellenrinne. Dieselbe besteht (Fig. 282) aus einem zirka $1{,}6^{\mathrm{m}}$ langen geraden glatt gehobelten Brette aus Fichtenholz AB, auf dem in zwei tiefen Furchen zirka 15^{mm} voneinander zwei dicke Glasscheiben fest eingefügt sind. Diese beiden Glasscheiben JJJ, KKK werden außerdem durch die beiden senkrechten Bretter E und F, in welche sie auch eingefügt sind, festgehalten.

Fig. 282

Die Befestigung der Scheiben in den Fugen sind vollständig wasserdicht. Der schmale zwischen den beiden Glasscheiben und den Brettern eingeschlossene Raum von zirka $1{,}5^{\mathrm{m}}$ Länge, 15^{mm} Breite im Lichten und 16^{cm} Tiefe wird mit Wasser, Quecksilber, Milch usw., je nach Bedürfnis zu irgend einer Höhe angefüllt. Dabei werden die Glasscheiben, um ein Biegen oder Brechen derselben zu verhindern, durch mehrere feste hölzerne Gabeln oder Klammern zusammen gehalten.[2])

Hat man die Wellenrinne bis zu irgend einer Höhe mit Wasser gefüllt, so hebt man an einem Ende derselben durch Aufsaugen in einer Glasröhre etwas Flüssigkeit in die Höhe und erzeugt, indem man die Flüssigkeit wieder niederfallen läßt, eine Welle, welche durch die Rinne fortschreitet.

Man sieht zunächst einen senkrechten Durchschnitt der erregten Welle durch die Glaswände und kann so die Gestalt der Wellen aufs genaueste bestimmen. Man sieht aber auch zugleich, wenn man in die Rinne kleine Bernsteinstückchen, von gleichem spezifischen Gewicht wie das Wasser bringt, und dann durch die Glaswände hindurch gegen das Licht blickt, die Bewegung dieser festen Teilchen und kann ihre Bahnen bestimmen.

1) Wellenlehre, auf Experimente gegründet von den Brüdern *E. H. Weber* und *W. Weber*. Leipzig 1825.
2) Ebendaselbst p. 105.

a diese Teilchen genau dieselbe Bewegung haben wie die Wasserteilchen, ren Stelle sie vertreten, so kann man dadurch die Bewegung der Flüssigit genau bestimmen.

Aus ihren mannigfachen Versuchen ersahen die Gebrüder Weber, ß die Flüssigkeitsteilchen wirklich keine fortschreitende, sondern nur se hin und her gehende Bewegung bei Erregung einer Welle annehmen, d zwar, wenn die aufeinander folgenden Wellen eine gleiche oder fast iche Gestalt haben, daß dann die Teilchen in oder nahe der Oberfläche h in geschlossenen, nahezu elliptischen Bahnen (Fig. 283a) bewegen. wegt sich durch die Rinne eine Welle von B nach A fort, und zwar Wellenberg voraus, so bewegen sich die Wasserteilchen, wenn der Berg rüber zieht, in dem Bogen $\alpha\beta\gamma$ fwärts, vorwärts, abwärts in rselben Richtung, in welcher r Berg vorübergeht. Folgt das ellental, das ebenso tief ist als r Wellenberg hoch war, so begt sich das Teilchen weiter rch den Bogen $\gamma\delta\alpha$ nach α zurück Der senkrechte Abstand des höchn Punktes β dieser Bahn von dem Niveau $\alpha\gamma$ ist gleich der Höhe des ellenberges und der des tiefsten Punktes δ von $\alpha\gamma$ gleich der Tiefe des ellentales.

Fig. 283.

Geht das Wellental dem Wellenberge voran, so bewegt sich das Teilen zunächst durch $\gamma\delta$ nach α und dann durch den Bogen $\alpha\beta\gamma$ in seine ühere Lage γ zurück. Die fortschreitende Bewegung ist unter dem Wellenrge stets der Richtung gleich, in welcher die Welle fortschreitet, in ellental dieser Richtung entgegengesetzt.

Die Schwingungsbahnen der Flüssigkeiten laufen aber nicht in sich bst zurück, wenn die den Wellenbergen folgenden Täler mit den erstern cht von gleicher Größe sind.

Ist das dem vorhergehenden Wellenberg folgende Wellental merkh kleiner, so wird die Bahn der Flüssigkeitsteilchen Fig. 283b, und ht das Tal, aber in der Richtung von A nach B, voraus und folgt ihm ı kleinerer Wellenberg, so wird die Bahn Fig. 283c, in beiden Fällen langt das Flüssigkeitsteilchen nicht zu seiner ursprünglichen Ruhelage α rück.

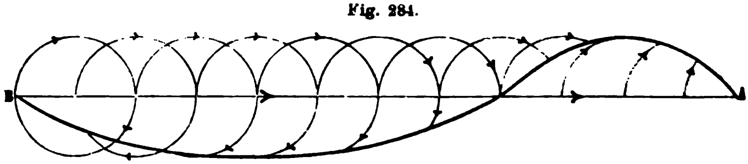
Die schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen beschränkt sich loch nicht auf die Teilchen in oder nahe der Oberfläche der Flussigkeiten, ndern in sehr großen Tiefen unter der Oberfläche zeigen die Flüssigkeitsilchen noch eine schwingende Bewegung. Die Versuche der Gebrüder Weber ergaben, daß in einer Tiefe, welche 350mal die Höhe der Wellen, s heißt den Abstand des höchsten Punktes des Wellenberges von dem fsten des Wellentales betrug noch eine deutliche schwingende Bewegung attfand. Indes zeigte sich ein merklicher Unterschied in den Bahnen der ilchen. Während nämlich die Teilchen ganz nahe unter der Oberfläche st kreisförmige Bahnen besaßen, wurde die vertikale Höhe der Ellipsen mer kleiner, je tiefer die Flüssigkeitsteilchen sich unter der Oberfläche fanden. In einer Tiefe, welche ungefähr das Hundertundzwanzigfache r der Höhe der Welle betrug, war die vertikale Bewegung der Teilchen

fast unmerklich und in noch größeren Tiefen bestand die Bewegung der Teilchen nur in einem Hin- und Hergehen in horizontaler Richtung.

So fanden die beiden Weber z. B. bei einer Welle, die eine Höhe von zirka 2^{mm} hatte, nahe unter der Oberfläche die vertikale Höhe der Bahn gleich dieser Höhe, den horizontalen Durchmesser gleich $2{,}5^{mm}$, in einer Tiefe von 230^{mm} betrug die vertikale Höhe der Bahn nur $0{,}5^{mm}$, der horizontale Durchmesser 1^{mm} und in größern Tiefen war der vertikale Durchmesser nicht mehr meßbar, während der horizontale sich nur mehr unbedeutend verkleinerte und in der Nähe des Bodens sogar wieder etwas größer wurde.

Aus dieser Art der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen ersehen wir, daß dieselben sich zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, auf und nieder und vor- und rückwärts. Daraus folgt dann, daß die Gestalt der Flüssigkeitswellen die bereits § 132, Fig. 241 betrachtete sein muß, oder daß, wenn das dem Wellenberg folgende Wellental eine Tiefe besitzt, welche der Höhe des Berges gleich ist, es stets etwas länger sein muß. Die Welle muß, wie man unmittelbar sieht, die Gestalt Fig. 284

Fig. 284.



haben. Die Welle schreitet in der Richtung der Pfeilstriche von *B* nach *A* fort und die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchlaufen hier die als kreisförmig vorausgesetzten Bahnen in dem von den Pfeilen angedeuteten Sinne, im Wellenberge in horizontaler Richtung vorwärts und im Wellentale wieder zu ihrer Gleichgewichtslage zurück.

Daß die Wasserwellen wirklich diese Gestalt haben, sahen die Gebrüder Weber; sie sahen stets, daß bei gleicher Tiefe die Länge oder Breite des Wellentales etwas größer war als diejenige des Wellenberges.

§ 152.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen. Die an der Oberfläche einer Flüssigkeit erregte, mit Gestaltsänderung verbundene schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen pflanzt sich nach dem Vorigen nach zwei Richtungen fort, einmal an der Oberfläche hin, indem sie derselben das wellenförmige Ansehen gibt, andererseits nach der Tiefe, indem wir sahen, daß die Teilchen auch in der Tiefe, wenn eine Welle über der Flüssigkeit fortschreitet, eine schwingende Bewegung annehmen. Es fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit sich die Bewegung nach beiden Richtungen fortpflanzt.

Was zunächst die Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe der Flüssigkeit betrifft, so bemerkt man weder bei der Erregung noch beim horizontalen Fortgange der Wellen ein allmähliches Fortschreiten derselben

sondern die schwingende Bewegung scheint, wenigstens soweit es sich beurteilen läßt, gleichzeitig in der Tiefe und an der Oberfläche zu geschehen. Die senkrecht oder fast senkrecht untereinander liegenden Flüssigkeitsteilchen scheinen alle gleichzeitig in der gleichen Oszillationsphase sich zu befinden.

Dieses Resultat ist nach dem ersten Paragraphen dieses Kapitels vorauszusehen; denn die Bewegung der Flüssigkeit in der Tiefe kann nur Folge des fortgepflanzten Stoßes, der Dichtigkeitsänderung an der Oberfläche der Flüssigkeit, bei Erregung und Fortdauer der schwingenden Bewegung sein; nach unten hin pflanzt sich daher die Bewegung ebenso rasch fort wie die longitudinalen Wellen, welche wir in den vorigen Paragraphen betrachtet haben.

Anders jedoch mit der Fortpflanzung der Wellenbewegung an der Oberfläche der Flüssigkeit, diese ist viel langsamer, so daß man die einzelnen Wellen recht gut verfolgen kann.

Zunächst wiesen die Gebrüder Weber nach, daß auch bei diesen Wellen, gerade wie wir es im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten, die Bewegung sich genau um die Länge einer Welle fortpflanzt, während ein Flüssigkeitsteilchen eine Oszillation zurücklegt. Dann aber zeigten sie, daß bei diesen Flüssigkeitswellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für alle Wellen die gleiche sei und nicht von der Elastizität und Dichtigkeit der Flüssigkeit abhänge, sondern daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von einer Menge von Umständen abhänge.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitswellen hängt wesentlich von der Höhe und Länge der Wellen ab; alle Umstände, welche daher Höhe und Länge der Welle ändern, ändern auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die Höhe und Länge, oder wie die Gebrüder Weber sie nennen, Breite der Wellen hängt nun zunächst ab von der Stärke des Stoßes, der die Welle erregt, je stärker der Stoß ist, um so höher ist die Welle; da die höhere Welle sich rascher fortpflanzt, so nimmt die Geschwindigkeit der Welle mit der Stärke des erregenden Stoßes zu.

Breitet sich eine Welle über einen immer größern Raum aus, so nimmt dadurch die Höhe der Welle ab, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher kleiner, je weiter sich in diesem Falle die Welle von dem Punkte ihrer Erregung entfernt. Man kann dieses sehr leicht wahrnehmen, wenn man in einer ruhenden Wasserfläche durch Hineinwerfen eines Steines Wellen erzeugt. Es bilden sich dann eine Anzahl von Wellen, die sich in immer größern Kreisen ausbreiten. Erregt man dann durch Hineinwerfen eines Steines von gleicher Größe wie vorhin zwischen den ausgedehnten Wellen ein neues Wellensystem, so sieht man, wie sich dort die Wellen sehr viel rascher ausbreiten.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung hängt ferner ab von der Tiefe der Flüssigkeit; je tiefer die Flüssigkeit ist, um so rascher pflanzt sich die Welle fort. Der Grund dafür ist einmal in der Reibung und Adhäsion der Flüssigkeit am Boden zu suchen; dann aber auch darin, daß in der Nähe des Bodens, wie wir vorhin sahen, die Höhe der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen und somit die Höhe der Welle abnimmt.

Die Geschwindigkeit der Wellen nimmt übrigens nicht in demselben Verhältnisse ab wie die Tiefe der Flüssigkeiten, sondern langsamer.

Die Versuche, mittels deren die beiden Weber[1]) diese Sätze ableiteten, wurden so angestellt, daß eine Glasröhre an dem einen Ende der Rinne so befestigt war, daß ihre Mündung konstant nahe 2^{mm} unter dem Niveau der Flüssigkeit war. Durch Aufsaugen und nachheriges Fallenlassen der Flüssigkeit wurde die Welle erregt. Mittels einer Uhr, welche $\frac{1}{60}$ Sekunde angab, und die durch einen Druck mit dem Finger angehalten und losgelöst werden konnte, wurde die Zeit beobachtet, in welcher der Gipfel der Welle an dem andern Ende der Wellenrinne ankam. Die Uhr wurde in dem Momente losgelassen, in welchem man die gehobene Flüssigkeitssäule fallen ließ, und festgehalten, wenn der Gipfel der erregten Welle das andere Ende erreichte; die Quotienten aus der Länge der Rinne und den beobachteten Zeiten ergaben die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Wir teilen hier die Resultate einiger Versuche mit, um zugleich eine Vorstellung von der Geschwindigkeit zu geben, mit welcher sich derartige Wellen fortpflanzen.

Die Wellen wurden bei gleicher Tiefe in verschiedenen Flüssigkeiten durch gleich hohe Flüssigkeitssäulen erregt. Es zeigte sich folgendes:

Tiefe der Flüssigkeit	Höhe der wellenerregenden Säule	Geschwindigkeit der Wellen auf Wasser	Geschwindigkeit der Wellen auf Quecksilber
2,7 Zent.	5,4 Zent.	53,3 Zent.	51,3 Zent.
	8,1 „	54 4 „	54,0 „
	10,8 „	55,5 „	55,76 „
	16,2 „	56,9 „	60,3 „
	21,6 „	56,9 „	62,1 „
5,4 Zent.	5,4 Zent.	75,3 Zent.	60,9 Zent.
	8,1 „	75,9 „	64,3 „
	10,8 „	77,4 „	66,3 „
	16,2 „	77,0 „	65,5 „
	21,6 „	75,9 „	69,2 „
			Branntwein
10,8 Zent.	8,1 Zent.	79,2 Zent.	—
	16,2 „	100,1 „	—
	32,4 „	100,1 „	81,8 Zent.
	48,6 „	—	86,8 „
21,6 Zent.	32,4 Zent.	135 Zent.	135 Zent.

Aus einer Betrachtung dieser Zahlen scheint ferner hervorzugehen, daß die Wellen in Flüssigkeiten von verschiedenem spezifischen Gewicht sich mit merklich gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, wenn sie durch gleich hohe Säulen der Flüssigkeiten erregt sind. Strenge genommen ist das jedoch nur der Fall, wenn die Flüssigkeiten eine bedeutende Tiefe haben, bei geringerer Tiefe bewirkt der Einfluß des Bodens, die verschiedene Adhäsion der Flüssigkeiten an demselben und an den Wänden des Gefäßes, daß die Geschwindigkeiten verschieden sind.

1) *E. H.* und *W. Weber,* Wellenlehre usw. p. 166 ff.

§ 153.

Die Ursachen der Flüssigkeitswellen. Vergleichen wir diese Sätze über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der sichtbaren Flüssigkeitswellen mit den früheren Sätzen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Elastizität bedingten Wellen in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, so ergibt sich unmittelbar, daß wir die hier in Rede stehenden Wellen nicht als eine Äußerung der Elastizität der Flüssigkeiten ansehen dürfen. Denn für die durch die elastische Kraft der Körper fortgepflanzten Wellen erhielten wir als Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}}\,.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit war proportional der Quadratwurzel aus der elastischen Kraft und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der betreffenden Substanz; sie war unabhängig von der Länge der Welle und unabhängig von ihrer Höhe, das heißt, der Größe der Amplituden. Bei den Flüssigkeitswellen aber, die wir hier betrachten, findet gerade das Umgekehrte statt: ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nahezu unabhängig von der Natur der Flüssigkeit, ändert sich aber wesentlich mit der Länge der Wellen und ihrer Höhe. Vergleichen wir ferner die Werte, welche die beiden Weber für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in verschiedenen Fällen erhalten haben, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elastizität entstehenden Wellen, so weist auch dieses uns darauf hin, die Ursache dieser Wellen nicht in der Elastizität der Flüssigkeit zu suchen; denn für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elastizität erregten Wellen hatten wir für Wasser z. B. mehr als 1400^{m}, hier jedoch nur wenige Dezimeter.

Noch ein anderer Umstand läßt es klar hervortreten, daß diese Art der Wellenbewegung nicht eine Folge der elastischen Kraft der Flüssigkeiten ist, nämlich die Höhe der Wellen. Wir sehen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit bereits eine deutliche Erhebung eintreten, wenn wir nur einen Tropfen der Flüssigkeit auf die Oberfläche fallen lassen. Bei der äußerst geringen Kompressibilität der Flüssigkeiten kann aber die Zusammendrückung derselben infolge einer so kleinen Kraft nur unmeßbar klein sein und deshalb die auf die Zusammendruckung folgende Ausdehnung der Flüssigkeit und somit die Erhebung derselben über das Niveau auch nur unmeßbar klein und nicht mit der beobachteten Höhe der Welle vergleichbar sein.

Wenn man sich nun daran erinnert, daß unter Einwirkung der Schwere die Flüssigkeit eine horizontale ebene Oberfläche haben muß, so ist es leicht ersichtlich, daß die Schwere es ist, welche die Wellenbewegung veranlaßt und fortpflanzt. Haben wir durch Aufsaugen an irgend einer Stelle eine Flüssigkeitssäule über das Niveau der umgebenden Flüssigkeit gehoben und lassen dann die gehobene Säule los, so muß nach den Gesetzen der Hydrostatik diese Flüssigkeit niedersinken; rings um diese Stelle muß aber, um das hydrostatische Gleichgewicht herzustellen, die Flüssigkeit steigen; und da sich die Ausgleichung nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit ausbreitet, wird sich die Flüssigkeit um jene Stelle in Form eines Walles über

das Niveau der Flüssigkeit erheben. An der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst erhoben war und dann fallen gelassen wurde, hat dieselbe eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, sie wird daher nicht im Niveau der Flüssigkeit zur Ruhe kommen, sondern da die Flüssigkeit, auf welche sie fällt, ringsum ausweichen kann, tiefer sinken.

Nach kurzer Zeit muß daher an der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst aufgesaugt war, ein Wellental entstehen, rings umher ein Wellenberg. Dieser Wellenberg wird dann aber ebenso durch die Schwere niedergezogen, er bewirkt, daß rings um ihn nach außen hin die Flüssigkeit steigt, daß weiter ein Wellenberg entsteht, während an der Stelle, wo er sich befand, ein Wellental sich bilden muß. Man sieht, wie infolge einer solchen Gleichgewichtsstörung durch Wirkung der Schwere sich Wellenberg und Wellental durch die Flüssigkeit fortpflanzen muß.

Daß eben dasselbe der Fall sein muß, wenn der ursprüngliche Stoß an der Erregungsstelle der Wellen nicht durch eine gehobene Flüssigkeitssäule, sondern auf irgend eine andere Weise, etwa durch einen auf die Flüssigkeit geworfenen Stein bewirkt wird, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Nach dem Gesagten ist es also der hydrostatische Druck der im Wellenberge gehobenen und durch die Schwere niedersinkenden Flüssigkeitssäule, welche die Wellenbewegung veranlaßt; wird also der hydrostatische Druck an der Stelle der gehobenen Flüssigkeit auf andere Weise fortgenommen, so darf sich die Wellenbewegung nicht weiter fortpflanzen.

Die Gebrüder Weber haben durch einen sehr einfachen Versuch dieses nachgewiesen und somit die Richtigkeit der angegebenen Erklärung gezeigt. Bei einer regelmäßig viereckigen, an beiden Enden geschlossenen Röhre von Holz wurde die eine Seitenwand mehrfach durchbohrt, so daß auf der ganzen Länge der Röhre eine Anzahl Löcher in gerader Linie nebeneinander lagen. In ein dem einen Ende der Röhre zunächst liegendes Loch wurde eine Glasröhre eingekittet und darauf die ganze Röhre vollständig mit Quecksilber gefüllt. Dann wurde in der Glasröhre eine Quecksilbersäule von ungefähr $2{,}5^{cm}$ aufgesaugt und wieder soviel Quecksilber nachgefüllt, daß es aus allen Öffnungen halbkugelförmig hervorsah. Nachdem das geschehen war, wurde die gehobene Quecksilbersäule fallen gelassen, und es zeigte sich dann, daß nur aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen Quecksilber ausfloß, in den entferntern Öffnungen trat keine Bewegung des Quecksilbers ein. Da aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen, als dort der Wellenberg sich bildete, das Quecksilber ausfloß und der vergrößerte hydrostatische Druck durch das Abfließen aufgehoben wurde, hörte die Ursache des Steigens für die entferntern auf, dort entstand kein Wellenberg mehr, es floß kein Quecksilber mehr aus.

Als nun aber in alle Löcher Röhren gekittet wurden, das Abfließen also gehindert wurde, da sah man das sukzessive Steigen des Quecksilbers in allen Röhren, der Wellenberg pflanzte sich fort und das auf das Steigen des Quecksilbers in jeder Röhre folgende Sinken zeigte das dem Wellenberge folgende Wellental.

Dieser Versuch beweist aber auch zugleich die Richtigkeit unserer Annahme, daß die Ausgleichung des gestörten hydrostatischen Druckes sich nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit erstreckt, denn wäre das der Fall gewesen, so hätte zugleich aus allen Öffnungen die gleiche Menge

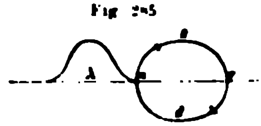
Quecksilber ausfließen müssen. Wägungen des ausgeflossenen Quecksilbers zeigten aber, daß aus der der Glasröhre am nächsten liegenden Öffnung am meisten Quecksilber ausfloß, aus den weitern um so weniger, je weiter sie von der Röhre entfernt waren. Die Röhre hatte neun Öffnungen; als nun in der Glasröhre das Quecksilber nahezu 10^{cm} gehoben war, floß Quecksilber aus den fünf ersten Öffnungen; aus der ersten traten 72^g, aus der zweiten 52, aus der dritten 26, aus der vierten 12 und aus der fünften Öffnung ungefähr $0,5^g$ Quecksilber.[1])

Dieser Versuch bestätigt also die Voraussetzungen der mitgeteilten Erklärung der Wasserwellen vollständig.

Zugleich aber stehen mit ihr alle vorhin beschriebenen Erscheinungen der Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen in den Wellen, wie auch die Bewegung der Wellen als solcher im Einklang.

Was zunächst die krummen Bahnen der Flüssigkeitsteilchen betrifft, so muß anfangs, wenn in A (Fig. 285) die primär gehobene Flüssigkeitssäule niedersinkt, das Teilchen α nach rechts hin geschoben und gehoben werden, es bewegt sich nach β hin. Von der Spitze des Wellenberges sinkt es dann nach unten, behält aber seine fortschreitende Bewegung noch bei und bewegt sich nach γ hin. Dort angekommen, sinkt es wegen der in dem Fallen erhaltenen Geschwindigkeit weiter nach unten und bewegt sich dabei, da links von γ jetzt das Wellental ist, also der Druck von rechts nach links hin größer ist, nach links hin, um so, wenn das Tal ganz vorüberzieht, über δ nach α, oder wie in andern Fällen nicht ganz nach α sich zurückzubewegen.

Fig. 285



Nach dieser Erklärungsweise muß auch die Geschwindigkeit der Fortpflanzung mit der Höhe der Wellen zunehmen, denn da sich die Bewegung während einer Oszillation der Teilchen um eine Wellenlänge fortpflanzt, muß bei gleicher Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so größer sein, je rascher das Teilchen oszilliert. Je größer nun die bewegende Kraft, der primäre Stoß ist, um so höher hebt sich das Teilchen, und je höher es gehoben ist, um so mehr wird seine Bewegung durch die Schwere beschleunigt, die Oszillation und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher rascher. Bei den durch Elastizität erregten Wellen war das anders, da war die beschleunigende Kraft dem Abstande der bewegten Punkte von der Gleichgewichtslage proportional, bei größerm Abstande wurde daher die Geschwindigkeit der Teilchen in demselben Verhältnisse mit dem Abstande größer, die Oszillationsdauer war konstant.

Wurde aber in ein und derselben Punktreihe die Oszillationsdauer geändert, so änderte sich ebenso auch die Wellenlänge, indem die beschleunigende Kraft zugleich dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional war und somit Wellenlänge und Oszillationsdauer in gleichem Verhältnisse wachsen und abnehmen.

Hier, wo die bewegende Kraft nicht von der gegenseitigen Einwirkung der Teilchen, sondern von der Schwere derselben abhängt, besteht diese

1) *E. H.* und *W. Weber*, Wellenlehre usw. p. 280 ff.

Beziehung nicht, deshalb hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge ab.

Daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, ergibt die Überlegung, daß, wenn in schwereren Flüssigkeiten wegen des größern Gewichtes der gehobenen Teilchen die bewegende Kraft zunimmt, in eben demselben Verhältnisse bei gleicher Höhe der Welle die zu bewegende Masse zunimmt, die Beschleunigung und somit die Geschwindigkeit der bewegten Teilchen bleibt daher unverändert.

Es sind vielfach Versuche gemacht aufgrund der hier entwickelten Auffassung eine mathematische Theorie der Wellenbewegung zu geben.[1]) Der erste, dem eine annähernde Lösung der Aufgabe glückte, war Gerstner[2]). Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flüssigkeitswellen führt die Gerstnersche Theorie zu der Gleichung

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi} g,$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge und g die Beschleunigung durch die Schwere bedeutet.

Die Theorie führt also zu dem Resultate, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich einer Konstanten multipliziert mit der Quadratwurzel aus der Wellenlänge ist, sie gelangt also insoweit zu dem Resultate der Weberschen Versuche, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit wachsender Wellenlänge wächst, aber langsamer als diese. Dagegen zeigt die Theorie keine Abhängigkeit von der Tiefe der Flüssigkeit. Da nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen der Einfluß der Tiefe auf den Einfluß des Bodens auf die Bewegung zurückzuführen ist, so wird die Gerstnersche Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen für unendliche Tiefe der Flüssigkeit geben. Es ergibt sich das auch aus spätern Untersuchungen, welche für c^2 geben[3])

$$c^2 = \frac{1 - e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}}{1 + e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}} \frac{\lambda}{2\pi} g,$$

wenn h die Tiefe der Flüssigkeit bedeutet. Ist h gegen λ sehr groß, so wird der die Tiefe enthaltende Faktor gleich eins.

§ 154.

Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen. Die Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flüssigkeitswellen von der Natur der Flüssigkeit gilt nur für Wellen, deren Höhe relativ groß ist. Für Wellen von sehr geringer Höhe kann, worauf zuerst W. Thomson[4]) aufmerksam gemacht hat, diese Unabhängigkeit von der Natur der

1) *E. H.* und *W. Weber,* Wellenlehre. p. 303 ff.

2) Die Theorie von *Gerstner* (Prag 1804) ist abgedruckt in *Webers* Wellenlehre, p. 338 ff. Die spätern Untersuchungen sind sehr vollständig angeführt in der Abhandlung von *Rieß*, Repertorium d. Physik von *Exner*. 26. p. 131. 1890.

3) Man sehe unter andern *Kolaček,* Wiedem. Ann. 5. p. 425. 1878.

4) *W. Thomson*, Philosophical Magazin. 42. (4) p. 368. 1871.

Flüssigkeit nicht mehr bestehen, bei solchen Wellen muß sich die Oberflächenspannung der Flüssigkeit bemerkbar machen. Derartige kleine Wellen, die sich vielfach neben und auf größern als kleine Kräuselwellen bilden, kann man erregen, wenn man auf eine Platte eine Flüssigkeitsschicht bringt und die Platte in Schwingungen versetzt, oder bequemer noch, wenn man in einer hinreichend großen Flüssigkeitsfläche durch einen an einem schwingenden Stabe oder Stimmgabel befestigten Stift Wellen erregt.[1])

Wenn sich an der Oberfläche einer Flüssigkeit Wellen befinden, so ist über den Wellenbergen die Oberfläche konvex gekrümmt, über den Wellentälern dagegen konkav; es folgt demnach, daß in den Wellenbergen die Flüssigkeitsteilchen einen stärkeren Normaldruck erfahren als in den Wellentälern, daß somit der Druck der Schwere dort durch den Normaldruck vergrößert wird. Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen können wir ohne weiteres erkennen, daß der Oberflächendruck gerade so wirken muß, wie wenn die Schwere der im Wellenberge gehobenen Flüssigkeitsteilchen vergrößert wäre, ohne daß eine Vergrößerung der schwingenden Masse eintritt. Die Beschleunigung der Flüssigkeitsteilchen muß deshalb eine größere sein, als wenn der Oberflächendruck nicht vorhanden wäre. Diese Bemerkung läßt sofort erkennen[2]), wie wir die Gerstnersche Gleichung

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi} g$$

ergänzen müssen, um den Einfluß des Oberflächendruckes in Rechnung zu ziehen, wir haben einfach die Beschleunigung g an jeder Stelle durch die Beschleunigung infolge des dort vorhandenen Oberflächendruckes zu vermehren bezw. an den Stellen des Wellentals zu vermindern. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, wir hätten die Wellen in einer Wellenrinne erregt, so daß sie nur in der Richtung der x, nach der Länge der Rinne fortschreiten, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit in den Wellen nur nach dieser Richtung gekrümmt, in der dazu senkrechten Richtung ist die Flüssigkeitsoberfläche eben. Ist an irgend einer Stelle der Oberfläche der Krümmungsradius in einem parallel der Richtung x geführten Schnitt gleich r, positiv wenn die Krümmung nach außen konvex ist, ist σ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so haben wir anstatt g zu setzen

$$g + \frac{H}{2r\sigma},$$

wo H die in absolutem Maße gemessene Konstante der Oberflächenspannung bedeutet (S. 382).

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, daß bei diesen kleinen Wellen dieselbe durch die einfache Wellengleichung

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

dargestellt werde, worin y die Erhebung an der Stelle x über dem ebenen Flüssigkeitsniveau bedeutet, so erhalten wir den Wert von r in folgender

1) Man sehe *L. Matthiessen*, Poggend. Ann. **134**. p. 107 1868; **141**. p. 385 1870. Wiedem. Ann. **38**. p. 118 1889. Lord *Rayleigh*. Philos. Mag **16** (5) p. 50. 1883; **30**. (5) p. 386. 1890

2) Man sehe *Kolaček*, Wiedem. Ann. 5. p. 429 1878. *Rieß*, Repertorium d. Physik von Exner. **26**. p. 102. 1890.

Weise. In der analytischen Geometrie wird bewiesen, daß der Krümmungsradius r an der Stelle x einer Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, gegeben wird durch die Gleichung

$$r = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Der im Zähler stehende Differentialquotient ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die an den betrachteten Punkt der Kurve gelegte Tangente mit der Achse der x bildet. Bestehen die Wellen aus flachen Kräuselungen, so ist der Winkel immer so klein, daß wir das Quadrat seiner trigonometrischen Tangente gegen 1 vernachlässigen dürfen. Unter dieser Annahme wird

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}y.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß an der betrachteten Stelle der Krümmungsradius immer entgegengesetzt liegt als der Wert von y; ist y positiv nach oben, also an Stelle eines Wellenberges, so ist der Mittelpunkt der Krümmung unterhalb des Flüssigkeitsniveaus; an Stelle eines Wellentales, wo y negativ, die Flüssigkeit nach außen konkav gekrümmt ist, befindet sich der Krümmungsmittelpunkt oberhalb der Flüssigkeit.

Da es sich hier nur um den absoluten Wert von r handelt, setzen wir dasselbe positiv.

Ebenso wie in dem von der Schwere abhängigen Gliede die Niveaudifferenz nicht eingeht, haben wir auch in dem vom Oberflächendrucke abhängigen Gliede $y = 1$ zu setzen; dann wird

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

und es wird

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{H}{2\sigma}\right).$$

Dies ist die von W. Thomson abgeleitete Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen unter dem Einflusse der Schwere und der Oberflächenspannung; schreibt man die Gleichung in der Form

$$c^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{H}{2g\sigma}\right),$$

so erkennt man unmittelbar, daß für Wellen von großer Länge das zweite, für Wellen sehr kleiner Länge das erste Glied ohne Einfluß ist. Für Wasser z. B. bei 20^0 mit dem Brunnerschen Werte von $\frac{H}{2g} = 0{,}074$ in Gramm pro Quadratzentimeter ist bei einer Welle, für welche $\lambda = 30^{\text{cm}}$, das erste Glied in der Klammer 4,77, das zweite 0,018. Mit Berücksichtigung des zweiten Gliedes ergibt sich $c = 68{,}41^{\text{cm}}$, ohne Berücksichtigung 68,4, so daß der Unterschied kaum oder gar nicht meßbar ist. Bei sehr kleinen Wellen tritt dagegen das erste Glied sehr zurück, für Wellen von $0{,}3^{\text{cm}}$ wird $c = 39{,}5^{\text{cm}}$; läßt man das erste Glied außer acht, so wird $c = 39^{\text{cm}}$.

Die Thomsonsche Gleichung führt zu dem interessanten Resultat, daß Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen für eine gewisse Wellenlänge en kleinsten Wert hat; wir erhalten den Wert von λ nach den Regeln r Differentialrechnung, wenn wir die Gleichung für c^2 nach λ differentiieren d den Differentialquotienten gleich Null setzen, also aus der Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} - \frac{2\pi}{\lambda^2}\frac{H}{2g\sigma} = 0; \qquad \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{H}{2g\sigma}}\,.$$

Für Wasser würde dieser Wert von $\lambda = 1{,}709$ und die kleinste Fortanzungsgeschwindigkeit $c = 23{,}1^{\mathrm{cm}}$.

Es folgt daraus, daß man denselben Wert von c für zwei verschiedene ellenlängen, eine kleiner als 1,709, eine größer als dieser Wert erhält.

Wir haben schon bei Besprechung der Kapillaritätskonstanten erwähnt, ß besonders L. Matthiessen und Lord Rayleigh sich mit der Unterchung der kleinen Wellen beschäftigt haben. Wir teilen in folgenden hlen einige der Versuche von Matthiessen[1]) mit, welche die Thomnsche Formel nach jeder Richtung bestätigen. Die kleinen Wellen wurden t Hilfe von an den Zinken von Stimmgabeln, deren Schwingungszahlen f das schärfste bestimmt waren, angebrachten feinen Spitzen hervorgerufen. rischen den beiden Spitzen bildete sich ein System von stehenden Wellen, d bei passender Beleuchtung wurden auf einer gemessenen Länge die henden Wellen gezählt, der Quotient der Länge und der halben Anzahl hender Wellen gab die Länge λ einer Welle. Aus den Beobachtungen ır kleiner Wellen, kleiner als 0,3, wurde die Größe $\frac{H}{2}$ abgeleitet, und it dieser aus der nach λ aufgelösten Gleichung, indem man, wenn n die hwingungszahl ist, $c = n\lambda$ setzte, die der Schwingungszahl n zukommende ellenlänge λ berechnet, aus welcher sich die Fortpflanzungsgeschwindigit ergibt.

n	Wasser $\frac{H}{2\sigma} = 72{,}6$		Quecksilber $\frac{H}{2\sigma} = 35{,}9$		Schwefelkohlenstoff $\frac{H}{2\sigma} = 32{,}9$	
	$n\lambda$ beob.	$n\lambda$ ber.	$n\lambda$ beob.	$n\lambda$ ber.	$n\lambda$ beob.	$n\lambda$ ber.
8,4	24,15	24,81	21,89	22,38	21,97	22,12
16,4	22,61	23,30	18,58	19,39	18,12	18,94
36,9	25,71	27,12	20,07	21,77	19,59	21,18
64,7	30,60	31,70	23,49	25,80	22,84	24,54
128	38,27	38,02	29,82	31,10	29,44	30,18
256	47,89	48,90	38,66	38,66	36,86	37,50
458	59,54	59,54	46,72	46,72	48,55	47,26
916	75,03	75,11	60,45	58,62	—	

Der Gang der beobachteten Werte entspricht durchaus der Thomsonhen Gleichung, wenn auch in der Nähe des Minimums die Werte nicht llkommen übereinstimmen, die beobachteten meist etwas kleiner sind, als sich mit den darüber angegebenen Werten der spezifischen Kohäsion geben.

1) Matthiessen, Wiedem. Ann. 38. p. 118. 1889.

Man sieht, daß diese Methode ein Mittel zur Bestimmung der Kapillaritätskonstanten ist. Die Thomsonsche Gleichung nach $\frac{H}{2\sigma}$ aufgelöst gibt

$$\frac{H}{2\sigma} = \frac{n^2\lambda^2}{2\pi} - \frac{g\lambda^2}{4\pi^2}.$$

Wir haben die von Lord Rayleigh[1]) nach dieser Methode gefundenen Werte, ebenso einige der von Ochsé[2]) erhaltenen in § 79 und 80 angegeben. Lord Rayleigh schätzt die Genauigkeit der gefundenen Werte auf etwa ein Prozent.

Auch die Versuche Grunmachs[3]) über die Abnahme der Oberflächenspannung des Quecksilbers, welche wir § 79 erwähnten, sind nach dieser Methode ausgeführt.

§ 155.

Durchkreuzung und Reflexion der Wellen.[4]) Die Erscheinungen der Interferenz, der Reflexion der Wellenbewegung und die Bildung stehender Wellen infolge der fortgepflanzten und reflektierten Wellen lassen sich nach den Versuchen der beiden Weber mit den Flüssigkeitswellen sehr schön darstellen.

Die Erscheinungen der Interferenz zeigen sich, wenn man an beiden Enden der Wellenrinne eine Welle gleichzeitig erregt.

In der Mitte der Wellenrinne vereinigen sich beide vorausgehenden Wellenberge zu einem neuen, der nahezu die Summe der Höhen der einzelnen Wellenberge hat, wie es die Interferenztheorie verlangt, nach welcher die Bewegung infolge des Zusammenwirkens mehrerer Teilbewegungen die Summe letzterer sein muß. Treffen demnach die Wellen ohne Phasendifferenz zusammen, so muß ein Berg von doppelter Höhe und ein Tal von doppelter Tiefe entstehen. Als Mittel von zwölf Messungen fanden die beiden Weber die Höhe des resultierenden Wellenberges gleich 1,8, wenn die Höhe der beiden komponierenden Wellenberge gleich 1 war; der Unterschied der beobachteten Höhe von der theoretischen ist so klein, daß dieser Versuch als eine Bestätigung des Interferenzgesetzes, wenn es dessen noch bedürfte, angesehen werden könnte.

Gehen ein Wellenberg und ein Wellental durcheinander hindurch, so ist die Höhe des Berges oder die Tiefe des Tales gleich der Differenz beider, ist der Berg ebenso hoch, als das Tal tief ist, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit eben. Dies zeigt sich jedesmal, wie wir sofort sehen werden, bei der Reflexion der Wellen.

Nach der Durchkreuzung bewegt sich jede Welle ganz ungestört weiter, Wellenberge und Wellentäler sind in der Lage zueinander, als hätte in jedem Wellenzuge gar keine Störung stattgefunden. Es ist diese Beobachtung ein Beweis für die Richtigkeit des zweiten Teiles des Prinzipes, das wir der Lehre von den Interferenzen zum Grunde legten, des Satzes, daß wenn von der Interferenzstelle aus sich die Bewegung Punkten mitteilt

1) Lord *Rayleigh*. Philos. Mag. **30**. (5.) p. 386. 1890.
2) *Ochsé, Exner*, Repertor. d. Physik. **26**. p. 646. 1890.
3) *Grunmach*, Ann. d. Physik. **9**. p. 1261. 1902.
4) *E. H.* und *W. Weber*, Wellenlehre usw. p. 212 ff.

relche nur durch einen der Wellenzüge eine Bewegung annehmen, die Bewegung dieser Punkte gerade so geschieht, als hätte keine Interferenz tattgefunden.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der Interferenzstelle ist dieenige, welche das Interferenzgesetz verlangt. Schreiten die beiden Wellen ach entgegengesetzten Richtungen fort, so ist die horizontale Bewegung er Flüssigkeitsteilchen, wenn die Wellen ohne Phasendifferenz zusammenreffen, der Richtung nach gerade entgegengesetzt, die vertikale jedoch leich gerichtet. Die horizontale Bewegung muß sich somit aufheben, die ertikale summieren.

Das wurde von den beiden Weber durch die Beobachtung bestätigt. Es ergab sich, wenn man senkrecht unter der Stelle beobachtete, wo der ipfel des resultierenden Berges lag, wo also die Bewegungen genau ohne hasendifferenz zusammentrafen, daß dort die Teilchen in genau senkrechter ichtung sich auf und ab bewegten.

Wenn die Wellen nicht genau ohne Phasendifferenz zusammentreffen, o hebt sich die horizontale Bewegung nicht ganz auf; Webers sahen ach, wie seitwärts von den eben erwähnten Stellen die Bahnen der Teilhen nicht senkrecht waren, sondern gegen die Vertikale geneigt, und zwar m so mehr, je weiter man sich von der Stelle der vollkommenen Durchreuzung entfernte.

Wenn auch die Wellen insofern sich ungehindert durchkreuzen, daß ie Bewegung der Flüssigkeit in jedem Wellenzuge dieselbe bleibt, als habe eine Durchkreuzung stattgefunden, so findet doch bei der Durchkreuzung er Wellen ein kleiner Zeitverlust statt. Die Versuche der beiden Weber rgaben, daß, während eine Welle ihre Wellenrinne in 2,283 Sekunden urchlief, wenn sie sich nicht mit einer andern kreuzte, bei der Kreuzung weier Wellen eine Welle von genau gleicher Größe als die vorige zum urchlaufen derselben Strecke die Zeit von 2,4 Sekunden brauchte.

Diese Verzögerung denken sich die beiden Physiker folgendermaßen. ei dem ungehinderten Fortschreiten der Wellen, wo sich die Teilchen in iren kreisförmigen oder elliptischen Bahnen bewegen, bleiben die Teilchen mmer in ihrer beschleunigten Bewegung, bei der Durchkreuzung der Wellen agegen, wo sich einmal die horizontalen Geschwindigkeiten ganz aufheben nd die Teilchen sich nur vertikal auf und ab bewegen, tritt ein Zeitpunkt n, wo die Bewegung des Teilchens sich umkehrt, wo also seine Geschwinigkeit ganz und gar gleich Null ist. Von da ab erhält erst das Teilchen urch Untersinken wieder eine beschleunigte Bewegung. Daraus scheint m zu folgen, daß bei einer Durchkreuzung zweier gleich großer Wellen o viel Zeit verloren gehe, als der Verlust der beschleunigten Bewegung ährend der Vereinigung der Wellen herbeiführt. Nach der Durchkreuzung rhalten die Teilchen der Welle ihre vorige Beschleunigung und dadurch re vorige Bewegung.

Die Erscheinungen der Reflexion der Wellen treten am einfachsten uf, wenn eine Welle senkrecht gegen eine feste Wand anprallt. Da die lüssigkeit an der Wand vollkommen frei beweglich ist, so muß die Reexion der Wellen an der Wand so erfolgen, wie die Reflexion der Wellen n der Grenze zweier Punktsysteme, von denen das zweite weniger dicht t als das erste, das heißt ein ankommender Wellenberg muß als Wellen-

berg und ein ankommendes Wellental muß als Wellental reflektiert werden. Die Erscheinungen an der Wand müssen daher sich folgendermaßen darstellen.

Nach Verlauf von $\frac{1}{4}$ Oszillationsdauer muß unmittelbar an der Wand ein halber Wellenberg sein, dessen Mitte an der Wand liegt, dessen Höhe nahezu die doppelte des einfachen ankommenden Berges ist, da er aus der ersten Hälfte des reflektierten und der zweiten Hälfte des ankommenden Wellenberges besteht. Nach Verlauf eines weitern Viertels der Oszillationsdauer ist das auf den Wellenberg folgende Wellental bis zur Wand fortgeschritten; zugleich aber ist der erste Wellenberg ganz reflektiert, und der reflektierte Wellenberg erstreckt sich bis eine halbe Wellenlänge von der Wand, gerade so weit, als sich das dem Berge folgende Tal erstreckt. Die Bewegung an der Wand muß daher aufgehoben werden und die Wasserfläche an der Wand bis zur Länge einer halben Welle eben sein.

In dem folgenden Viertel der Oszillationsdauer pflanzt sich der reflektierte Wellenberg um eine viertel Wellenlänge nach rückwärts fort, das angekommene Wellental ebenso viel vorwärts, so daß also die tiefste Stelle des Wellentales sich gerade an der Wand befindet. In dem Augenblicke aber, wo das ankommende Wellental die Wand traf, pflanzte sich auch ein reflektiertes Wellental fort, in dem betrachteten Augenblicke befindet sich also an der Wand die zweite Hälfte des ankommenden und die erste Hälfte des reflektierten Wellentales, es muß dort ein halbes Wellental von nahezu doppelter Tiefe des ankommenden Wellentales sein, dessen tiefste Stelle sich gerade an der Wand befindet.

Endlich nach Verlauf des letzten Viertels der Oszillationsdauer ist auch das Wellental ganz reflektiert, der Wellenberg hat sich um eine halbe Wellenlänge von der Wand entfernt; die ganze Welle ist reflektiert und bewegt sich von da an, der Wellenberg voraus, das Wellental folgend, in der Flüssigkeit zurück.

Wellenberg und Wellental haben also ihre Lage gegen die feste Wand vertauscht, vorher war der Berg, jetzt ist das Tal der Wand am nächsten; Wellenberg und Wellental gehen durcheinander hindurch.

Diese aus dem Frühern abgeleitete Darstellung des Reflexionsvorganges bestätigt sich auf das vollständigste durch die Anschauung bei den Versuchen in der Wellenrinne, und die Messungen über die Höhe des Berges und die Tiefe des Tales an der Wand in dem ersten und dritten der von uns betrachteten Zeitteile ergaben die Höhe, wie sie die Theorie verlangt. Bei einer Höhe der ankommenden Welle von $6{,}2^{mm}$ war die Höhe des Berges in dem ersten der betrachteten Zeitteile gleich $10{,}35^{mm}$, also mehr wie $\frac{5}{3}$ der ankommenden Welle.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der festen Wand muß mit derjenigen übereinstimmen, welche die Flüssigkeitsteilchen haben, wenn die Wellen sich durchkreuzen; auch dieses haben die Versuche der Gebrüder Weber gezeigt.

Wenn eine Welle nicht senkrecht gegen eine feste Wand ankommt, so muß sie nach § 136 so zurückgeworfen werden, daß der Wellenstrahl der zurückgeworfenen Welle mit dem Einfallslote denselben Winkel bildet wie der Strahl der einfallenden Welle. Auch dieses haben die Versuche bestätigt. Es folgt nämlich aus dem Satze, wie wir bereits § 136 erwähnten,

daß eine kreisförmige Welle, welche im Mittelpunkte eines kreisförmigen Gefäßes erregt ist, wenn sie an der kreisförmigen Wand anprallt, sich nach der Reflexion als kreisförmige Welle mit immer kleinerem Radius wieder zur Mitte des Gefäßes fortpflanzen muß. Der Versuch zeigt dieses deutlich, wenn man z. B. einen Teller mit Quecksilber füllt und nun aus einem mit einem kleinen Loche versehenen Papiertrichter auf die Mitte des Tellers Quecksilber tropfen läßt.

Läßt man auf diese Weise in den einen Brennpunkt eines mit Quecksilber gefüllten elliptischen Gefäßes Quecksilber tropfen, so müssen die sich von diesem Brennpunkte aus kreisförmig fortpflanzenden Wellen von der Wand so reflektiert werden, daß sie als kreisförmige Wellen in dem andern Brennpunkte der Ellipse wieder zusammenlaufen, da die Radien Vektoren mit dem Einfallslote, der Normale an den verschiedenen Stellen, gleiche Winkel bilden. In dem zweiten Brennpunkte geben dann die vereinigten Wellen zu einer kegelförmigen Erhöhung Veranlassung, die durch ihr Niedersinken ein neues zurückkehrendes Wellensystem gibt, welches sich ebenso in dem ersten Brennpunkte wieder vereinigt, dort wiederum zu einem Wellensysteme Veranlassung wird usf. Man sieht dieses vielfache Hin- und Herlaufen sehr leicht in der schönen gekräuselten Oberfläche, welche die Flüssigkeit bei einem solchen Versuche zeigt.

Wenn man in der Wellenrinne nach und nach mehrere Wellen erzeugt, deren Länge gleich ist der Länge der Rinne oder einem aliquoten Teile derselben, so müssen durch die Interferenz der von der Erregungsstelle fortschreitenden und der von der festen Wand reflektierten Wellen sich stehende Wellen bilden, deren Schwingungsknoten gerade so liegen müssen, wie die Schwingungsknoten in einem an beiden Enden freien longitudinal schwingenden Stabe. Wenn man demnach Wellen erregt, welche genau die doppelte Länge der Wellenrinne besitzen, so geht durch die Mitte derselben immer nach der einen Seite ein Wellenberg, nach der andern ein Wellental, in der Mitte muß sich daher ein Schwingungsknoten bilden und jede Hälfte der Rinne schwingt als eine halbe stehende Welle hin und her.

Ist die Länge der erregten Wellen gleich der Länge der Wellenrinne, so sieht man zwei Schwingungsknoten entstehen, beide im Abstande von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge von den Wänden der Rinne und im Abstand einer halben Wellenlänge voneinander. Jeder der drei Teile, in welche dadurch die Flüssigkeit der Länge nach zerfällt, schwingt für sich als stehende Welle von der Länge der halben Wellenrinne. An den Wänden befinden sich die Mitten der beiden äußersten Wellen, die Schwingungsmaxima.

Auf diese Weise kann man leicht, wie die Gebrüder Weber zeigten, 3, 4 und mehr Schwingungsknoten und somit eine leicht sichtbare experimentelle Bestätigung der früher vorgetragenen Sätze über die Bildung der stehenden Wellen durch Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortgepflanzter Wellensysteme erhalten.

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Über die Erregung des Schalles.

§ 156.

Von der Ursache des Schalles. Wenn man eine schwachgespannte Saite in Schwingungen versetzt, so lassen sich die Schwingungen derselben mit den Augen wahrnehmen, man sieht die Saite in ihren verschiedenen Lagen nacheinander. Wird die Spannung jedoch mehr und mehr verstärkt, so werden die Schwingungen bald so rasch, daß man die Saite in den verschiedenen Lagen nicht mehr unterscheiden kann, man sieht an der Stelle, wo sie schwingt, nur mehr eine halbdurchsichtige Fläche. Verstärkt man die Spannung der Saite noch mehr, so ist die Bewegung derselben kaum mehr sichtbar, statt dessen wird sie uns aber in einer andern Weise wahrnehmbar, wir hören sie, wir erhalten einen von der schwingenden Saite ausgehenden Eindruck auf unser Ohr. Den Eindruck, welchen unser Ohr erhält, nennen wir Schall; es ist im folgenden unsere Aufgabe, diese, die schwingende Bewegung begleitende Erscheinung zu untersuchen.

Der Schall entsteht nur durch eine schwingende Bewegung, und jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit erzeugt einen Schall.

Wir sahen in dem vorigen Abschnitt, daß wir auf sehr viele Weisen schwingende Bewegungen erzeugen können, alle diese können auch die Ursache eines Schalles werden.

Reiben wir einen Stab seiner Länge nach, so erzeugt die Elastizität des Stabes stehende Schwingungen, die Savart durch die Stöße des Stabendes gegen eine Spitze dem Auge sichtbar gemacht hat; wir vernehmen nun auch stets einen Schall, wenn wir einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzen. Ebenso erzeugen die transversalen Schwingungen von Stäben und Saiten, sobald sie hinreichend rasch sind, die Schwingungen von Platten und Glocken sowie die drehenden Schwingungen der Stäbe einen Ton.

In allen diesen Fällen sind es die regelmäßigen Schwingungen der Körper infolge ihrer Elastizität, welche einen Ton erzeugen; man kann jedoch auch auf andere Art, durch in kurzer Zeit wiederholte Stöße, einen Schall hervorbringen. So erhält man einen Schall, wenn man eine Karte oder eine biegsame Feder dem Umfange eines in rasche Rotation versetzten gezähnten Rades so weit nähert, daß jeder Zahn der Karte oder Feder

einen Schlag erteilt: so auch, wenn man einen Strom eines Gases oder einer Flüssigkeit gegen eine rotierende Scheibe führt, welche in regelmäßigen Zwischenräumen durchbohrt ist; die Flüssigkeit dringt abwechselnd durch eine Öffnung der Scheibe, abwechselnd wird sie durch eine geschlossene Stelle derselben zurückgehalten; es entsteht so eine regelmäßige Folge von Stößen, die wir als Ton wahrnehmen. Läßt man einen Körper um eine Achse rotieren, welche nicht durch dessen Mittelpunkt geht, so erteilt dieser der umgebenden Luft eine Reihe von Stößen, indem abwechselnd das größere und kleinere Stück des Körpers an derselben Seite der Rotationsachse sich befindet; diese Reihenfolge von Stößen erzeugt einen Ton.

Auch scheinbar kontinuierliche Bewegungen können einen Ton erzeugen, in der Tat ist es aber wieder eine regelmäßige Reihenfolge von Stößen, welche auch in solchen Fällen den Schall hervorrufen.[1]) Bläst man in das Mundstück einer gewöhnlichen Pfeife, so erzeugt dieser kontinuierliche Luftstrom einen Ton; indes in diesem Falle teilt sich der Luftstrom an der Lippe der Pfeife, der eine Teil dringt in die Pfeife ein, der andere entweicht in die umgebende Luft. Der in die Pfeife eingedrungene Teil des Luftstromes komprimiert anfänglich die der Lippe am nächsten liegende Schicht der Luft; diese Verdichtung der Luftschicht verhindert wegen der größern Elastizität der komprimierten Luft so lange ein neues Eindringen der Luft in die Pfeife, bis sich die Verdichtung auf die weiteren Luftschichten der Pfeife übertragen hat. Es entsteht daher auch in diesem Fall eine periodische Bewegung, eine Reihenfolge von Stößen, welche den Schall veranlaßt.

Wir können daher ganz allgemein sagen, daß die Ursache des Schalles hinreichend schnell wiederholte Stöße sind, welche zu unserem Ohre gelangen.

Damit das letztere, die Mitteilung der Stöße an unser Ohr, der Fall sein kann, genügt nicht allein das Schwingen eines Körpers, sondern es ist notwendig, daß diese schwingende Bewegung durch ein elastisches Mittel zu unserem Ohre hingeführt werde. In den meisten Fällen ist dieses Mittel die atmosphärische Luft. Versetzen wir einen Körper in longitudinale Schwingungen, so dehnt er sich abwechselnd aus, abwechselnd zieht er sich zusammen. Bei der Ausdehnung treibt er die zunächst an ihn angrenzende Luft von sich fort, bei der Zusammenziehung stürzt die vorher fortgetriebene Luft in den jetzt leeren Raum, welcher den Körper umgibt, hinein, und diese hin- und hergehende Bewegung der Luft pflanzt sich als longitudinale Schwingung durch die Umgebung bis zu unserem Ohre fort. Schwingt eine Saite, ein Stab oder eine Platte transversal, so tritt dasselbe ein; bewegt sich die Saite nach der einen Seite, so treibt sie die angrenzende Luft in der Richtung fort, schwingt sie zurück, so saugt sie die Luft gewissermaßen nach sich hin; sie erteilt also der Luft eine hin- und hergehende Bewegung, welche bis zu unserem Ohre fortgepflanzt und als Stöße auf dasselbe wirkend uns die Empfindung des Schalles gibt.

Es kann aber jeder Körper, die festen sowohl als die flüssigen, wenn in ihnen ein Schall erregt wird, denselben fortpflanzen, wie man sich leicht dadurch überzeugt, daß eine unter Wasser erregte periodische Bewegung

1) Man sehe *Strouhal*, Wiedem. Ann. 5. p. 216. 1878.

sich als Schall wahrnehmen läßt. Wir sahen, in allen elastischen Körpern pflanzen sich an einer Stelle erregte Schwingungen fort; da der Schall eine schwingende Bewegung ist, die zu unserem Ohr fortgeflanzt ist, so folgt aus dem vorigen Abschnitte schon, daß jeder elastische Körper den Schall fortzupflanzen imstande ist.

Daß wir aber überhaupt nur dann einen Schall vernehmen, wenn durch irgend einen elastischen Körper die Schwingungen zu unserem Ohre fortgepflanzt werden, zeigt die Erfahrung. Denn bringen wir unter die Glocke der Luftpumpe ein kleines Glöckchen, welches mit einem Klöppel versehen und an einem Faden in der Glocke so aufgehängt ist, daß es nirgendwo eine der festen Begrenzungen des von der Glocke und dem Luftpumpenteller abgesperrten Raumes berührt, so hört man keinen Ton, wenn man die Luft durch Pumpen aus der Glocke fortnimmt und durch Bewegung des Apparates den Klöppel zum Anschlagen bringt. Man hört aber einen Schall, wenn man eine Verbindung zwischen der Glocke und dem Rezipienten der Pumpe herstellt, sei es, daß man den Rezipienten mit Luft oder mit einer Flüssigkeit anfüllt, oder daß man das Glöckchen an einem Metalldraht in der Glocke aufhängt.

§ 157.

Qualität des Schalles. Jeden Eindruck, welchen wir durch unser Gehör erhalten, nennen wir Schall; indes können diese Eindrücke sehr verschieden sein.

1. Der Schall kann in einem einzigen mehr oder weniger starken, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör bestehen, man nennt ihn dann meistens Knall, wenn man auch häufig unter Knall nur einen heftigen, einmaligen, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör versteht. Der Schall kann ferner von einiger Dauer sein, in einer Reihenfolge von Stößen entstehen, welche unser Ohr erhält. Je nachdem nun diese Stöße regelmäßig oder unregelmäßig, gleichartig oder ungleichartig sich folgen, unterscheidet man den Schall als Ton oder Klang oder als Geräusch. Die Geräusche selbst unterscheidet unsere Sprache wieder als Rasseln, Knistern, Sausen, Brausen usw.

Daß nur eine regelmäßig periodische Bewegung einen Ton, eine unregelmäßige ein Geräusch verursacht, kann man leicht durch eine durchlöcherte Scheibe, eine einfache Form der im nächsten Paragraph zu beschreibenden Sirene nachweisen. Man nehme eine kreisförmige Scheibe von steifer Pappe und versehe einen auf derselben gezogenen Kreis mit einer Anzahl von Löchern in genau gleichen Abständen. Man ziehe einen zweiten Kreis auf der Scheibe von einem Durchmesser, der dem des ersten nahe ist, und versehe den zweiten Kreis mit etwa der gleichen Zahl aber ganz unregelmäßig verteilten Löchern. Setzt man die Scheibe auf die Zentrifugalmaschine um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse in hinreichend schnelle Rotation und bläst durch ein Glasrohr gegen die aus gleich weit voneinander stehenden Löchern gebildete Reihe, so hört man einen Ton, während gleiches Blasen gegen die unregelmäßige Löcherreihe nur das Blasegeräusch hören läßt.

2. Die musikalischen Töne unterscheidet man nach ihrer Höhe als

höhere oder tiefere Töne. Worauf dieser Unterschied beruht, läßt sich leicht durch den Versuch zeigen. Ein longitudinaler Ton ist stets viel höher, als der Transversalton desselben Stabes, und der Transversalton eines Stabes ist um so höher, je kürzer und dicker der Stab ist; bei schwingenden Saiten ist der Ton um so höher, je kürzer die Saite ist oder je stärker man sie spannt. Da wir nun sahen, daß die longitudinalen Schwingungen rascher sind als die transversalen, und diese um so rascher, je kürzer der schwingende Körper ist, so folgt, daß ein Ton um so höher ist, je mehr Schwingungen der den Ton erzeugende Körper macht, je mehr Stöße also in gleichen Zeiten unser Ohr treffen.

Man kann die Schwingungszahl einer gespannten Saite berechnen; läßt man nun einen Stab mit der Saite genau isochron schwingen, oder bringt man einen Ton dadurch hervor, daß man ebenso oft die Zähne eines Rades gegen eine Karte schlagen läßt, so haben alle diese Töne die gleiche musikalische Höhe. Jeder Ton entspricht somit einer ganz bestimmten Schwingungszahl.

Man kann übrigens auch bei den Geräuschen eine verschiedene Höhe wahrnehmen, wie man aus folgendem Versuche sieht. Man nimmt sieben Stäbe von hartem Holze gleicher Dicke und Breite, aber verschiedener Länge, so daß beim Anschlagen diese Stäbe eine Tonreihe geben. Läßt man dann einen der Stäbe auf den Boden fallen, so hört man ein Geräusch ohne bestimmten musikalischen Charakter; läßt man aber die Stäbe nacheinander zu Boden fallen, und zwar der Reihe nach die größeren zuerst, so unterscheidet man auch bei diesen Geräuschen eine bestimmte Höhe

3. Töne gleicher Höhe können auf das Ohr einen ganz verschiedenen Eindruck machen; so unterscheidet man deutlich den Ton selbst bei gleicher Höhe der Blas- und Saiteninstrumente, bei den Blasinstrumenten den der Holz- und Blechinstrumente.

Die Töne unterscheiden sich durch eine eigentümliche Beschaffenheit, die man häufig als Klang oder Klangfarbe oder Tonfarbe bezeichnet. Vielfach wendet man auch dafür das französische Wort Timbre an. Die Ursache der Klangverschiedenheit, welche schon Ohm[1] in der verschiedenen Form der Schwingungen gesehen hatte, ist besonders von Helmholtz[2]) in neuerer Zeit untersucht worden, er hat gezeigt, daß dieselbe in der Tat von der Form der Schwingungen, oder vielmehr von den gleichzeitig auftretenden Tönen bedingt ist. Einen Ton erzeugt jede regelmäßig periodische Wiederkehr von Stößen in unser Ohr; innerhalb jeder Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode bestand, in den folgenden Perioden in ganz gleicher Weise wiederkehrt. So kann die Schwingung, die wir als Ton vernehmen, eine einfache sein, sie kann aber auch aus der Übereinanderlagerung mehrerer Schwingungen bestehen, deren jede einem andern höhern Tone entspricht, welcher den gehörten Ton begleitet, welcher sich aber nur in soweit bemerkbar macht, daß er die Farbe des Grundtones verändert. In welcher Weise wir die einzelnen Töne eines Klanges erhalten können, werden wir in einem der nächsten Paragraphen besprechen.

1 *Ohm*, Poggend. Ann. 60. 1843; 62. 1844. Man sehe auch *Seebeck*, Poggend. Ann. 60. 1843; 63. 1844. Doves Repert. 8. 1849.

2 *Helmholtz*, Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863

4. Die Töne können bei gleicher Höhe und gleicher Klangfarbe an Stärke oder Intensität verschieden sein. Verschiedenheit der Stärke erzeugen wir bei einer gespannten Saite durch Änderung der Schwingungsamplitude, oder was dasselbe ist, durch Änderung der Schwingungsgeschwindigkeit bei ungeänderter Dauer der Schwingung. Der größern Amplitude entspricht der stärkere Ton.

Wir nehmen indes nicht an, daß die Intensität einfach wie die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung zu- oder abnehme, sondern wie das Quadrat derselben, indem wir annehmen, daß die Stärke des Schalles von der Stärke des Stoßes abhängt, welchen die bewegten Luftteilchen unserm Gehörorgane erteilen. Die Stärke des Stoßes ist aber proportional der lebendigen Kraft der bewegten Körper, und da diese bei gleicher Masse dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so setzen wir die Intensität des Schalles dem Quadrate der Geschwindigkeit der schwingenden Teile in dem Augenblicke der größten Geschwindigkeit proportional also dem Quadrate der Amplitude.

§ 158.

Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen. Um die Schwingungszahl von Tönen zu erhalten, kann man sich entweder der Gesetze der Elastizität bedienen oder der Tonerzeugung durch mechanische Stöße, indem man letztere durch irgend eine mechanische Vorrichtung direkt zählt.

Die Sirene von Cagniard Latour[1]) bestimmt die Schwingungszahlen durch direkte Zählung der den Ton erzeugenden Stöße, sie besteht (Fig. 286) aus einer zylindrischen Trommel, von der unten in der Mitte der Bodenplatte eine Röhre R ausgeht, mittels welcher der Apparat auf einen Windkasten gesetzt wird, und durch welche die komprimierte Luft in die Trommel BB eindringt. Die obere Platte der Trommel ist durch eine bestimmte Anzahl von Löchern, welche auf dem Umfange eines Kreises liegen, durchbohrt. Die Löcher sind alle gleichweit voneinander entfernt und alle nach gleicher Richtung schief gebohrt, so daß die Öffnungen alle z. B. von links nach rechts aufsteigende unter einem bestimmten Winkel gegen die Vertikale geneigte Kanäle durch die Platte bilden.

Fig. 286.

Fig. 287.

Unmittelbar über der die Trommel deckenden Platte befindet sich eine zweite Platte, welche an der Achse AF (Fig. 287) befestigt ist und mit dieser Achse sich drehen kann. Um die Platte möglichst leicht beweglich

2) *Cagniard Latour,* Annales de chim. et de phys. **12**. 1819 et **18**. 1821. Poggend. Ann. **8**. 1826 und **10**. 1827.

zu machen, ist die stählerne Achse AF unten bei a (Fig. 286) in ein Zapfenlager von Messing gestellt, und oben durch die Schraube A, deren Spitze in eine konische Vertiefung der Achse paßt, lose gehalten.

Die Platte C (Fig. 287) hat ebenfalls auf einem Kreise 16 Löcher, so daß dieselben sich auf die Löcher der untern Platte legen und die Trommel mit der äußern Luft in Verbindung setzen können, oder bei einer kleinen Drehung der obern Scheibe den Zwischenräumen der untern Scheibe entsprechen, die Trommel also verschließen. Bilden die Löcher die Fortsetzung der Löcher der untern Platte, so kann die in die Trommel getriebene verdichtete Luft nach außen entweichen; entsprechen die Löcher den Zwischenräumen zwischen den unteren Löchern, so ist die Trommel abgesperrt, die Luft kann nicht entweichen. Die Löcher sind schief durch die Platte gebohrt, aber nach entgegengesetzter Richtung als die unteren Löcher; also wenn diese von links nach rechts durch die untere Platte aufsteigende Kanäle bilden (Fig. 288), so bilden die Löcher der obern Platte von rechts nach links aufsteigende Kanäle. Durch diese Art der Durchbohrung wird bewirkt, daß die Scheibe C durch den Luftstrom selbst zum Rotieren gebracht wird, der zu den Löchern austritt, wenn die obern Löcher auf den unteren stehen, denn der in den unteren Löchern von links nach rechts aufsteigende Luftstrom stößt gegen die Wände der oberen Löcher und erteilt dadurch der Scheibe eine Drehung, welche derjenigen des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt ist. Die Geschwindigkeit der obern Scheibe wird dadurch um so größer, je stärker der Druck der Luft in der Trommel ist. Durch Regulierung des Luftstromes kann man daher der Scheibe eine ganz bestimmte Geschwindigkeit geben.

Fig. 288.

Dreht sich die Scheibe mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird bei 16 Löchern bei jeder Umdrehung, da alle oberen Löcher zugleich auf alle unteren zu stehen kommen, 16 mal die Trommel geöffnet und 16 mal geschlossen. Die von unten in die Trommel geführte verdichtete Luft kann also 16 mal durch die obere Platte entweichen und ebenso wird 16 mal der Luftstrom unterbrochen. Wir erhalten somit bei jeder Umdrehung 16 Verdichtungen der Luft über der Scheibe und beim Verschluß der unteren Löcher 16 Verdünnungen, also bei jeder Umdrehung 16 Schwingungen der Luft, welche sich als 16 Wellen in die umgebende Luft fortpflanzen.

Wenn wir demnach durch diese Schwingungen einen bestimmten Ton hervorgebracht haben, können wir aus einer Beobachtung der Umdrehungszahl der Scheibe die Schwingungszahl des gehörten Tones unmittelbar ableiten.

Um die Umdrehungszahl der Scheibe zu erhalten, ist in die Achse AF bei s eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in ein Zahnrad E (Fig. 286) eingreift und dieses bei jeder Umdrehung um einen Zahn dreht. An der Achse des Rades ist ein Zeiger befestigt, der auf dem Zifferblatte (Fig. 287) die Umdrehungen der Scheibe angibt. Das Rad hat 100 Zähne, bei 100 Umdrehungen der Scheibe dreht es sich somit einmal herum und die Spitze des Zeigers durchläuft einmal den Umfang des Zifferblattes. Dieses ist in 100 Teile geteilt, die an ihm befindlichen Zahlen geben also die einzelnen Umdrehungen des Rades an. Eine Umdrehung des Zeigers gibt also $16 \cdot 100$ Vibrationen an.

Hat sich das Rad E einmal vollständig gedreht, so greift ein Vorsprung H, der am Umfange des Rades befestigt ist, in die Zähne des Rades G und bewirkt, daß der an der Achse dieses Rades befestigte Zeiger auf seinem Zifferblatte um einen Teilstrich weiter rückt, jeder Teilstrich dieses Zifferblattes gibt also 100 Umdrehungen der Scheibe oder 1600 Schwingungen an. Hat man sonach während einer Zeit T eine Bewegung des Zeigers auf dem zweiten Zifferblatte um n Teilstriche beobachtet und auf dem ersten n', so ist die Anzahl der während der Zeit T stattgefundenen Schwingungen

$$N = n \cdot 1600 + n' \cdot 16,$$

und die Schwingungszahl des Tones, wenn T in Sekunden gegeben ist,

$$\nu = \frac{N}{T}.$$

Die beiden gezahnten Räder sind auf der einen Platte des Gehäuses, in welchem sie eingeschlossen sind, befestigt. Diese Platte ist ein wenig verschiebbar, und drückt man auf die Fig. 287 zur Rechten befindliche Schraube a, so wird die Platte und damit die gezahnten Räder so weit zur Linken verschoben, daß die Schraube ohne Ende nicht in das Zahnrad E eingreift. In dieser Lage wird die Platte durch die oben auf dem Gehäuse befindliche Feder, deren Vorsprung in einem Ausschnitt der Platte eingreift, festgehalten. Wenn sich also auch jetzt die Scheibe dreht, so bewegen sich doch die Räder und Zeiger nicht. Drückt man dann auf die Feder f, so springen Platte und Räder in ihre frühere Lage zurück und die Räder und Zeiger bewegen sich.

Um nun mittels der Sirene die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, bewirkt man zunächst, daß beide Zeiger auf 0 stehen. Dann werden sie ausgelöst und man setzt durch einen Luftstrom die Sirene in Bewegung. Der Ton ist anfangs tief, wird aber, da die Bewegung der Scheibe eine beschleunigte ist, immer höher. Durch Regulierung des Luftstromes bringt man dann den Ton hervor, dessen Schwingungszahl man untersuchen will, und drückt, wenn er konstant geworden ist, zu einer ganz bestimmten Zeit auf die Feder f. Dadurch werden die Räder eingeschaltet und die Zeiger bewegen sich. Nach einer bestimmten Zeit drückt man auf den Knopf a und schaltet so die Räder wieder aus und liest sowohl die Teilstriche n auf dem Zifferblatt des Rades G ab, als die n' auf dem andern und hat somit alle Daten, die erforderlich sind, um die Schwingungszahl ν zu bestimmen.

Savart wandte zu seinen Versuchen, um die Grenze der Wahrnehmbarkeit der Töne zu bestimmen, ein anderes Verfahren an.[1]) Er ersetzte die Sirene durch ein in schnelle Rotation versetztes gezahntes Rad, dessen Zähne gegen eine Karte oder ein keilförmiges zugeschnittenes Blättchen von leichtem Holze schlugen. Jeder Schlag entspricht einer einmaligen Öffnung der Sirene, also einer Schwingung, aus der Anzahl der Zähne des Rades und der Umdrehungsgeschwindigkeit desselben erhält man also durch eine einfache Multiplikation die Anzahl der einem bestimmten Tone entsprechenden Schwingungen.

1) *Savart,* Über die Empfindlichkeit des menschlichen Gehöres. Ann. de chim. et de phys. 44. 1830. Poggend. Ann. 20. 1830.

Die Umdrehungen des Rades werden auch hier durch einen Zähler von gleicher Einrichtung wie derjenige der Sirene bestimmt.

Duhamel hat es versucht, die Schwingungen zu zählen, indem er die § 148 schon besprochene graphische Methode anwandte.[1] Der schwingende und tonangebende Körper, z. B. ein schwingender Stab, wird an seinem Ende mit einer feinen Spitze versehen und vor ihm ein Glaszylinder gedreht, der durch Ruß mit einem leicht fortzunehmenden Überzuge versehen ist. Die Spitze berührt den Zylinder nur ganz leicht. Wenn nun der Stab nicht schwingt, so zieht die Spitze auf dem Zylinder, der sich bei der Drehung zugleich langsam hebt oder senkt, eine einfache Spirallinie; wenn aber der Stab schwingt, so erhält diese Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Zylinder durch irgend eine mechanische Vorrichtung in eine stetige Rotation versetzt wird und durch irgend eine andere Zählvorrichtung die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt werden kann, so genügt es, die Länge der Spirallinie zu messen und die Anzahl der Wellen zu zählen, um die Schwingungszahl zu erhalten. Habe z. B. die Walze fünf Umdrehungen in der Sekunde, und beobachtet man, daß die Spirallinie genau 2,5 Umfänge der Walze beträgt, so gibt die Zahl der Wellen auf derselben die Schwingungszahl in einer halben Sekunde an, die doppelte Zahl also die Schwingungszahl des Tones.

Duhamel und später Wertheim wandten indes dieses Verfahren hauptsächlich dazu an, um die Schwingungszahlen zweier Töne zu vergleichen. Zu dem Ende braucht man die Drehungsgeschwindigkeit der Walze nicht einmal zu kennen.

Man bringt die beiden Stäbe oder schwingenden Körper nahe beieinander an, so daß sie ihre Schwingungen auf einer und derselben Walze gleichzeitig abzeichnen.

Man hat dann nur die auf gleichen Längen der beiden Spiralen befindlichen Wellen zu zählen, und da diese in gleichen Zeiten von den beiden schwingenden Körpern beschrieben sind, so ist das Verhältnis der beiden Zahlen genau das der Schwingungszahlen der Töne

Ein ganz vorzügliches Mittel, um das Schwingungsverhältnis zweier Töne, die etwa von Stimmgabeln gegeben werden, zu vergleichen, bieten, wenigstens wenn das Schwingungsverhältnis durch kleine Zahlen gegeben ist, die Lissajousschen Figuren. Die Methode ist einer fast unbegrenzten Genauigkeit fähig, da, wie wir sahen, die Schwingungsfigur nur feststeht, wenn die Gabeln genau das durch die Figur charakterisierte Schwingungsverhältnis haben, die Schwingungszahl der einzelnen Gabeln mag so groß oder so klein sein, wie sie will. Weichen die Schwingungszahlen von diesem Verhältnis ab, so wird jedesmal innerhalb der Zeit, in welcher die rascher schwingende Gabel eine Schwingung mehr oder weniger macht, als dem Verhältnisse entspricht, einmal die ganze Reihe der durch die verschiedenen Phasendifferenzen bewirkten Schwingungsfiguren durchlaufen. Um zu erkennen, ob die schneller schwingende Gabel zu schnell oder zu langsam schwingt, hat man nur ein Stückchen Wachs an deren Ende anzukleben. War die Schwingung zu schnell, so wird jetzt die Zeit zum

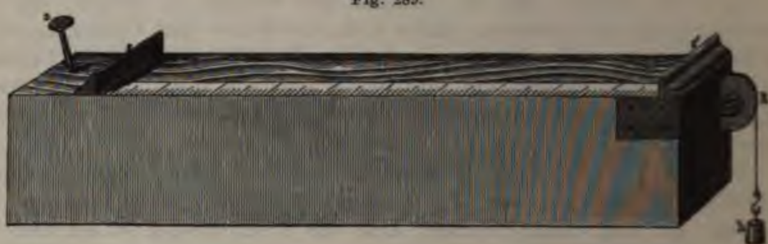
1) *Duhamel*, L'Institut 1840. p. 19 und 41.

Durchlaufen aller Figuren größer, war sie zu langsam, so wird die Zeit kleiner, da durch das Ankleben des Wachses die Schwingungen etwas verlangsamt werden.

Die andere Methode, um die Schwingungszahlen der Töne zu bestimmen, beruht auf der Anwendung der Elastizitätsgesetze, welche uns nach dem vorigen Abschnitte die Schwingungszahl eines gegebenen Körpers aus seiner Beschaffenheit zu berechnen gestatten. Sie ist besonders bequem, um die Schwingungszahlen der Töne zu vergleichen, und da, wie wir sehen werden, aus der Schwingungszahl eines Tones sich die aller übrigen berechnen läßt, so wendet man diese Methode fast immer zur Bestimmung der Schwingungszahl der Töne an.

Das gebräuchlichste auf dieser Methode beruhende Verfahren ist die Bestimmung der Schwingungszahlen mittels des Monochordes, einer auf einem Kasten von trocknem Holze aufgespannten Saite (Fig. 289). Die

Fig. 289.



Saite ist bei a mittels einer Schraube befestigt und, um eine genau bestimmbare Länge derselben zu den Versuchen zu verwenden, über die beiden scharfen Stege ss' gelegt und dann über die Rolle R geführt, welche sich mit möglichst wenig Reibung in ihrem Zapfenlager dreht. In dem an dem Ende der Saite befestigten Häkchen h können verschiedene spannende Gewichte aufgehängt werden. Der Abstand ss' zwischen den beiden Stegen ist in 1000 gleiche Teile geteilt und ein auf dem Brette des Monochords verschiebbarer Steg gestattet von der Saite beliebige Stücke schwingen zu lassen.

Um nun die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, stimmt man zunächst das Monochord nach dem betreffenden Ton, sei es dem einer Stimmgabel oder irgend eines andern Instrumentes, indem man das spannende Gewicht oder die Länge der Saite so lange ändert, bis sie bei einfachem Anschlagen oder Anstreichen mit dem Geigenbogen genau den Ton der Gabel angibt.

Aus der beobachteten Länge der Saite, dem spannenden Gewichte und dem Gewichte der Längeneinheit der Saite erhält man, wenn die Steifigkeit der Saiten nicht beachtet zu werden braucht, die Schwingungszahl nach der Formel des § 142

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{gP}{qs}},$$

worin l die Länge der Saite, P das spannende Gewicht, q den Querschnitt und s das spezifische Gewicht der Saite, also qs das Gewicht der Längeneinheit bedeutet.

Man wendet meist zu dem Monochord Metallsaiten an, da diese regelmäßiger zu bearbeiten sind als andere und da sie bei gleicher Spannung nicht so leicht Änderungen ausgesetzt sind durch den Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Sind jedoch diese Saiten nicht sehr dünn und nicht vollkommen biegsam, wie z. B. die Stahlsaiten, die zu den Klavieren benutzt werden, so muß man zur Berechnung der Schwingungszahlen die vollständigere Formel von Seebeck anwenden, in welcher auf die Steifigkeit der Saiten Rücksicht genommen ist.

Eine andere Methode, welche Scheibler[1] angewandt hat, um mittels des Monochords nur durch Versuche die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, werden wir erst im nächsten Kapitel bei Abhandlung der Stöße und Kombinationstöne kennen lernen können.

§ 159.

Von dem Verhältnis der Töne und den Intervallen. Man kann auf die verschiedenste Weise und mit den verschiedensten Instrumenten Töne gleicher Höhe hervorbringen. Nimmt man z. B. den Ton eines gekrümmten Stabes und bringt auf der Sirene oder mittels gezahnter Räder, oder mittels gespannter Saiten den Ton hervor, so findet man stets bei Messung der Schwingungszahlen, wie verschieden auch die Klangfarbe aller dieser Töne sein mag, daß sie doch alle dieselbe Schwingungszahl haben. Wir folgern daraus das erste Gesetz der Tonlehre:

Allen Tönen gleicher Höhe, welches auch der schwingende Körper sei, welcher sie veranlaßt, entsprechen gleiche Schwingungszahlen, und umgekehrt, gleichen Schwingungszahlen entsprechen immer gleiche Tonhöhen.

Daraus folgt, daß ein gegebener Ton seiner Höhe nach bestimmt ist durch die Zahl n seiner Schwingungen, und daß man ihn mittels derselben bezeichnen kann.

Töne verschiedener Schwingungszahlen sind verschieden, das Verhältnis ihrer Schwingungszahlen nennt man ein Tonverhältnis oder Intervall.

Wenn man zugleich zwei Töne verschiedener Höhe hervorbringt und anhalten läßt, so kann das Zusammenklingen derselben auf unser Ohr entweder einen angenehmen Eindruck machen oder einen nicht so angenehmen. In dem ersten Falle nennt man das Zusammenklingen der Töne oder den Akkord konsonierend, im zweiten Falle dissonierend. Je weniger angenehm der Akkord unser Ohr für sich allein stehend berührt, um so dissonierender ist derselbe.

Es gibt eine große Menge verschiedener Akkorde, welche alle in der Musik gebraucht werden, das Ohr unterscheidet sie als angenehm oder weniger angenehm, und darnach ist denselben in der Musik ihre Stelle angewiesen. Die Aufgabe der Physik ist es, zu untersuchen, worin die Akkorde sich unterscheiden. Nehmen wir z. B. einen häufig gebrauchten Akkord, den Zweiklang von c und e der gewöhnlichen Tonleiter, so sagt uns unser Ohr zunächst, daß dieser Akkord mit denselben wesentlichen Eigenschaften, mit wesentlich demselben Eindruck auf unser Ohr sowohl zwischen hohen als tiefen Tönen bestehen kann, daß er ebenso zwischen je zwei andern

[1] Über *Scheiblers* Versuche *Roeber* in Poggend. Ann. 32. 1834 und in Doves Repertorium 3. p. 19. 1839.

Tönen der Tonleiter *d*, *fis* usw. bestehen kann. Es folgt daraus, der Akkord ist unabhängig von der Höhe der ihn zusammensetzenden Töne, also unabhängig von ihrer absoluten Schwingungszahl. Wenn man nun aber in allen den verschiedenen Fällen die Schwingungszahlen der den Akkord zusammensetzenden Töne bestimmt, so findet man, daß dieselben stets im Verhältnisse von 4 zu 5 zueinander stehen, und ebenso auch umgekehrt, daß ein Akkord, dessen Töne Schwingungszahlen besitzen, welche im Verhältnisse von 4 zu 5 zueinander stehen, stets als derselbe erscheint. Gleiches gilt für alle übrigen Akkorde. Wir erhalten demnach als zweites Gesetz der Tonlehre folgendes:

Jeder musikalische Akkord zwischen zwei Tönen ist bestimmt und kann dargestellt werden durch das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen $\frac{n}{n'}$ der komponierenden Töne.

Ist das Verhältnis $\frac{n}{n'}$ der Einheit gleich, so sind die beiden Töne im Einklang; ist es verschieden, so sind sie an Höhe verschieden und zwar um so mehr, je mehr dies Verhältnis von der Einheit verschieden ist. Ihr musikalisches Intervall ist unabhängig von der absoluten Anzahl der Schwingungen, es wird nur bestimmt von dem Verhältnis derselben.

Um zu unterscheiden, welche Intervalle konsonierend sind, welche nicht, müssen wir untersuchen, wie sich die Intervalle der von der Musik als die konsonierendsten angenommenen Akkorde verhalten. Es sind dieses die Oktave, in der gewöhnlichen Dur-Tonleiter *c* und c_1, die Sexte *c* und *a*, die Quinte *c* und *g*, die Quarte *c* und *f*, die große Terz *c* und *e* und die kleine Terz *c* und *es*. Eine Vergleichung der Schwingungszahlen hat ergeben, wenn man von dem tiefsten Tone der Reihe ausgeht, und dessen Schwingungszahl, wo der Ton sonst seiner absoluten Höhe nach auch liegen mag, gleich 1 setzt:

Für	die	Oktave	das	Verhältnis	$\frac{n}{n'}$	$= \frac{2}{1}$
„	„	Sexte	„	„	„	$= \frac{5}{3}$
„	„	Quinte	„	„	„	$= \frac{3}{2}$
„	„	Quarte	„	„	„	$= \frac{4}{3}$
„	„	große Terz	„	„	„	$= \frac{5}{4}$
„	„	kleine Terz	„	„	„	$= \frac{6}{5}$.

Das heißt die Oktave macht zwei Schwingungen, wenn der Grundton eine macht, die Sexte 5, wenn der Grundton 3, oder $\frac{5}{3}$, wenn letzterer 1 vollführt usf.

Es folgt daraus, wenn man zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie zwei Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, zusammenklingen läßt, daß man dann einen konsonierenden Akkord erhält.

Man teilt diese Akkorde in vollkommene und unvollkommene Konsonanzen. Die vollkommenen sind die Oktave und die Quinte, welche den Verhältnissen 1, 2, 3 entsprechen, die übrigen sind die unvollkommenen Konsonanzen. Wir sehen demnach, eine Konsonanz ist um so vollkommener, je einfacher das Schwingungsverhältnis der sie komponierenden Töne ist, ein Akkord wird um so dissonierender, je komplexer das Verhältnis der Zahlen ist, welche ihn zusammensetzen. So gilt die Sekunde $\frac{9}{8}$ und noch mehr die kleine Sekunde $\frac{16}{15}$ als Dissonanz.

§ 160.

Von den mehrfachen Akkorden. Aus dem Gesetze der Konsonanz läßt sich leicht voraussehen, welche mehrfach zusammengesetzte Akkorde auf unser Ohr einen wohltuenden Eindruck machen, welche als Konsonanzen wirken und welche als Dissonanzen eine Auflösung verlangen. Konsonierende Akkorde können nur solche sein, in denen alle Töne in einfachen Verhältnissen zueinander stehen.

Wir wenden zur Bestimmung der Tonverhältnisse die erwähnte Bezeichnungsweise an, die Schwingungszahl eines Tones, und zwar, wenn nichts anderes bemerkt wird, des tiefsten, wird gleich 1 gesetzt. Jeder der folgenden Brüche bezeichnet einen Ton und zwar denjenigen, welcher die durch den Bruch angedeuteten Schwingungen vollführt, wenn der mit 1 bezeichnete Ton eine Schwingung vollführt, oder der in derselben Zeit die im Zähler angegebenen Schwingungen zurücklegt, wenn der Grundton die im Nenner stehende Anzahl von Schwingungen zurücklegt.

Nach dem Vorigen können also nicht konsonierend sein

Prim Terz Quart $1 : \frac{5}{4} : \frac{4}{3}$
Prim Quart Quint $1 : \frac{4}{3} : \frac{3}{2}$
Prim Quint Sext $1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}$;

denn wenn auch die beiden ersten Töne dieser Akkorde konsonierend sind, so sind es nicht die beiden letzten, da diese den Verhältnissen $\frac{16}{15}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ entsprechen.

Konsonierend sind die Akkorde

1) Prim große Terz Quint $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$
2) Prim kleine Terz Quint $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$
3) Prim große Terz Sext $1 : \frac{5}{4} : \frac{5}{3}$
4) Prim Quart Sext $1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$;

denn in allen diesen Fällen sind diese Töne sowohl mit dem Grundton als unter sich in Konsonanz, denn bei den beiden letzten Tönen haben wir

in 1) große Terz Quint $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 5 : 6$
„ 2) kleine Terz Quint $\frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 4 : 5$
„ 3) große Terz Sext $\frac{5}{4} : \frac{5}{3} = 3 : 4$
„ 4) Quart Sext $\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4 : 5$

Die Akkorde 3 und 4 sind übrigens nur Umlagerungen der Akkorde 1 und 2, denn multiplizieren wir in 3 die Töne 1 und $\frac{5}{4}$ mit 2, setzen also für diese Töne die mit ihnen vollkommen konsonierenden Oktaven, so erhalten wir für 3

$$2, \frac{10}{4}, \frac{5}{3}$$

oder setzen wir jetzt $\frac{5}{3}$ als Grundton, also seine Schwingungszahl gleich 1,

$$1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}.$$

Multiplizieren wir in 4 nur die Prim mit 2 und dividieren dann alle Zahlen mit $\frac{4}{3}$, das heißt, machen wir die Quart zum Grundton, so erhalten wir

$$1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}.$$

Der Akkord 3 ist also nur eine Umkehrung von 2, und der Akkord 4 eine Umkehrung von 1.

Außer den angegebenen vier konsonierenden Akkorden erhalten wir durch nochmalige Umlagerung der beiden Akkorde 1 und 2 noch zwei weitere konsonierende Akkorde; indem wir nämlich den Akkord 1 ebenso umlegen, wie der Akkord 3 aus 2 entstanden ist, also nur für die Prim ihre höhere Oktave einsetzen, bekommen wir den fünften Akkord

$$\tfrac{5}{4},\ \tfrac{3}{2},\ 2,$$

oder indem wir diesen Akkord vom Grundton aus gebildet denken, erhalten wir durch Multiplikation aller Zahlen mit $\tfrac{4}{5}$

$$1,\ \tfrac{6}{5},\ \tfrac{8}{5}.$$

Daß von diesen drei Tönen der zweite mit dem ersten, der dritte mit dem zweiten in Konsonanz sind, ergibt sich unmittelbar, da es die Intervalle $\tfrac{6}{5}$ und $\tfrac{4}{3}$ sind; daß der dritte mit dem ersten konsonant ist, folgt aus den im vorigen Paragraphen angeführten Intervallen nicht; wir können es aber schon aus der Bemerkung ableiten, daß die Oktave mit dem Grundton die vollkommenste Konsonanz bildet, und daß deshalb ein Intervall nicht dissonierend wird, wenn wir den Grundton durch seine Oktave ersetzen. Da nun das Intervall $\tfrac{8}{5}$ nichts anderes ist als die Umlagerung der Terz, indem wir den Grundton durch die Oktave ersetzen, so folgt, daß auch dieses Intervall konsonierend ist. Wir werden im übrigen sofort bei Ableitung der Tonleiter dieses Intervall als ein Sextenintervall kennen lernen.

Lagern wir den Akkord 2 in derselben Weise um, wie wir zur Bildung von 4 den Akkord 1 umlagerten, setzen wir also für Grundton und kleine Terz die höhere Oktave, so erhalten wir als sechsten Akkord

$$\tfrac{3}{2},\ 2,\ \tfrac{12}{5},$$

und bilden wir jetzt diesen Akkord anstatt von der Quint von dem Grundton, indem wir alle Zahlen mit $\tfrac{2}{3}$ multiplizieren, so erhalten wir

$$1,\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{24}{15} = \tfrac{8}{5}.$$

Nach der soeben gemachten Bemerkung wird man auch diesen Akkord sofort als konsonierend erkennen.

Man nennt die konsonierenden Akkorde, welche aus drei Tönen zusammengesetzt sind, welche im Verhältnisse $1 : \tfrac{5}{4} : \tfrac{3}{2}$ oder $1 : \tfrac{6}{5} : \tfrac{3}{2}$ stehen, Dreiklänge, und zwar den Dreiklang mit der großen Terz den großen oder Dur-Dreiklang, den mit der kleinen Terz den Moll-Dreiklang; sie sind mit ihren beiden Umlagerungen die einzigen konsonierenden Akkorde, die sich aus der Reihe der harmonischen Töne ergeben. Die Akkorde 3 und 5, welche, der erstere aus dem Moll-Dreiklange, der zweite aus dem Dur-Dreiklange, durch Ersetzen des Grundtons durch die höhere Oktave entstanden gedacht sind, heißen die Terzsextakkorde oder schlechthin Sextakkorde, die beiden andern die Quartsextakkorde jedesmal desjenigen Dreiklanges, aus dem sie entstanden sind.

Die beiden Dreiklänge sind aus ganz gleichen Intervallen aufgebaut, beide aus einer großen und einer kleinen Terz, der einzige Unterschied ist der, daß beim Dur-Dreiklange die beiden untern, beim Moll-Dreiklange die beiden obern Töne das Intervall der großen Terz bilden.

Auf die Frage, warum nur diese und keine andern Intervalle und Akkorde konsonierend sind, kommen wir im nächsten Kapitel nochmals

zurück, wenn wir die Wahrnehmung der Töne überhaupt besprechen, es genügt uns, an dieser Stelle die erfahrungsgemäß bestimmten konsonierenden Akkorde und Intervalle zu kennen.

§ 161.

Die Tonleiter. Außer den harmonischen Tönen 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder wenn wir für die höhern Töne dieser Reihe die tiefern Oktaven einsetzen, so daß alle Schwingungszahlen entsprechen, welche zwischen 1 und 2 liegen, den Tönen 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, 2, sind in der Musik noch viele andere gebräuchlich, welche zwischen diesen eingeschaltet werden; die Musik ordnet dieselben in eine Reihe, welche den Namen Tonleiter führt. Wenn wir den Grundton 1 mit c bezeichnen, so ist die sogenannte diatonische Dur-Tonleiter

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2 \\ c & d & e & f & g & a & h & c_1. \end{array}$$

Außer der Terz, Quart, Quint, Sext tritt noch die Sekunde $\frac{9}{8} = d$ und die Septime $\frac{15}{8} = h$ hinzu. Von der Oktave c_1 wiederholt sich die Reihe einfach, indem ebenso, wie die Oktave die Verdoppelung des Grundtones ist, so auch in der weitern Tonreihe die folgenden Töne die Verdoppelungen der entsprechenden Töne in den nächst tiefern Oktaven sind. Um diese höhern Oktaven zu bezeichnen, werden wir rechts unten die Zahlen 1, 2 . . . an die Buchstaben setzen, welche die Töne unserer Grundoktave angeben; diese Zahlen sind dann jene Potenzen von 2, mit welcher wir die Töne der Grundoktave multiplizieren müssen, um den Ton der entsprechenden Oktave zu erhalten. Tiefere Oktaven bezeichnen wir dadurch, daß wir der unten rechts geschriebenen Zahl das negative Vorzeichen geben, andeutend, daß wir, um zu diesen Tönen zu gelangen, diejenigen der Grundoktave mit der von der Zahl angegebenen negativen Potenz von 2 multiplizieren bezw. durch die betreffende Potenz von 2 dividieren müssen.

Man hat viel darüber gestritten, wie diese Tonleiter entstanden sei, es ist indes wahrscheinlich, daß sie sich allmählich durch das musikalische Bedürfnis gebildet und erweitert hat, und daß nicht theoretische Entwicklungen darauf geführt haben. Indes kann man dieselbe auf mehrfache Weise entstanden denken.

Setzt man die Reihe der harmonischen Töne fort, indem man z. B. die Saite des Monochords, deren Schwingungen, wenn sie ungeteilt schwingt, mit 1 bezeichnet werden, immer weiter nach der Reihe der natürlichen Zahlen teilt, so erhält man Töne mit den Schwingungszahlen

$$7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,$$

und durch Division durch die verschiedenen Potenzen von 2, um die tiefern Oktaven der Töne zu erhalten, so daß sie in die Oktave 1—2 fallen

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{8},\ \frac{11}{8},\ \frac{12}{8},\ \frac{13}{8},\ \frac{7}{4} = \frac{14}{8},\ \frac{15}{8},\ 2,$$

oder mit den vorigen 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ zusammen

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{5}{4},\ \frac{11}{8},\ \frac{3}{2},\ \frac{13}{8},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ 2,$$

also die Töne

$$c \quad d \quad e \quad - \quad g \quad - \quad - \quad h \quad c_1$$

Nun unterscheiden sich die Töne $\frac{11}{8}$ und $\frac{4}{3}$ oder $\frac{5}{3}$ und $\frac{13}{8}$ und $\frac{7}{4}$ nur wenig voneinander, man könnte daher denken, daß jene für diese eingesetzt wären, und so die Tonleiter entstanden wäre. Indes das Fehlen des einfachen Intervalles $\frac{7}{4}$ in der Tonleiter spricht nicht für diese Entstehungsweise.

Nach dem Vorgange von Chladni[1]) gelangen wir auf andere Weise zur Tonleiter, wo wir es nicht nötig haben, anstatt der direkt erhaltenen Verhältnisse andere einzusetzen. Bilden wir nämlich von dem Grundton der Quint und der Unterquint, also dem Tone, dessen Quinte der Grundton ist, die großen Dreiklänge, so erhalten wir:

$$\begin{array}{llll}
\text{von der Unterquint } \frac{2}{3}, \cdots & \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4},\ \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} & = & \frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ 1 \\
\text{von dem Grundton } 1, \cdots & 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2}, & = & 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2} \\
\text{von der Quint} \ldots \frac{3}{2}, \cdots & \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} & = & \frac{3}{2},\ \frac{15}{8},\ \frac{9}{4}
\end{array}$$

und durch Ordnung nach den Schwingungszahlen, wenn wir zugleich für einzelne Töne die tiefern und höhern Oktaven einsetzen, um alle Töne in der Oktave 1—2 zu erhalten,

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2 \\
c & d & e & f & g & a & h & c_1.
\end{array}$$

Betrachten wir nun die aus dieser Tonleiter sich ergebenden Sekunden, Terzen, Quarten, Quinten, Sexten, Septimen, so werden wir finden, daß dieselben nicht alle gleichwertig sind, sondern daß die Intervalle verschieden sein können, ohne darum aufzuhören, Sekunden, Terzen usw. zu sein.

Der Wert der Intervalle ist auf Seite 877 angegeben.

Ein Überblick nachstehender Tabelle ergibt, daß die gleichnamigen Intervalle keineswegs alle denselben Wert haben.

Die Sekunden haben drei verschiedene Werte, nämlich zunächst ist das Schwingungsverhältnis $\frac{9}{8}$, die Töne, zwischen denen dieses Intervall stattfindet, unterscheiden sich um einen großen ganzen Ton; zweitens ist dasselbe $\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$, das Intervall ist das eines kleinen ganzen Tones, der sich von dem vorigen um $\frac{80}{81}$, ein syntonisches Komma unterscheidet. Der dritte Wert, den die Sekunde annehmen kann, $\frac{16}{15} = \frac{10}{9} \cdot \frac{24}{25}$, ist der große halbe Ton. Da nun der kleine ganze Ton $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$, so kann man denselben in zwei Intervalle teilen, den großen halben Ton $\frac{16}{15}$ und den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$. Letzterer ist das kleinste in der Musik gebräuchliche Intervall.

Wie die Sekunden groß und klein sein können, so auch die Terzen; die großen entsprechen dem Verhältnis $\frac{5}{4}$, die kleinen dem um einen kleinen halben Ton $\frac{24}{25}$ kleinern Verhältnis $\frac{6}{5}$. Außerdem tritt von d zu f eine noch um ein Komma kleinere Terz auf.

Auch bei den Quarten unterscheiden wir drei Werte, die reinen Quarten $\frac{4}{3}$, die übermäßige Quart f—h, welche um einen kleinen halben Ton und ein Komma größer ist als die reinen Quarten, und schließlich die falsche Quarte a zu d, welche gegenüber den reinen Quarten um ein Komma zu groß ist.

Ähnlich wie die Quarten verhalten sich die Quinten, sie sind rein $\frac{3}{2}$, oder vermindert h nach f_1 um einen kleinen halben Ton und ein Komma

1) *Chladni*, Akustik. p. 13 ff.

Wert der musikalischen Intervalle.

Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen
$\frac{d}{c}\ \frac{9}{8}$	$\frac{e}{c}\ \frac{5}{4}$	$\frac{f}{c}\ \frac{4}{3}$	$\frac{g}{c}\ \frac{3}{2}$	$\frac{a}{c}\ \frac{5}{3}$	$\frac{h}{c}\ \frac{15}{8}$
$\frac{e}{d}\ \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{f}{d}\ \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81} = \frac{5}{4} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{d}\ \frac{4}{3}$	$\frac{a}{d}\ \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{h}{a}\ \frac{5}{3}$	$\frac{c_1}{d}\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{f}{e}\ \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{e}\ \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{a}{e}\ \frac{4}{3}$	$\frac{h}{e}\ \frac{3}{2}$	$\frac{c_1}{e}\ \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{d_1}{e}\ \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{g}{f}\ \frac{9}{8}$	$\frac{a}{f}\ \frac{5}{4}$	$\frac{h}{f}\ \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{c_1}{f}\ \frac{3}{2}$	$\frac{d_1}{f}\ \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{e_1}{f}\ \frac{15}{8}$
$\frac{a}{g}\ \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{h}{g}\ \frac{5}{4}$	$\frac{c_1}{g}\ \frac{4}{3}$	$\frac{d_1}{g}\ \frac{3}{2}$	$\frac{e_1}{g}\ \frac{5}{3}$	$\frac{f_1}{g}\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{h}{a}\ \frac{9}{8}$	$\frac{c_1}{a}\ \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d_1}{a}\ \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{e_1}{a}\ \frac{3}{2}$	$\frac{f_1}{a}\ \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g_1}{a}\ \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{c_1}{h}\ \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d_1}{h}\ \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{e_1}{h}\ \frac{4}{3}$	$\frac{f_1}{h}\ \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{g_1}{h}\ \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{a_1}{h}\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$

kleiner als die reinen Quinten, oder schließlich falsch von *d* nach *a* um ein Komma kleiner als die reinen Quinten.

Bei den Sexten unterscheiden wir große $\frac{5}{3}$ und kleine $\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$, um einen kleinen halben Ton kleiner als die großen, und außerdem finden wir eine falsche Sexte, die um ein Komma größer ist als die große Sexte.

Unter den Septimen finden wir zwei große, deren Schwingungsverhältnis $\frac{15}{8}$ ist, zwei kleine, welche von den großen sich um einen kleinen halben Ton unterscheiden, $\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$ und drei falsche, welche noch um ein Komma kleiner sind als die kleinen Septimen.

Die Oktaven schließlich sind ihrem Wesen nach alle rein, und entsprechen dem Verhältnisse $\frac{2}{1}$.

Die auf diese Weise erhaltene Tonleiter heißt die diatonische Durtonleiter, sie besteht nur aus ganzen und zwei großen halben Tönen, welche zwischen der dritten und vierten und zwischen der siebenten und achten Stufe liegen. Ist der Grundton der Tonleiter *c*, so ist die Tonleiter jene in *c*-Dur.

Ebenso wie von dem Grundtone *c* können wir jetzt von jedem der in der *c*-Durtonleiter gegebenen Töne wieder die diatonische Durtonleiter bilden; wir müssen dann aber zu den bisher erhaltenen Tönen neue hinzufügen. Soll die Durtonleiter von *d* aus gerade so beschaffen sein wie die besprochene von *c* aus, so müssen die einzelnen Intervalle alle in demselben Verhältnisse stehen wie in der angegebenen Tonleiter, wir bekommen die *d*-Durtonleiter deshalb einfach dadurch, daß wir die für die einzelnen Intervalle der *c*-Tonleiter gegebenen Zahlen alle mit $\frac{9}{8}$ multiplizieren. Die sich auf diese Weise ergebenden Zahlen für die einzelnen Töne der Tonleiter sind dann folgende:

$$\frac{9}{8};\ \frac{81}{64} = \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80};\ \frac{45}{32} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80};\ \frac{3}{2};\ \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80};\ \frac{15}{8};\ \frac{135}{64} = 2 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}.$$

Von diesen Zahlen sind die erste, vierte und sechste schon in der *c*-Durtonleiter vorhanden als *d*, *g*, *h*; die zweite und fünfte dagegen sind um ein Komma höher als die entsprechenden *e* und *a* in der Tonleiter von *c*, wir wollen dieselben, um diese Erhöhung anzudeuten, mit $\bar{e}$ und $\bar{a}$ bezeichnen. Wesentlich verschieden von den frühern Tönen sind der dritte und siebente, sie sind um einen kleinen halben Ton und ein Komma höher als die entsprechenden Töne der ersten Tonleiter *f* und *c*. Der Grund dieser Erhöhung liegt darin, daß in der Durtonleiter zwischen der zweiten und dritten Stufe sowie der sechsten und siebenten Stufe ein ganzer Ton liegen muß, dagegen zwischen der dritten und vierten, wie zwischen der siebenten und achten Stufe ein halber Ton vom Werte $\frac{16}{15}$. Die um einen halben Ton erhöhten Töne bezeichnet man durch Anhängung der Silbe *is* an den den betreffenden Ton bezeichnenden Buchstaben. Der Ton, der $\frac{1}{2}$ Ton höher ist als *f*, heißt demnach *fis*, der um $\frac{1}{2}$ Ton höher liegende als *c* heißt *cis*. Musikalisch werden dieselben durch ein dem betreffenden Ton vorgesetztes Doppelkreuz bezeichnet, so daß *cis* = ♯ *c* ist. Die in der *d*-Durtonleiter liegenden *fis* und *cis* sind nun um ein Komma mehr als einen halben Ton höher als die betreffenden Töne der Tonleiter in *c*, wir wollen, um das hervorzuheben, dieselben mit $\overline{fis}$ und $\overline{cis}$ bezeichnen. Darnach wird also die Tonleiter in *d*

$$d\ \bar{e}\ \overline{fis}\ g\ \bar{a}\ h\ \overline{cis}_1\ d_1;$$

sie enthält also vier Töne, welche die Tonleiter von *c* nicht enthält

Bilden wir ganz ebenso die Tonleiter in *e*-Dur, so erhalten wir folgende Tonverhältnisse:

$$\frac{5}{4};\ \frac{45}{32}=\frac{4}{3}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{81}{80};\ \frac{25}{16}=\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{24};\ \frac{5}{3};\ \frac{15}{8};\ \frac{25}{12}=2\cdot\frac{25}{24};\ \frac{75}{32}=\frac{9}{4}\cdot\frac{25}{24},$$

oder in den für die Töne geltenden Bezeichnungen

$$e\ \ fis\ \ gis\ \ a\ \ h\ \ cis_1\ \ dis_1\ \ e_1.$$

Es treten hier neu hinzu die um einen halben Ton erhöhten *gis* und *dis*, und an die Stelle des *cis* in der Tonleiter von *d* das um ein Komma tiefere cis_1, welches genau um ½ Ton höher ist als c_1.

Die diatonische Durtonleiter von *g* bietet kein neues Intervall, die einzige in ihr vorkommende Erhöhung ist die von *f* zu *fis*, um von der siebenten zur achten Stufe einen halben Ton herzustellen, dieselbe wird dann

$$g\ \ a\ \ h\ \ c_1\ \ d_1\ \ e_1\ \ fis_1\ \ g_1,$$

sie enthält also außer den Tönen der Tonleiter in *c* die Töne *a* und *fis* jener in *d*.

Die Tonleiter in *a*-Dur liefert uns dagegen wieder einige neue, wenn auch von den bisherigen nur wenig verschiedene Töne, dieselbe wird

$$\frac{5}{3};\ \frac{15}{8};\ \frac{25}{12}=2\cdot\frac{25}{24};\ \frac{20}{9}=\frac{9}{4}\cdot\frac{80}{81};\ \frac{5}{2};\ \frac{25}{9}=\frac{8}{3}\cdot\frac{25}{24};\ \frac{75}{24}=3\cdot\frac{25}{24};\ \frac{10}{3}.$$

Die drei ersten Töne sind *a*, *h*, cis_1, der vierte ist um ein Komma tiefer als das d_1 der Tonleiter in *c*-Dur, wir bezeichnen ihn mit $\underset{\cdot}{d}_1$; der folgende ist e_1 und dann folgt fis_1, das um genau ½ Ton erhöhte f_1, weiter das genau um ½ Ton erhöhte g_1 oder gis_1, und schließlich die Oktave von *a* oder a_1.

In dem Tonzeichen wird demnach die Tonleiter in *a*-Dur

$$a\ \ h\ \ cis_1\ \ \underset{\cdot}{d}_1\ \ e_1\ \ fis_1\ \ gis_1\ \ a_1.$$

Die Tonleiter von *h* an liefert uns, wie eine der bisherigen ganz gleiche Berechnung ergibt, die Töne

$$\begin{array}{cccccccc} h & cis_1 & dis_1 & e_1 & fis_1 & gis_1 & ais_1 & h_1 \\ \frac{15}{8}; & 2\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{81}{80}; & \frac{9}{4}\cdot\frac{25}{24}; & \frac{5}{2}; & \frac{8}{3}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{81}{80}; & 3\cdot\frac{25}{24}; & \frac{10}{3}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{81}{80}; & \frac{15}{4}. \end{array}$$

Sehen wir zunächst von den um ein Komma verschiedenen Tönen ab, so haben wir, um diese Durtonleitern zu bilden, alle Töne, außer *e* und *h*, um einen halben Ton erhöhen müssen. Für diese wird aber auch diese Erhöhung erforderlich, wenn wir die Durtonleiter von *cis* bilden, wir erhalten dann

$$cis\ \ dis\ \ eis\ \ fis\ \ gis\ \ ais\ \ his\ \ cis_1.$$

Um also von allen Tönen der diatonischen Durtonleiter von *c* ebenfalls die diatonischen Durtonleitern zu bilden, bedarf es einer Anzahl neuer Intervalle, wir müssen die Töne teils um ein Komma erhöhen, *a* und *e*, teils um ein Komma vertiefen, *d*; ferner müssen wir sie alle um einen halben Ton, zum Teil auch um einen halben Ton und ein Komma erhöhen.

Stellen wir alle bis jetzt erhaltenen Töne zusammen, so ergibt sich folgende Reihe:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \overline{cis} & & & & \overline{e} & & \overline{fis} & & & \overline{a} & \overline{ais} & \\ c & cis & d & dis & e & eis & f & fis & g & gis & a & ais & h\ \ his. \\ & & \underset{\cdot}{d} & & & & & & & & & & \end{array}$$

es kommen also *d*, *e* und *a*, sowie *cis*, *fis* und *ais* in zwei um ein Komma verschiedenen Werten vor. Wollte man nun in ähnlicher Weise auch von den bisher neu hinzugetretenen Tönen die Durtonleiter bilden, und beschränkte man sich dabei auf die reinen halben Töne, so würden zu den in obiger Zusammenstellung vorkommenden Tönen noch hinzukommen zunächst *eis* und *dis* und außerdem die doppelt erhöhten Töne *cisis* und *cisis*, von denen der erstere $\frac{25}{24}$ höher ist als *cis*, der zweite als *cis*, und *disis*, *fisis fisis*, *gisis*, *aisis*. Wir müssen also noch 9 Töne hinzufügen, so daß wir im ganzen 29 Töne erhielten.

Die so erhaltenen 29 Töne würden indes dem musikalischen Bedürfnisse noch nicht genügen; schon wenn wir die Durtonleiter von *f* bilden wollen, bedürfen wir eines neuen Intervalles. Wir erhalten dieselbe ganz in der bisherigen Weise, indem wir die Tonzahlen der *c*-Durreihe mit $\frac{4}{3}$ multiplizieren, dieselbe wird dann

$$\frac{4}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{16}{9}=\frac{15}{8}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{80}{81};\ 2;\ \frac{20}{9}=\frac{9}{4}\cdot\frac{80}{81};\ \frac{10}{4}.$$

Mit Ausnahme des vierten Tones finden sich diese Töne bereits in den frühern Tonleitern, sie sind

$$f\ g\ a\ c_1\ d_1\ e_1;$$

der vierte ist indes nicht nur neu, sondern auch in ganz anderer Weise gebildet, nämlich durch Vertiefung eines Tones $h=\frac{15}{8}$ um einen halben Ton und ein Komma. Die Vertiefung eines Tones um einen halben Ton wird in der Musik dadurch bezeichnet, daß man vor denselben ein *b* setzt, die Namen der vertieften Töne erhält man, indem man an denjenigen des Tones, zu welchem die Vertiefung gehört, die Silbe *es* oder den Buchstaben *s* hängt; nur die Vertiefung von *h* führt den Namen *b*. Das in die *f*-Durtonleiter eintretende *b* ist, wie wir sahen, um einen halben Ton und ein Komma tiefer als *h*, wir müssen deshalb diesen Ton als *b* bezeichnen.

Ebenso wie in der Durtonleiter von *f* für *h*, so erhalten wir für alle übrigen Töne vertiefte Töne, wenn wir in ähnlicher Weise wie durch den Durdreiklang eine Tonleiter ableiten durch Anwendung des Molldreiklangs mit der kleinen Terz. Bilden wir die drei Molldreiklänge von Grundton Quint und Unterquint, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{aus der Unterquint}\ \frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5},\ \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ 1\\ 2)\ \text{aus dem Grundton}\ 1\cdots 1,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{2},\ =1,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{2}\\ 3)\ \text{aus der Quint}\ \ldots\ \frac{3}{2}\cdots\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5},\ \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{9}{5},\ \frac{9}{4}\end{array}\right.$$

oder wenn wir die Verhältnisse der Größe nach ordnen und wiederum von den nicht zwischen 1—2 fallenden Tönen die entsprechenden Oktaven nehmen

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ 2.$$

Von diesen Intervallen ist das siebente

$$\frac{9}{5}=\frac{15}{8}\cdot\frac{24}{25}=b$$

und das sechste

$$\frac{8}{5}=\frac{5}{3}\cdot\frac{24}{25},$$

also die um einen halben Ton vertiefte Sext, welche mit *as* bezeichnet wird.

Nach den musikalischen Zeichen ist somit die Molltonleiter

$$c\ d\ es\ f\ g\ as\ b\ c$$

und das Verhältnis der einzelnen Töne darin

$$\tfrac{9}{8},\ \tfrac{16}{15},\ \tfrac{10}{9},\ \tfrac{9}{8},\ \tfrac{16}{15},\ \tfrac{9}{8},\ \tfrac{10}{9},$$

von der zweiten zur dritten und von der fünften zur sechsten Stufe findet sich ein halber Ton, die übrigen Intervalle sind ganze Töne.

Diese Tonleiter, welche aus dem Molldreiklange entsteht wie die Durtonleiter aus dem Durdreiklange, ist die diatonische Molltonleiter. Es ist jedoch zu bemerken, daß man die Molltonleiter häufig auch so bildet, daß man von der Oberquint den Durdreiklang nimmt, wodurch in die Tonleiter statt *b* der Ton *h* eintritt. Dann wendet man aufsteigend statt *as* auch den Ton *a* an, absteigend pflegt man dann aber doch für *h* den Ton *b* zu nehmen, so daß dann die Tonleiter wird

aufsteigend *c d es f g a h c*
absteigend *c d es f g as b c*

wie wir sie oben hinschrieben.

Bilden wir nun auch hier von den verschiedenen Tönen der Molltonleiter in *c* die Molltonleitern, so erhalten wir außer den angegebenen noch weitere vertiefte Töne. Die Molltonleiter von *d* verlangt von neuen Intervallen nur *f* und c_1, sie wird nach unserer Bezeichnung

$$d\ e\ f\ g\ a\ b\ c_1\ d_1.$$

Die Molltonleiter von *es* wird

$$\tfrac{6}{5},\ \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{81}{80},\ \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{24}{25},\ \tfrac{8}{5},\ \tfrac{9}{5},\ 2\cdot\tfrac{24}{25},\ \tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{24}{25},$$

oder in Zeichen

$$es\ f\ ges\ as\ b\ ces\ des\ es;$$

es treten als neue Vertiefungen hinzu *ges*, *ces* und *des*.

Die Molltonleiter von *f* enthält folgende Töne

$$\begin{array}{cccccccc} \tfrac{4}{3} & \tfrac{3}{2} & \tfrac{8}{5} & \tfrac{16}{9} & 2 & \tfrac{32}{15} & \tfrac{36}{15} & \tfrac{8}{3} \\ f & g & as & b & c_1 & des_1 & es_1 & f_1; \end{array}$$

es tritt also hier ein gegen das *des* der *c*-Molltonleiter um ein Komma vertieftes *des* auf. In der Tonleiter von *g* tritt kein neues Intervall auf, sie ist

$$g\ a\ b\ c_1\ d_1\ es_1\ f_1\ g_1$$

und schließlich wird die Tonleiter in *as*-Moll,

$$\begin{array}{cccccccc} \tfrac{8}{5} & \tfrac{9}{5} & 2\cdot\tfrac{24}{25} & \tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{24}{25}\cdot\tfrac{80}{81} & \tfrac{12}{5} & \tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{24}{25} & 3\cdot\tfrac{24}{25} & \tfrac{16}{5}. \\ as & b & ces_1 & des_1 & es_1 & fes_1 & ges_1 & as_1 \end{array}$$

sie besteht also aus allen vertieften Tönen, und zwar mit Ausnahme von des_1 aus gerade um ½ Ton vertieften Tönen. Stellen wir die bis jetzt durch die Molltonleitern erhaltenen neuen Intervalle zusammen, so sind dieselben

$$\begin{array}{ccccccccc} c & ces & des & es & f & fes & ges & as & b \\ & & des & & & & & & b, \end{array}$$

wir erhalten also außer den sieben gerade um einen halben Ton vertieften Tönen zwei, die um einen halben Ton und ein Komma vertieft sind. Die Tonleiter in *b*-Moll würde zu diesen noch *as* hinzufügen, so daß wir auch drei Arten von vertieften halben Tönen zu unterscheiden haben, solche,

welche genau um einen halben Ton unserer Töne der *c*-Durtonleiter vertieft sind, und solche, welche ein Komma mehr oder ein Komma weniger vertieft sind. Eine weitere Fortsetzung in der Bildung dieser Tonleitern würde uns nun, wenn wir uns auch hier auf die genau um $\frac{1}{2}$ Ton vertieften Töne beschränken, zu den oben hingeschriebenen Tönen noch liefern $\overline{ces}$, $\overline{es}$, $\overline{fes}$, und außerdem die doppelt vertieften Töne $ceses = \frac{24}{25} \cdot \frac{24}{25} \cdot c$, *deses* und $\underline{deses}$, *eses, geses, ases, bb* und $\underline{bb}$, so daß wir also durch die Bildung der Molltonleitern im ganzen zu den frühern noch 23 neue Intervalle hinzubekämen. Unser Tonsystem oder die vollständige Tonleiter einer Oktave würde somit aus 52 Tönen, oder wenn wir die Oktave als Schlußton hinzunehmen, aus 53 Tönen bestehen. Das Tonsystem vom tiefsten zum höchsten in den gewählten Zeichen würde sein:

$\bar{c}$ $\overline{cis}$ $\overline{cisis}$ $\overline{es}$ $\bar{e}$ $\overline{eis}$ $\overline{fes}$

c cis cisis deses des d dis disis eses es e eis fes

$\underline{deses}$ $\underline{des}$ $\underline{d}$ $\underline{dis}$

$\bar{f}$ $\overline{fis}$ $\overline{fisis}$ $\overline{as}$ $\bar{a}$ $\overline{ais}$

f fis fisis geses ges g gis gisis ases as a ais aisis

$\overline{ces}_1$

bb b h his $ceses_1$ ces_1 c_1

$\underline{bb}$ $\underline{b}$.

Die Schwingungszahlen der Hauptreihe, jedoch ohne die doppelt vertieften und erhöhten Töne, gibt folgende Zusammenstellung:

c	1	Prim
$\sharp\ c = cis$	$\frac{25}{24}$	übermäßige Prim
$\flat\ d = des$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$	kleine Sekunde
d	$\frac{9}{8}$	große Sekunde
$\sharp\ d = dis$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64}$	übermäßige Sekunde
$\flat\ e = es$	$\frac{6}{5}$	kleine Terz
e	$\frac{5}{4}$	große Terz
$\sharp\ e = eis$	$\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{96}$	übermäßige Terz
$\flat\ f = fes$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{96}{75} = \frac{32}{25}$	verminderte Quarte
f	$\frac{4}{3}$	reine Quarte
$\sharp\ f = fis$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{100}{72} = \frac{25}{18}$	übermäßige Quarte
$\flat\ g = ges$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$	verminderte Quinte
g	$\frac{3}{2}$	reine Quinte
$\sharp\ g = gis$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16}$	übermäßige Quinte
$\flat\ a = as$	$\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{120}{75} = \frac{8}{5}$	kleine Sexte
a	$\frac{5}{3}$	große Sexte
$\sharp\ a = ais$	$\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$	übermäßige Sexte
$\flat\ h = b$	$\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{360}{200} = \frac{9}{5}$	kleine Septime
h	$\frac{15}{8}$	große Septime
$\sharp\ h = his$	$\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{375}{192} = \frac{125}{64}$	übermäßige Septime
$\flat\ c = ces$	$2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{25}$	verminderte Oktave
c_1	2	reine Oktave.

Die doppelt erhöhten oder doppelt vertieften Töne erhält man aus ser Tabelle, indem man die entsprechenden einfach erhöhten oder verften Töne mit $\frac{25}{24}$ bezw. $\frac{24}{25}$ multipliziert, die Töne der obern Reihe rch Multiplikation der Töne der Hauptreihe mit $\frac{81}{80}$, die Töne der untern ihe durch Multiplikation mit $\frac{80}{81}$.[1])

§ 162.

Die musikalische Temperatur. Die in dem vorigen Paragraphen rechnete Tonleiter würde wegen ihrer zu großen Reichhaltigkeit im brauche äußerst unbequem, ja sie würde in der Musik geradezu unuchbar sein, da die vielen kleinen Intervalle auf den verschiedensten strumenten durchaus nicht darzustellen wären. Zudem würde das Beihalten aller jener Intervalle auch überflüssig sein, da selbst musikalisch bildete Ohren kleine Unreinheiten eines Intervalls in einem Akkorde nicht hr wahrzunehmen imstande sind. Unsere jetzige Musik vereinfacht daher s Tonsystem sehr bedeutend, anstatt 52 Töne wendet sie in der Tonter nur 12 Töne an. Zunächst läßt sie auf allen Instrumenten mit festen nen alle doppelt erhöhten und doppelt vertieften Töne fort und ersetzt durch die nächstliegenden ganzen Töne; so setzt sie

$$cisis = d, \quad deses = c, \quad disis = e, \quad eses = d \text{ usw.}$$

Der Fehler, welcher dadurch begangen wird, ist zwischen c und d, ınd g, a und $h = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$, indem

$$\frac{d}{cisis} = \frac{deses}{c} = \frac{g}{fisis} \ldots = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$$

zwischen d und e, sowie zwischen g und a beträgt er $\frac{128}{125}$.

Ferner verzichtet die Musik nicht nur auf die verschieden erhöhten ne *fis* und *fis* usw., sondern sie unterscheidet in der praktischen Ausırung auch nicht die einander nahe liegenden halben erhöhten und verften Töne, wie *cis* und *des*, *dis* und *es*. Die zwischen diesen Tönen vorıdenen Intervalle sind

$$\frac{des}{cis} = \frac{27}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} \qquad \frac{es}{dis} = \frac{6}{5} \cdot \frac{64}{75} = \frac{128}{125}$$

$$\frac{fes}{e} = \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{125} \qquad \frac{f}{eis} = \frac{4}{3} \cdot \frac{96}{125} = \frac{128}{125}$$

$$\frac{ges}{fis} = \frac{b}{ais} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} \qquad \frac{ces}{h} = \frac{c}{his} = \frac{128}{125}.$$

---

1) Über die Berechnung der Tonleiter sehe man auch: *Helmholtz*, Lehre 1 den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 418 ff. *G. Schubring*: Schlöch, Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Supplementheft 1868. Gegenüber ger Berechnung der Tonleiter aus den einfachen konsonierenden Akkorden hat ren gezeigt (*Cornu* und *Mercadier*, Comptes rendus. 68 p. 301 u. 424 1869; . p. 1168. 1870; 72. p. 178. 1871; 76. p. 431. 1872), daß im melodischen Gange Terz und die von ihr abgeleiteten Intervalle anders und zwar höher genomn werden als in der harmonischen Musik. Bei dem Fortschreiten in der Melie soll die große Terz um ein Komma höher genommen werden, so daß also melodische Tonleiter eine andere wäre als die harmonische, in der Musik mit zwei verschiedene Tonleitern nebeneinander beständen.

Die hierdurch begangenen Fehler, wenn man die Töne als gleich setzt, also als *des* den Ton *cis* usw. gebraucht, würden also ebenso groß sein, wie die durch Vernachlässigung der doppelt erhöhten oder vertieften. Würde man nun aber die eine Reihe der Töne, etwa die erhöhten, rein erhalten, so würden die Unreinheiten für die andere Reihe so stark werden, daß dieselbe ganz unbrauchbar würde; um das zu vermeiden, läßt man keinen der Töne rein, sondern setzt anstatt des reinen *cis* oder *des* einen zwischen beiden liegenden Ton, dessen Wert wir sofort ableiten werden.

Schließlich unterscheidet man auch nicht die um ein Komma verschiedenen Töne c und $\bar{c}$ usf., sondern behält nur die Töne c, d, e usw. bei, so daß damit das Tonsystem auf 12 Töne reduziert wird, welche alle die von uns abgeleiteten 52 repräsentieren.

Damit ist nun aber auch eine Temperatur der Töne der c-Durtonleiter notwendig, da sonst die Unreinheit der doppelt erhöhten und vertieften Töne so groß wäre, daß man alle sie enthaltenden Tonarten absolut nicht gebrauchen könnte.

Will man nur diese 12 Töne beibehalten, so ist die Temperatur der Haupttöne der Tonleiter noch aus einem andern Grunde erforderlich. Es ist nämlich in der Musik notwendig, von einem Tone zu irgend einem andern auf verschiedenen Wegen, das heißt durch Fortschreiten nach verschiedenen Intervallen zu gelangen. So gelangt man, wenn man von irgend einem Grundtone nach Oktaven fortschreitet, immer zu den höheren Oktaven.

$$\begin{array}{cccccccc} c & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128. \end{array}$$

So soll man aber auch durch 12 reine Quinten von c aus zu einer höhern Oktave gelangen

$$c \;\; g \;\; d_1 \;\; a_1 \;\; e_2 \;\; h_2 \;\; fis_3 \;\; cis_4 \;\; gis_4 \;\; dis_5 \;\; ais_5 \;\; f_6 \;\; c_7$$

und das c, zu welchem man gelangt, muß das durch Oktaven erreichte c_7 sein.

Berechnet man nun aber c_7 durch 12 reine Quinten, so findet man den Wert

$$c_7 = \frac{531441}{4096},$$

während nach Oktaven

$$c_7 = \frac{524288}{4096} = 128$$

ist. Man findet also beim Fortschreiten nach Quinten c_7 im Verhältnis von

$$\frac{531441}{524288} = \frac{129,7}{128},$$

oder nahezu im Verhältnis von $\frac{65}{64}$ zu hoch.

Gleiches zeigt sich bei andern Fortschreitungen, und zwar in noch erhöhtem Maße; so sollte ein Fortschreiten durch drei große Terzen

$$c \;\; e \;\; gis \;\; c_1$$

die nächst höhere Oktave liefern; diese Fortschreitung ergibt indessen

$$1 \;\; \tfrac{5}{4} \;\; \tfrac{25}{16} \;\; \tfrac{125}{64},$$

anstatt $c_1 = \frac{128}{64}$ erhalten wir demnach einen um das Komma $\frac{125}{128}$ zu niedrigen Ton.

Schreiten wir demnach nach reinen Intervallen fort, so verlieren die höheren Töne ihre Reinheit gegen den Grundton, man gelangt niemals zu einer reinen Oktave, will man aber die Intervalle gegen den Grundton festhalten, so werden die einzelnen Intervalle unrein. Dasselbe ist bei auf- und absteigender Bewegung und Benutzung verschiedener Intervalle der Fall. So gibt Chladni in seiner Akustik folgendes Beispiel. Bei der Tonfolge

$$g \quad c \quad f \quad d \quad g \quad c$$

geht man zunächst eine reine Quint abwärts, dann eine Quart aufwärts, eine kleine Terz abwärts, eine Quarte aufwärts und schließlich eine Quinte abwärts. Das Verhältnis der Töne zum Grundton c ist

$$\frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{3}{2} \quad 1.$$

Gehen wir dagegen nach reinen Intervallen, so werden die entsprechenden Zahlen

$$\frac{3}{2}; \; 1; \; \frac{4}{3}; \; \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}; \; \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{27}; \; \frac{40}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{81}.$$

Wir gelangen also weder zu dem reinen g zurück, von dem wir ausgingen, noch zum Grundtone. Eine weitere Fortsetzung solcher Fortschreitungen nach reinen Intervallen würde die nachkommenden immer weiter von den reinen Tönen entfernen. Deshalb und besonders weil die Fortschreitungen nach verschiedenen Intervallen ganz verschiedene Abweichungen von den reinen Tonverhältnissen, so z. B. die reinen Quinten zu hohe, die reinen Terzen zu tiefe Töne geben, können in der Musik, wenn man das Tonsystem auf 12 Töne beschränkt, die reinen Intervalle gar nicht angewandt werden, selbst wenn man auf allen Instrumenten die Töne alle ganz rein hervorbringen könnte. Man muß daher alle Töne modifizieren, oder wie es in der Musik heißt, temperieren.

Die Temperatur kann nun nach verschiedenen Prinzipien hergestellt werden; man nimmt entweder einige Intervalle rein und verteilt die andern Intervalle, so daß man dadurch bei den verschiedenen Fortschreitungen immer zu denselben Tönen kommt. So sind z. B. in der Kirnbergerschen Temperatur neun Quinten ganz rein, drei dagegen *fis* — *cis*, *d* — *a*, *a* — *e* unrein, und zwar ist der Fehler, der beim Fortschreiten durch 12 Quinten entsteht, auf diese drei Quinten verteilt.

Indes sind die sogenannten ungleichschwebenden Temperaturen zu verwerfen, da dadurch auf Kosten einiger Intervalle die andern um so unreiner werden.

Die in der Musik gebräuchliche Temperatur verändert alle Intervalle außer den Oktaven; diese müssen rein sein, da die Oktaven dem Einklange am nächsten stehen, deshalb ebenso, wie eine Unreinheit des Einklanges, auch die der Oktaven am leichtesten gehört wird und am störendsten ist. Die zwölf innerhalb einer Oktave liegenden Töne werden dann alle als gleichweit voneinander abstehend betrachtet, so daß das Tonverhältnis zweier aufeinander folgender Töne konstant oder

$$\frac{cis}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{c_1}{h} = t$$

gesetzt wird.

Dieses Intervall i wird dann als halber Ton betrachtet, dessen Wert sich daraus ergibt, daß

$$cis = i \cdot c, \quad d = i \cdot cis = i^2 \cdot c \cdot \cdot \cdot \cdot c_1 = i \cdot h = i^{12} \cdot c.$$

Setzen wir nun $c = 1$, so wird

$$c_1 = 2 = i^{12}$$
$$i = \sqrt[12]{2} = 1{,}059\,46.$$

Nach der gleichschwebenden Temperatur erhalten wir darnach statt der reinen Schwingungsverhältnisse folgende, zusammengestellt mit den reinen Schwingungsverhältnissen und dem Fehler der temperierten, gegen die reinen Töne. Letztere sind in Form von Dezimalbrüchen gegeben, deren Zähler jedesmal die temperierte, deren Nenner die reine Schwingungszahl ist. Ist demnach in der Rubrik Fehler des temperierten Tones die Zahl größer als 1, so ist der temperierte Ton zu hoch, ist die Zahl ein echter Bruch, so ist der temperierte Ton zu tief.

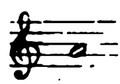
Name des Tones	Reines Schwingungsverhältnis	Temperiertes Schwingungsverhältnis	Fehler des temperierten Tones
c	1 = 1	1	1
cis . . .	$\frac{25}{24}$ = 1,041 66	. . . . 1,059 46	1,017 08
des . . .	$\frac{27}{25}$ = 1,080 00		0,980 98
d	$\frac{9}{8}$ = 1,125 00	. . . . 1,122 46	0,997 74
dis . . .	$\frac{75}{64}$ = 1,171 87	. . . . 1,189 21	1,014 79
es	$\frac{6}{5}$ = 1,200,00		0,991 01
e	$\frac{5}{4}$ = 1,250 00	. . . . 1,259 92	1,010 26
fes . . .	$\frac{32}{25}$ = 1,280 00		0,984 33
eis . . .	$\frac{125}{96}$ = 1,302 08	. . . . 1,334 84	1,025 16
f	$\frac{4}{3}$ = 1,333 33		1,001 13
fis . . .	$\frac{25}{18}$ = 1,388 89	. . . . 1,414 21	1,018 23
ges . . .	$\frac{36}{25}$ = 1,440 00		0,982 09
g	$\frac{3}{2}$ = 1,500 00	. . . . 1,498 31	0,998 88
gis . . .	$\frac{25}{16}$ = 1,562 50	. . . . 1,587 40	1,015 93
as	$\frac{8}{5}$ = 1,600 00		0,992 12
a	$\frac{5}{3}$ = 1,666 66	. . . . 1,681 79	1,009 07
ais . . .	$\frac{125}{72}$ = 1,736 11	. . . . 1,781 80	1,026 31
b	$\frac{9}{5}$ = 1,800 00		0,989 89
h	$\frac{15}{8}$ = 1,875 00	. . . . 1,887 75	1,006 80
ces . . .	$\frac{48}{25}$ = 1,920 00		0,983 20
his . . .	$\frac{125}{64}$ = 1,953 13	. . . . 2,000 00	1,024 07
c_1	2 = 2,000 00		1

Wie man sieht, weichen die temperierten Verhältnisse von den reinen stellenweise nicht unbeträchtlich ab; in demselben und zum Teil noch höherem Maße weichen dieselben von den reinen doppelt erhöhten und doppelt vertieften ab, an deren Stelle die temperierten Töne gesetzt werden. So wird das temperierte *d* für *eses* eingesetzt, obwohl die Schwingungszahl des temperierten *d* nur 0,973 96 des reinen *eses* beträgt. Wenn nun auch

das Ohr in Akkorden sehr kleine Unreinheiten nicht mehr wahrnehmen kann, so sind die oben berechneten doch zu groß, als daß nicht der Wohlklang der Akkorde dadurch wesentlich beeinträchtigt werden sollte. Deshalb ist es durchaus wünschenswert, daß an Stelle der gleichschwebenden Temperatur eine andere eingeführt werden könne, welche diese Unreinheiten nicht zeigt. Die Möglichkeit dazu ist aber nur gegeben, wenn man das Tonsystem erweitert, und statt 12 eine größere Zahl von Tönen beibehält. Es hat das eigentlich nur Schwierigkeit für die Instrumente mit festen Tönen, da z. B. an den Streichinstrumenten die verschiedenen Töne doch verschieden gegriffen werden, *cis* anders als *dis* usf. Für ein Instrument mit festen Tönen hat Helmholtz[1]) und später Appunn[2]) eine Tonreihe gegeben und praktisch ausgeführt, welche fast den reinen Tönen gleichkommt; die Tonreihe von Helmholtz hat 30 Töne, die von Appunn 36, der Wohlklang der Akkorde soll auf diesen Instrumenten, wie zu erwarten stand, viel höher sein, als auf den temperierten. Ob in der Instrumentalmusik eine ähnliche Tonreihe möglich ist, müssen die Musiker entscheiden.

§ 163.

Absolute Schwingungszahl der Töne. Bisher haben wir das Verhältnis der Töne zueinander ins Auge gefaßt. Da wir vorhin sahen, daß das Verhältnis der musikalischen Töne ganz dasselbe ist für die hohen und tiefen Regionen, so ist es natürlich einerlei, von welchem Tone man ausgeht, welche Schwingungszahl man als diejenige des Grundtones annimmt. Um indes die verschiedenen Instrumente miteinander stimmen zu können und überhaupt durch die oben erwähnten Zeichen bestimmte Töne zu bezeichnen, hat man für einen bestimmten Ton, der ungefähr in der Mitte der in der Musik gebräuchlichen Töne liegt, eine bestimmte Höhe angenommen. Es ist der als eingestrichenes *a* bezeichnete Ton



Von diesem Ton aus werden die übrigen Töne bestimmt. Der um eine Sext tiefere Ton ist das eingestrichene *c*. Die in der Musik meist gebrauchten Töne liegen teils höher, teils tiefer als dieses *c*, und zwar steigt die Musik drei Oktaven hinab und vier hinauf. Die unterhalb dieses *c* liegende Oktave heißt die kleine Oktave, die in ihr liegenden Töne werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet; die nächst tiefere, mit den großen Buchstaben bezeichnete, ist die große Oktave und unter dieser die Kontraoktave, welche man durch große Buchstaben mit einem kleinen Querstrich darunter bezeichnet. Die höhern Oktaven werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet und zur Angabe ihrer Höhe mit kleinen Querstrichen darüber versehen. Die auf die kleine Oktave folgende ist die eingestrichene, die nächsthöhere die zweigestrichene usf. Wir wollen indes unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten und die

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 483 ff.

2) *Appunn*, die Beschreibung des Appunnschen Harmoniums gibt *Schubring* in Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik. Suppl.-Heft 1868. p. 124 ff.

eingestrichene Oktave durch eine kleine 1, die zweigestrichene durch eine kleine 2 usw. unten rechts an den den Ton angebenden Buchstaben bezeichnen. Die in der Musik angewandten Töne liegen, nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, zwischen den Oktaven

$$\underline{C}\quad C\quad c\quad \overline{c}\quad \overline{\overline{c}}\quad \overline{\overline{\overline{c}}}\quad \overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}\quad \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}}$$

Nur wenige Instrumente gehen über diese sieben Oktaven hinaus.

Um den Ton des eingestrichenen a_1, nach welchem die Stimmung geregelt wird, zu bestimmen und zu fixieren, hat man die Stimmgabel konstruiert. Dieselbe besteht aus einem gabelförmig gebogenen Stahlstabe, an welchem unten an der Biegung ein Stäbchen angebracht ist (Fig. 290).

Fig. 290.

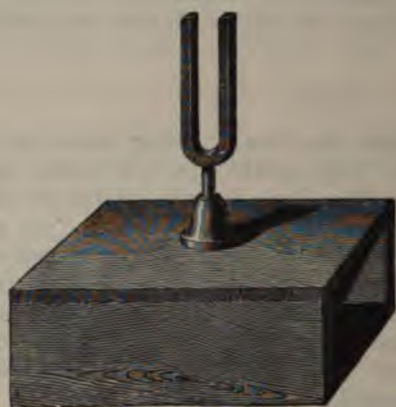
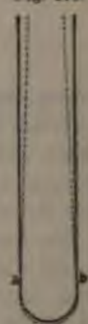


Fig. 291.



Die Gabel wird dadurch zum Tönen gebracht, daß man sie mit einer der Zinken an einen festen Körper anschlägt, sie schwingt dann so, wie Fig. 291 anzeigt, mit zwei Schwingungsknoten in der Nähe der Biegung. Die beiden Zinken schwingen zugleich nach innen und die Biegung nach unten, dann die Zinken nach außen und die Biegung nach oben hin. Die Töne der Stimmgabel allein sind sehr schwach; um sie zu verstärken, setzt man sie auf einen Tisch, der dann, wie wir später sehen werden, durch Resonanz den Ton verstärkt. Größere Stimmgabeln, welche nicht a_1, sondern c_1 oder c geben, sind meist auf besonderen Resonanzkästchen befestigt, in denen die Luftsäule für sich schwingend denselben Ton gibt wie die Gabel und deshalb durch ihre Schwingungen den Ton ganz bedeutend verstärkt. Man streicht solche Gabeln mit einem Baßbogen an, den man parallel der Schwingungsebene an den Zinken der Gabel vorüberführt.

Messungen der Schwingungszahl des durch die a_1-Stimmgabel bestimmten Tones haben nun ergeben, daß dieser Ton keineswegs überall die gleiche Schwingungszahl hat. Fischer fand im Jahre 1822, daß die Schwingungszahl des Tones a_1 im Orchester des Berliner Theaters gleich 437 war; diejenige des Tones a_1 des Orchesters der großen Oper zu Paris

r 431, vom Théatre Feydeau — 428 und des Théatre Italien — 424 hwingungen in der Sekunde.[1])

Scheibler[2]) fand 1833 den Ton von fünf Pariser a_1-Gabeln von 426,7 440,7, von einer Gabel des Berliner Orchesters 441,62 und von sechs beln des Wiener Orchesters zwischen 433,66 und 444,87 Schwingungen.

Scheibler machte darauf 1834 auf der Versammlung deutscher Naturscher und Ärzte zu Stuttgart den Vorschlag, den Ton a_1 zu 440 Schwinngen festzusetzen, indes ist die Stimmung der Orchester darnach nicht rmiert worden und sie blieb nach wie vor schwankend. Nachdem im hre 1859 in Frankreich, das über eine Anzahl staatlicher Orchester auch ßerhalb des Militärs verfügt, bestimmt war, daß der Ton a_1 zu 435 hwingungen gesetzt werden solle, hat sich diese Stimmung nach und ch Bahn gebrochen, bis endlich im Jahre 1886 ein internationaler Konß zu Wien diese Stimmung für die meisten europäischen Länder als rmalstimmung angenommen hat.

Der Ton $a_1 = 435$ Schwingungen wird durch Normalgabeln, deren ste wohl von R. König in Paris verfertigt wurden, festgehalten. Dabei zu beachten, daß die Schwingungszahl einer Stimmgabel einigermaßen n der Temperatur der Gabel abhängig ist. Nach den Versuchen von ercadier[3]), Kayser[4]) und R. König[5]) ist die Änderung der Tempeturänderung proportional, aber für Stimmgabeln verschiedener Dimennen etwas verschieden, nach R. König nehmen seine Stimmgabeln pro ad um etwa $\frac{1}{9000}$ ihrer Schwingungszahl ab. Kayser fand bei seinen rsuchen einen etwas kleineren Wert. Die Beobachtungen wurden mit lfe der Schwingungskurven angestellt, indem eine Gabel auf konstanter mperatur gehalten und die zweite allmählich erwärmt wurde. Bei der sgangstemperatur wurden die Gabeln genau gleichgestimmt, so daß die hwingungskurve fest stand; wenn die zweite Gabel erwärmt wurde, so obachtete man die Zeit, während welcher die Schwingungskurven alle rmen durchliefen, also die erwärmte Gabel eine Schwingung weniger chte.

N. Pierpaoli[6]) hat die Temperaturkoeffizienten von Normalgabeln Juli 1892 festgestellt und dann 1901 nach derselben Methode wieder prüft und dabei gefunden, daß alle etwas zugenommen hatten.

Eine eingehendere Untersuchung stellte E. C. Woodruff[7]) über diesen genstand an Gleichzeitig verfolgte er den Temperaturkoeffizienten von bis 200° C., die Änderung des Elastizitätskoeffizienten für Stahl und den nfluß der Temperatur auf die Dämpfung der Gabelschwingungen. Der mperaturkoeffizient der Anzahl der Schwingungen verlief nicht linear d ist unabhängig von den Dimensionen der Gabel. Er ist nur abhängig

1) *Fischer*, in den Denkschriften der Berliner Akademie für 1824.
2) Nach der Angabe von *Röber*, Doves Repertorium 3. 1839.
3) *Mercadier*, D'Almeida Journal de phys 5 p. 201. 1876.
4) *F. Kayser*, Wiedem Ann. 8 p. 444 1879.
5) *R. König*. Wiedem. Ann 9. p. 394. 1880. Auf Königs Methode der genauen Bestimmung der absoluten Schwingungszahl von Stimmgabeln kommen r § 182 nochmals zurück.
6) *N. Pierpaoli*, Atti R. dei Lincei (5.) Memorie 3. p 187. 1901.
7) *E. C. Woodruff*, Phys. Rev 16. p. 325. 1903.

von der Änderung des Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur. Der Elastizitätskoeffizient hat zwischen 100° und 200° weder Maximum noch Minimum, sondern verläuft annähernd linear. Die Dämpfung der Gabel ist stark beeinflußt von der Temperatur. Das Dekrement hat ein Maximum bei 80° und Minima bei 20° und 140° C.

Als Normalgabel wurde in Wien diejenige angenommen, welche bei 20° C. 435 Schwingungen macht.

Gehen wir von dieser Schwingungszahl aus, so wird darnach

$$c_1 = \frac{a_1}{1{,}681\,79} = \frac{435}{1{,}681\,79} = 258{,}65.$$

Die Schwingungszahlen der vorhin angegebenen Töne werden darnach folgende

$$\begin{aligned} \underline{C} = c_{-2} &= 32{,}33 & c_2 &= 517{,}30 \\ C = c_{-1} &= 64{,}66 & c_3 &= 1034{,}60 \\ c &= 129{,}32 & c_4 &= 2069{,}20 \\ c_1 &= 258{,}65 & c_5 &= 4138{,}40 \end{aligned}$$

wodurch man leicht imstande sein wird, die Schwingungszahlen aller übrigen in der Musik gebräuchlichen Töne zu berechnen.

Es möge hier noch erwähnt werden, daß in physikalischen Instituten häufig Stimmgabelsätze (König) benutzt werden, die als Basis nicht 435 Schwingungen für a_1 haben, sondern c_1 mit 256 statt 258,65. Dadurch sind die Schwingungszahlen der verschiedenen Oktaven von c_1 Potenzen von 2, was auch das Rechnen beim Experimentieren erleichtert.

Die oben angegebenen Töne sind indes nicht die überhaupt hörbaren Töne, sowohl Töne unterhalb c_{-2} als oberhalb c_5 sind noch hörbar. In den größern Orgeln findet sich noch eine ganze Oktave tieferer Töne bis zum c_{-3}, dem Subkontra C, welches 16 Schwingungen in der Sekunde vollführt, und Savart behauptete nach seinen Versuchen[1]), daß bei hinreichender Stärke Töne selbst bei 7—8 Schwingungen in der Sekunde hörbar seien. Savart ließ einen Eisenstab um eine horizontale Achse sich drehen und stellte ihn so auf, daß er bei jeder Umdrehung durch einen Spalt eines Brettes schlug und dabei die Ränder berührte. Jeder Durchtritt gab einen heftigen Schlag und war die Umdrehungsgeschwindigkeit so groß, daß der Eisenstab in der Sekunde 7—8mal die Spalte passierte, so hörte man einen sehr tiefen und lauten Ton. Savart glaubte, daß dieser Ton Folge der acht Stöße des Eisenstabes in der Brettspalte sei.

Schon Despretz[2]) indessen widersprach dem und bemerkte dagegen, daß, wenn Savarts Schluß richtig sei, die doppelte Umdrehungsgeschwindigkeit oder die Anwendung zweier Spalten auch die höhere Oktave des zuerst gehörten Tones hätte erzeugen müssen. Der Versuch ergibt aber einen von dem vorigen nur wenig verschiedenen Ton, so daß der Ton sich nicht aus den einzelnen Schlägen zusammengesetzt haben kann.

Helmholtz[3]) wies nach, daß die Methode von Savart zur Untersuchung dieser Frage ganz ungeeignet sei, da die Dauer jedes einzelnen

1) *Savart,* Annales de chim. et de phys. 47. 1831. Poggend. Ann. 20. 1830.
2) *Despretz,* Comptes rendus de l'Académ. de France. 20. 1845. Poggend. Ann. 65. 1838.
3) *Helmholtz,* Tonempfindungen. p. 266 ff.

Stoßes gegen die Zwischenzeit zweier Stöße, also die Schwingungsdauer der durch sie erzeugten Schwingungen zu kurz sei. Es müssen deshalb die Obertöne sehr stark entwickelt sein, so daß die tiefsten gehörten Töne nichts als Obertöne sind. Er hat deshalb die Frage nach den tiefsten Tönen wieder aufgenommen und gelangt zu einem wesentlich andern Resultat; er findet, daß die Tonempfindung erst beginnt bei etwa 30 Schwingungen und daß erst bei etwa 40 Schwingungen der Ton eine bestimmte musikalische Höhe hat. Helmholtz schloß dieses besonders aus einem Versuch mit einer in der Mitte belasteten Saite, welche infolge der Belastung fast nur die langsamsten Schwingungen, bei denen die Saite der ganzen Länge nach schwingt, vollführt. Die Saite wurde auf einem Resonanzboden ausgespannt, der nur eine Öffnung hatte, und diese konnte mit dem Gehörgange verbunden werden, so daß die Luft des Resonanzkastens nur in das Ohr hin entweichen konnte. Die Töne einer Saite von gewöhnlicher Höhe sind unter diesen Umständen von unerträglicher Stärke. Dagegen war die Tonempfindung, als die Saite 37 Schwingungen machte, nur mehr schwach, und hatte auch diese etwas Knarrendes, was darauf schließen läßt, daß das Ohr anfing, die einzelnen Stöße zu fühlen. Bei 31 Schwingungen war kaum noch etwas zu hören.

Später hat Helmholtz[1]) dasselbe mit zwei von König hergestellten Stimmgabeln gezeigt, deren Stimmung durch an den Zinken verschiebbare Gewichte geändert werden konnte. Die Zahl der jeder Lage des Gewichts entsprechenden Schwingungen ist auf einer an den Zinken angebrachten Skala angegeben; die eine Gabel gibt in der Sekunde je nach der Lage des Gewichtes 25—35, die andere 35—61 Schwingungen. Die Gewichte haben die Form von Platten. Bringt man das Ohr ganz nahe an diese Platten, so hört man die tiefen Töne sehr gut. Bei 30 Schwingungen hört man dann noch deutlich einen schwachen dröhnenden Ton, bei 28 kaum noch eine Spur, obgleich man leicht Oszillationen von 9^{mm} Amplitude in dieser Weise ganz dicht vor dem Ohr erzeugen kann.

Preyer[2]) glaubt indes die untere Grenze der Hörbarkeit doch noch erheblich tiefer setzen zu können. Er nahm mit solchen Stimmgabeln noch 24 Schwingungen als Ton wahr und glaubt mit schwingenden belasteten Zungen noch 15 Schwingungen als Ton empfunden zu haben. Gegen die letztern Versuche von Preyer wendet aber Helmholtz[3]) ein, daß solche belastete Zungen bei jeder ihrer Schwingungen dem Befestigungspunkte zwei longitudinale Stöße erteilen und zwar jedesmal, wenn sie mit dem Maximum der Geschwindigkeit die Gleichgewichtslage passieren; er sieht es deshalb noch nicht als bewiesen an, daß unser Ohr erheblich unter der Zahl 30 liegende Schwingungen als Ton empfinden kann.

Appunn[4]) gelangt neuerdings zu dem Resultate, daß die Grenze der Hörbarkeit bei 9—12 Schwingungen läge. Er benutzte zu seinen Versuchen eine 1^{mm} dicke, 12^{mm} breite und 420^{mm} lange Metalllamelle, an

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. 3. Ausg. p. 279.
2) *Preyer*, Physiologische Abhandlungen I. Reihe. Heft 1 p. 1.
3) *Helmholtz*, Tonempfindungen 4. Ausg. p. 295.
4) *Appunn*, Beiblätter zu den Annalen der Physik. 14 p. 362. 1892. Die Originalarbeit, Ber. der Wetterauischen Gesellschaft 1889 p. 37, ist mir nicht bekannt.

deren freiem Ende eine Metallscheibe von 40^{mm} Durchmesser befestigt war. Auf der Metalllamelle war eine Teilung angebracht von 4—24, so daß, wenn die Lamelle an einem dieser Teilstriche eingeklemmt wurde, die Zahl an demselben die Schwingungszahl der Lamelle angab. Nach Angabe von Appunn soll der Stab keine Obertöne geben. Ließ man den Stab von den langsamsten Schwingungen aus nach und nach rascher schwingen, so hörte Appunn den ersten Ton bei 11—12 Schwingungen, ging man von raschern zu langsamern, so hörte man noch einen Ton bei 9—10 Schwingungen.

Das Resultat steht im direkten Widerspruch mit dem der letzten Helmholtzschen Versuche, deren Anordnung im Wesen sich von der Appunnschen nicht unterscheidet. Wenn Appunns schwingender Stab in der Tat keine Obertöne gab, kann man die Resultate nur unter der Annahme vereinigen, daß die Grenze der Hörbarkeit ebenso nach unten eine für verschiedene Ohren verschiedene sei, wie es für die obere Grenze nachweisbar der Fall ist.

Appunn jun. hat auch zur Ermittelung der untern Grenze für die Wahrnehmung von Tönen Stimmgabeln aus gabelförmig gebogenen Stahldrähten konstruiert, die unten mit Messingplatten beschwert waren. Dieselben sind von Hermann[1]) untersucht; die Schwingungszahlen lagen zwischen 12 und 56 ganzen Schwingungen.

Nach oben hin ist die Reihe der hörbaren Töne weniger begrenzt, indes findet sich hier, daß verschiedene Personen für solche Töne verschieden empfindlich sind, und selbst eine Person mit dem einen Ohr oft höhere Töne wahrnehmen kann als mit dem andern. So gibt Brewster an, daß er das Heimchenzirpen nur mit einem Ohre hörte, während für gewöhnliche Töne beide Ohren gleich empfindlich waren.[2])

Sind die Töne hinreichend stark, so können noch sehr hohe Töne gehört werden; so brachte Savart[3]) mit seinem gezahnten Rade noch deutlich das fis_7 mit 24000 Schwingungen hervor, und Despretz[4]) fand, daß mittels Stimmgabeln, welche auf Resonanzkasten standen, noch das d_8 mit über 36000 Schwingungen hörbar war.

Edelmann[5]) machte auch Studien über die Erzeugung und Grenze der Hörbarkeit höchster Töne. Er stellte mit einer neu konstruierten Galtonpfeife mit verstellbarem Stempel fest, daß bei manchen Personen die obere Grenze noch oberhalb 50000 Schwingungen liegt. Die Pfeife liefert Schwingungszahlen bis 170000 (ca. f_{10}). Die einwandsfreie Bestimmung der Schwingungszahlen ganz hoher Töne bot Schwierigkeiten und die nach subjektiven und objektiven Methoden angestellten Beobachtungen lieferten wesentlich verschiedene Resultate. An dieser Streitfrage beteiligten sich besonders A. Appunn[6]), F. A. Schultze[7]), A. Schwendt[8])

1) *L. Hermann,* Schriften d. phys.-ökon. Ges. Königsberg. **36.** 16. 1895.
2) *Brewster,* Philosophical Magazin. **25.** 1806.
3) *Savart,* Annales de chim. et de phys. **44.** 1830.
4) *Despretz,* a. a. O.
5) *M. Th. Edelmann,* Ann. d. Phys. **2.** p. 469. 1900.
6) *A. Appunn,* Wiedem. Ann. **67.** p. 217 u. p. 222. 1899.
7) *F. A. Schultze,* Wiedem. Ann. **68.** p. 199 u. p. 869. 1899.
8) *A. Schwendt,* Arch. f. ges. Physiol. **75.** p. 346. 1899 u. **76.** p. 189. 1899. Verh. d. naturf. Ges. zu Basel. **12.** (2.) p. 149. 1900.

R. König[1]), F. Melde[2]), Zickgraf[3]), C. Stumpf und M. Meyer[4]), M. Th. Edelmann[5]). Als aber die rein objektive Methode der Kundtschen Staubfiguren, die im § 174 beschrieben ist, von Schwendt und König mit Erfolg angewandt wurde, war die Frage damit entschieden.

§ 164.

Analyse des Klanges. Wir haben bereits im § 157 darauf hingewiesen, daß Töne gleicher Höhe sich durch Verschiedenheit ihrer Klangfarbe unterscheiden, und bemerkt, daß die Verschiedenheit des Klanges ihren Grund darin habe, daß die Form der Schwingungen bei gleicher Periode eine verschiedene sei; eine Verschiedenheit, welche darauf beruht, daß die Schwingungen zusammengesetzt periodische sind, daß innerhalb der durch den Grundton angegebenen Periode die Luftteilchen gleichzeitig nach andern höhern Tönen angehörigen Perioden schwingen. Bei der Besprechung der zusammengesetzten Schwingungen (§ 148) sahen wir schon, daß bei den Schwingungen der meisten Körper nicht einfache Schwingungen, welche durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt sind, sich finden, sondern daß zu diesen stets solche hinzutreten, deren Schwingungsdauern Vielfache der ersten sind, daß also die Schwingungen im allgemeinen durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \sin 4\pi \frac{t}{T} + c \sin 6\pi \frac{t}{T} + \cdots p \sin n\pi \frac{t}{T}$$

gegeben sind. Bei den verschieden schwingenden Körpern können die Verhältnisse zwischen den Amplituden der einzelnen Schwingungen, sowie die Anzahl der Glieder dieser Reihe je nach Art und Stelle der Erregung sehr verschieden sein.

Wie wir nun § 159 sahen, stellen die einzelnen Glieder der zuletzt hingeschriebenen Reihe die harmonischen Obertöne des durch das erste Glied dargestellten Tones vor, also wenn wir den letztern mit c bezeichnen, die Reihe

$$c,\ c_1,\ g_1,\ c_2,\ e_2,\ g_2,\ \text{Ton } 7,\ c_3,\ d_3 \ldots$$

Ist demnach die vorhin ausgesprochene Annahme über die Ursache der Klangverschiedenheit die richtige, so würde das bedeuten, daß die verschiedenen Klänge nicht einfache Töne, sondern Akkorde sind, welche von der Reihe der harmonischen Töne gebildet werden, und daß ihre Verschiedenheit darin beruht, daß in diesen Akkorden mehr oder weniger Töne der Reihe vorhanden sind, und daß die Stärke der einzelnen Töne eine verschiedene ist.

---

1) *R. König*, Wiedem. Ann. 69. p. 626 u. 721. 1899.
2) *F. Melde*, Ber. d. Marb. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturwissensch. 4. p. 75. 1899.
3) *A. Zickgraf*, Inaug.-Diss. Marburg 1899.
4) *C. Stumpf* und *M. Meyer*, Wied. Ann. 61. p. 760. 1897.
5) *M. Th. Edelmann*, Ann. d. Phys. 2. p. 469. 1900.

Ohm[1]) war der erste, der den Satz aufstellte, daß das Ohr die Fähigkeit habe, jede in einer zusammengesetzten vorhandene einfache Schwingung als Ton gesondert wahrzunehmen, ohne jedoch daran den Schluß zu knüpfen, daß in der Wahrnehmung der verschiedenen Obertöne der Grund der Klangverschiedenheit liege. Seebeck[2]) nahm dem gegenüber an, daß in einer zusammengesetzt periodischen Schwingung die einzelnen Töne nicht zu unterscheiden wären, daß aber in der durch das Hinzutreten der weitern Schwingungen bedingten Veränderung des Schwingungsgesetzes eine Ursache der Klangverschiedenheit der Töne gleicher Höhe zu suchen sei. Erst Helmholtz[3]) war es, der den Nachweis lieferte, daß in einem Klange, dessen schwingende Bewegung durch obige Gleichung dargestellt ist, alle die Töne, wie sie das Gesetz von Ohm verlangt, wirklich vorhanden und dem Ohre wahrnehmbar sind, und daß die Verschiedenheit des Klanges wesentlich von den vorhandenen Obertönen bedingt ist.

Zum Nachweis der objektiven Existenz der Partialtöne benutzte Helmholtz das Phänomen des Mittönens, dessen Theorie wir im nächsten Kapitel etwas ausführlicher besprechen werden. Die Erscheinung besteht darin, daß wenn in der Nähe eines Körpers, welcher Schwingungen einer ganz bestimmten Periode vollführt, das heißt also einen einfachen Ton bestimmter Höhe geben kann, Schwingungen dieser Periode erzeugt werden, der Körper dadurch mit in Schwingungen gerät, welche man entweder direkt oder dadurch wahrnehmbar machen kann, daß man den erregenden Ton aufhören läßt, wodurch der Ton des mitschwingenden Körpers allein hörbar bleibt. Spannt man z. B. auf einem Monochord zwei Saiten genau im Einklang, und bringt die eine zum Tönen, so tönt auch die andere, oder bringt man von zwei ganz genau gleichen Stimmgabeln, wie Fig. 290, die eine zum Tönen, so wird auch die andere in Schwingung versetzt. Dieses Mittönen tritt aber nur ein, wenn die Schwingungen des mittönenden Körpers genau dieselbe Dauer haben, wie die Schwingungen des ursprünglich tönenden Körpers, schon bei geringem Unterschiede der Schwingungen tritt dasselbe nicht ein. Wenn man deshalb bei Erzeugung eines Klanges einen bestimmten Körper zum Mittönen bringt, dessen Schwingungszahl jener des in dem Klange vorhandenen Grundtones nicht entspricht, so kann man daraus mit Sicherheit schließen, daß neben dem Grundtone der dem mittönenden Körper entsprechende Ton in dem Klange vorhanden ist.

Ein sehr bequemes Mittel, um das Mittönen zu zeigen, sind Membranen, welche wie Fig. 292 als Boden auf einer Flasche ausgespannt sind. Der Hals der Flasche bei a ist offen, die Membran b vertritt die Stelle des Bodens; man nimmt am besten eine nasse Schweinsblase, die gleichmäßig aufgespannt wird, und die man trocknen läßt. Bei c wird mit Wachs ein Kokonfaden befestigt, der an seinem unteren Ende ein Siegellackkügelchen trägt, das gerade vor der Mitte der Membran hängt. Wenn die Membran in Schwingungen gerät, so macht das Pendelchen die heftigsten Sprünge. Wenn die Spannung der Membran und die Größe der Flasche

1) *Ohm*, Poggend. Ann. **59**. 1843 und **62**. 1844.

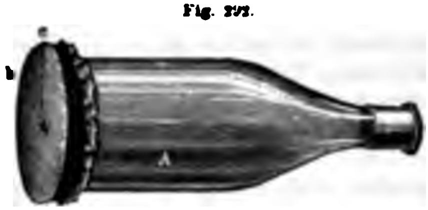
2) *Seebeck*, Poggend. Ann. **60**. 1843 und **63**. 1844. Doves Repertorium 8. 1849.

3) *Helmholtz*, Tonempfindungen. Abschnitt II, III, IV, V, VI.

richtig getroffen sind, so gibt die Membran fast nur ihren Grundton an, bei welchem sie als Ganzes schwingt, die Obertöne treten nur schwach hervor. Um dieselben zu erkennen, muß man die Flasche vertikal stellen, und die Membran zur Beobachtung der Klangfiguren mit Sand bestreuen. Die möglichen Schwingungsformen der Membran mit den dazu gehörigen Schwingungszahlen zeigt folgende kleine Tabelle:

Die Membran schwingt	Schwingungszahl
ohne Knotenlinie	1
mit einem Kreise	2,296
mit zwei Kreisen	3,599
mit einem Durchmesser	1,590
mit einem Durchmesser und einem Kreise . .	2,920
mit zwei Durchmessern.	2,140

Fig. 292.

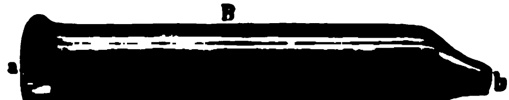


Bezeichnen wir den Grundton der Membran mit c, so gibt dieselbe als Obertöne d_1+, b_1+, *as*, g_1-, cis_1, die Zeichen $+$ und $-$ bei den Tönen sollen anzeigen, daß der Ton der Membran etwas höher oder etwas tiefer ist als der hingeschriebene.

Die mitschwingenden Membranen haben den Vorzug, daß sie die in einer Klangmasse vorhandenen Einzeltöne ganz ohne Mithilfe des Ohres zeigen, sie haben indes den Nachteil, daß sie für schwächere Töne nicht sehr empfindlich sind. In der Beziehung werden sie weit übertroffen von den von Helmholtz angegebenen Resonatoren. Es sind das Hohlkugeln oder Röhren von Glas oder Messing (Fig. 293 a und b) mit zwei Öffnungen. Die eine Öffnung *a* hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere *b* ist trichterförmig und so geformt, daß man sie in das Ohr einsetzen kann. Man umgibt zu dem Ende die Öffnung *b* mit geschmolzenem Siegellack, und wenn dasselbe soweit erkaltet ist, daß man es mit den Fingern ungestraft berühren kann, aber doch noch weich ist, drückt man die Öffnung in den Gehörgang. Das Siegellack formt sich nach der innern Oberfläche des letztern, und wenn man später den Resonator an das Ohr setzt, so schließt er leicht und vollständig dicht.

Fig. 293 a.

Fig. 293 b.



Ein solcher in das Ohr gesetzter Resonator gibt einen bestimmten Grundton und außerdem mehrere sehr viel höher liegende Obertöne. Wird der Grundton desselben außerhalb angegeben, so wird die Luft des Reso-

nators sehr kräftig zum Mittönen gebracht, und der Ton dringt unmittelbar und deshalb sehr kräftig ins Ohr.

Verstopft man das eine Ohr und setzt an das andere den Resonator, so hört man die meisten in der Umgebung angegebenen Töne sehr gedämpft, wird dagegen der Ton des Resonators angegeben, so schmettert derselbe mit gewaltiger Stärke in das Ohr hinein.

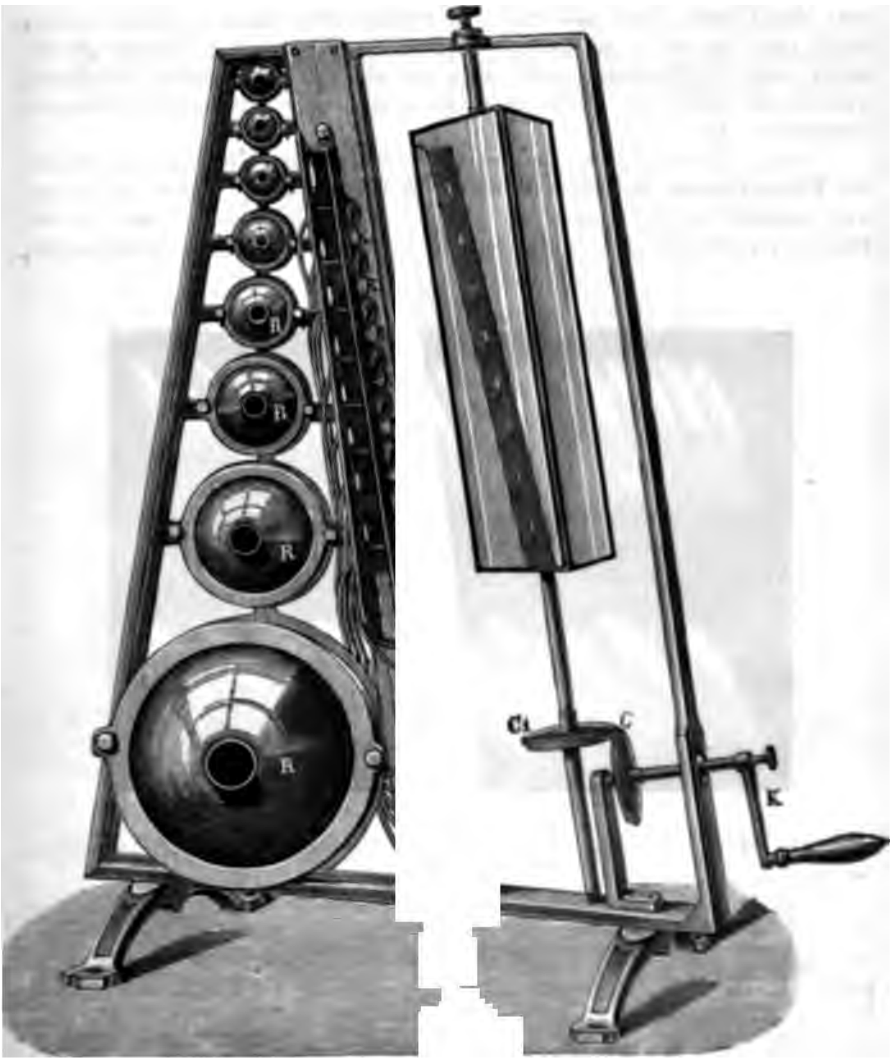
Eine abgestimmte Reihe solcher Resonatoren, wie man sie von König in Paris beziehen konnte, die harmonische Reihe der Töne von c_{-1} an enthaltend, ist deshalb ein vortreffliches Mittel, um die in einer Klangmasse enthaltenen Töne zu bestimmen. Es ist dabei zu bemerken, daß das Auftreten des Tones im Resonator ganz ebenso die objektive Existenz des Tones außerhalb des Resonators beweist, als die mitschwingende Membran. Denn der Ton tritt in dem Resonator nur hervor, wenn derselbe von Schwingungen getroffen wird, welche mit denen, welche die Luftmasse des Resonators annehmen kann, isochron sind; wird deshalb der Resonator zum Tönen gebracht, so beweist das, daß in den zusammengesetzten Schwingungen, welche ihn zum Tönen bringen, die dem Resonator entsprechende einfache Schwingung vorhanden ist und als solche aus den zusammengesetzten abgeschieden werden kann.

Den Vorzug der Membranen, die Zusammensetzung der Klänge unabhängig vom Ohr zu zeigen, mit der Empfindlichkeit der Resonatoren verbindet ein von R. König in Paris konstruierter Apparat. Eine Reihe von abgestimmten Resonatoren, 8 oder 10 von c an sind auf einem Stative übereinander befestigt R, R (Fig. 294). Das Ende der Resonatoren, welches sonst ins Ohr gesteckt wird, ist durch einen Kautschukschlauch mit einer Reihe kleiner Kapseln kk in Verbindung. Mit Ausnahme der Eintrittsstelle des Kautschukschlauches sind die Kapseln rings geschlossen, und zwar an den Seitenwänden und hinten, wo der Schlauch eintritt, fest, vorn, der Mündung des Schlauches gegenüber durch eine sehr feine elastische Membran. Wird durch einen außen angegebenen Ton die Luftmasse des Resonators in Schwingung versetzt, so pflanzt sich die Bewegung bis in die Kapsel fort, und die die Kapsel vorn abschließende Membran wird gerade so in Schwingungen versetzt, wie das Trommelfell, wenn man den Resonator in den Gehörgang einschiebt. Um diese Schwingungen sichtbar zu machen, wendet König ein äußerst sinnreiches Mittel an; vor der Membran wird eine zweite Kapsel angebracht, so daß die Membran selbst die Hinterwand der vorderen Kapsel bildet. Durch ein seitliches Ansatzrohr läßt man in die vordere Kapsel Leuchtgas eintreten, welches durch die (Fig. 294) neben den Resonatoren sichtbaren Brenner, die aus einer kleinen kreisförmigen, auf der obern Seite dünner Zylinder angebrachten Öffnung bestehen, entweicht.

Angezündet gibt dieser Gasstrom eine kleine spitze leuchtende, ruhig brennende Flamme. Sobald aber der mit dieser Flamme in Verbindung stehende Resonator durch einen Ton in Schwingungen versetzt wird, gelangt auch die Flamme in isochrone Vibrationen, indem sie abwechselnd größer und kleiner wird. Denn indem die Membran durch die Schwingungen der Luft im Resonator abwechselnd etwas in die das Gas haltende Kapsel hineingedrückt, abwechselnd aus ihr zurückgezogen wird, wird der Druck des Gases in der Kapsel abwechselnd etwas vergrößert, abwechselnd etwas

verkleinert. Dem vergrößerten Druck entspricht ein verstärktes, dem verminderten ein geschwächtes Ausströmen des Gases und ersterem eine Vergrößerung, letzterem eine Verkleinerung der Flamme. Diese Vibrationen der Flamme erfolgen indes mit einer solchen Geschwindigkeit, daß sie bei direkter Betrachtung der Flamme nicht sichtbar sind.

Fig. 294

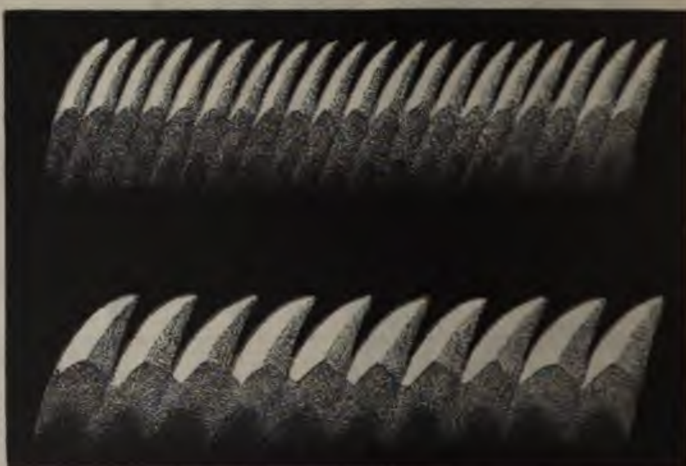


Um sie sichtbar zu machen, benutzt König die schon mehrfach erwähnte Eigentümlichkeit unseres Auges, daß Lichteindrücke eine gewisse Zeit dauern und die aus dem Reflexionsgesetze sich ergebende Erscheinung, daß das Spiegelbild einer Flamme je nach der Stellung eines Spiegels an

verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so daß, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel K gedrehte konische Zahnräder C und C_1 kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man den Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibration brennt, so sieht man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen nebeneinander, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme gleichzeitig, und infolgedessen sieht man sie als ein horizontales Lichtband, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle als leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze der Flamme immer nur einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel nur jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, nebeneinander,

Fig. 295.



und man sieht im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern nebeneinander, wie es Fig. 295 zeigt.

Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schnelligkeit, mit der die Vibrationen erfolgen, und der Schnelligkeit der Rotation des Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels gegeben ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen folgen. Spiegeln sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die eine doppelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der erstern doppelt so viele Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 295 die Erscheinung in dem rotierenden Spiegel, wenn man gleichzeitig c und c_1 ertönen läßt, die untere Flamme gibt die halbe Anzahl Bilder als die darüber liegende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingungen macht als im darüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man t den zu untersuchenden Klang auf den Grundton c an und setzt den iegel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sich i zugehörigen Flammen mitteilt. Man sieht die entsprechenden Flammen rotierenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 295, während Flammen, deren Resonatoren nicht mittönen, im Spiegel als kontinuier- se Lichtbänder erscheinen.

Die Membranen in den Kapseln für die manometrischen Flammen werden i einer solchen Feinheit genommen, daß sie jeder Schwingung, die in der

Fig. 296.

umgebenden Luft vorhanden ist, folgen und sie durch die Bewegung Flamme angeben. Es ist deshalb, wie König[1]) gezeigt hat, möglich, h durch eine Flamme die Klänge in ihre Partialtöne zu zerlegen. Einen nen dazu geeigneten Apparat zeigt Fig. 296. An einem Stativ ist eine sel k der vorhin beschriebenen Art befestigt, in die vordere Hälfte selben, welche von der hintern durch die feine Membran getrennt ist, t durch r das Leuchtgas ein, welches durch den nach oben gebogenen nner f entweicht und dort angezündet wird. In der hintern Hälfte der sel mündet das Kautschukrohr R, welches an seinem Ende mit einem

1) *König*, Poggend. Ann. 122. p. 666. 1864. Eine etwas andere Form der mmenkapseln, welche für manche Zwecke vorzuziehen ist, beschreibt *P. Fischer*, schr. für den physikalischen u. chemischen Unterricht. 3. p. 63. 1890.

Schalltrichter S versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwingungen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen in die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme im rotierenden Spiegel, so erhält man ein Bild, wie Fig. 295a und b. Dringen dagegen gleichzeitig mehrere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwingung versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grundton und Oktave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig. 297. Dasselbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmaler ist, als wenn der Grundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmäßig abwechseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der

Fig. 297.

Überlegung, daß jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der Kapsel die Flamme aufflackern machen muß. Wenn man gleichzeitig Grundton und Oktave und Duodezime in die Kapsel eindringen läßt, so erhält man das Bild Fig. 298. Zwischen die Flammenbilder Fig. 297 tritt jedesmal noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig. 297 bildet sich z. B., wenn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an die Öffnung des Schalltrichters S hält und nicht zu stark in die Pfeife bläst; wenn man dagegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton und der Oktave die Duodezime deutlich hörbar wird, so erhält man das Bild Fig. 298.

Fig. 298.

Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studiert, so erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges benutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem durch passend zusammengesetzte einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen, welche Töne den Klang zusammensetzen.

Schließlich kann man auch die auf einem Monochord oder in einem Klavier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten benutzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen, die

die Saiten sehr leicht und stark mittönen. Da indes die Saiten nicht nur durch ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Obertöne in Schwingung versetzt werden, so läßt sich mit Hilfe derselben nicht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen Klangmasse vorhanden sind.

Mit Hilfe des einen oder des andern Verfahrens kann man zunächst leicht den Nachweis führen, daß in einer zusammengesetzten Schwingung die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen, daß also die einzelnen Partialtöne eine objektive Existenz haben, indem sie das Mittönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben. Daß in der Tat alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser Weise existieren, kann man mit Hilfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im § 148 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 usf. Die Töne 3, 5, 7 usw. und ihre Vielfachen treten auf, das heißt die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Daß in der Tat diese zusammengesetzten Schwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen oder Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie zuerst Brandt[1]) und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz[2]) nachgewiesen haben, nimmt das einigermaßen geübte Ohr bei dahin gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hilfe der Resonatoren wahr, so daß damit das Ohmsche Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die c gibt, außerhalb der Mitte, etwa in $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge, so liefert dieselbe außer dem Grundton c auch c_1, c_2 usw. Nimmt man den Ton c_1 nicht sofort wahr, so halte man einen auf c_1 abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der Tat die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schluß berechtigt sein, daß es in der Tat die verschiedenen und verschieden starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort

1) *Brandt,* Poggend. Ann. 112. p. 324. 1861
2) *Helmholtz,* Tonempfindungen. Abschnitt IV.

Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählt. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Daß dieser Schluß über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz[1]) schließlich dadurch nachgewiesen, daß er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Teiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vokale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 299 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserohr, am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalge in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen *U* sehr ähnlich ist.

Fig. 299.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, daß die eine genau die Oktave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen des Vokales *O* gleich ist. Läßt man nun abwechselnd bald die eine, bald beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange zunächst die einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauerndem Zusammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man erst den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen läßt, hört man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke weiter, daneben klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählich aber, wie sich die Erinnerung des isoliert gehörten Tones verliert, wird jener immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe Ton scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit einem Grundtone unter Änderung der Klangfarbe beweist, daß der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir in § 133 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingungen in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Teilschwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 109 ff.

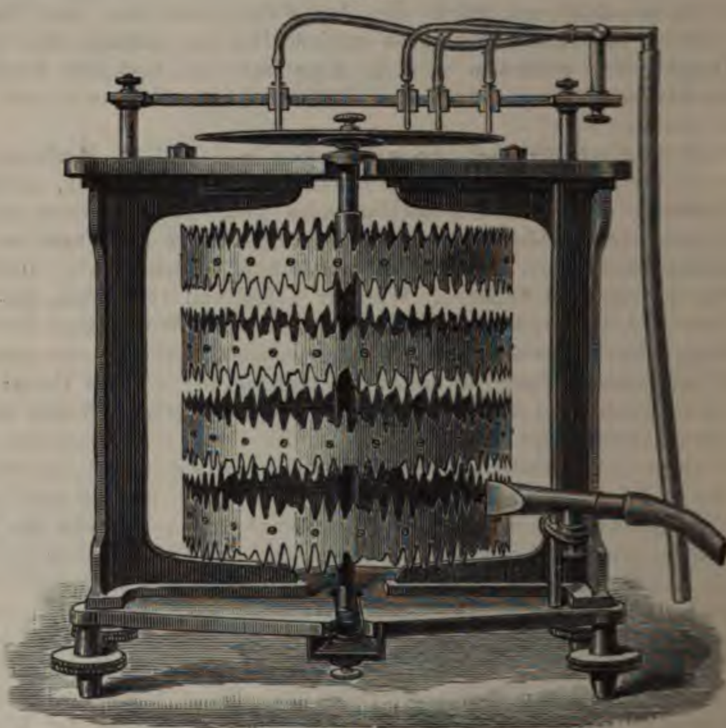
zusammentreten, es wäre deshalb auch möglich, daß die Phase der kom-
ponierenden Teiltöne auf die Farbe eines Klanges von Einfluß [illegible]
holtz[1] gelangte zu dem Resultate, daß das nicht der Fa[ll] [illegible]
nutzte dazu die Zusammensetzung von Klängen mit Hilfe [illegible]
tönen. Zwei im Verhältnis von Grundton und Oktave [illegible]
geben zusammen zum Tönen gebracht und durch [illegible]
(siehe § 172) einen dem *O* sehr ähnlichen Klang. [illegible]
eine Stimmgabel nur sehr wenig, so kommen [illegible]
nach in immer anderer Phase zusammen, [illegible] § [illegible]
Die Klangfarbe ändert [illegible] damit [illegible]
daraus, daß die Klangfarbe [illegible]

[illegible]

Form der Wellenlinie, also nach der Zusammensetzung der Einzelschwingungen, aus denen die Wellenlinie gebildet ist, erheblich verschieden.

Die Form der Wellenlinie ändert sich nach § 133 bei gleichen Einzelschwingungen je nach der Phase, mit der die Einzelschwingungen zusammenkommen. König schnitt Wellenlinien, welche aus den Einzelschwingungen der ersten acht harmonischen Obertöne oder der ersten vier ungeradzahligen, alle mit gleicher Amplitude genommen, zusammengesetzt waren. Für jede dieser Zusammensetzungen stellte er vier Wellenlinien her; bei der ersten fielen die Anfangspunkte aller Wellen zusammen, bei der zweiten das erste

Fig. 300.



Viertel, bei der dritten die Mitte aller Wellen und bei der vierten das dritte Viertel der Schwingungen.

Bei dem Zusammenklange der ersten acht harmonischen Töne ist der Unterschied in der Intensität und der Farbe der entstehenden Klänge in diesen vier Fällen ein sehr beträchtlicher. Die ganze Klangmasse ist am lautesten und schärfsten bei der Phasendifferenz $\frac{1}{4}$, wie König die zweite Wellenlinie bezeichnet, am schwächsten und sanftesten bei der Phasendifferenz $\frac{3}{4}$, zwischen beiden stehen die Phasendifferenzen Null und $\frac{1}{2}$.

Ähnlich war es in allen Fällen.

Zur Bildung eines Klanges ist es nach König nicht erforderlich, daß die harmonischen Obertöne ganz rein sind, sondern auch verstimmte Ober-

töne, besonders in den höhern Lagen, setzen sich zu einem deutlichen Klange zusammen, am besten, wenn auch die tiefern Obertöne vorhanden sind und wenn die Stärke der Obertöne mit der Höhe in annähernd regelmäßiger Weise abnimmt. Befindet sich in der Reihe der Obertöne eine erhebliche Lücke, so daß ein tiefer Grundton nur von hohen Obertönen begleitet wird, so entsteht in unserm Ohr nicht die Empfindung eines Klanges, sondern man hört die höhern Töne neben und gesondert von dem tiefen.

Die Angabe Königs, daß auch unreine Obertöne sich mit dem Grundtone zu einem bestimmten Klange mischen, ist nicht vereinbar mit dem von ihm behaupteten Einfluß der Phasendifferenz auf den Klang, da bei unreinen Obertönen die Phasendifferenzen rasch wechseln, diese somit auch einen rasch wechselnden Klang geben müßten. Das ist bei den Klängen, deren Eigentümlichkeit König gerade durch die Unreinheit der höhern Töne erklärt, indes nicht der Fall.

§ 165.

Klänge durch Schwingungen fester Körper. Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnittes, daß die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, transversale und drehende. Alle diese Schwingungen bringen Töne, oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes fanden wir

$$N = \frac{A}{L}\sqrt{\frac{E}{s}},$$

wenn A eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Konstante, L die Länge, E der Elastizitätskoeffizient des Materials in absolutem Maße und s die Dichtigkeit des Stabes ist. Vom Querschnitt ist die Schwingungszahl unabhängig.

Letzteres kann man leicht bestätigen, indem man zwei Stäbe gleicher Länge, gleichen Materials, etwa von Stahl, aber verschiedener Dicke herstellt. Faßt man dieselben in der Mitte und streicht sie mit einem mit etwas Kolophonium bestrichenen Lederlappen, so geben beide Stäbe Klänge genau gleicher Höhe. Um zu zeigen, daß die Schwingungsanzahl der Länge des Stabes umgekehrt proportional ist, hat man zu den beiden vorigen einen Stab halber Länge zu verfertigen, derselbe gibt in gleicher Weise gestrichen oder an einem Ende mit einem Hammer geschlagen genau die höhere Oktave.

Schon aus Chladnis Versuchen[1]) ergibt sich die Abhängigkeit von Elastizität und Dichtigkeit der Theorie entsprechend. Indem er den Ton c_4 nach der damaligen Stimmung zu 4086 Schwingungen bestimmte, fand er für drei Stäbe, Silber, Kupfer, Eisen, wenn sie an beiden Enden frei waren, und eine Länge von 2 Rhein. Fuß, $62{,}7^{cm}$, besaßen, die Töne

1) *Chladni*, Akustik. p 108.

Silber	d_4 — 2274	Schwingungen	berechnet	2097
Kupfer	g_4 — 3065	"	"	2979
Eisen	cis_5 — 4296	"	"	4107,

die als berechnet angegebenen Werte sind mit den Wertheimschen Werten der Elastitätskoeffizienten für gezogene Metalle (§ 49) und den Dichten $s = 10{,}47$ für Silber, 8,78 für Kupfer und 7,74 für Eisen berechnet. Die Abweichung der beobachteten und berechneten Werte ist durch die Unsicherheit in den Werten der Elastizitätskoeffizienten und auch der Tonhöhen in den hohen Lagen hinreichend erklärt. Die im § 49 als aus Longitudinalschwingungen erhalten angegebenen Werte sind von Wertheim aus den Tonhöhen abgeleitet worden.

Für die verschiedenen Befestigungsweisen fand Chladni ganz der Theorie entsprechende Tonfolgen; der an einem Ende feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{2n-1}{4l}\sqrt{\frac{E}{s}}$$

die ungeradzahligen Töne 1, 3, 5, 7, 9; der an beiden Enden freie oder feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{s}}$$

als Grundton die nächsthöhere Oktave des an einem Ende festen Stabes und weiter dessen harmonische Obertöne, 2, 3, 4.

Die Klänge longitudinal schwingender Stäbe werden in der Musik nicht gebraucht.

Für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir (§ 143) allgemein, mit Beibehaltung der frühern Zeichen, den Ausdruck

$$N = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{gP}{qs}}.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefern Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefern Saiten, um ihr Gewicht zu vergrößern, mit einem feinen Drahte umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einem drehbaren Wirbel eingesteckt sind, durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo außerdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Teiles umgekehrt proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in n schwingende Teile. Die Versuche von Chladni[1]) und G. Weber[2]) geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäß, wobei Weber bis zur Teilung der Saite in $\frac{1}{32}$ ging.

Weil man vielfach die Tonreihe nach den Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt, man nennt die Terz anstatt $\frac{5}{4}$ dann $\frac{4}{5}$, die Quart $\frac{3}{4}$, die Quint $\frac{2}{3}$ usf.

Die Klänge der Saiteninstrumente können nach den Untersuchungen des § 148 äußerst verschieden sein, da je nach der Art der Erregung der Saiten die Zahl und Stärke der zu dem Grundton hinzutretenden Obertöne sehr verschieden sein kann; auf dieser Verschiedenheit beruht die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die Saiteninstrumente können wir in drei Gruppen teilen, in solche, deren Töne durch Zupfen der Saiten erregt werden, Guitarre, Zither, Harfe, solche, deren Töne durch Schlagen erregt werden, das Klavier, und solche, deren Klänge durch das Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat von Helmholtz[3]) die Klänge ausführlich untersucht; wir begnügen uns hier damit, als Ergänzung zu den Untersuchungen des § 148, die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Wir erwähnten § 148 schon, daß die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklange vorhandenen Obertöne wesentlich abhänge von der Art und der Stelle der Erregung und der Dicke, Steifigkeit und Elastizität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus von Helmholtz' Untersuchungen, daß die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Diskontinuitäten die Art der Bewegung bewirkt. Wird die Saite gezupft, so entfernt der Finger, ehe er sie losläßt, die Saite in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage; es entsteht eine Diskontinuität nur dadurch, daß die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift, als wenn sie wie bei der Guitarre und Harfe mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reißens auch einen schärfern Klang mit einer größern Menge klimpernder hoher Obertöne, als im letztern; die Intensität des Grundtones ist aber immer größer als die jedes Obertones.

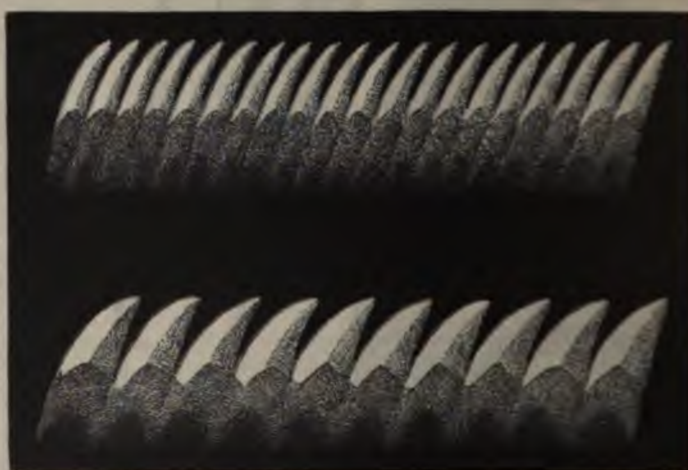
Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der von dem Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige Teil der Saite noch in Ruhe, er gerät erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der

1) *Chladni*, Akustik. p. 67
2) *Bindseil*, Akustik. p. 110.
3) *von Helmholtz*, Tonempfindungen p. 128 ff 536.

verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so daß, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel K gedrehte konische Zahnräder C und C_1 kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man den Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibration brennt, so sieht man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen nebeneinander, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme gleichzeitig, und infolgedessen sieht man sie als ein horizontales Lichtband, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle als leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze der Flamme immer nur einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel nur jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, nebeneinander,

Fig. 295.



und man sieht im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern nebeneinander, wie es Fig. 295 zeigt.

Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schnelligkeit, mit der die Vibrationen erfolgen, und der Schnelligkeit der Rotation des Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels gegeben ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen folgen. Spiegeln sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die eine doppelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der erstern doppelt so viele Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 295 die Erscheinung in dem rotierenden Spiegel, wenn man gleichzeitig c und c_1 ertönen läßt, die untere Flamme gibt die halbe Anzahl Bilder als die darüber liegende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingungen macht als im darüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man gibt den zu untersuchenden Klang auf den Grundton c an und setzt den Spiegel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen die Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sich den zugehörigen Flammen mitteilt. Man sieht die entsprechenden Flammen im rotierenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 295, während die Flammen, deren Resonatoren nicht mittönen, im Spiegel als kontinuierliche Lichtbänder erscheinen.

Die Membranen in den Kapseln für die manometrischen Flammen werden von einer solchen Feinheit genommen, daß sie jeder Schwingung, die in der

Fig. 296.

sie umgebenden Luft vorhanden ist, folgen und sie durch die Bewegung der Flamme angeben. Es ist deshalb, wie König[1]) gezeigt hat, möglich, auch durch eine Flamme die Klänge in ihre Partialtöne zu zerlegen. Einen kleinen dazu geeigneten Apparat zeigt Fig. 296. An einem Stativ ist eine Kapsel k der vorhin beschriebenen Art befestigt, in die vordere Hälfte derselben, welche von der hintern durch die feine Membran getrennt ist, tritt durch r das Leuchtgas ein, welches durch den nach oben gebogenen Brenner f entweicht und dort angezündet wird. In der hintern Hälfte der Kapsel mündet das Kautschukrohr R, welches an seinem Ende mit einem

1) *König*, Poggend. Ann. 122. p. 666. 1864. Eine etwas andere Form der Flammenkapseln, welche für manche Zwecke vorzuziehen ist, beschreibt *P. Fischer*, Zeitschr. für den physikalischen u. chemischen Unterricht. 3. p. 63. 1890.

Schalltrichter S versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwingungen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen in die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme im rotierenden Spiegel, so erhält man ein Bild, wie Fig. 295a und b. Dringen dagegen gleichzeitig mehrere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwingung versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grundton und Oktave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig. 297. Dasselbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmaler ist, als wenn der Grundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmäßig abwechseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der

Fig. 297.

Überlegung, daß jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der Kapsel die Flamme aufflackern machen muß. Wenn man gleichzeitig Grundton und Oktave und Duodezime in die Kapsel eindringen läßt, so erhält man das Bild Fig. 298. Zwischen die Flammenbilder Fig. 297 tritt jedesmal noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig. 297 bildet sich z. B., wenn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an die Öffnung des Schalltrichters S hält und nicht zu stark in die Pfeife bläst; wenn man dagegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton und der Oktave die Duodezime deutlich hörbar wird, so erhält man das Bild Fig. 298.

Fig. 298.

Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studiert, so erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges benutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem durch passend zusammengesetzte einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen, welche Töne den Klang zusammensetzen.

Schließlich kann man auch die auf einem Monochord oder in einem Klavier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten benutzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen, da

die Saiten sehr leicht und stark mittönen. Da indes die Saiten nicht nur durch ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Obertöne in Schwingung versetzt werden, so läßt sich mit Hilfe derselben nicht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen Klangmasse vorhanden sind.

Mit Hilfe des einen oder des andern Verfahrens kann man zunächst leicht den Nachweis führen, daß in einer zusammengesetzten Schwingung die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen, daß also die einzelnen Partialtöne eine objektive Existenz haben, indem sie das Mittönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben. Daß in der Tat alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser Weise existieren, kann man mit Hilfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im § 148 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 usf. Die Töne 3, 5, 7 usw. und ihre Vielfachen treten auf, das heißt die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Daß in der Tat diese zusammengesetzten Schwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen oder Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie zuerst Brandt[1]) und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz[2]) nachgewiesen haben, nimmt das einigermaßen geübte Ohr bei dahin gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hilfe der Resonatoren wahr, so daß damit das Ohmsche Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die c gibt, außerhalb der Mitte, etwa in $\frac{1}{4}$ der Saitenlänge, so liefert dieselbe außer dem Grundton c auch c_1, c_2 usw. Nimmt man den Ton c_1 nicht sofort wahr, so halte man einen auf c_1 abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der Tat die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schluß berechtigt sein, daß es in der Tat die verschiedenen und verschieden starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort

1) *Brandt,* Poggend. Ann. 112. p. 324. 1861
2) *Helmholtz,* Tonempfindungen. Abschnitt IV.

Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählt. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Daß dieser Schluß über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz[1]) schließlich dadurch nachgewiesen, daß er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Teiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vokale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 299 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserohr, am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalge in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen *U* sehr ähnlich ist.

Fig. 299.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, daß die eine genau die Oktave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen des Vokales *O* gleich ist. Läßt man nun abwechselnd bald die eine, bald beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange zunächst die einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauerndem Zusammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man erst den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen läßt, hört man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke weiter, daneben klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählich aber, wie sich die Erinnerung des isoliert gehörten Tones verliert, wird jener immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe Ton scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit einem Grundtone unter Änderung der Klangfarbe beweist, daß der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir in § 133 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingungen in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Teilschwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 109 ff.

zusammentreten, es wäre deshalb auch möglich, daß die Phase der komponierenden Teiltöne auf die Farbe eines Klanges von Einfluß ist. Helmholtz[1]) gelangte zu dem Resultate, daß das nicht der Fall ist. Er benutzte dazu die Zusammensetzung von Klängen mit Hilfe von Stimmgabeltönen. Zwei im Verhältnis von Grundton und Oktave stehende Stimmgabeln geben zusammen zum Tönen gebracht und durch Resonanzröhren verstärkt (siehe § 172) einen dem *O* sehr ähnlichen Klang. Verstimmt man die eine Stimmgabel nur sehr wenig, so kommen die einzelnen Stöße nach und nach in immer anderer Phase zusammen, wie wir bereits § 147 sahen. Die Klangfarbe ändert sich indes damit durchaus nicht. Helmholtz schloß daraus, daß die Klangfarbe des musikalischen Teils eines Klanges nur abhängt von der Zahl und Stärke der Partialtöne, nicht von den Phasenunterschieden derselben. Wir sagen ausdrücklich des musikalischen Teiles des Klanges, denn außerdem wird die Klangfarbe mit bestimmt durch die bei der Klangerzeugung eintretenden Geräusche, auf welche wir noch hinweisen werden.

R. König[2]) kommt bei seinen Versuchen in Betreff des Einflusses der Phase auf die Klangfarbe zu andern Resultaten wie Helmholtz, er findet, daß Änderung der Phase der mitklingenden Töne die Klangfarbe ändert. König benutzte zu seinen Versuchen über den Einfluß der Phase auf die Klangfarbe vorzugsweise die von ihm konstruierte Wellensirene[3]). Die Einrichtung derselben ist folgende. Wie wir § 133 und 148 sahen, gibt uns die Form der fortschreitenden Welle innerhalb einer Wellenlänge die Verschiebungen der einzelnen Punkte nebeneinander, welche jeder einzelne Punkt nacheinander innerhalb einer Schwingung der größten Periode erhält. König schneidet nun die Form der zusammengesetzten Wellen in den Rand einer kreisförmigen Scheibe oder in den Rand eines Metallstreifens, der zu einem Hohlzylinder gebogen wird, wie Fig. 300 zeigt. Die Scheibe kann horizontal auf einer Zentrifugalmaschine befestigt, und um eine durch ihren Mittelpunkt gehende zu ihrer Ebene senkrechte Achse, oder der zum Hohlzylinder gebogene Streifen um die Achse des Hohlzylinders in eine passend schnelle Rotation versetzt werden. Auf den Rand der Scheibe wird ein Luftstrom aus einer Windlade geführt, welcher aus einer recht schmalen Luftspalte, welche bei der Scheibe radial, bei dem Zylinder, wie die Figur zeigt, parallel der Zylinderachse gestellt ist, gegen den Rand der Scheibe strömt. Die Länge der Spalte ist gleich dem Unterschiede des höchsten und tiefsten Punktes der Wellenlinie. Ist die höchste Stelle der Wellenlinie vor der Luftspalte, so ist dieselbe geschlossen, ist der tiefste Punkt vor derselben, so ist die Luftspalte ganz offen. Wird die in den Rand des Streifens geschnittene Wellenlinie an dem Luftspalt vorüber geführt, so wird die Luftspalte genau der Form der Wellenlinie entsprechend mehr oder weniger geöffnet, die durch den Rand tretenden Luftstöße werden also genau nach den Perioden der Wellenlinien gestärkt und geschwächt; die Luft erhält also bei dem Durchtreten durch den Rand genau die periodischen Bewegungen, welche in der Wellenlinie des Randes vorhanden sind.

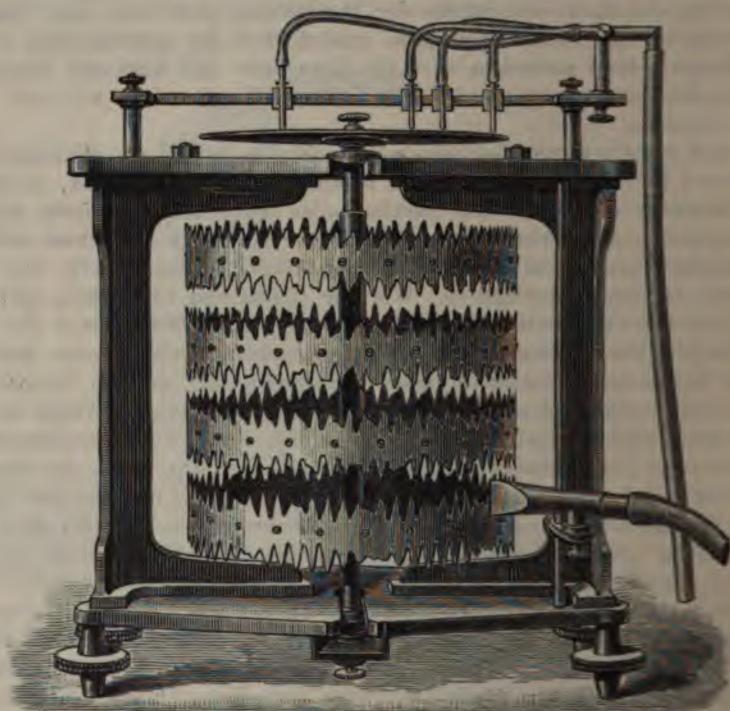
In der Tat sind die auf diese Weise erzeugten Klänge je nach der

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 190 ff.
2) *König*, Wiedem. Ann. 14. p. 369. 1881; 39. p. 403. 1890.
3) *König*, Wiedem. Ann. 12. p. 335. 1881.

Form der Wellenlinie, also nach der Zusammensetzung der Einzelschwingungen, aus denen die Wellenlinie gebildet ist, erheblich verschieden.

Die Form der Wellenlinie ändert sich nach § 133 bei gleichen Einzelschwingungen je nach der Phase, mit der die Einzelschwingungen zusammenkommen. König schnitt Wellenlinien, welche aus den Einzelschwingungen der ersten acht harmonischen Obertöne oder der ersten vier ungeradzahligen, alle mit gleicher Amplitude genommen, zusammengesetzt waren. Für jede dieser Zusammensetzungen stellte er vier Wellenlinien her; bei der ersten fielen die Anfangspunkte aller Wellen zusammen, bei der zweiten das erste

Fig. 300.



Viertel, bei der dritten die Mitte aller Wellen und bei der vierten das dritte Viertel der Schwingungen.

Bei dem Zusammenklange der ersten acht harmonischen Töne ist der Unterschied in der Intensität und der Farbe der entstehenden Klänge in diesen vier Fällen ein sehr beträchtlicher. Die ganze Klangmasse ist am lautesten und schärfsten bei der Phasendifferenz $\frac{1}{4}$, wie König die zweite Wellenlinie bezeichnet, am schwächsten und sanftesten bei der Phasendifferenz $\frac{3}{4}$, zwischen beiden stehen die Phasendifferenzen Null und $\frac{1}{2}$.

Ähnlich war es in allen Fällen.

Zur Bildung eines Klanges ist es nach König nicht erforderlich, daß die harmonischen Obertöne ganz rein sind, sondern auch verstimmte Ober-

töne, besonders in den höhern Lagen, setzen sich zu einem deutlichen Klange zusammen, am besten, wenn auch die tiefern Obertöne vorhanden sind und wenn die Stärke der Obertöne mit der Höhe in annähernd regelmäßiger Weise abnimmt. Befindet sich in der Reihe der Obertöne eine erhebliche Lücke, so daß ein tiefer Grundton nur von hohen Obertönen begleitet wird, so entsteht in unserm Ohr nicht die Empfindung eines Klanges, sondern man hört die höhern Töne neben und gesondert von dem tiefen.

Die Angabe Königs, daß auch unreine Obertöne sich mit dem Grundtone zu einem bestimmten Klange mischen, ist nicht vereinbar mit dem von ihm behaupteten Einfluß der Phasendifferenz auf den Klang, da bei unreinen Obertönen die Phasendifferenzen rasch wechseln, diese somit auch einen rasch wechselnden Klang geben müßten. Das ist bei den Klängen, deren Eigentümlichkeit König gerade durch die Unreinheit der höhern Töne erklärt, indes nicht der Fall.

§ 165.

Klänge durch Schwingungen fester Körper. Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnittes, daß die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, transversale und drehende. Alle diese Schwingungen bringen Töne, oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes fanden wir

$$N = \frac{A}{L}\sqrt{\frac{E}{s}},$$

wenn A eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Konstante, L die Länge, E der Elastizitätskoeffizient des Materials in absolutem Maße und s die Dichtigkeit des Stabes ist. Vom Querschnitt ist die Schwingungszahl unabhängig.

Letzteres kann man leicht bestätigen, indem man zwei Stäbe gleicher Länge, gleichen Materials, etwa von Stahl, aber verschiedener Dicke herstellt. Faßt man dieselben in der Mitte und streicht sie mit einem mit etwas Kolophonium bestrichenen Lederlappen, so geben beide Stäbe Klänge genau gleicher Höhe. Um zu zeigen, daß die Schwingungsanzahl der Länge des Stabes umgekehrt proportional ist, hat man zu den beiden vorigen einen Stab halber Länge zu verfertigen, derselbe gibt in gleicher Weise gestrichen oder an einem Ende mit einem Hammer geschlagen genau die höhere Oktave.

Schon aus Chladnis Versuchen[1] ergibt sich die Abhängigkeit von Elastizität und Dichtigkeit der Theorie entsprechend. Indem er den Ton c_5 nach der damaligen Stimmung zu 4086 Schwingungen bestimmte, fand er für drei Stäbe, Silber, Kupfer, Eisen, wenn sie an beiden Enden frei waren, und eine Länge von 2 Rhein. Fuß, 62,7 cm, besaßen, die Töne

1) *Chladni*, Akustik. p. 103.

Silber	d_4 — 2274	Schwingungen berechnet	2097
Kupfer	g_4 — 3065	„ „	2979
Eisen	cis_5 — 4296	„ „	4107,

die als berechnet angegebenen Werte sind mit den Wertheimschen Werten der Elastitätskoeffizienten für gezogene Metalle (§ 49) und den Dichten $s = 10,47$ für Silber, 8,78 für Kupfer und 7,74 für Eisen berechnet. Die Abweichung der beobachteten und berechneten Werte ist durch die Unsicherheit in den Werten der Elastizitätskoeffizienten und auch der Tonhöhen in den hohen Lagen hinreichend erklärt. Die im § 49 als aus Longitudinalschwingungen erhalten angegebenen Werte sind von Wertheim aus den Tonhöhen abgeleitet worden.

Für die verschiedenen Befestigungsweisen fand Chladni ganz der Theorie entsprechende Tonfolgen; der an einem Ende feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{2n-1}{4l}\sqrt{\frac{E}{s}}$$

die ungeradzahligen Töne 1, 3, 5, 7, 9; der an beiden Enden freie oder feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{s}}$$

als Grundton die nächsthöhere Oktave des an einem Ende festen Stabes und weiter dessen harmonische Obertöne, 2, 3, 4.

Die Klänge longitudinal schwingender Stäbe werden in der Musik nicht gebraucht.

Für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir (§ 143) allgemein, mit Beibehaltung der frühern Zeichen, den Ausdruck

$$N = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{gP}{qs}}.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefern Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefern Saiten, um ihr Gewicht zu vergrößern, mit einem feinen Drahte umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einem drehbaren Wirbel eingesteckt sind, durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo außerdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Teiles umgekehrt proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in n schwingende Teile. Die Versuche von Chladni[1]) und G. Weber[2]) geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäß, wobei Weber bis zur Teilung der Saite in $\frac{1}{32}$ ging.

Weil man vielfach die Tonreihe nach den Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt, man nennt die Terz anstatt $\frac{5}{4}$ dann $\frac{4}{5}$, die Quart $\frac{3}{4}$, die Quint $\frac{2}{3}$ usf.

Die Klänge der Saiteninstrumente können nach den Untersuchungen des § 148 äußerst verschieden sein, da je nach der Art der Erregung der Saiten die Zahl und Stärke der zu dem Grundton hinzutretenden Obertöne sehr verschieden sein kann; auf dieser Verschiedenheit beruht die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die Saiteninstrumente können wir in drei Gruppen teilen, in solche, deren Töne durch Zupfen der Saiten erregt werden, Guitarre, Zither, Harfe, solche, deren Töne durch Schlagen erregt werden, das Klavier, und solche, deren Klänge durch das Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat von Helmholtz[3]) die Klänge ausführlich untersucht; wir begnügen uns hier damit, als Ergänzung zu den Untersuchungen des § 148, die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Wir erwähnten § 148 schon, daß die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklange vorhandenen Obertöne wesentlich abhänge von der Art und der Stelle der Erregung und der Dicke, Steifigkeit und Elastizität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus von Helmholtz' Untersuchungen, daß die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Diskontinuitäten die Art der Bewegung bewirkt. Wird die Saite gezupft, so entfernt der Finger, ehe er sie losläßt, die Saite in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage; es entsteht eine Diskontinuität nur dadurch, daß die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift, als wenn sie wie bei der Guitarre und Harfe mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reißens auch einen schärfern Klang mit einer größern Menge klimpernder hoher Obertöne, als im letztern: die Intensität des Grundtones ist aber immer größer als die jedes Obertones.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der von dem Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige Teil der Saite noch in Ruhe, er gerät erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der

1) *Chladni,* Akustik. p. 67
2) *Bindseil,* Akustik. p. 110.
3) *von Helmholtz,* Tonempfindungen p. 128 ff 536.

Saite die schärfste Diskontinuität, und deshalb viele und hohe Obertöne, deren Intensität zum Teil die des Grundtones übertrifft.

Ist der schlagende Hammer weich und elastisch, so hat die Bewegung Zeit, auf der Saite sich auszubreiten, ehe der Hammer wieder zurückspringt, und zugleich wird durch den Anschlag eines solchen Hammers der geschlagene Teil der Saite nicht ruckweise in Bewegung gesetzt, sondern seine Geschwindigkeit wächst allmählich und stetig mit dem Drucke des Hammers. Die Diskontinuität der Bewegung ist deshalb viel kleiner, und dem entsprechend ist die Stärke der Obertöne gegen jene des Grundtones viel geringer.

Mit scharfem Metall gerissen oder geschlagen ist deshalb der Klang der Saite schärfer und leerer, indem die mit Leerheit bezeichnete Eigentümlichkeit des Klanges eben in der verhältnismäßigen Stärke der Obertöne gegen den Grundton begründet ist. Ist der Grundton kräftig gegen die Obertöne und sind besonders die höhern unpaarigen Töne schwach, so ist der Klang voll und harmonisch.

Bei den Klavieren wird, um dies zu erreichen, der Hammer mit einer dicken Lage stark gepreßten und dadurch elastisch gewordenen Filzes bedeckt und gleichzeitig werden die für die tiefern Töne bestimmten Hämmer schwerer gemacht als die für die höhern Oktaven, damit erstere länger an der Saite haften als letztere. Denn einmal ist das längere Haften des Hammers in den tiefern Lagen zur relativen Verstärkung des Grundtones deshalb notwendig, weil die Schwingungsdauer desselben größer ist als in der höhern, dann aber auch, weil bei der stärkern Spannung der Saiten in den höhern Lagen die höhern Obertöne sich doch nicht so stark ausbilden.

Um bei den Klavieren die Klänge nicht allein voll, sondern auch weich zu machen, ist die Anschlagsstelle der Saite $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{9}$ von dem einen Ende. Damit fallen die Töne 7 und 9, die ersten, welche nicht in den Dreiklang hineingehören, und welche mit den andern keine konsonierenden Intervalle haben, aus der Reihe der Obertöne fort. Es treten nur die ersten sechs Töne auf, der fünfte und sechste indes schon sehr schwach.

Folgende kleine Tabelle gibt die Intensität der Partialtöne, von Helmholtz berechnet, wenn in $\frac{1}{7}$ der Saitenlänge der Ton in der über jeder Spalte angegebenen Weise erregt wird.

Tabelle der Intensität der Partialtöne bei Saiten.

Ordnungszahl des Partialtones	Anschlag durch Reißen	Anschlag durch einen elastischen Hammer, dessen Berührung dauert in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Grundtones			Anschlag mit einem ganz harten Hammer
		$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{14}$	
1	100	100	100	100	100
2	81,2	99,7	189,4	249	324,7
3	56,1	8,9	100,9	242,9	504,9
4	31,6	2,3	17,3	118,9	504,9
5	13,0	1,2	0,0	26,1	324,7
6	2,8	0,01	0,5	1,3	100,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Für das Klavier gelten die drei mittleren Spalten, und von Helmholtz fand, daß die mit $\frac{3}{7}$ überschriebene Spalte in der Gegend des c_2 und noch höher hinauf gilt, daß indes in den viel höhern Lagen die Obertöne noch schwächer werden. In der eingestrichenen Oktave etwa gilt die Spalte $\frac{3}{10}$, in dieser ist also der erste Oberton schon stärker als der Grundton; in den tiefern Lagen, der kleinen, großen und der Kontraoktave gilt die mit $\frac{3}{14}$ überschriebene Spalte. Die Intensitätsverhältnisse können indes, je nach der Güte und richtigen Stellung der Hämmer beträchtlich schwanken.

Daß in den höhern Lagen die Obertöne so sehr weit zurücktreten, das hat seinen Grund in der stärkern Spannung und der Steifigkeit der Klaviersaiten, denn bei steifen Saiten von einiger Dicke treten dieselben nur sehr schwach mehr hervor, da diese Saiten sich nicht so leicht in so viele Unterabteilungen zerlegen, wie sie zu den hohen Obertönen erforderlich sind.

Daß der Klang der gestrichenen Saiten ein ganz anderer sein muß als jener der geschlagenen, ergibt sich aus den ausführlichen Besprechungen der Schwingungsform der Saiten, § 148, unmittelbar. Wie wir sahen, ist die Bewegung der Saite eine solche mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sowohl wenn sie dem streichenden Bogen folgt, als wenn sie von ihm losgelassen zurückgeht. Die Theorie von Fourier ergibt, daß diese Schwingungsform der Saite stattfindet, wenn in ihr die ganze Reihe der Obertöne vorhanden ist, und wenn die Schwingungsamplituden der Obertöne dem Quadrate ihrer Ordnungszahl entsprechend abnehmen. In dem Klange der gestrichenen Saiten ist demnach der Grundton stärker als jeder der Obertöne, und die Obertöne nehmen mit steigender Höhe an Stärke ab; deshalb ist der Klang der Streichinstrumente auch ein viel vollerer als der des Klaviers. Gleichzeitig ist in der gleichen Tonlage die Stärke der höhern Obertöne, bei den meisten Tönen der Violine schon von dem dritten an, beim Violoncell vom fünften an relativ größer als bei dem Klavier, und deshalb ist der vollere Ton gleichzeitig der schärfere.

Wenn der Bogen nur eine unendlich kleine Breite hätte, so würde die Saite beim Anstreichen alle Töne geben mit Ausnahme derjenigen, welche an der Streichstelle einen Knotenpunkt haben, da der Bogen eine gewisse Breite hat, so läßt sich die Zahl der voll auftretenden Obertöne nicht so unmittelbar angeben. Nach Ritz[2]) erhält man auf der freien Saite, wenn man an der gewöhnlichen Streichstelle in $\frac{1}{10}$ der Saitenlänge streicht, die ersten sieben Töne. Will man noch den achten Oberton erzielen, so muß man etwas näher am Steg, etwa in $\frac{1}{11}$ der Saitenlänge streichen; streicht man noch näher am Steg, so verliert der Grundton an Stärke und der Klang wird schärfer, umgekehrt wird der Klang ärmer an Obertönen und damit sanfter, wenn man den Bogen dem Griffbrett nähert.

Wird die Saite durch den Fingerdruck verkürzt, so entstehen bei gleicher Höhe des Klanges weniger Obertöne, gleich hohe Klänge auf verschiedenen Saiten gespielt haben demnach eine verschiedene Zusammensetzung, der auf der höhern, also noch längern Saite angestrichene Klang ist der reichere.

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 142 u. 575.

2) *Ritz*, Untersuchungen über die Zusammensetzung der Klänge der Streichinstrumente. München 1883. Beiblätter zu den Annalen d. Physik **9**. p. 91. 1885.

Auf den Klang der Streichinstrumente hat die Art des Streichens einen großen Einfluß; jede Störung in der Bogenführung hat eine Diskontinuität in den Schwingungen und damit ein kratzendes Geräusch zur Folge; deshalb hängt bei keinem Instrument die Fülle und Reinheit des Klanges so sehr von der Geschicklichkeit des Spielers ab, als geraden bei den Streichinstrumenten.

Alle Saiteninstrumente bedürfen, um einen lauten und schönen Klang zu geben, eines Resonanzbodens, von dessen Güte hängt daher der Klang der Saiteninstrumente wesentlich ab, ein Umstand, auf den wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

Für die transversalen Schwingungen elastischer Stäbe erhielten wir § 144 den Ausdruck

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Die Schwingungszahlen verhalten sich demnach bei zylindrischen Stäben direkt wie die Radien und umgekehrt wie die Quadrate der Längen; bei Stäben von rechteckigem Querschnitt tritt an die Stelle von r die durch $\sqrt{3}$ dividierte Dicke der Stäbe parallel der Schwingungsrichtung, die Breite der Stäbe hat auf die Schwingungszahl keinen Einfluß.

Die Versuche von Savart über die absoluten Schwingungszahlen haben wir bereits § 144 angegeben, die Schwingungszahlen wurden durch die Höhen der gehörten Töne bestimmt.

Chladni[1]) hat die Tonhöhen der verschiedenen Töne bestimmt, wenn ein Stab in den verschiedenen Befestigungsweisen benutzt wurde, welche wir § 144 kennen lernten. Die Resultate Chladnis, welche vor Entwicklung der Theorie der schwingenden Stäbe erhalten wurden, entsprechen der Theorie so genau, wie es bei der Schwierigkeit die Töne in den höhern Lagen genau zu bestimmen nur möglich ist.

Wir geben die Resultate Chladnis in folgender Zusammenstellung, indem wir den tiefsten Ton, den der Stab gibt, wenn er am einen Ende fest, am andern frei ist, als Kontra-$c = c_{-2}$ setzen, zusammengestellt mit der Schwingungszahl der einzelnen Befestigungsweisen nach § 144.

1. Ein Ende des Stabes ist fest, das andere frei; Chladni gibt folgende Töne an:

	c_{-2}	*gis*	d_2	d_3 —	b_3	f_4 +
Schwingungszahl	1	6,25	18	36 —	57,6	85,3 +
nach der Theorie	1	6,26	17,54	34,38	56,84	84,91.

2. Beide Enden des Stabes sind frei oder ganz fest; Chladni fand

	gis	d_2	d_3 —	b_3	f_4 +
Schwingungszahl	6,25	18	36 —	57,6	85,3 +
nach der Theorie	6,26	17,54	34,38	56,84	84,91.

3. Das eine Ende des Stabes ist aufgelegt, das andere Ende ganz frei oder fest.

Beobachtet	*d*	b_1	h_2 —	gis_3	dis_4
Schwingungszahl	4,5	14,9	30 —	50	76,8
nach der Theorie	4,38	14,21	29,50	50,7	74,22.

1) *Chladni*, Akustik. p. 98.

4. Beide Enden des Stabes sind aufgelegt.

Beobachtet	fis_{-1}	fis_1	gis_2	fis_3	d_4
Schwingungszahl	2,84	11,36	25,00	45,44	72
nach der Theorie	2,807	11,23	25,26	44,91	70,57.

Die Klänge elastischer Stäbe werden selten in der Musik angewandt; es gibt außer den später zu betrachtenden Zungenpfeifen nur einige wenige in der Orchestermusik nicht gebräuchliche Instrumente, deren Töne durch transversale Schwingungen elastischer Stäbe erzeugt werden. Die Unbrauchbarkeit dieser Klänge für die Bildung harmonischer Klänge ergibt sich daraus, daß die Obertöne fast sämtlich nicht der harmonischen Reihe des Grundtones angehören, sie müssen deshalb die Akkorde, in denen sie gebraucht werden, dissonierend machen.

Angewandt werden die Schwingungen an einem Ende fester, am andern freier Stäbe in der Eisenvioline, welche aus eisernen Stiften besteht, die in einem halbkreisförmigen Steg auf einem Resonanzboden eingeschlagen sind und mit dem Violinbogen gestrichen werden. An beiden Enden freie Stäbe läßt man in der Strohfidel schwingen. Dieselbe besteht aus Stäben oder schmalen Streifen von Holz, Glas oder Stahl, die an ihren beiden Schwingungsknoten, welche bei dem tiefsten Tone auftreten, auf zusammengedrehtes Stroh oder andere weiche Unterlagen gelegt und mittels zweier Klöppel angeschlagen werden. Man erhält in beiden Fällen wesentlich nur den tiefsten Ton. In der Mozartschen Oper „Die Zauberflöte" wird gewöhnlich eine Strohfidel als Glockenspiel des Papageno angewandt.[1])

Die wichtigste Verwendung finden die Schwingungen von Stäben in den Stimmgabeln. Die Stimmgabel schwingt mit jeder Zinke wie ein an seinem einen Ende fester, an seinem andern Ende freier Stab. Bei nicht zu kurzen Zinken kann man nach den Untersuchungen von Mercadier[2]) und einer von Röber[3]) zu denselben gemachten Bemerkung die Schwingungszahlen der Stimmgabeln nach der Gleichung für die Schwingungen der an einem Ende festen, am andern Ende freien schwingenden Stäbe berechnen, wenn als Länge der Zinken die Projektion derselben auf die Achse der Gabel, die Verlängerung des Stiles genommen wird. Nach der Formel von Seebeck ist in dem Falle die Schwingungszahl

$$N = \frac{(0,59686)^2 \pi}{4 \cdot \sqrt{3}} \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

wenn h die Dicke der Gabel parallel der Schwingungsrichtung bedeutet und E und s im absoluten Maßsystem gegeben sind. Setzt man nach Wertheim

$$\sqrt{\frac{E}{s}} = 498500^{\text{cm}},$$

so wird, wenn die Dimensionen der Gabel in Zentimetern gegeben sind,

$$N = 80528 \frac{h}{l^2} \cdot$$

1) *Chladni*, Akustik. p. 98.

2) *Mercadier*, Comptes Rendus. 79. p. 1001 u. 1079. 1874.

3) *Röber* in dem Referate über die Arbeit von *Mercadier* in Fortschritte der Physik im Jahr 1874. p. 387.

Ganz genaue Werte kann man hier nicht erwarten, da die Elastizität und Dichtigkeit des zu den Gabeln verwandten Stahls nicht immer die gleichen sind.

Die Stimmgabeln geben in der Nähe der Enden der Zinken angestrichen wesentlich nur den Grundton, sie sind deshalb sehr geeignet, einfache Töne zu erzeugen; Helmholtz hat dieselben, verbunden mit einem Resonator, deshalb vorzugsweise zu diesem Zwecke verwandt, besonders weil man in dieser Weise am leichtesten alle Nebengeräusche vermeidet.

Die Töne schwingender Platten und Glocken finden in der Musik ebenfalls nur wenig Anwendung; die Töne schwingender Platten werden neuerdings in der Militärmusik gebraucht, indem eine Anzahl kleiner Stahlplatten auf einem Gestell in ihrer Mitte befestigt, mit einem elastischen Hammer geschlagen werden. Die Töne gespannter Membranen finden Anwendung bei den Trommeln und Pauken. Die Membranen werden auf größere Hohlräume gespannt, wie bei der Pauke über dem Kessel, teils um den Ton lauter zu machen, teils um das Auftreten der unharmonischen Obertöne zu verhindern. Damit erhält der Paukenklang das Dumpfe eines einfachen Tones.

Die Töne von Platten hat Chladni[1]) sehr ausführlich untersucht, er fand, daß jedem andern Tone eine andere Teilungsart der Platte entspricht, nicht aber jeder andern Teilungsart auch ein anderer Ton; oder zwei verschiedene Töne geben nie dieselbe Klangfigur, einem Tone können aber mehrere Klangfiguren entsprechen.

Speziellere Resultate hier anzugeben ist nicht erforderlich, da wir bereits § 145 für kreisförmige Platten die Schwingungszahlen angegeben und mit der Theorie von Kirchhoff verglichen haben; die Schwingungszahlen sind aus Chladnis und Strehlkes Beobachtungen der Töne, die bei den verschiedenen Klangfiguren entstehen, abgeleitet. So fand Chladni z. B. bei der Figur mit zwei Durchmessern den tiefsten Ton, trat ein Kreis hinzu, so stieg der Ton auf die Quint der zweiten Oktave mit der Schwingungszahl 6, bei zwei Kreisen auf das *b* der folgenden Oktave mit der Schwingungszahl 14,4 usf.

Bei quadratischen Scheiben sind die Töne andere; Chladni gibt ebenfalls eine vollständige Tabelle derselben. Der tiefste Ton entspricht dem auf den Quadratseiten senkrechten Kreuz, das diagonale Kreuz gibt dessen Quint usf.

Melde[2]) konstruierte quadratische Platten, die in der Mitte auf einem Stiel befestigt waren, als Ersatz für Stimmgabeln mit hohen Schwingungszahlen. Sind die Töne so hoch, daß sie nicht mehr gehört werden, so kann man mit Sandfiguren stets ohne Schwierigkeit das Schwingen beweisen. Am besten werden solche Platten durch Bestreichen mit einem feuchten Glasstabe nach der Antolikschen[3]) Methode zum Schwingen gebracht.

Die Töne drehender Schwingungen werden akustisch nie verwertet, ihre Verwendung zur Bestimmung des Wertes von μ haben wir schon § 146 erwähnt; die Bestimmung der Schwingungszahl der drehenden Schwingungen

1) *Chladni,* Akustik. p. 98.
2) *Melde,* Wied. Ann. 66. p. 767. 1898.
3) Man sehe *Melde,* Wied. Ann. 51. p. 682. 1894.

geschah durch Vergleichung des Torsionstones mit dem Longitudinalton; Chladni schätzte den Torsionston eine Quinte, Savart eine Sexte tiefer, Wertheim bestimmte ihn eine kleine Sexte tiefer, also zwischen Chladni und Savart.

§ 166.

Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper. Eine Art Tonerzeugung durch Schwingungen luftförmiger oder flüssiger Körper haben wir bei Betrachtung der Sirene kennen gelernt. Von viel höherer Bedeutung sind aber die Töne, welche durch stehende Schwingungen von Luftsäulen erregt werden. Die größte Zahl der Blasinstrumente und die meisten Register der Orgel erzeugen ihre Töne auf diese Weise. Als Typus der Blasinstrumente können wir die Orgelpfeifen betrachten und an diesen die Bildung und die Reihe der Töne untersuchen.

Fig. 301

Fig. 302

Die Orgelpfeifen zerfallen in zwei Klassen, die Labialpfeifen und die Zungenpfeifen. In ersteren wird die schwingende Bewegung nur durch einen Luftstrom bewirkt ohne Zuhilfenahme eines festen Körpers, der Ton ist daher nur von der schwingenden Luftsäule abhängig; letztere sind eine Kombination elastischer Streifen und schwingender Luftsäulen, ihr Ton wird durch beide Schwingungsarten bedingt; wir werden sie demnächst besonders betrachten.

Die Labialpfeifen (Fig. 301 und 302) bestehen aus einem Fuße *a*, welcher auf die Mündung eines Windkastens gesetzt wird und durch welchen der Luftstrom in den Raum *b* unter der Bodenplatte der Röhre eintritt. Die Bodenplatte läßt an der Seitenwand einen Spalt, durch welchen der Luftstrom austritt, um sich an der obern Lippe *l*, welche die in der Seitenwand gelassene Mundspalte *lm* nach oben begrenzt, zu teilen. Durch den teilweise in die Röhre dringenden Luftstrom wird die in der Röhre zunächst über der Mundspalte befindliche Luft nach oben getrieben, und verdichtet. Diese Verdichtung bewirkt, daß die Luft nicht mehr in die Röhre eindringt, sondern nur vorbeistreicht, dadurch dehnt sich die vorher verdichtete Luft wieder aus und kehrt nach unten zurück, worauf dann neue Luft in die Röhre dringt und eine neue Verdichtung veranlaßt. Die Luft erhält also zunächst an der Mundspalte eine hin und her gehende Bewegung. Diese pflanzt sich in der Luftsäule der Röhre fort und wird an der obern Grenze reflektiert. Durch diese in entgegengesetzter Richtung in der Röhre sich fortpflanzenden Bewegungen wird die Luftsäule der Röhre in stehende Schwingungen versetzt und gibt einen Ton, der ver-

schieden ist nach der Länge der Röhre und nach der Art des Verschlusses an der obern Grenze.[1])

Die Schwingungen der Luft in der Röhre R sind longitudinale Schwingungen; ist die Pfeife gedeckt (Fig. 302), so tritt an der obern Grenze eine Reflexion derselben mit Änderung des Vorzeichens ein, der ankommende Wellenberg wird als Wellental reflektiert und das dem ankommenden Berge folgende Wellental als Wellenberg. Gerade wie bei den longitudinal schwingenden, an einem Ende festen, am andern Ende freien Stäben wird daher die ganze Luftsäule zugleich hin und her schwingen können, wenn die Impulse an der Lippe sich so folgen oder die Schwingungsdauer T so ist, daß der Wellenberg bis zur Wand sich fortgepflanzt hat, während die Luftschicht bei l $\frac{1}{4}$ Schwingung zurückgelegt hat. Es entsteht dann nach § 150 eine stehende Welle, deren Länge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Da die stehende Welle halb so lang ist als eine gleichzeitig schwingende fortschreitende Welle, so ist die Länge der Pfeife gleich einem Viertel der gleichzeitig schwingenden fortschreitenden Welle. Bezeichnen wir daher die Länge der Röhre mit l, so wird die Schwingungsdauer dieser Welle

$$T = 4\,l\sqrt{\frac{d}{e}}\,,$$

oder wenn wir nach § 149 die Werte für d und e einführen,

$$T = 4\,l\sqrt{\frac{s}{H\sigma g k}}\,,$$

worin H die Höhe des Barometers in Zentimetern, σ die Dichtigkeit des Quecksilbers, s die dem Drucke $H\sigma g$ entsprechende Dichtigkeit der Luft und $k = 1{,}405$ den konstanten Koeffizienten bedeutet, mit dem wir den Quotienten $\frac{e}{d}$ multiplizieren mußten, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung zu erhalten.

Für die Schwingungszahl erhalten wir demnach

$$N = \frac{1}{4\,l}\sqrt{\frac{H\sigma g}{s}\,k} = \frac{c}{4\,l}\,.$$

Daß der Schwingungsvorgang in einer gedeckten Pfeife der hier geschilderte ist, hat Raps[2]) in sehr eleganter Weise durch manometrische Beobachtungen der Druckschwankungen im Knoten, also in der Nähe des geschlossenen Endes der Pfeife gezeigt.

Die Druckschwankungen in den Knoten zu messen, das heißt den Maximal- und Minimaldruck anzugeben, hat zuerst Kundt[3]) versucht. So lange die Luft gegen den Deckel der Pfeife hin schwingt, tritt am Deckel

1) Über die Erregung der Schwingungen in Orgelpfeifen sehe man *Sonreck*, Poggend. Ann. **158**. 1876; *Strouhal,* Wiedem. Ann. **5**. 1878; *Brockmann*, Wiedem. Ann. **31**. p. 78. 1888; *V. Hensen,* Ann. d. Phys. **2**. p. 719. 1900 u. **4**. p. 41. 1901: *Wilh. Friedrich,* Dissert. Rostock 1901 u. Ann. d. Phys. **7**. p. 97. 1902.

2) *Raps,* Wiedem. Ann. **36**. p. 273. 1889.

3) *Kundt,* Poggend. Ann. **134**. p. 563. 1868. Nach einer optischen in der Lehre vom Licht zu besprechenden Methode haben *Töpler* und *Boltzmann*, Poggend. Ann. **141**. p. 321. 1870, ebenfalls die Schwankungen der Dichtigkeit in Orgelpfeifen gemessen.

eine Verdichtung der Luft ein, welche ihr Maximum erreicht, wenn die Luftteilchen ihre Bewegung umkehren. Von da ab verdünnt sich die Luft und zwar so lange als die schwingenden Luftteilchen sich von dem Deckel entfernen. Die Verdünnung erreicht ihren höchsten Grad, wenn die Luftteilchen wieder den Sinn ihrer Bewegung ändern.

Kundt brachte an den Enden einer gedeckten Pfeife zwei sehr sorgfältig gearbeitete Blasenventile an, von denen sich das eine nur nach außen, das andere nur nach dem Innern der Pfeife öffnen konnte. Die Ventile bestehen aus einer 1^{mm} breiten und passend langen in ein Metallblech eingeschnittenen Spalte, über welche eine 4^{mm} breite, möglichst dünne, leicht bewegliche Membran gespannt ist, die an beiden Enden auf der Platte festgeklebt ist. Die Membran hebt sich, dem stärkern Drucke folgend, nach der Seite des geringern Drucks hin. Um ein solches Ventil etwa an eine gedeckte Orgelpfeife anzubringen, kann man direkt den Deckel der Pfeife benutzen. Man versieht das Ende einer etwa gläsernen Orgelpfeife mit einer oben abgeschliffenen Metallfassung, welche auf der äußern Seite eine Schraube eingeschnitten hat. Auf den Rand der Fassung legt man die Ventilplatte und auf diese eine mit einem schmalen vorstehenden Rande versehene Messingplatte, in welche ein Wassermanometer eingekittet ist. Mit einer in die Schraube der Fassung passenden Überwurfsschraube werden die Platten luftdicht aneinander geschraubt. Ist das Ventil so gelegt, daß seine Membran von der Pfeife aus nach außen gerichtet ist, so öffnet es sich, wenn der Druck in der Pfeife größer ist als außen. Das Wassermanometer wird also so lange steigen, bis der Druck oberhalb des Ventils gleich ist dem Maximaldruck in der Pfeife. Wird die Ventilplatte umgelegt, so daß die Membran im Innern der Pfeife ist, so öffnet sich das Ventil, so lange der Druck im Innern der Pfeife kleiner ist, als außerhalb; auf der dem Ventil zugekehrten Seite des Manometers wird demnach die Luft verdünnt, das Manometer steigt nach Innen und die Differenz der Wassersäulen in den beiden Schenkeln des Manometers gibt den Überschuß des äußern Luftdruckes über die Verdünnung in den Knoten der schwingenden Luftsäule. Kundt konnte auf diese Weise erkennen, daß die Druckschwankungen in Knoten 20—25^{cm} Wasser, also $\frac{1}{50}$—$\frac{1}{40}$ Atmosphären war.

Raps hat das Ventil in anderer Weise hergestellt und so angeordnet, daß er die Druckänderung in den Knoten in allen ihren Phasen verfolgen und aufzeichnen konnte. Das Ventil bestand aus zwei sorgfältig polierten Platten von glashartem Stahl, von denen die eine fest vor der Durchbohrung der Wand der Pfeife, in welcher die Schwingungen beobachtet werden sollten, angebracht war. Beide Platten hatten in der Mitte Spalten eingefraist von $0,75^{mm}$ Breite und 4^{mm} Länge. Die zweite Platte war an einer Stimmgabel befestigt, so daß ihre Ebene der Schwingungsebene der Gabel parallel war. Die beiden Platten konnten einander so gegenübergestellt und genähert werden, daß die bewegliche Platte als Schieber an der festen auf- und niederging und daß die beiden Platten einen luftdichten Verschluß der Orgelpfeife bildeten, außer in der kleinen Zeit, während welcher bei Schwingungen der Stimmgabel der Spalt der beweglichen Platte an dem ihm parallel stehenden Spalte der festen Platte vorüber passierte. Zur vollständigen Abdichtung der Pfeife wurde zwischen die beiden Platten ein Tropfen Steinöl gebracht.

Von der Rückseite der an der Stimmgabel befestigten Platte führte eine zunächst mit der Stimmgabel bis in der Nähe deren Stil festverbundene Röhre zu den manometrischen Apparaten, einem Wassermanometer oder einem Membranmanometer. Letzteres bestand aus einer über einen kleinen Hohlraum, welcher mit dem Ventil in Verbindung stand, gespannten feinen Membran, auf deren Mitte ein Metallplättchen aufgeklebt war. Auf diesem Plättchen stand eine feine Stahlspitze, welche an einem Hebel angesetzt war, der seine Drehungsachse in der Schneide eines Stahlprismas hatte, das in einem passenden neben der Membran befestigten Lager lag. Wenn der Druck in dem Hohlraum unter der Membran zunimmt, so wird der Stift gehoben und der Hebel in dem einen Sinne gedreht, sinkt der Druck, so dreht sich der Hebel im entgegengesetzten Sinne. Die Größe der Drehung wurde durch Spiegelablesung bestimmt, indem an dem Stahlprisma ein kleiner Spiegel angebracht war, so daß die Spiegelebene vertikal und parallel der Achse der Drehung war. Ebenso aber konnte auch die Bewegung der Membran aufgezeichnet werden, indem an der Achse ein leichter aus gespaltenem Riet verfertigter langer Hebel befestigt wurde, dessen Spitze die Bewegung der Membran auf einer berußten rotierenden Trommel aufzeichnete. Zu dem Zwecke war auf die Trommel berußtes photographisches Papier gespannt, durch Einwirkung des Lichtes auf diejenigen Stellen, von denen der Schreibstift den Ruß weggenommen hatte, wurden die von demselben gezogenen Linien fixiert.

Welcher Druck einer bestimmten Hebung der Membran entsprach, wurde empirisch durch Vergleichung mit dem Wassermanometer festgestellt.

Auf die Details des äußerst delikaten, mit großem Geschick hergestellten Apparates können wir hier nicht eingehen, wir verweisen deswegen auf die Abhandlung von Raps.

Die etwas regulierbare Stimmgabel, welche den Schieber bewegte, machte halb so viel Schwingungen als die Luft der Pfeife, und der Schieber war so gestellt, daß in der Gleichgewichtslage die Spalte sich deckten. War die Gabel in Schwingung, so gingen demnach die Spalte jedesmal aneinander vorüber, wenn die Luft der Pfeife wieder eine ganze Schwingung gemacht hatte. Die Öffnung des Ventils dauerte so lange, als der bewegliche Schieber zwei Spaltbreiten durchlief; bei den großen Amplituden, welche Raps der Stimmgabel gab, war die Dauer der Öffnung $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ der Dauer der Luftschwingung.

Nehmen wir zunächst an, die Schwingungen der Stimmgabel seien genau halb so zahlreich wie die Schwingungen in der Pfeife, und die Spalte deckten sich genau in dem Momente, in welchem im Knoten das Maximum der Dichte ist; es wird dann jedesmal, wenn die Luft im Knoten das Maximum der Dichte hat, der Knoten mit dem Manometer in Verbindung gesetzt, das Manometer zeigt das Maximum der Dichte an. Würden dagegen die Spalte jedesmal aneinander vorüber gehen, wenn im Knoten das Minimum der Dichte ist, so würde aus dem Manometer Luft in die Pfeife entweichen, das Manometer zeigte das Minimum der Dichte.

Gibt man dagegen der Stimmgabel eine Schwingungszahl, welche ein klein wenig größer ist als die halbe Schwingungszahl der Pfeife, und gehen wir wieder davon aus, daß bei dem ersten Öffnen der Spalte im Manometer gerade der Maximaldruck entsteht, so werden die Spalte zum

zweiten mal geöffnet, wenn im Knoten die Dichtigkeit schon ein wenig abgenommen hat, der Druck im Manometer wird diese kleinere Dichtigkeit zeigen; bei der dritten Öffnung der Spalte ist die Dichtigkeit wieder etwas kleiner usf. bis zu dem Augenblicke, wo die Gabel ein Viertel ihrer Schwingung zurückgeblieben ist, die Öffnung der Spalte gerade eintritt, wenn im Knoten das Minimum der Dichte ist. Bleibt von da ab die Stimmgabel immer im selben Takte zurück, so öffnen sich die Spalte wieder bei wachsender Dichte, und ist die Gabel eine halbe Gabelschwingung gegen die Schwingungen der Pfeife zurück, so öffnen sich die Spalte, wenn in dem Knoten das Maximum der Dichte ist. Kurz man sieht, daß innerhalb der Zeit, in welcher die Gabel um eine halbe ihrer Schwingungen gegen die Schwingungen der Pfeife zurückbleibt, in dem Manometer alle die Dichtigkeiten nach und nach auftreten, die sich im Knoten der Pfeife bei jeder Schwingung der Luft wiederholen. Innerhalb dieser Zeit schreibt also der Hebel des Membranmanometers eine Welle, welche genau die Dichtigkeitsschwankungen im Knoten darstellt; die Länge der Welle hängt bei gegebener Geschwindigkeit der berußten Walze nur von der Zeit ab, in welcher die Anzahl der halben Schwingungen der Gabel um eine größer ist als die Anzahl der ganzen Schwingungen in der Pfeife. Die Form der Welle gibt genau das Schwingungsgesetz der Luft in der Pfeife. Das Maximum der Dichte tritt ein, wenn in dem nächsten Bauche die Luft den größten Abstand von der Gleichgewichtslage gegen den Knoten hin erreicht hat; schwingt die Luft zurück, so nimmt die Dichtigkeit im Knoten genau in dem Maße ab, wie die Luftteilchen gegen die Gleichgewichtslage zurück und darüber hinaus zu der andern äußersten Lage hinüber gehen, so daß das Minimum im Knoten nach einer halben Schwingung der Luft dem Maximum folgt, ebenso geht im Laufe einer halben Schwingung das Minimum wieder in das Maximum über

In dieser Weise fand Raps zunächst, daß in einer gedeckten Pfeife von 360^{mm} Länge und $45 \cdot 65\,mm^2$ Querschnitt, in welcher die Mundöffnung 22^{mm} Höhe hatte, welche einen Ton von 184 Schwingungen gab, die Druckunterschiede im Knoten wesentlich von der Stärke des Anblasestroms abhängig sind. Als der Druck der Luft in der Windlade um 44^{mm} Wasserhöhe mehr als der der Atmosphäre betrug, zeigte sich im Knoten bei dem Maximum ein um 40^{mm} höherer, bei dem Minimum ein um $39{,}75^{mm}$ geringerer Druck als der Druck der Atmosphäre. Als der Druck des Anblasestromes auf 308^{mm} gesteigert wurde, war im Knoten der Druck im Maximum $182{,}4^{mm}$ Wasserdruck größer, im Minimum $177{,}3^{mm}$ kleiner als der der Atmosphäre. Da der Druck der Atmosphäre im Millimeter Wasser gleich 10333^{mm} beträgt, so war die Druckdifferenz im ersten Falle

$$\frac{79{,}75}{10\,333} = 0{,}007\,71 \text{ Atm., im zweiten Falle } \frac{359{,}7}{10\,333} = 0{,}034\,81 \text{ Atm}$$

Die dieser Druckdifferenz entsprechende Dichtigkeitsdifferenz, die Dichte der Luft unter dem Drucke der Atmosphäre gleich eins gesetzt, erhalten wir, indem wir die Druckdifferenz durch den Faktor $k = 1{,}405$ dividieren, da nach dem frühern wegen der mit der Verdichtung stattfindenden Erwärmung und der Abkühlung bei der Verdünnung die Druckdifferenz größer ist, als sie der Dichtigkeitsdifferenz entspricht.

Die Dichtigkeitsdifferenz wird demnach im ersten Falle 0,005 47, im zweiten Falle 0,024 69, das heißt im ersten Falle ist das Maximum der Dichte 1,002 735 und das Minimum 0,997 265, im zweiten Falle sind die Werte 1,012 345 und 0,987 655.

Diese Zahlen genügen, um die Bewegung in der Pfeife vollständig darzustellen. Rechnen wir die Abstände x vom Knoten aus, so ist die Bewegung einer vom Knoten aus um x entfernten Luftschicht gegeben durch

$$y = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wenn a die Amplitude, λ die Länge einer ganzen Welle und T die Schwingungsdauer ist.

Die Zunahme bezw. Abnahme der Dichtigkeit an der Stelle x zur Zeit t infolge der schwingenden Bewegung erhalten wir durch folgende Erwägung. Ist dx der Abstand zweier Luftschichten in der Gleichgewichtslage, und ist y die Verschiebung der Luftschicht an der betrachteten Stelle, $y + dy$ die Verschiebung der folgenden Schicht, so ist der Abstand der beiden Schichten gleich $dx + dy$. Der Abstand der beiden Schichten ist also im Verhältnis von $dx + dy$ zu dx größer geworden; in diesem Verhältnisse hat somit die Dichtigkeit abgenommen, oder sie ist, wenn wir die Dichte im Ruhezustande gleich eins setzen,

$$\frac{dx}{dx + dy} = \frac{1}{1 + \frac{dy}{dx}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

geworden. Dieselbe wird demnach

$$1 - \frac{dy}{dx} = 1 - a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Im Knoten ist $x = 0$; im Knoten war der Unterschied im Maximum oder Minimum also zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ oder $t = 3\frac{T}{4}$ im ersten Falle gegen die normale Dichte 0,002 735, wir erhalten demnach

$$0{,}002\,735 = a \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Nehmen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich 340000^{mm}, so ist die Wellenlänge für 184 Schwingungen in der Sekunde rund 1850^{mm}, somit wird

$$a = 0{,}805^{\text{mm}}.$$

Da a nach der Gleichung für y die Amplitude im Schwingungsmaximum bedeutet, so würde die Amplitude der Luftteilchen dort $0{,}805^{\text{mm}}$ oder die ganze Bahn der Luftteilchen $1{,}61^{\text{mm}}$ sein. Im zweiten Falle ergibt sich der Wert $a = 3{,}632$, so daß für diesen die Bahn der Luftteilchen $7{,}264^{\text{mm}}$ an der Stelle des Maximums wäre.

Indem Raps weiter die aufgezeichneten Schwingungen genau untersuchte, konnte er an den Wellen bei nicht zu starkem Anblasestrom erkennen, daß sie genau der Sinussoide entsprachen, daß somit der Überschuß der Dichtigkeit im Knoten über die normale durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{2\pi}{\lambda}\sin 2\pi\,\frac{t}{T}$$

dargestellt wurde, also genau der Theorie entsprach.

Da das Labialende der Röhre die Stelle ist, wo die Bewegung erzeugt wird, so kann, da an dem gedeckten Ende immer ein Schwingungsknoten entstehen muß, in der Röhre keine stehende Schwingung bestehen, deren Länge gleich ist der Länge der Röhre, indem dann in jedem Augenblicke die reflektierte Bewegung die neu erregte vernichten würde. Lassen wir durch stärkeres Blasen in dem Fuße der Röhre die Impulse bei m rascher aufeinander folgen, so wird keine stehende Schwingung entstehen können, wenn sich die Bewegung bis zur obern Wand fortgepflanzt hat, während die erste Schicht eine halbe Schwingung zurückgelegt hat, wenn sich also zugleich von der Wand und von dem Labium Wellentäler und Wellenberge in der Röhre fortpflanzen, da dann eine stehende Welle sich bilden würde von der Länge der Röhre, an dem Labium somit ein Schwingungsknoten, ein Ort immerwährender Ruhe entstände.

Folgen sich aber die Impulse so rasch aufeinander, daß die schwingende Bewegung erst dann den Boden der Röhre erreicht hat, wenn die erste Schicht $\frac{3}{4}$ ihrer Schwingung zurückgelegt hat, so daß also zugleich von der festen Wand ein Wellenberg, von dem Labium die zweite Hälfte eines Wellentals sich fortpflanzt, so bilden sich stehende Wellen, deren Länge $\frac{4}{3}$ von der Röhrenlänge betragen, in der Röhre bildet sich $\frac{1}{3}$ der Länge vom Labium entfernt ein Schwingungsknoten und an dem Labium befindet sich die Mitte einer stehenden Welle, ein Schwingungsmaximum. Die Schwingungsdauer dieser Welle wird

$$T = \tfrac{4}{3}\,l\,\frac{1}{c}$$

und die Schwingungszahl

$$N = 3\,\frac{c}{4\,l}.$$

Weiter können Schwingungen in der Röhre stehende werden, deren Wellenlänge $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{9}$ von der Länge der Röhre beträgt, aus denen also durch die Interferenz der eintretenden und der reflektierten Bewegung stehende Wellen von der Länge

$$\tfrac{4}{5}\,l,\ \tfrac{4}{7}\,l,\ \tfrac{4}{9}\,l\ \ldots$$

entstehen. Die Schwingungszahlen dieser Wellen sind

$$N = 5\,\frac{c}{4\,l},\quad 7\,\frac{c}{4\,l},\quad 9\,\frac{c}{4\,l}.$$

oder allgemein, es können sich in der Röhre stehende Wellen bilden mit der Schwingungszahl

$$N = (2\,n - 1)\cdot\frac{c}{4\,l},$$

worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann.

Ist somit der Grundton der Röhre c_{-1}, so sind die Töne, welche wir mit dieser Röhre erhalten können,

$$\begin{matrix} c_{-1} & g & e_1 & b_1 - & d_2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9. \end{matrix}$$

Man kann sich leicht von der annähernden Richtigkeit dieser Folgerungen überzeugen. Denn bläst man eine gedeckte Pfeife nur schwach an, so erhält man den tiefsten Ton, den sie geben kann, bläst man stärker, so erhält man nahe die Quint der nächsthöhern Oktave, weiter nahe die Terz der folgenden Oktave usf., wie es die Entwicklung der Schwingungsgesetze verlangt.

Die Grundtöne, welche verschieden lange Pfeifen geben, hängen von der Länge der Pfeife ab, und zwar sind nach den obigen Rechnungen sowohl, wie nach der Erfahrung die Schwingungszahlen der Länge der Pfeife umgekehrt proportional. Man kann daher leicht durch Herstellen einer Pfeifenreihe von verschiedener Länge sich die ganze Tonleiter mit allen ihren Tönen verschaffen.

Indes findet man, daß in diesem Falle sich die Töne nicht genau umgekehrt, wie die Längen der Pfeifen verhalten, daß je nach der Gestalt und Größe des Mundlochs und des Querschnittes der Pfeife die Töne mehr oder weniger von der Theorie abweichen. Noch deutlicher tritt das hervor, wenn man den Ton theoretisch berechnet, den die Pfeife bei gegebener Länge geben soll. Nach § 149 ist

$$\sqrt{\frac{H\sigma g}{s}\,k} = 331\,80^{\mathrm{cm}} = 331{,}8^{\mathrm{m}},$$

vorausgesetzt, daß die Luft eine Temperatur von 0^0 hat. Für die Temperatur von 20^0 wird der Wert $343{,}74^{\mathrm{m}}$. Wir wollen annehmen, wir beobachten in einem Raum von 20^0 C.

Ist daher die Länge der Röhre in Metern angegeben $= l$, so soll der Ton der Röhre eine Schwingungszahl haben

$$N = \frac{343{,}74}{4\,l}\,.$$

Der Versuch gibt aber stets einen etwas tiefern Ton, dessen Schwingungszahl

$$N = \frac{343{,}74}{4\,(l + x)}\,.$$

Liscovius[1]) hat nachgewiesen, daß unter übrigens gleichen Umständen die Vertiefung des Tones mit der Weite der Röhre zunimmt, und Wertheim[2]) hat gefunden, daß die Größe x bei gleichgearbeitetem Mundstücke dem Durchmesser der Pfeife proportional, bei gleichem Mundstück und gleichem Durchmesser aber von der Länge der Pfeife unabhängig sei. Der Einfluß auf die Tonhöhe ist daher um so größer, je kleiner l ist. Ferner ist von wesentlichem Einflusse Form und Größe des Mundstückes.

Diese Angaben über die Umstände, welche die Größe x beeinflussen, geben uns Aufschluß über die Ursache der Abweichung der beobachteten Töne von der Theorie.

Die theoretische Entwicklung setzt nämlich voraus, daß die ganze untere Schicht zugleich in Vibrationen gerate, und sich die Schwingungen einfach von Schicht zu Schicht fortpflanzen, ferner daß die Pfeife an ihren

1) *Liscovius,* Poggend. Ann. 58. 1843 u. 60. 1843.

2) *Wertheim,* Ann. de chim. et de phys. 23. (3.) 1848. Poggend. Ann. 77. 1842.

untern Ende ganz offen sei. Beides ist nicht der Fall, da der Luftstrom zunächst nur die in der Nähe der Lippe liegenden Teile der nächsten Schicht nach oben hin treibt, und dann erst die entfernteren in Schwingung versetzt, und da andererseits die Mundspalte die Pfeife unten nur teilweise öffnet. Durch letzteren Umstand treten auch am Boden der Pfeife partielle Reflexionen ein, welche bewirken, daß sich nicht gerade am Boden der Pfeife das Schwingungsmaximum bildet und daß deshalb der erste Knoten nicht genau um $\frac{1}{4}L$, wenn wir mit L die Wellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen, von der Mundspalte entfernt ist, sondern um etwas weniger, oder mit anderen Worten, daß die beim Grundton sich bildende Welle nicht genau gleich dem Vierfachen der Pfeifenlänge ist, sondern etwas länger.

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Auffassung lassen sich in mancher Weise geben, zunächst durch Anwendung einer gedeckten Pfeife, welche an Stelle des festen Deckels einen verschiebbaren Stempel hat. Bringt man bei einer solchen Pfeife von der Länge l etwa den vierten Ton, welcher der Schwingungszahl

$$N = 7\frac{c}{4(l+x)}$$

entspricht, hervor, so zerfällt die Luftsäule theoretisch in 3 halbe und $\frac{1}{2}$ Welle, das heißt es bilden sich drei und eine halbe stehende Welle aus. Schiebt man nun den Stempel um zwei Siebentel der Länge $l + x$, also um eine stehende Welle näher zur Mundöffnung, so erhält man eine Pfeife, für welche der dritte Ton genau die gleiche Höhe hat, wie für die Pfeife in ihrer ursprünglichen Länge der vierte Ton; verkürzt man die Pfeife nochmals um $\frac{2}{7}(l+x)$, so ist der zweite Ton dieser Pfeife, und verkürzt man nochmals um $\frac{2}{7}(l+x)$, so ist der Grundton der so verkürzten Pfeife dem frühern Tone gleich. Der Versuch ergibt das in der Tat, ein Beweis, daß die Wellenlänge des Grundtones mehr als das vierfache der Pfeifenlänge ist, daß sich aber die Obertöne in der Pfeife in der normalen Wellenlänge bilden. Die Störung findet also in der Tat nur am Mundstücke statt.[1]

Dulong[2]) wandte dieses Verfahren an, um die Größe x experimentell zu bestimmen; er erzeugte in einer mit Stempel versehenen Pfeife den vierten Ton und schob den Stempel so weit herunter, daß der dritte Ton der verkürzten Pfeife dem vorher gehörten genau gleich wurde; er erhielt in dieser Verschiebung den Wert $l + x$, also die Länge der diesen Ton erzeugenden Welle. Dulong benutzte diese Versuche um die Größe c, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu messen.

Wertheim[3]) wandte zur Messung von x ein anderes Verfahren an. Er nahm zylindrische Pfeifen, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt waren, welche mittelst Schrauben aneinander befestigt werden konnten

1) *Hopkins*, Transactions of the Cambridge philosophical Society 5. 1835. Poggend. Ann. 44. p. 246 u. 603. 1838.

2) *Dulong*, Ann. de chim. et de phys. 41. 1829. Poggend. Ann. 16. p. 438. 1829.

3) *Wertheim*, Ann. de chim. et de phys. 23. (3) p. 434. Poggend. Ann. 77. p. 427 u. 544. 1849.

(Fig. 303). Der Deckel k war mit einem gleichen Schraubengewinde versehen, um jedes Stück der Pfeife gedeckt machen zu können. Auf diese Weise stellte Wertheim Pfeifen her, welche bei genau gleicher Weite und demselben Mundstück verschiedene Längen hatten.

Fig. 303.

Wurde die Pfeife bei einer Länge L_1 zum Tönen gebracht, so hatte der erste Ton die Schwingungszahl

$$N_1 = \frac{c}{4(L_1 + x)};$$

wurde durch Ansatz eines Stückes ihr die Länge L_2 gegeben, so wurde die Schwingungszahl nach Wertheims Annahme

$$N_2 = \frac{c}{4(L_2 + x)}$$

und aus beiden Beobachtungen erhielt man

$$x = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}.$$

Wir geben in folgender Tabelle einige der von Wertheim beobachteten Werte von x, welche die Größe der Berichtigung, ihre Unabhängigkeit von der Länge und die Abhängigkeit von dem Durchmesser der Pfeife zeigen. Die Temperatur der Pfeifen war 11°,5 C.

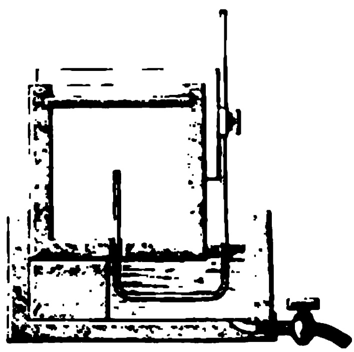
Material der Pfeife	Durchmesser	Länge	Werte von x
Zylindrische Pfeifen von:			
Messing	10 mm	288 mm	17,0 mm
"	20	281	28,5
Glas	20	256	32,0
Blei	20	62	30,7
"	20	120	27,1
"	24	107	34,8
Messing	40	298	60,0
Blei	42	120	68,1
Zink	50	668	66,1

R. König[1]) hat durch direktes Aufsuchen der einzelnen Knoten und Bäuche in einer Pfeife die einzelnen Wellenlängen und die Verkürzung des ersten Viertels am Mundstück gemessen. Er benutzte dazu eine große Orgelpfeife von 2,33 m Länge und quadratischem Querschnitte, die Seite des Quadrats hatte eine Länge von 12 cm; die Pfeife ist offen, wird sie durch Aufsetzen eines Deckels zur gedeckten gemacht, so hat sie 2,28 m Länge. Die Pfeife hat auf der Hinterwand, gegenüber der das Labium enthaltenden Wand, ihrer ganzen Länge nach einen Schlitz von 1 cm Breite.

1) *R. König,* Wiedem. Ann. **13**. p. 569. 1881.

sie liegt horizontal in einem Trog auf zwei Füßen, welche mit Stellschrauben versehen sind zur genauen Horizontallegung der Pfeife. In den Trog wird Wasser gegossen so hoch, daß der Schlitz in der Pfeife dadurch abgeschlossen wird; damit das Holz der Pfeife nicht quillt, ist es, soweit es mit dem Wasser in Berührung kommt, sorgfältig gefirnißt. Neben und unter der Pfeife ist in dem Troge soviel Raum, daß ein dünnes zweimal rechtwinklig gebogenes Messingrohr, wie Fig. 304 zeigt, durch den Schlitz in die Pfeife geschoben werden kann. Dasselbe ist an einem Gestelle befestigt, das aus zwei rechtwinklig zusammengesetzten mit Leder überzogenen Brettchen besteht, und auf der Vorderwand der Pfeife geräuschlos ihrer ganzen Länge hin gleiten kann. Die Vorderwand besteht aus Glas, neben welchem auf dem als Rahmen des Glases dienenden Holze eine Teilung angebracht ist, deren Nullpunkt an der Kernspalte der Pfeife liegt, so daß man die Entfernung der Messingröhre von dem Boden der Pfeife unmittelbar ablesen kann. Die Oberlippe der Pfeife ist verstellbar, so daß man ihr die Stellung geben kann, bei welcher ein bestimmter Oberton der Pfeife am besten herauskommt.

Fig. 304



Zur Untersuchung des Schwingungszustandes der Pfeife kann zuerst das Ohr selbst dienen. Verbindet man das äußere Ende der 5^{mm} weiten bis in die Mitte der Pfeife reichenden Messingröhre durch einen Kautschukschlauch mit dem Ohr und gleitet die Pfeife mit der Messingsröhre entlang, während sie mit einem ihrer Obertöne tönt, so hört man den Ton, wenn das Ende der Messingröhre in den Knotenstellen ist, mächtig anschwellen, wenn das Ende der Röhre dagegen in den Schwingungsbäuchen ist, wird der Ton sehr schwach. Am genauesten kann man mit dem Ohr die Stelle der Schwingungsbäuche erkennen, denn gleitet man mit der Suchröhre, wie König passend die Messingröhre nennt, über die Bauchstellen hin und her, so kann man das plötzliche Auftreten der Verstärkung bei dem Passieren der Bauchstelle als einen Glockenton erkennen. Die Mitte zwischen den beiden Stellen ist die Stelle des Bauches. Man erkennt leicht den Grund dieses Verhaltens. Genau in der Stelle des Bauches geht die Luft nur hin und her, es finden dort weder Verdichtungen der Luft noch Verdünnungen statt, es kann sich deshalb die Bewegung der Luft der Leitung in der Messing- und Kautschukröhre bis zum Ohr nicht mitteilen. So wie man über den Bauch nach der einen oder andern Seite hin geht, kommt man an Orte, wo die Luft abwechselnd verdichtet oder verdünnt wird, deshalb gehen die Schwingungen in das Messingrohr über und werden zum Ohre fortgeleitet. Der eigentliche Bauch liegt in der Mitte der beiden Stellen, wo der Ton wieder hörbar wird.

Verbindet man die Messingröhre anstatt mit dem Ohre mit einer Königschen Flammenkapsel, so kann man ebenso die Lage der Bäuche bestimmen, in den Bäuchen tritt kein Flackern der Flammen ein. Die

Knoten selbst ließen sich mit einer eigentümlich konstruierten, in die Pfeife einzuführenden Kapsel beobachten, wegen deren wir auf die Abhandlung selbst verweisen.

In dieser Weise konnte König direkt zeigen, daß die Wellen in der Pfeife mit Ausnahme der letzten an der Lippe sämtlich gleich lang waren. So erhielt er z. B. für den Ton

$$N = 15 \frac{c}{4(l+x)}$$

für den Abstand des ersten Bauches von dem die Kernspalte enthaltenden Boden der Pfeife 18^{cm}, für die folgenden Bäuche fand er die Abstände vom Boden der Pfeife in Zentimetern

	51,0		83,2		115,0		148,0		180,5		212,5
Differenz		32,2		31,8		33,0		32,5		32,0	

im Mittel 32,4. Der Abstand des ersten Bauches war somit $32,4 - 18 = 14,4^{cm}$ kleiner als der Abstand der übrigen Bäuche voneinander, oder die an der Öffnung entstehende halbe stehende Welle, Wertheims Korrektion x, war um $14,4^{cm}$ zu kurz.

Der Abstand des ersten Knotens von dem Boden der Pfeife würde hiernach $18 - 16,1^{cm} = 1,9^{cm}$ sein, es würde demnach der Knoten noch innerhalb der Mundöffnung der Pfeife liegen, deren Breite, Abstand der Oberlippe von der Kernspalte, König zu 16^{cm} angibt, ein Beweis, wie unregelmäßig die Bewegung an der Erzeugungsstelle der Schwingungen ist.

Der letzte Bauch sollte $16,2^{cm}$ von dem obern geschlossenen Ende der Pfeife entfernt sein; da die Länge der Pfeife 228^{cm}, der Abstand des letzten Bauches von dem Boden der Pfeife $212,5^{cm}$ beträgt, so ist der letzte Bauch nur $15,5^{cm}$ von dem Ende, so daß hiernach an das gedeckte Ende nicht unmittelbar ein Knoten fiele, sondern am Ende noch etwas Bewegung wäre.

Das gleiche ergaben alle Beobachtungen Königs, wie folgende Tabelle zeigt. Unter A steht die Ordnung des Tones, unter B in Cm. Wasser der Druck der Luft in der Windlade bei dem Anblasen, unter C die Breite der Mundspalte, unter D die gemessene halbe Wellenlänge im Mittel von Bauch zu Bauch, unter E die Verkürzung der ersten halben Wellenlänge, unter F die Verkürzung des Viertels am gedeckten Ende.

A	B	C	D	E	F	$E:D$
V	5^{cm}	28^{cm}	$103,5^{cm}$	$27,0^{cm}$	$3,7^{cm}$	0,26
VII	6	22	70,7	19,1	0,35	0,27
IX	7	18	54,9	18,2	0,95	0,33
XI	8	16	44,9	17,4	1,9	0,39
XV	9	16	32,4	14,4	0,7	0,44
XVII	11	15	28,2	11,2	0,6	0,40.

Die Spalte E zeigt, daß der absolute Wert der Berichtigung mit der Höhe der Obertöne kleiner wird, die letzte Spalte läßt aber erkennen, daß die Berichtigung in Bruchteilen der Wellenlänge erheblich wächst. Nach den Untersuchungen von Wertheim wäre diese Zunahme indes der Verminderung des Querschnittes der Mundöffnung zuzuschreiben, da die Mundöffnung zur Herstellung der höhern Töne erheblich verkleinert werden mußte.

Außerdem ist auch der verschiedene Druck, also die verschiedene Stärke des Anblasestromes von Einfluß. Wertheim[1]) hat die Abhängigkeit der Berichtigung von dem Verhältnis des Querschnittes der Mundspalte zu demjenigen der Pfeife genauer zu bestimmen gesucht; er konnte den Zusammenhang annähernd durch eine empirische Formel darstellen von der Form

$$x = a(B + D)\left(1 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}}\right),$$

worin B die Breite, D die Tiefe der Pfeife, s den Querschnitt der Mundöffnung, S den der Pfeife bedeutet. Bei zylindrischen Pfeifen tritt an die Stelle von $B + D$ der Wert $2\sqrt{S}$. Der Koeffizient a ist eine Konstante, welche mit dem Material der Pfeife sich etwas ändert, sein Wert ist für Metall oder Glas 0,210, für Holz 0,240.

Den Einfluß der Form und Größe der Mundöffnung benutzt man bei den Orgeln dazu, den Ton der Pfeifen etwas zu stimmen, wenn die Pfeife nahezu den richtigen Ton gibt. Zu dem Ende sind neben der Mundöffnung an den Seiten zwei verschiebbare Lappen angesetzt, welche gestatten, die Öffnung etwas breiter oder schmaler zu machen, und so die Tonhöhe zu verändern.

Die Töne einer offenen Pfeife sind andere als die einer gedeckten von gleicher Länge. Wir erwähnten bereits § 150, daß eine offene Pfeife sich wie ein an beiden Enden freier Stab verhalten muß, daß eine am obern Ende ankommende schwingende Bewegung ohne Änderung der Phase reflektiert wird, weil außerhalb der Pfeife die Luft nach allen Seiten sich bewegen kann, also freier beweglich ist als im Innern der Pfeife. Bei einer offenen Pfeife müssen also an beiden Enden Schwingungsmaxima sein, und der Grundton der Pfeife ist der, für welchen die Luftsäule der Pfeife eine halbe Wellenlänge bildet, so daß in der Mitte der Pfeife ein Knoten ist. Die in der Pfeife möglichen Schwingungen sind weiter alle jene, welche irgend ein Vielfaches der langsamsten Schwingung bilden, die also gegeben sind durch

$$N = n\,\frac{c}{2l},$$

wenn l die Länge der offenen Pfeife ist. Der Grundton der offenen Pfeife ist somit die höhere Oktave des Tones, welchen eine gedeckte Pfeife gleicher Länge gibt; der zweite Ton, $n = 2$, ist die höhere Oktave des Grundtones, die beiden Enden der Pfeife sind Schwingungsmaxima, im Innern sind zwei Knoten, jeder $\frac{1}{4}$ der Pfeifenlänge vom Ende; die Reihe der Töne überhaupt ist

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\ \ldots \\ c & c_1 & g_1 & c_2 & e_2 & g_2\ \ldots \end{array}$$

wenn wir den tiefsten Ton der Pfeife mit c bezeichnen; der tiefste Ton der gedeckten Pfeife gleicher Länge wäre in dem Falle c_{-1}, der zweite g, der dritte e_1 usf.

1) *Wertheim*, Ann. de chim. et de phys. **31** (3. 1851; Krönigs Journal. **2**. p. 485. 1851.

Für die offenen Pfeifen gilt das früher über den Einfluß des Mundlochs gesagte gerade wie für die gedeckte Pfeife, auch bei diesen ist demnach die Länge der Welle länger als das Doppelte der Röhre oder

$$N = \frac{c}{2(l+x)},$$

und zwar muß diese Größe x hier ganz dieselbe sein, wie bei der gedeckten Pfeife. Vergleicht man nun die so berichtigte Schwingungszahl N mit derjenigen N' der gedeckten Pfeife, so müßte

$$N = 2N'$$

oder der Ton der gedeckten Pfeife soll genau die tiefere Oktave des Tones der offenen Pfeife sein. Indes hört man bei einem Versuche, daß das nicht der Fall ist, daß der Ton der offenen Pfeife immer etwas tiefer ist als die höhere Oktave. So fand Wertheim bei einigen Versuchen, daß bei einer Pfeife von 24^{mm} Durchmesser der gehörte Ton bei der offenen Pfeife sich zu dem Tone $2N'$ verhielt wie 23 zu 24, und in einem andern Falle bei einem Durchmesser von 50^{mm} wie 43,9 : 46,1, den Ton also verhältnismäßig noch tiefer.

Es muß daher bei der offenen Pfeife noch ein anderer Umstand störend einwirken, der die gehörten Töne von der Theorie abweichend macht. Wertheim sieht denselben darin, daß die Reflexion der schwingenden Bewegung nicht ganz genau in dem obern Querschnitt der Röhre stattfindet, sondern daß sich die schwingende Bewegung noch ein klein wenig über diesen Querschnitt hinaus erstreckt, die schwingende und tönende Luftsäule also etwas länger wird, als die Theorie annimmt. Daß diese kleine Verlängerung stattfindet, davon kann man sich durch den Versuch überzeugen, denn hält man ganz nahe über die Öffnung der Röhre eine feine schwach gespannte und mit Sand bestreute Membran, so sieht man an dem Hüpfen des Sandes die Ausdehnung der Bewegung über der Pfeife. Um den Ton der offenen Pfeife genau im Verhältnis zur Länge der Pfeife zu bestimmen, muß man daher für die Schwingungszahl desselben setzen

$$N = \frac{c}{2(l+x+y)}.$$

R. König hat nach dem vorhin angegebenen Verfahren in der beschriebenen Pfeife, welche als offene eine Länge von 233^{cm} hatte, die Werte von x und y für die verschiedenen Obertöne der Pfeife direkt gemessen. Nachfolgende Tabelle gibt die von ihm erhaltenen Resultate; die Tabelle ist genau geordnet wie die vorhergehende

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
III	4	27	90	28	9
IV	6	23	65,8	24,6	5,6
V	7	20	51,3	19,8	3,6
VI	8	17	42,5	16,2	5,7
VII	9	16	36,5	15,7	6,7
VIII	10	15	31,4	14,1	4,3.

In der Tat sind die unter E angegebenen Werte von x für annähernd gleiche Wellenlängen ziemlich gleich, so hier für den Ton III und in der

frühern Tabelle für V; im allgemeinen liegen die Werte für einen Ton dieser Reihe zwischen den tiefern und höhern der vorigen Reihe. Die Größe y muß man hier für alle Töne als gleich ansehen, denn mit Ausnahme des ersten Wertes schwanken sie unregelmäßig um einen mittleren Wert.

Wertheim bestimmte die Summe der beiden Berichtigungen $x + y$ in der vorhin für die gedeckten Pfeifen beschriebenen Weise. Sind L_1 und L_2 zwei mit gleichem Mundstück versehene und mit gleich starkem Strome angeblasene und ihren Grundton gebende Pfeifen, so ist

$$c = 2N_1(L_1 + x + y) = 2N_2(L_2 + x + y)$$

$$x + y = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}.$$

Auch die Werte für $x + y$ gelang es Wertheim durch eine der frühern ganz gleich gebaute empirische Formel darzustellen, er fand

$$x + y = a_1(B + D)\left(2 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}}\right),$$

worin die Zeichen das gleiche bedeuten wie in der vorigen Formel und wiederum für $B + D$ der Ausdruck $2\sqrt{S}$ gesetzt werden muß, wenn zylindrische Pfeifen genommen werden. Der Koeffizient a_1 ist hier 0,187 unabhängig von dem Material der Pfeife.

Eine sehr einfache empirische Regel, welche für offene Orgelpfeifen in der Tat mit großer Annäherung die Schwingungszahl zu bestimmen gestattet, ist von dem französischen Orgelbauer Cavalier Colle aufgefunden. Für rechteckige Pfeifen hat man zur wirklichen Länge der Pfeifen die doppelte Tiefe zu addieren, um die theoretische Länge zu erhalten, d. h die Länge l, welche nach der Gleichung

$$N = \frac{c}{2l}$$

die Schwingungszahl zu berechnen gestattet.

Eine weitere, indes nur scheinbare Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie, die sich sowohl bei offenen als gedeckten Pfeifen zeigt, und auf welche schon Wertheim aufmerksam gemacht hat, läßt sich aus den Königschen vorhin angegebenen Beobachtungen erkennen, nämlich daß die Obertöne mit steigender Ordnungszahl relativ zu hoch werden. Berechnen wir z. B. aus den Wellenlängen der in der gedeckten Pfeife erzeugten Obertöne den Grundton der Pfeife bezw. dessen Wellenlänge, so wird diese um so kürzer, je höher der Oberton ist, von dem wir ausgehen. Für den Ton V z. B. ist die beobachtete stehende Welle gleich $103{,}5^{\mathrm{cm}}$. Die halbe Wellenlänge des Grundtones muß den fünffachen Wert haben, ist also hiernach $517{,}5^{\mathrm{cm}}$. Aus dem Ton VII erhalten wir so für die halbe Wellenlänge $494{,}9^{\mathrm{cm}}$, aus dem Ton IX 495, dem Ton XI 493,9, dem Ton XV 486,0 und dem Tone XVII 479,0.

Daß diese Abweichung jedoch nur eine scheinbare ist und auf die Verschiedenheit der Mundöffnungen und ganz besonders die verschiedene Stärke des Anblasens zurückzuführen ist, ergibt sich daraus, daß die Höhe des Grundtones von der Stärke des Anblasens wesentlich abhängt. Damit

die Pfeife ihren richtigen, das heißt schönen und kräftigen Ton gebe, muß der Anblasestrom eine gewisse Stärke haben. Verstärkt man von da aus den Anblasestrom mehr und mehr, so tritt ein merkliches Steigen des Tones ein, das in der Pfeife liegende Stück der Welle macht einen größern Teil der Welle aus. Bei sehr starkem Anblasen, welches zur Erzeugung der höhern Töne erforderlich ist, erhält man die Obertöne des gesteigerten Tones, daher sind die Obertöne relativ zu hoch.

Da nach den bisherigen Erfahrungen die schwingende Bewegung nicht in der geometrischen Endfläche der Pfeife endigt, so wird eine teilweise Schließung der Endfläche die Tonhöhe der Pfeife ebenfalls verändern, und zwar ist vorauszusehen, daß der Ton der Pfeife dadurch tiefer werden muß. Denn die teilweise Deckung der Pfeife hemmt die freie Bewegung der Luft, das Ende der Pfeife muß deshalb dem Knoten näher rücken. bezw. der Knoten muß dem obern Ende näher rücken, da die Bewegung im obern Querschnitt weiter vom Schwingungsmaximum entfernt ist. Die Erfahrung hat schon lange den Orgelbauern diesen Einfluß einer teilweisen Deckung der Pfeifen gezeigt; sie machen denselben nutzbar, indem sie zur Stimmung der offenen Orgelpfeifen dieselben oben gewöhnlich mit schräg stehenden Blechen versehen, welche man auf- und abbiegen kann. Biegt man die Bleche herab, so wird der Ton tiefer.

Wertheim hat auch für diesen Fall eine empirische Relation aufstellen können, welche annähernd die an der Länge der Pfeife anzubringende Korrektion zu berechnen gestattet, so daß die Schwingungszahl sich aus der Gleichung

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)}$$

ergibt.

Haben B, D, S dieselbe Bedeutung wie früher und ist s_1 der Querschnitt der Mundöffnung s_2 derjenige der oberen Öffnung der Pfeife, so ist

$$x = a\,(B + D)\left(1 - \sqrt{\frac{s_1}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_1}}\right)$$

$$y = a_1(B + D)\left(1 - \sqrt{\frac{s_2}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_2}}\right),$$

worin a_1 wie bei offenen Pfeifen den Wert 0,187 hat.

Wegen des Grades der Übereinstimmung der Formeln mit der Erfahrung verweisen wir auf die Originalarbeit, bei großen und sehr kleinen Querschnitte s_2 sind die berechneten Zahlen bis etwa 5 % zu klein, bei mittleren sind sie zu groß.

Wenn die quantitativen Folgerungen unserer einfachen Theorie der schwingenden Luftsäulen in Pfeifen mit mehr oder weniger großen Korrektionen für Pfeifen, deren Länge im Verhältnis zu ihrem Querschnitte groß sind, sich anwendbar zeigen, so ist das nicht mehr der Fall, wenn die Länge der Pfeifen gegen die Querdimensionen nicht mehr groß ist, wenn die Länge der Pfeife nicht größer oder gar kleiner ist als die Breite der Röhre oder bei zylindrischen Röhren als der Durchmesser. Würde man bei solchen Röhren den Ton einfach aus der Länge berechnen, so würde man ihn oft mehr als eine Oktave höher finden, als der Versuch ihn ergibt. Für derartige als kubische bezeichnete Pfeifen läßt sich indes

wiederum die Tonhöhe nach den Wertheimschen Gleichungen annähernd berechnen, wie sich aus einer großen Anzahl von Versuchen, welche Wertheim mit Röhren der verschiedensten Form angestellt und in der schon mehrfach erwähnten Abhandlung mitgeteilt hat, erkennen läßt. Wir begnügen uns hier damit, um zu zeigen, wie weit die Versuche Wertheims mit den Formeln übereinstimmen, eine Versuchsreihe an Holzpfeifen mitzuteilen. Die Pfeifen waren Röhren von rechteckigem Querschnitt, deren Länge 35^{cm} und deren eine Seite des Querschnittes $D = 20^{cm}$ betrug. Parallel dieser Seite konnten in den Kasten Schieber eingesetzt werden, welche so den Querschnitt der Röhre zu ändern gestatteten, indem man die Breite B desselben verkleinerte. Die Röhre war unten ganz geschlossen, oben offen und der oben offene Querschnitt konnte durch einen parallel der Kante D beweglichen Schieber, der die ganze Breite der Röhre einnahm, mehr oder weniger verkleinert werden. Die Pfeife wurde durch ein mit einem platten Mundstück aus Messing versehenes Blaserohr, ähnlich wie Fig. 299, angeblasen.

In nachfolgender Tabelle gibt die mit d überschriebene Spalte die der Seite D parallele Ausdehnung der Öffnung, deren Breite immer gleich jener der Röhre war. Die zur Berechnung der Töne benutzte Konstante a ist $= 0{,}240$, da die Pfeife von Holz war.

Töne kubischer Pfeifen.

d	$\frac{s}{S}$	Breite $B = 200^{mm}$ Schwingungszahl		Breite $B = 100^{mm}$ Schwingungszahl		Breite $B = 50^{mm}$ Schwingungszahl	
		berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
200	1,000	382,5	382,1	404,3	404,4	416,2	414,9
180	0,900	374,3	379,8	397,2	398,7	409,9	409,9
160	0,800	365,0	364,7	389,5	384,4	403,0	405,7
140	0,700	355,2	353,1	381,0	381,0	395,4	386,7
120	0,600	344,3	336,8	371,6	368,9	386,9	366,8
100	0,500	332,0	314,5	361,6	358,5	377,2	355,5
80	0,400	317,7	304,0	348,0	348,8	365,5	339,1
60	0,300	299,9	299,4	334,5	336,3	350,5	315,3
40	0,200	276,2	264,5	309,8	281,3	329,8	288,3
20	0,100	237,2	224,6	272,2	261,2	293,8	263,9
10	0,050	199,8	203,2	234,4	220,7	256,6	243,8

Für sehr kleine Mundöffnungen weichen die beobachteten und berechneten Zahlen nicht unbeträchtlich voneinander ab, für größere Mundöffnungen stimmen die Resultate ziemlich gut.

Als ein allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Versuchen, daß die Töne kubischer Pfeifen mit abnehmendem Volumen der Röhre höher werden, und weiter läßt sich aus den Versuchen und der Formel Wertheims der Satz ableiten, daß bei ähnlichen Formen der Pfeife und der Mundöffnung die Töne der Pfeife sich umgekehrt verhalten wie die Längen der homologen Seiten.

Es genüge an diesen kurzen Andeutungen über das Verhalten kubischer

, dem der gestrichenen Saiten ähnlichen Klang; bei weiteren offenen fen, den Prinzipalstimmen der Orgel, besonders den hölzernen, tritt nur Oktave noch deutlich zum Grundton, die höheren fast gar nicht, deshalb ler Ton dieser Pfeifen viel dumpfer. Die gedeckten Pfeifen geben die 1, 3, 5 . . ., indes sind die Obertöne nur bei engen Pfeifen deutlich, weiten tritt fast nur der Grundton auf, woher der dumpfe Klang der ckten Register rührt.

Der Klang in Holzpfeifen ist immer dumpfer und weicher als in llpfeifen, hauptsächlich, weil die rascheren Schwingungen der Obertöne dem Holz mitteilen und deshalb rasch verschwinden.

§ 167.

Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen. Wir haben ernt, daß man durch einen Flüssigkeitsstrom, der durch die durchlöcherte ibe einer in eine Flüssigkeit getauchten Sirene getrieben wird, einen erzeugen kann. Cagniard Latour und später in noch ausgezeichrer Weise Wertheim ist es gelungen, in Flüssigkeiten stehende Welund dadurch Töne hervorzubringen.

Cagniard Latour[1]) brachte Flüssigkeitssäulen, welche in Glasröhren eschlossen waren, dadurch zum Tönen, daß er die Glasröhren longitul rieb. Die Höhe des erzeugten Tones bewies, daß nicht die longitulen Schwingungen des Glases es waren, welche gehört wurden, sondern der Flüssigkeitssäule. Er wies durch den Versuch nach, daß der Ton höhere Oktave ist, wenn die Röhre an beiden Seiten offen, die Flüssig- also an beiden Enden frei ist, von dem Tone, den eine Flüssigkeits- gibt, welche in einer an einem Ende geschlossenen Röhre schwingt, n eines Ende also an einer festen Wand anliegt. Die Töne einer an en Enden freien Flüssigkeitssäule konnten nicht dadurch erhalten werden, man eine an beiden Enden offene Röhre einfach in Wasser tauchte longitudinal rieb, sondern wurden dadurch erzeugt, daß man ein Rohr rförmig, gleichschenkelig bog und dann longitudinal rieb. Wurde das Ende des Hebers zugeschmolzen und derselbe bis zur gleichen Höhe Wasser gefüllt, als der offene, so war der Ton eine Oktave tiefer als dem offenen Heber.

Auch gelang es Cagniard Latour eine Pfeife unter Wasser zum en zu bringen. Dies gelang aber in viel vollkommenerer Weise Wertn, der in einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre durch einen Flüssigstrom den Grundton und die harmonischen Töne erzeugte.[2])

Der Apparat, welchen Wertheim zu seinen Versuchen mit Wasser andte, ist Fig. 305 abgebildet.

Die offene Orgelpfeife *bb* liegt horizontal auf den Stützen *a* in dem en gefüllten Wasserbehälter *A*. Der Fuß der Pfeife ist in *c* angeaubt an eine in der Wand befestigte Mutter, welche der Pumpe gegensitzt. Eine Ventilpumpe *B*, welche durch den davor befindlichen Hebel

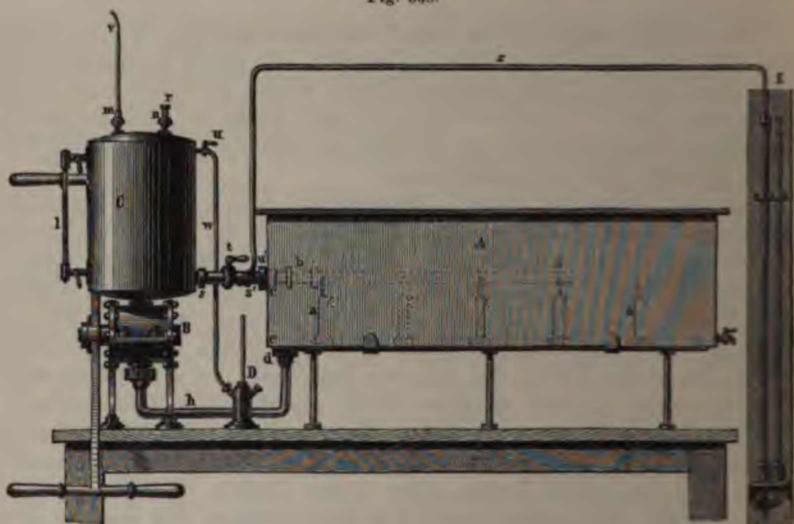
1) *Cagniard Latour*, Annales de chim et de phys 56 1834.
2) *Wertheim*, Ann. de chim et de phys. 23 (3) 1848. Poggend. Ann. 77 1849.

getrieben wird, saugt die Flüssigkeit durch das weite Rohr *h* aus dem Behälter und pumpt sie in das davorstehende Reservoir *C*.

Das Innere des Reservoirs *C* steht durch den Hahn *m* und das Rohr *r* mit großen Gefäßen voll komprimierter Luft in Verbindung. Durch den Druck dieser Luft bei geöffnetem Hahn *m* wird das im Behälter *C* angesammelte Wasser durch den Hahn *t* und das Rohr *ss'* in die unter Wasser befindliche Pfeife getrieben. Mittels des Hahnes *t* ist man imstande, den Zufluß des Wassers beliebig zu regulieren.

Auf dem Behälter *C* befindet sich noch ein zweiter Hahn *n*, der geöffnet die komprimierte Luft des Behälters in die Atmosphäre entweichen läßt, und auf den man bei *r* eine Sirene aufstellen kann, um die absolute Schwingungszahl des in der Wasserpfeife gehörten Tones, also die Tonhöhe,

Fig. 305.



zu bestimmen. Außerdem dient dieser Hahn dazu, Versuche mit gewöhnlichen Orgelpfeifen in Luft anzustellen.

Um den Druck zu messen, unter welchem das Wasser in die Pfeifen eintritt, kommuniziert die Röhre *ss'* durch den Hahn *u'* und die Röhrenleitung *x* mit dem Manometer *E* und außerdem die Luft im Gefäße *C* durch den Hahn *u* und die Röhre *uw* mit dem Manometer *D*.

Ist nun der Apparat eingerichtet, so beginnt man die Versuche damit, daß man bei geschlossenen Hähnen *m*, *n*, *t*, mittels der Pumpe *B* Wasser aus dem Behälter *A* in den Behälter *C* pumpt. Ist die Wassermasse dort hinreichend, so setzt man den Behälter *C* durch Öffnen des Hahnes *m* mit den mit komprimierter Luft gefüllten Behältern in Verbindung. Der Druck dieser Luft ist es dann, der bei geöffnetem Hahne *t* das Wasser in die Orgelpfeife treibt und ferneres Pumpen während des Versuches dient nur dazu, das Wasser in *C* auf konstantem Niveau zu erhalten.

Damit die Versuche gelingen, muß auf die Konstruktion der Orgelpfeifen besondere Aufmerksamkeit verwandt werden.

Wertheim wandte dazu die aus mehreren Stücken zusammengesetzte Pfeife (Fig. 306) an. Das erste Stück besteht aus der Schraube c, passend für die Mutter bei c im Behälter A (Fig 305) geschnitten, in deren Innern ein feines Drahtnetz angebracht ist, um zu verhindern, daß allenfalls feste im Wasser schwebende Körperteilchen in die Pfeife eintreten können, ferner

Fig. 306.

aus dem Mundstücke d und der Röhre b, an deren Ende sich der Schraubengang h befindet, um daran die folgenden Röhrenstücke b oder den Deckel k anzuschrauben. Die beiden Labien des Mundlochs bestehen aus den Platten d und e, welche mit den Klammern f befestigt werden.

Man kann die Platten, welche die Labien bilden, nicht sogleich durch Löten unveränderlich fest mit der Pfeife verbinden, da die Stellung der Labien von wesentlichem Einfluß auf die Leichtigkeit ist, mit der die Pfeife anspricht, und man deshalb durch den Versuch erst die Lage ermitteln muß, bei der die Pfeife in den Flüssigkeiten tönt. Für Flüssigkeiten muß im allgemeinen der Aufschnitt weniger breit und lang sein als für Luft, das Licht, die Mündung des Fußes in der Pfeife größer und der Strom etwas mehr gegen das Innere der Pfeife gerichtet sein.

Mit diesem Apparate ist es Wertheim gelungen, Orgelpfeifen unter Wasser mittels eines Wasserstromes zum Tönen zu bringen, und er fand, wie es nach § 150 zu erwarten ist, daß die Töne derselben Reihe folgen wie bei Pfeifen, welche mit Luft angeblasen werden. Bei offenen Pfeifen, nur diese gaben ein gutes Resultat, waren die Töne

$$\begin{array}{cccccc} c_{-1} & c & g & c_1 & e_1 & g_1 \; \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Die Schwingungszahlen allgemein

$$N = n\frac{c}{2l},$$

wenn l die Länge der Pfeife bedeutet. Oder vielmehr genauer

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)},$$

das heißt, es mußten dieselben Berichtigungen angebracht werden, wie bei den in Luft angeblasenen Pfeifen.

Für c erhielten wir § 149 in Wasser

$$c = 141\,800^{\text{cm}} = 1418^{\text{m}}.$$

Die Schwingungszahl N des Grundtones einer offenen Pfeife von der Länge l sollte demnach sein

$$N = \frac{1418}{2l}.$$

Die Versuche von Wertheim gaben indes einen viel kleinern Wert, die Töne waren tiefer, als sie hiernach sein sollten und zwar so, daß die

beobachtete Schwingungszahl N' war

$$N' = \sqrt{\frac{2}{3}}\, N.$$

Wir werden auf diese Abweichung im nächsten Kapitel zurückkommen, hier genüge die Bemerkung, daß nach der Ansicht von Wertheim die Größe c, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in dem Wasser bedeutet, hier einen andern Wert hat als den von uns berechneten, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere ist in Flüssigkeitssäulen, wie in Orgelpfeifen, als in einer unbegrenzten Flüssigkeit und zwar, daß die Geschwindigkeit c' in Flüssigkeitssäulen gleich ist

$$c' = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c.$$

§ 168.

Von den Zungenpfeifen. Die gewöhnlichen Zungenpfeifen unterscheiden sich von den Labialpfeifen dadurch, daß die Schwingungen nicht durch einen sich teilenden Luftstrom, sondern ähnlich wie bei der Sirene durch einen intermittierenden Luftstrom erregt werden. Die Zungenpfeife (Fig. 307 und 308) besteht aus dem Mundstück oder Rohrwerk *abcd*, welches in dem Fuße der Pfeife F sich befindet und welches, wie Fig. 307 zeigt, in die Mündung der meist kegelförmig nach oben sich erweiternden Röhre R hineingesteckt ist.

Fig. 307.

Fig. 308.

Das Rohrwerk besteht aus einem Halbzylinder von starkem Messingblech, der an einer Basis bei a geschlossen, oben jedoch offen ist (Fig. 307). Die Schnittfläche des Messinghalbzylinders ist durch eine ebene Metallplatte bedeckt, welche jedoch nur ungefähr auf $\frac{1}{3}$ der Länge der Röhre fest und von da ab frei beweglich ist und als schwingende Zunge die Öffnung des Zylinders beim Hin- und Herschwingen öffnen und verschließen kann. Das Rohrwerk der zweiten Art (Fig. 308) hat an Stelle des Messingzylinders eine viereckige, unten geschlossene Holzröhre, deren eine Seitenwand durch eine Metallplatte gebildet ist, die in der Mitte einen spaltförmigen Ausschnitt hat. Eine an dem obern schmalen Ende des Spaltes befestigte Metallzunge kann durch den Spalt hin und her schwingen. Die Rohrwerke der zweiten Art mit durchschlagender Zunge, welche einen weniger rauhen Ton geben als die Rohrwerke der ersten Art

mit aufschlagender Zunge, müssen so gearbeitet sein, daß die Zunge beim Eintreten in den Messingzylinder das Rohr vollkommen verschließt, ohne die Ränder der viereckigen Öffnung zu berühren. Im ruhenden Zustande ist die Zunge so gebogen, daß sie etwas von den Rändern der Öffnung absteht, so daß die Luft des Fußes *F* mit derjenigen im Innern des Messingrohres und des Schallbechers der Röhre *R* kommuniziert. Der Fuß *F* ist rings, außer an der Durchtrittsstelle des Rohres *r*, welches den Luftstrom aus dem Windkasten eintreten läßt, geschlossen. Die Röhre *R* ist oben stets offen, damit die durch das Rohrwerk eintretende Luft entweichen kann.

Um die Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, setzt man das Rohr *r* auf den Kanal einer Windlade und läßt Luft einblasen. Die in den Fuß der Pfeife eintretende Luft dringt dann zunächst durch die von der Zunge gelassene Spalte in die Pfeife ein; allein da nicht schnell genug alle Luft durch diese Spalte dringen kann, verdichtet sich dieselbe im Fuß und treibt die Zunge in die Röhre hinein, so daß auf einen Augenblick die Röhre ganz geschlossen ist und keine Luft aus dem Fuße mehr in die Röhre dringen kann. Durch das erste Eindringen der Luft in die Röhre gerät die Luft in derselben in Schwingung, und die Zunge dringt dann so weit in die Röhre ein, bis ihre eigene Elastizität und der von der schwingenden Bewegung der Luft in der Röhre sie treffende Impuls sie zurücktreibt, so daß sie die Öffnung von neuem frei läßt. Darauf wird dann neuerdings die Zunge an oder in die Röhre und wieder zurückgetrieben und das Spiel wiederholt sich so lange, als der Luftstrom anhält.

Durch diese Vorrichtungen entstehen also Schwingungen der Luft in der Röhre, Schwingungen der Zunge und ebenso ein intermittierender Luftstrom gerade wie bei der Sirene, indem bei jeder Öffnung des Rohres ein Luftstrom in die Pfeife dringt, bei jedem Schlusse desselben der Strom unterbrochen wird.

Nach den Versuchen von Wilhelm Weber[1] sind es nun weder die Schwingungen der Platte, welche den lauten und starken Ton der Zungenpfeife geben, noch die Schwingungen der Luftsäule, sondern die Stöße des intermittierenden Luftstromes wie bei der Sirene, der bei jeder Öffnung der Zunge in das Rohr eintritt, bei jedem Verschließen des Rohres durch die Zunge unterbrochen wird. Die Zahl der Luftstöße und somit die Tonhöhe aber hängt in der Pfeife nur von den Schwingungen der Zunge ab, wie in der Sirene von der Geschwindigkeit der Scheibe, indem die Schwingungen der Zunge es sind, welche das Rohr abwechselnd öffnen und schließen.

Die Schwingungen der Platte werden aber außer durch die Elastizität derselben wesentlich mit bestimmt durch die stehenden Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife *R*, durch den abwechselnd zu- und abnehmenden Druck der dort schwingenden Luft.

Daß diese Anschauung von der Tonbildung in der Zungenpfeife die richtige ist, begründet Weber durch folgende Versuche. Würde der Ton in der Zungenpfeife nicht von den Stößen der Luft, sondern von den Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife oder den vereinten Schwingungen der Luft und der Zunge erzeugt, so müßte der Ton aufhören, wenn man

1) *W. Weber*, Poggend. Ann. 16. 1839.

die Röhre R fortnähme; man weiß aber, daß das nicht der Fall ist. Bläst man das Rohrwerk allein an, wie es z. B. in der Mundharmonika immer geschieht, so ist der Ton der Höhe nach fast ganz derselbe, seinem Klange nach völlig derselbe, als wenn eine kurze Luftsäule mit schwingt.

Daß der Ton nicht von den Schwingungen der Platte herrührt, ergab sich daraus, daß wenn die Platte mit dem Violinbogen gestrichen wurde, also ohne die Luftstöße in Schwingungen versetzt wurde, ein nur ganz schwacher und in unmittelbarer Nähe hörbarer Ton entstand, der keinenfalls mit dem vollen und starken Ton der Zungenpfeife vergleichbar war. Selbst als er die Zunge vor einer Röhre in Schwingung versetzte, in der die stehenden Schwingungen der Luft denselben Ton gaben wie die Zunge, fand Weber den Ton nur matt und viel schwächer.

Also nur durch den intermittierenden Luftstrom, durch die von diesem wie bei der Sirene erzeugten und durch die umgebende Luft fortgepflanzten Stöße entsteht jener laute und volle Ton, welcher bei dem Anblasen der Zungenpfeife gehört wird.

Da indes ein Stoß nur beim Öffnen des Rohres entsteht, so sind die Stöße mit den Schwingungen der Zunge gleichzeitig und man kann aus der Höhe des gehörten Tones auf die Schwingungszahl der Zunge schließen und diese mit den Schwingungen vergleichen, welche die für sich schwingende Platte vollführen würde. Eine solche Vergleichung beweist dann den zweiten Satz von Weber, daß die Schwingungen der Zunge bedingt werden durch die eigene Elastizität der Zunge und durch die in der Röhre auftretenden stehenden Schwingungen der Luftsäule. Die Tonhöhe und somit die Schwingungszahl der Platte wird nämlich eine andere, wenn verschieden lange Röhren mit der Zunge zur Pfeife verbunden sind.

Um die Änderungen der Tonhöhe zu erkennen, ist es notwendig zu beachten, daß die Pfeife auf doppelte Weise zum Tönen gebracht werden kann, durch Blasen von unten, so daß also in dem Fuß F der Pfeife die Luft dichter ist als im Innern der Pfeife, und durch Saugen von unten oder Blasen von oben, so daß die Luft außerhalb der Röhre im Fuße F der Pfeife dünner ist als innerhalb.

Der Vergleich der Töne der Zungenpfeife mit dem Tone der isoliert schwingenden Zunge ergibt nun folgendes.

Ist die Pfeife so lang, daß die in ihr erregten stehenden Schwingungen genau den Ton der isoliert schwingenden Zunge geben, so wird durch den Ansatz der Pfeife an das Rohrwerk der Ton seiner Höhe nach nicht wesentlich anders als der Ton der isoliert schwingenden Zunge. Es ist das sowohl der Fall, wenn der Grundton der Röhre, als wenn einer ihrer harmonischen Obertöne mit dem Tone der Zunge übereinstimmt. Ist also l die Länge der Röhre, deren Grundton mit dem Tone der Zunge gleiche Höhe hat, so hat es der zweite Ton der Röhre $2l$, der dritte derjenigen von der Länge $3l$ usf. Alle diese Röhren, deren Länge l oder irgend ein Vielfaches von l ist, ändern mit dem Rohrwerke zur Zungenpfeife verbunden die Höhe des Tones, den die Zunge für sich geben würde, nicht ab, die Schwingungen der Zunge erfolgen also unter vereinigter Wirkung der Elastizität der Zunge und der wechselnden Drucke der Luft gerade so, als bewegte sie sich nur infolge ihrer eigenen Elastizität. Das ist sowohl der Fall, wenn die Pfeife durch Blasen, als wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Hat die Röhre aber irgend eine andere Länge als l, $2l$, $3l$ . . ., so wird die Tonhöhe der Zunge geändert, sie wird tiefer, die Schwingungszahl kleiner, die Schwingungsdauer größer, wenn die Pfeife durch Blasen zum Tönen gebracht wird, sie wird höher, die Schwingungszahl größer, die Dauer kleiner, wenn die Röhre durch Saugen zum Ansprechen gebracht wird.

Setzt man eine kurze Röhre an die Zunge, so wird beim Anblasen von unten der Ton nur unmerklich tiefer, wenn man die Röhre bis zu $\frac{1}{8}l$ verlängert, bei weiterm Verlängern wird er merklich tiefer, bis die Länge der Röhre $\frac{1}{4}l$ ist, bei noch weiterm Verlängern sinkt der Ton immer rascher bis $\frac{3}{4}l$, fast ebenso rasch als die Länge der Röhre zunimmt, und zwischen $\frac{3}{4}l$ und l sinkt die Tonhöhe der Verlängerung proportional. Ist die Länge der Röhre nahe l, so ist der Ton fast eine Oktave tiefer als der Ton der für sich schwingenden Zunge.

So fand Weber bei einer Zunge, welche denselben Ton gab als eine Pfeife von 195,3 Pariser Linien oder 44,1^{cm}, nämlich das eingestrichene g, folgende Tonreihe, als die Zunge mit Röhren von den daneben angegebenen Längen zur Pfeife verbunden angeblasen wurde:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
4,06^{cm} $< \frac{1}{8}l$	g_1	25,25^{cm} $> \frac{1}{2}l$	d_1
5,63 „ „	g_1	29,09 „ „	c_1
9,24 „ „	g_1	33,15 „ $> \frac{3}{4}l$	*ais*
12,85 „ $> \frac{1}{4}l$	fis_1	36,94 „ „	*gis*
18,72 „ „	f_1	39,43 „ „	g
21,20 „ „	e_1		

Bei weiterer Verlängerung sprang der Ton zum eingestrichenen g zurück, so daß bei der Länge l der Ton der Pfeife wieder das eingestrichene g_1 war.

Wurde das Rohr über l hinaus verlängert, so war zwischen l und $2l$ der Gang des Tones derselbe, nur reichte die Vertiefung viel weniger weit. Die größte Vertiefung nahe bei $2l$ betrug eine Quarte.

Bei einer Länge von etwas über $2l$ wurde zuweilen noch cis_1 erhalten, sonst sprang der Ton bei $2l$ wieder zu g_1 zurück. Wurde die Röhre von $2l$ auf $3l$ verlängert, so sank der Ton wieder anfangs langsamer, dann rascher bis zur tiefern Terz, in den Weberschen Versuchen bis zum eingestrichenen e_1.

Man erkennt darin ein bestimmtes Gesetz, nach welchem die Tonhöhe durch den Ansatz der Röhren sich ändert. Jedesmal, nachdem die Röhre um l verlängert ist, springt der Ton zurück, vor dem ersten Sprunge war er um eine Oktave, $1:2$, vor dem zweiten um eine Quart, $3:4$, vor dem dritten um eine Terz, $4:5$, vertieft: vor den folgenden Sprüngen würde er demnach so vertieft sein, daß die Töne vor und nach dem Sprunge sich verhielten wie $7:8$, dann wie $9:10$ usw. Für einige weitere Sprünge bestätigen die Versuche von Weber das Gesetz.

Weber folgert aus diesen Erscheinungen, daß wirklich die Luft in den Zungenpfeifen in stehende Schwingungen gerät. Denn zunächst tritt es hervor, daß jedesmal dann, wenn die Röhre die Länge l oder ein Vielfaches von l besitzt, die Schwingungen der Röhre also mit denen der Zunge zusammenfallen, der Ton wieder seine ursprüngliche Höhe erhält. Ähn-

liches ist auch bei den übrigen Tönen der Fall, auch dort bilden sich in der Röhre schwingende Abteilungen und jedesmal, wenn die Röhre um eine schwingende Abteilung größer geworden ist, wird der Ton der Zungenpfeife auch wieder derselbe, und zwar ist die Länge dieser schwingenden Abteilungen gleich der Länge der in stehenden Schwingungen befindlichen Luftsäule, welche dieselbe Schwingungszahl haben würde.

Setzen wir nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c bei der Temperatur des Laboratoriums rund 342^{m}, so ist die Länge der stehenden Welle für den Ton g_1, der von Weber zu 388 Schwingungen bestimmt wurde, nach der Gleichung

$$N = \frac{c}{2l}; \quad l = \frac{c}{2N}$$

$l = 45{,}4^{cm}$.

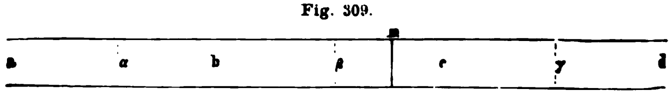
Für die tiefern Töne bestimmte Weber ebenfalls die Schwingungszahlen und die zugehörigen Röhrenlängen. So fand er, daß ein Ton von 365 Schwingungen auftrat bei einer Länge der Röhre von $19{,}69^{cm}$, weiter bei 66,07 und $113{,}65^{cm}$, also wenn die Länge der Röhre um 46,38 und um 2.47^{cm} zugenommen hatte. Die Länge der stehenden Welle des Tones von 365 Schwingungen ist $l = 47^{cm}$.

Man sieht also, wie die Luftsäule der Röhre in gleichzeitige Schwingungen mit denen der Zunge versetzt wird, indem jedesmal, wenn die Länge der Röhre um die Länge einer mit dem Tone gleichen stehenden Welle vergrößert wird, derselbe Ton wiederkehrt.

Der Vorgang der Bewegungen in den Zungenpfeifen wird durch diese Erfahrungen so festgestellt, wie wir ihn vorhin aussprachen. Der Ton rührt her von dem intermittierenden Luftstrome, der durch das abwechselnde Öffnen und Schließen der Zunge hervorgebracht wird. Die Schwingungen der Zunge werden aber bedingt durch die Elastizität der Zunge und die mit den Schwingungen der Zunge isochronen und synchronen Schwingungen der Luftsäule in den Pfeifen. Diese ändern die Schwingungsdauer der Zunge ab und bewirken, daß dieselbe entweder langsamer schwingt, wenn die Pfeife angeblasen wird, oder rascher als die Zunge allein, wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Um diese Wechselwirkung der schwingenden Luftsäule und der schwingenden Platte zu verstehen, denken wir uns mit W. Weber[1]) eine Zungenpfeife, wo die Zunge in einer zur Längsachse der Röhre senkrechten Platte

Fig. 309.



besteht. Sei ad (Fig. 309) eine an beiden Seiten offene Röhre, deren Luftsäule in stehende Schwingungen versetzt ist, so daß bei α, β, γ Schwingungsknoten und bei a, b, c, d Schwingungsmaxima sich befinden; bei m sei in derselben eine Zunge, welche, wie in den Zungenpfeifen, genau dieselben Bewegungen besitzt, wie eine an dieser Stelle befindliche Luftschicht, wenn wir eine einfache offene Röhre hätten. Eine solche Platte wird die

1) *W. Weber*, Poggend. Ann. **17**. 1829.

Schwingungen der Luft durchaus nicht stören, wenn sie unserer Annahme gemäß wegen ihrer eigenen Elastizität und wegen des sie gerade so wie eine dort befindliche Luftschicht treffenden Druckes der mitschwingenden Luft genau dieselbe Bewegung besitzt, als eine dort befindliche Luftschicht. Wenn aber eine solche Platte sich in *m* befindet, so kann die Luft sowohl in dem Röhrenstücke *md* gerade so schwingen als vorher, wenn das Röhrenstück *ma* ganz fortgenommen ist und die Platte *m* die Rolle einer Zunge in der Zungenpfeife spielt, als auch in der Röhre *ma*, wenn das Stück *md* ganz fortgenommen wird. Diese beiden Zungenpfeifen werden dann genau denselben Ton geben, da die Schwingungen in beiden gleich sind, obwohl sie verschiedene Längen haben; die Pfeife *ma* aber nur, wenn sie von innen, die Pfeife *md*, wenn sie von außen angeblasen wird.

In den Schwingungsknoten der stehenden Schwingungen ist die Luft immerfort in Ruhe, in den Längen $\alpha\beta$ . . hat die Luft eine hin und her gehende Bewegung, so daß sie z. B. zugleich von α und γ sich nach β und in der folgenden Zeit von β nach α und γ hin bewegt. Dabei haben die Teilchen *a*, *b*, *c*, *d* die schnellste Bewegung und die größten Exkursionen, in α, β und γ dagegen treten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ein.

Wenn wir statt der ganzen Röhre *ad* nur das mit der Zunge *m* verschlossene Stück *md* nehmen, so muß, wenn die Bewegung genau so bleiben soll wie vorher, durch Anbringen der Zunge also keine Änderung stattfinden soll, die Zunge *m* nach außen schwingen, wenn die Luftteilchen zwischen *m* und γ nach außen schwingen, wenn also bei nicht vorhandener Zunge bei β eine Verdichtung einträte; dagegen nach innen, das heißt, sie muß die Röhre verschließen, wenn die Luft zwischen *m* und γ nach innen schwingt, also bei γ eine Verdichtung eintreten würde.

Wenn wir dagegen das mit der Zunge *m* verschlossene Röhrenstück *ma* nehmen, so bewegt sich dort die Zunge nach außen, das heißt, sie öffnet die Röhre, wenn bei β und auf der Strecke βc eine Verdünnung eintritt, indem auch dann die Schwingungen der Platte mit denen der durch sie ersetzten Luftschicht gleich sein müssen. Im ersten Falle öffnet sich daher die Zunge, wenn vor ihr bei β und in ihrer ganzen Umgebung, da auch die Strecke $c\beta$ dann verdichtet wird, eine Verdichtung eintritt; im zweiten Falle aber, wenn die Luftschwingungen verdünnend sind, wenn bei *m* eine Verdünnung der Luft eintritt.

Wenn wir eine Zungenpfeife anblasen, das heißt die Luft in dem Behälter des Fußes *F* verdichten, so folgt aus dem Vorigen, daß die Pfeife sich verhalten muß wie die Röhre *md*, daß die Röhre sich öffnen muß, wenn die Schwingungen der Luft in der Nähe der Platte verdichtende sind; denn wenn die Schwingungen in der Pfeife *md* ganz dieselben sein sollen wie in der offenen Pfeife *ad*, so muß die die Zunge umgebende Luft sich gerade so verhalten, wie die an ihrer Stelle befindliche Luft in der offenen Pfeife.

Blasen wir aber die Pfeife von innen an oder bringen wir sie durch Saugen zum Tönen, das heißt machen wir die Luft im Behälter des Fußes dünner als im Innern der Pfeife, so muß die Öffnung der Pfeife mit einer verdünnenden Schwingung der Luftsäule zusammenfallen, die Luft muß, wie bei dem mit der Zunge verbundenen Röhrenstucke *ma*, in der Umgebung

der Zunge dünner werden, sie muß sich von dem Schwingungsknoten β fortbewegen, wenn die Zunge die Röhre öffnet. Denn auch hier wieder muß die Luft in der Umgebung der Zunge sich gerade so verhalten, wie in unserer Pfeife *ad*, wenn die Zunge *m* die Pfeife *ma* abschließen und die Bewegung doch die frühere bleiben soll.

Es folgt also daraus, daß, wenn eine Zungenpfeife durch Blasen zum Ansprechen gebracht wird, im Innern der Pfeife der Zunge ein Schwingungsmaximum zunächst liegt, wenn aber durch Saugen, ein Schwingungsknoten der Zunge zunächst liegt.

Diese Folgerung hat Weber durch folgende beiden Erfahrungssätze bestätigt.

1) Bei einer angeblasenen Pfeife besteht die Luftsäule der Pfeife aus einer beliebigen Anzahl stehender Wellen plus einem Reste, der größer als Null, aber kleiner als eine halbe stehende Welle ist.

2) Bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten Zungenpfeife besteht die schwingende Luftsäule aus einer beliebigen Anzahl ganzer stehender Wellen plus einem Reste, der größer als eine halbe, aber kleiner als eine ganz stehende Welle ist.

Da nun immer an dem obern offenen Ende der Pfeife bei *a* oder *d* ein Schwingungsmaximum sich befindet, so folgt aus diesen beiden Sätzen die vorige Folgerung, bei einer angeblasenen Pfeife befindet sich zunächst bei der Zunge ein Schwingungsmaximum, bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten ein Schwingungsknoten.

Einen Zahlenbeleg für den ersten Erfahrungssatz haben wir bereits oben mitgeteilt.

Die Zungenpfeife gab beim Anblasen einen Ton von 365 Schwingungen bei einer Pfeifenlänge

$$\begin{aligned} l &= 19{,}7^{\text{cm}} = 0 \cdot 47{,}0 + 19{,}7 \\ l &= 66{,}1 \text{ „ } = 1 \cdot 47{,}0 + 19{,}1 \\ l &= 113{,}7 \text{ „ } = 2 \cdot 47{,}0 + 19{,}7. \end{aligned}$$

Jedesmal bleibt ein Rest, der kleiner ist als $23{,}5^{\text{cm}}$ der Länge einer halben stehenden Welle.

Aus dieser Art, wie die Schwingungen der Luft mit denen der Platte zusammentreffen, folgt nun auch, daß die Schwingungen der Zunge beim Anblasen langsamer, der Ton also tiefer, beim Ansaugen aber rascher, der Ton der Pfeife also höher werden muß.

Beim Anblasen ist nämlich, wenn die Zunge gegen das Innere der Pfeife schwingt, die Endabteilung der schwingenden Luft in jenem Rest verdünnt; sie beschleunigt daher die Zunge nach dem Innern der Pfeife, während die eigene Elastizität der Zunge derselben, da sie nach innen zu von ihrer Gleichgewichtslage sich entfernt hat, eine Beschleunigung nach außen erteilt. Die Verdünnung der Luft in der Röhre hält folglich einem Teile der Elastizität der Zunge das Gleichgewicht. Während die Zunge nach außen schwingt, ist die Endabteilung der Luft verdichtet, sie beschleunigt daher die Zunge nach außen, während die Elastizität der Zunge die Platte wieder nach der entgegengesetzten Richtung beschleunigt; also auch hier wieder wirkt der Luftdruck der Elastizität der Platte entgegen.

Da also der Einfluß der schwingenden Luftsäule der Elastizität der Platte entgegenwirkt, so schwingt die Platte langsamer, gerade so, als wenn ihre Elastizität vermindert wäre. Der Ton der Zungenpfeife ist daher stets tiefer als der der isoliert schwingenden Zunge und kann höchstens, wenn die Zunge sich gerade an der Stelle des Schwingungsmaximums befindet, wo die Luft eine hin und her gehende Bewegung ohne Verdichtung oder Verdünnung besitzt, die Tonhöhe der isoliert schwingenden Platte erhalten.

Wird die Pfeife durch Saugen zum Ansprechen gebracht, so müssen, wie man durch ganz ebensolche Überlegungen direkt erkennt, die Schwingungen der Zunge rascher, der Ton höher sein als der der isoliert schwingenden Zunge. Die Grenze ist wieder die Tonhöhe der Zunge, wenn sie gerade an der Stelle eines Schwingungsmaximums sich befindet.

Je näher die Zunge einem Schwingungsknoten rückt, um so größer ist der Einfluß der Luft, da die Verdichtungen und Verdünnungen an der Platte immer größer werden. Wenn man nun die Länge der Röhre vergrößert, so rückt dadurch in beiden Fällen die Platte dem Schwingungsknoten näher, der Ton muß sich beim Anblasen von unten daher vertiefen, bis die Pfeife sich soweit verlängert hat, daß sie wieder ein Vielfaches der Wellenlänge des ursprünglichen Tones ist; dann teilt sie sich wieder in schwingende, dem Tone der Zunge entsprechende Abteilungen und an der Zunge bildet sich wieder ein Schwingungsmaximum.

Wir müssen uns begnügen, soweit die Änderung der Tonhöhe nachgewiesen zu haben; die Größe derselben, wie sie sich aus Webers Versuchen ergibt, läßt sich ohne die vollständige Theorie von Weber, die uns hier zu weit führen würde, nicht ableiten.

§ 169.

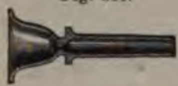
Weiche Zungen; chemische Harmonika; empfindliche Flammen.

Während bei den bisher besprochenen Zungen durch den Einfluß der in der Röhre schwingenden Luftsäule der Ton der freien Zunge nur mehr oder weniger modifiziert wird, hängt bei einer andern Gattung von Zungen der Ton lediglich von den Schwingungen der mit Hilfe der Zungen bewegten Luftsäule ab, bei den sogenannten weichen Zungen. Weiche Zungen sind die aus elastischen Rohrplatten geschnitzten Zungen der Holzblasinstrumente, Klarinette, Oboe und Fagott, sowie die zur Tonerzeugung der Blechblasinstrumente benutzten menschlichen Lippen. Die Klarinette hat eine breite Zunge, welche im Mundstücke derselben ähnlich befestigt ist wie die Zungen in den Rohrwerken der Zungenpfeifen; Oboe und Fagott haben zwei Zungen, welche am Ende des Mundstücks einander gegenüber gestellt und nur durch einen schmalen Spalt voneinander getrennt sind. Bläst man hinein, so wird der Spalt durch den Druck der im Munde zusammengepreßten Luft abwechselnd geschlossen, abwechselnd durch die Elastizität der Zungen geöffnet, und dieser intermittierende Luftstrom erzeugt die Schwingungen in den mit den Zungen verbundenen Röhren, die wir dann als Ton wahrnehmen.

Bei den Blechblasinstrumenten wird die schwingende Bewegung der Luft an dem Mundstücke durch rasch folgendes abwechselndes Schließen und Öffnen der Lippen erzeugt. Das Mundstück hat dort eine trichterförmige

Gestalt (Fig. 310). Die Lippen des Bläsers liegen in der obern Höhlung und sind im Ruhezustande geschlossen. Durch den Druck der in der Mundhöhle angesammelten Luft werden sie geöffnet, und der Luftstrom dringt in das Instrument. Ist eine geringe Menge Luft aus dem Munde entwichen, so schließen sich die Lippen wieder, da die Spannung der Luft kleiner geworden ist. Da dann die Luft keinen Ausweg hat, öffnet ihr Druck die Lippen wieder, und so erneuert sich das Spiel der Lippen immerfort. Der intermittierende Luftstrom erzeugt in dem Rohre stehende Schwingungen, und diese sind es, die wir als Ton wahrnehmen.

Fig. 310.



Damit nun aber diese stehenden Schwingungen existieren können, müssen die Stöße bei den Holz- und Blechblasinstrumenten in derselben Periode erfolgen, es müssen also die Zungen mit denselben isochron schwingen. Die Schwingungen der weichen Zungen hängen nun nach der von Helmholtz[1]) entwickelten Theorie derselben nicht wesentlich von der Elastizität der Zungen ab, sondern von der in der Röhre schwingenden Luft, sie schwingen mit der Luftsäule isochron, wenn der durch die in der Tiefe des Rohres vorhandenen Luftwellen bewirkte Wechsel des Luftdruckes hinreichend ist, um die Zungen in eine schwingende Bewegung zu versetzen. In einer schwingenden Luftsäule ist aber der Druckwechsel am größten in den Schwingungsknoten, wie an dem geschlossenen Ende einer gedeckten Pfeife; deshalb gibt eine solche mit einer weichen Zunge versehene Röhre diejenigen Töne, welche die Röhre geben würde, wenn sie an der Stelle der Zunge geschlossen und unten angeblasen würde.

Befindet sich deshalb die Zunge, wie bei der Klarinette, an dem einen Ende eines zylindrischen engen Rohres, so sind die Töne der Grundton der Röhre, die Quint seiner Oktave, die Terz der folgenden Oktave usf., wie bei einer gedeckten Pfeife derselben Länge. Man kann alle die Töne erzeugen, indem man das Rohr in verschiedener Stärke anbläst.

Ist das Rohr kegelförmig, so ist die Reihe der Töne eine andere. Für an beiden Seiten offene konische Röhren, oder für solche, welche vollständige Kegel und an der Spitze geschlossen sind, ergibt sich sowohl aus den Versuchen Zamminer's[2]) als aus der Theorie von Helmholtz[3]), daß die in ihnen möglichen Töne genau übereinstimmen mit denen einer ihnen an Länge genau gleichen offenen zylindrischen Röhre. Ist dagegen das Rohr ein abgestumpfter Kegel, und die schmalere Fläche verschlossen, so stimmt die Reihe der Töne weder mit der einer offenen noch mit der einer gedeckten Pfeife überein, sie nähert sich derjenigen einer offenen Pfeife indes um so mehr, je kleiner das Stück ist, welches an einem vollständigen Kegel fehlt. Die Tonreihe läßt sich dann nur durch eine transzendente Gleichung berechnen. Ganz ebenso verhält es sich mit den kegelförmigen Röhren, die mit Zungen versehen sind, also mit Oboe und den Blechblasinstrumenten. Setzt man die Länge des Rohres l und die an derselben anzubringende Korrektion für das untere offene Ende a, so erhält man die Schwingungszahlen n aus der Gleichung

1) *Helmholtz*, Poggend. Ann. **114**. 1861.
2) *Zamminer*, Poggend. Ann. **97**. 1856.
3) *Helmholtz*, Poggend. Ann. **114**. 1861. Tonempfindungen. p. 580.

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi(l+a)}{c} = -\frac{2n\pi r}{c},$$

worin r der Abstand der Zunge von der ideellen Spitze des Kegels und c die Geschwindigkeit des Schalles bedeutet.[1]) Um die entstehenden Töne zu übersehen, geben wir im Folgenden die Reihenfolge, welche Helmholtz für eine konische Röhre von Zink beobachtet und berechnet hat, deren Länge 122,7 oder mit der Korrektion $124{,}77^{cm}$ war, deren untere Öffnung 5,5, deren obere $0{,}7^{cm}$ war, für welche also r, der Abstand des obern Endes von der ideellen Spitze des Kegels $18^{cm},2$ war.

Die Tabelle gibt die Wellenlängen, also die Werte $\frac{c}{n}$ und daneben die Länge der offenen oder gedeckten Pfeife, in welchen der betreffende Ton als Grund- oder Oberton bestehen kann.

	Ton	Wellenlänge	Länge der entsprechenden Pfeife	
			offen	gedeckt
1	H —	283,61	141,80	70,90
2	h —	189,83	139,84	104,88
3	fis_1	91,81	137,71	114,76
4	h_1 +	67,94	135,88	118,89
5	dis_2	53,76	134,39	120,95
6	g_2	44,10	133,21	122,11
7	h_2	37,79	132,26	122,82
8	c_3	32,87	131,50	123,28
9	dis_3	29,22	131,47	124,17

Die in den beiden letzten Spalten gemachten Angaben sind so zu verstehen, daß die in einer Horizontalreihe angegebenen Pfeifenlängen den in derselben Reihe stehenden Ton als den sovielten Oberton hat, als dieser Ton der Oberton der Zungenpfeife ist. Eine offene Pfeife z. B., deren Länge $134{,}39^{cm}$ ist, gibt als fünften Ton dasselbe dis_2, welches als fünfter Ton in der Zungenpfeife entsteht, und ebenso würde es der fünfte Ton einer gedeckten Pfeife von $120{,}95^{cm}$ Länge sein, also neunmal soviel Schwingungen haben, wie der Grundton einer solchen Pfeife.

Man sieht, es würden bei dieser Röhre die ersten Töne, wenn man die Reihe als diejenige einer offenen Pfeife betrachten wollte, gegen die spätern viel zu tief sein, erst die letzten würde man als die einer offenen Pfeife betrachten können, deren Länge größer ist als die Länge der konischen Röhre und kleiner als die des ganzen Kegels. Andererseits kann man die Töne als jene einer gedeckten Pfeife auffassen, deren Länge gleich jener der konischen Röhre ist.

Je kleiner übrigens der Wert von r ist, das heißt je näher sich die Zunge der Spitze des Kegels befindet, um so näher rückt die Reihe der Töne denen einer offenen Pfeife, welche sie auch nach der Gleichung für $r = 0$ erreicht, denn die Werte, für welche

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi(l+a)}{c} = 0$$

1) *Helmholtz*, Poggend. Ann. 114 p. 326. 1855.

sind

$$\frac{2n}{c}(l+a) = 1,\ 2,\ 3 \cdots p,$$

also die Reihe der natürlichen Zahlen. Ist r klein, so kann man die Tonreihe als jene einer offenen Pfeife betrachten, deren erste Töne gegen die folgenden etwas zu tief sind.

Als eine besondere Art weicher Zungen kann man die Flammen betrachten, welche die chemische Harmonika zum Tönen bringen. Wenn man in ein an beiden Enden offenes Rohr, ein Metall- oder Glasrohr von beliebiger Länge und etwa $2-4^{\mathrm{cm}}$, bei langen Röhren auch größerem, Durchmesser von unten her eine Gasflamme einführt, so gibt die Röhre, wenn die Flamme passend weit in die Röhre eingeschoben ist und eine passende Größe hat, einen kräftigen Ton, der an Höhe gleich ist dem Grundtone, den die Röhre als offene Pfeife gibt. Es wird also die Luft der Pfeife durch die hineingeschobene Flamme zum Schwingen gebracht. Daß die Höhe des Tones in der Tat nur von der Länge der Pfeife abhängt, hat Tyndall[1]) durch einen sehr hübschen Versuch gezeigt. Man steckt auf das Rohr einen Zylinder aus Pappendeckel, der sich mit sanfter Reibung auf dem Rohr verschieben läßt, zunächst so, daß der obere Rand des Zylinders mit dem oberen Rande des Rohres zusammenfällt. Läßt man die Röhre tönen, und zieht den Pappezylinder hinauf, so daß die Röhre verlängert wird, so wird der Ton tiefer, und zwar nach dem Gesetze der Längen der offenen Pfeifen. Man kann sich deshalb leicht eine Reihe von Röhren herstellen, welche etwa die Töne der Tonleiter geben.

Die Entstehung des Tones ist auf das bei jeder durch ausströmendes Gas gespeisten Flamme vorhandene Flackern zurückzuführen; durch ein solches zunächst ganz unregelmäßiges Flackern gerät die Luft der Röhre, bezw. da die Röhre als Zugröhre wirkt, der aufsteigende Luftstrom in eine schwingende Bewegung, diese wird von den Grenzen der Röhre reflektiert und veranlaßt stehende Schwingungen, denen sich die Flamme, wenn sie von passender Größe ist, sofort anpaßt und zwar so, daß sie gerade so vibriert, wie die Flamme einer Königschen Flammenkapsel. Die Flamme bietet im rotierenden Spiegel ganz dasselbe Bild.

Da größere Flammen sich den raschern Schwingungen nicht so leicht anpassen, so müssen die Flammen in längern Röhren größer, in kürzern kleiner sein. Hat man in einer Röhre die Flamme passend gestellt, so daß sie den Grundton der Röhre gibt, und man verkleinert sie, so hört die Röhre zunächst auf zu tönen, verkleinert man die Flamme weiter und weiter, so gibt sie bei passender Verkleinerung wieder einen Ton, der aber jetzt der erste Oberton der Röhre ist. Tyndall nahm zwei Glasröhren, die eine von 230^{cm}, die andere von 115^{cm} Länge. Er brachte die erste, indem er die Flamme einführte, zum Tönen; indem er dann die lange Röhre mit der kürzern vertauschte und diese über die Flamme schob, tönte sie zunächst nicht; Verkleinerung der Flamme brachte die kürzere Röhre zum

1) *Tyndall*, Der Schall, deutsche Übersetzung. Braunschweig 1869. p. 263. Die Tonerzeugung in der chemischen Harmonika wurde zuerst mit Wasserstoffflammen von *Higgins* (nach Tyndall l. c. p. 268 im Jahre 1777) beobachtet: *Chladni* gibt schon in seiner Akustik das wesentliche der ganzen Erscheinung

Tönen. Als er nun die längere Röhre wieder über die Flamme schob, tönte auch diese wieder, gab aber ihren ersten Oberton, die Oktave, welche von gleicher Höhe ist, wie der Ton der halb so langen Röhre.

Insoweit sind also die Flammen selbständiger als die weichen Zungen, sie passen sich nicht jeder Schwingung an und können deshalb nicht jeden Ton unterhalten. Eben deshalb ist auch der Ton der Röhre in geringerm Grade von der Größe der Flamme abhängig wie die Töne der offenen Pfeife von der Stärke des Anblasestromes. Stimmt man zwei Röhren ganz gleich und vergrößert darauf eine der beiden Flammen, so hört man sofort die Verstimmung des Tones, er wird etwas tiefer.

Ebenso wie durch das Flackern der Flamme die Schwingungen der Luft in den Röhren erregt werden, so werden, wie Graf Schaffgotsch[1]) zuerst beobachtet hat, auch die Flammen durch die Schwingungen der Luft zum Flackern gebracht. Bringt man eine Flamme in ein an beiden Enden offenes Rohr, die das Rohr nicht zum Tönen bringt, und gibt außerhalb den Grundton oder ersten Oberton des Rohres an, so kommt die Flamme zum Flackern. Ist die Flamme so gestellt, daß es nur mehr einer geringen Veränderung derselben bedarf, damit sie das Rohr zum Tönen bringe und man gibt außen den Ton der Röhre an, so gelangt die Flamme zum Singen.

Auch außerhalb einer solchen Röhre können frei brennende Flammen empfindlich sein, wie zuerst Leconte an einer in einem Konzertsaale brennenden Flamme beobachtet hat.[2]) Es war zufällig, wie Leconte nachher feststellte, eine Flamme so reguliert, daß sie fast das für Gasflammen bei zu hohem Druck charakteristische Rauschen zeigte. Die Flamme geriet besonders durch die starken Töne des Violoncells in lebhafte Schwingungen.

Das Verhalten und die Darstellung solcher im Freien brennender empfindlicher Flammen ist besonders von Barret und Tyndall[3]) untersucht worden. Als wesentliche Bedingung der Empfindlichkeit ergab sich ein derartig hoher Druck des Gases, daß die Flamme fast zum Rauschen kommt, und weiter, daß nicht unmittelbar vor dem Brenner ein Hahn mit zu enger Öffnung ist. Wenn man in dieser Weise eine Flamme eines Fischschwanz- oder Fledermausbrenners hergerichtet hat, so fahren aus ihr, wenn die richtigen Töne angegeben werden, sieben Zacken hervor. Am auffallendsten werden die Erscheinungen, wenn man aus einem passenden Einlochbrenner, etwa einer Glasröhre, die zu einer passenden Öffnung ausgezogen und abgeschnitten ist, aus einem unter passend hohem Druck stehenden Gasometer gespeiste lange Flammen hervortreten läßt. Man kann hierdurch viele Zentimeter lange Flammen erhalten. Ist der Druck so reguliert, daß die Flamme gerade noch nicht zum Flackern kommt, so reagiert sie auf hohe Töne so, daß sie bei jedem passenden Tone zusammenschrumpft und ins Flackern gerät; bei dem Tönen kleiner Glocken, bei dem Klirren eines Schlüsselbundes gerät sie in ein lebhaftes Hüpfen.

Ebenso wie Flammen sind unter denselben Bedingungen auch nicht

1) Graf *Schaffgotsch*, Poggend. Ann. **101** p. 471. 1857.

2) *Leconte*, Philosoph. Mag. 15. 4 p. 235. 1858.

3) Die Resultate der Untersuchungen von *Barret* und *Tyndall* sind ausführlich in Tyndalls Buch „Der Schall" mitgeteilt.

brennende Gasströme empfindlich, wie man erkennt, wenn man die Ströme etwa mit Rauch sichtbar macht.

Nach Tyndall flackert eine solche Flamme, wenn das Gas infolge der Reibung in Schwingung gerät; wenn man nun den Druck des Gases so reguliert, daß eine kleine Vermehrung des Druckes die Flamme zum Flackern bringen würde, und erzeugt in der Nähe eine Schwingung, welche der der flackernden Flamme entspricht, so teilt sich die Schwingung der Flamme mit, und sie kommt infolge der Schwingung gerade so zum Flackern wie durch die kleine Vermehrung des Druckes. Auch hier zeigt sich wieder, daß die Gasströme nur auf Schwingungen bestimmter Perioden reagieren.

Bouty[1]) stellte fest, indem er Gase aus verschiedenen Öffnungen ausströmen ließ, daß kreisrunde Öffnungen die größte Empfindlichkeit liefern. Benutzt er reinen Wasserstoff, so wird die Flamme ganz unempfindlich, mischt er hingegen ein schwereres Gas, z. B. Kohlensäure bei, so reagiert die Flamme viel besser. Ein Gemisch von Wasserstoff und Acetylen hat den Vorteil, eine helle und zugleich sehr empfindliche Flamme zu erzeugen.

Diese empfindlichen Flammen sind ein vorzügliches Reagens auf bei ihnen ankommende Schallschwingungen; wir werden sie noch als solche verwerten.

Zu erwähnen an dieser Stelle ist auch noch die „sprechende Bogenlampe" von Th. Simon[2]). Sie beruht kurz auf folgendem Prinzip: Über den Stromkreis (Gleichstrom) einer Bogenlampe lagert man die Stromschwankungen eines Mikrophons, die durch irgend welche Schallschwingungen hervorgebracht sind. Die Übertragung geschieht z. B. mit einer Induktionsspule, bei der die eine Windungslage von dem Lampenstrom, die andere von dem Mikrophonstrom durchflossen wird. In betreff der elektrischen Einrichtung sei auf den dritten Band verwiesen.

Die Stromschwankungen erzeugen im Flammenbogen gewisse Änderungen, die sich nach außen wieder als Schallwellen zu erkennen geben. Auf die möglichen und wahrscheinlichen Änderungen im Bogen selbst kann hier nicht eingegangen werden. Bei Anwendung guter Mikrophone können die Töne des Bogens sehr laut werden. Wird also in das Mikrophon hineingesprochen, so gibt die Bogenlampe das Gespräch wieder laut von sich.

§ 170.

Die Blasinstrumente. Die sämtlichen Blasinstrumente lassen sich als Anwendungen der Labialpfeifen und Zungenpfeifen betrachten. Die Orgelpfeifen sind Labialpfeifen und Zungenpfeifen in der von uns betrachteten Form; das Flageolet, die Flöten sind Labialpfeifen, die Harmonika und das Äolodikon Zungen ohne Pfeifen, die Klarinetten, Bassethörner, Oboen, Fagotte sind Zungenpfeifen mit weichen Zungen, Klarinette und Bassethorn mit zylindrischem, Oboe und Fagott mit kegelförmigem Ansatz-

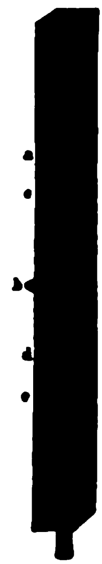
1) *E. Bouty*, Journ. de phys. 5. (3.) p. 404. 1896. C. R. **122**. p. 372. 1896.
2) *Th. Simon*, Wied. Ann. **64**. p. 233. 1898. Phys. Z. S. **2**. p. 253. 1901. Ferner Literatur über diesen Gegenstand: *O. Hartmann*, Elektrot. Z. S. **20**. p. 369. 1899; *E. Rhumer*, Phys. Z. S. 2. p. 325. 1901; D. Mechan. **9**. p. 77 und 217. 1901.

rohr, bei denen die Zungen der Spitze des Kegels sehr nahe liegen: die Erzeugung des Tones ist darnach bei allen diesen Instrumenten nach dem Vorigen gegeben.

Wir haben nur einiges hinzuzusetzen, um die Mittel zu verstehen, durch welche man auf diesen Instrumenten anstatt des Grundtones und seiner harmonischen Obertöne eine ausgedehnte Reihe von Tönen erzeugt.

Wenn man in die Wand einer Pfeife, Fig. 311, an irgend einer Stelle ein Loch einbohrt, so kann an dieser Stelle die Luft auch nach andern Richtungen, als nach der Längsachse der Röhre bei einer ankommenden Bewegung entweichen; es tritt demnach auch dort eine Reflexion ein, wie an dem Ende einer offenen Pfeife; es muß bei stehenden Schwingungen dort sich ein Schwingungsmaximum bilden. Blasen wir eine offene Pfeife so an, daß sie ihren zweiten Ton gibt, also mit zwei Knoten, jeder $\frac{1}{4}$ vom Ende der Röhren und einem Schwingungsmaximum in der Mitte, so wird es demnach keine Änderung in dem Tone der Pfeife machen, wenn wir in der Mitte der Wand eine Öffnung herstellen, da sich dort schon ein Schwingungsmaximum befindet. Durch die Öffnung in der Wand wird die Pfeife gewissermaßen halbiert und der Ton wird der Grundton dieser halb so langen Pfeife. Öffnen wir dagegen die Pfeife bei a oder an der Stelle des untern Schwingungsknotens bei e, Fig. 311, so muß jetzt an diesen Stellen ein Schwingungsmaximum entstehen und der Ton springt in die höhere Oktave über, die Luftsäule zerlegt sich in sechs schwingende Abteilungen, deren Knoten $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ der Länge der Röhre von dem Boden der Pfeife entfernt sind.

Fig. 311.



Ebenso würde eine Änderung des Tones entstehen müssen, wenn wir an irgend einer andern Stelle der Wand außer bei b eine Öffnung anbringen, da stets an dieser Stelle ein Schwingungsmaximum eintreten muß, die Länge der schwingenden Abteilungen also geändert wird. Je nach der Stelle der Öffnung wird dann der Ton ein anderer.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn wir durch verändertes Anblasen einen der andern Töne der Pfeife hervorbringen; auch dann wird eine angebrachte Öffnung im allgemeinen den Ton ändern und durch eine Öffnung an einer bestimmten Stelle können wir einen bestimmten Ton hervorrufen. Diesen Kunstgriff wendet man bei den meisten Blasinstrumenten an, um eine bestimmte Tonreihe zu erhalten, sowohl bei den Flöten als den Zungeninstrumenten, den Klarinetten usw.

Haben wir z. B. eine Flöte, deren Rohr als Grundton den Ton d_1 angibt und versehen wir dieselbe in passenden Abständen mit sechs Öffnungen von ihrem Ende zur Mundöffnung hin, so wird die Flöte beim Verschlusse aller der Löcher den Ton d_1 geben; öffnen wir sie nun nach und nach, so werden wir dadurch die Reihe der Töne e_1, f_1, g_1, a_1, h_1, c_2 erhalten können.

Um z. B. den Ton a_1 zu erhalten, bedarf es nicht einmal einer Öffnung der weiter von dem Mundloch entfernten Löcher, bleiben die drei letzten Löcher geschlossen und wir öffnen nur das dritte Loch, von der Mundöffnung an gerechnet, so muß schon der Ton a_1 entstehen.

Durch verstärktes Anblasen erhalten wir bei geschlossenen Löchern den zweiten Ton der Röhre d_2, und bei reihenweiser Öffnung erhalten wir die Oktaven der vorigen Töne e_2, f_2 usw. Werden noch weitere Öffnungen oder Klappen zwischen den vorigen angebracht, um die erhöhten oder vertieften Töne *dis*, *fis* .. zu erzeugen, so sind wir imstande, mit diesem Instrumente die Töne der chromatischen Tonleiter durch die zwei Oktaven d_1 bis d_3 und andere höhere Töne zu erzeugen.

Bei den Blechblasinstrumenten, Trompete, Horn, Posaune, hat man diese Hilfsmittel der Tonerhöhung nicht, sie sind deshalb auf ihre natürlichen Töne beschränkt. Da diese Instrumente aus langen kegelförmigen Röhren bestehen, bei welchen das Mundstück der Spitze des Kegels ziemlich nahe liegt, so ist die Tonreihe dieser Instrumente sehr nahe derjenigen einer offenen Pfeife gleich. Um die verschiedenen hohen Töne hervorzubringen, hat der Bläser hier nur das Mittel, die Stärke des Luftstromes und damit die Schnelligkeit, mit denen die Öffnungen des Mundes sich folgen, zu ändern. Je stärker der Luftdruck ist, um so rascher folgen sich die einzelnen Stöße, ein um so höherer Ton tritt aus dem Instrumente hervor. Die Kunst des Bläsers ist es, die betreffenden Drucke für die einzelnen Töne im Gefühl zu haben und hervorzubringen.

Um eine große Anzahl von Tönen auf diesen Instrumenten zu haben, macht man sie sehr lang und gibt ihnen nur eine kleine Weite, da die Erfahrung gelehrt hat, daß die engen Röhren leichter ansprechen. Das Horn hat nach Zamminer eine Länge von 27 Fuß, sein Grundton ist daher es_{-2}, und die Reihe der Töne ist

1 es_{-2}	7 des_1 —	13 h_1 +	19 fis_2 +
2 es_{-1}	8 es_1	14 c_2 +	20 g_2
3 b_{-1}	9 f_1	15 d_2	21 gis_2 —
4 es	10 g_1	16 es_2	22 as_2 +
5 g	11 as_1 +	17 e_2	23 a_2 +
6 b	12 b_1	18 f_2	24 b_2.

Die ersten beiden Töne werden nicht gebraucht, in den höhern Lagen sieht man, liegen die Töne ziemlich nahe beisammen, sie sind indes zum Teil höher als die hingeschriebenen Um diese Töne brauchbar zu machen, wendet man dieselbe Art des Stimmens an, wie bei den offenen Pfeifen, man macht die Instrumente zu teilweis gedeckten, indem der Spieler die geballte Faust in die trichterförmige Erweiterung bringt. Bei den Posaunen helfen die Auszüge des Rohres nach, die gleichzeitig den Zweck haben, die Instrumente in verschiedenen Tonarten brauchen zu können. Bei den Hörnern erreicht man letzteres durch Einschieben von Röhrenstücken in die Windungen.

In neuerer Zeit hat man auch an den Blechinstrumenten Klappen zur Veränderung der Tonhöhe angebracht, der Klang solcher Instrumente hat indes eine viel geringere Fülle.

Die Klänge der Zungeninstrumente sind viel schärfer als jene der Labialpfeifen und Streichinstrumente, da in ihnen wegen der scharfen Diskontinuität bei der Tonerzeugung, der einzelnen durch den Schluß der Zungen unterbrochenen Stöße, viel mehr und höhere Obertöne vorhanden sind. Die schärfsten Klänge haben die Blechblasinstrumente, da in diesen

die schnellern Schwingungen der hohen Töne nicht so rasch vernichtet werden.[1]). Darin beruht im wesentlichen die Klangverschiedenheit zwischen den Blechinstrumenten und den theoretisch ähnlich gebauten Holzblasinstrumenten wie Oboe und Fagott. Der Unterschied letzterer gegen die Klarinette beruht in der Verschiedenheit der Obertöne, die Klarinette hat nur die ungeradzahligen, Oboe und Fagott haben auch die geradzahligen.

§ 171.

Die menschliche Stimme. Das menschliche Stimmorgan ist nach den Untersuchungen von Johannes Müller[2]) als eine Zungenpfeife anzusehen, da der Vorgang, mittels dessen wir die Töne erzeugen, sowie die Mittel, um ihre Höhe zu ändern, wesentlich mit denen der Zungenpfeifen übereinstimmen.

Das Stimmorgan des Menschen befindet sich im Kehlkopf *k* an dem oberen Ende des die Lungen mit der Mund- und Nasenhöhle *M* und *N* in Verbindung setzenden Luftweges, der Luftröhre *L* (Fig. 312 und Fig. 313).

Der Kehlkopf ist aus einer Anzahl fester Knorpel gebildet, zwischen denen die Stimmbänder ausgespannt sind. Die feste Basis des Kehlkopfes ist der Ringknorpel, cartilago cricoides, ein fester Ring, der das obere Ende der Luftröhre umschließt, *a* Fig. 312 im Durchschnitt, und Fig. 313 von der Seite gesehen, und welcher hinten höher ist als vorn. Auf diesem ruht als größere, aber nach hinten offene Umhüllung des Kehlkopfes der Schildknorpel, cartilago thyreoides, *b* Fig. 312 und Fig 313, bestehend aus zwei Platten, die mit ihren vorderen Rändern in einer nach vorn am Halse hervorspringenden Kante fest verwachsen zusammenstoßen, wie Fig. 312 bei *b* im Durchschnitt, Fig. 313 bei *b* von der Seite und Fig. 314 von oben gesehen zeigt.

Der Schildknorpel ist um eine Achse drehbar, *d* Fig. 313 und 314, die sich an einem Fortsatze befindet, welcher von der untern Ecke des hintern freien Randes der Schildknorpelplatte an jeder Seite ausgeht, und welcher andererseits im Ringknorpel befestigt ist. Die Richtung der Achse, um welche sich der Schildknorpel drehen kann, ist Fig 314 durch die Linie *ee* angedeutet; die Bewegung, welche er also annehmen kann, ist nach vorn und herab gerichtet und nach hinten und hinauf. Der Kante des Schildknorpels, in welcher die beiden Platten zusammenstoßen, gegenüber, stehen auf dem erhöhten hintern Rande des Ringknorpels, dicht nebeneinander, die beiden Gießbeckenknorpel, cartilagines arytaenoides, *c* Fig. 313 von der Seite und 314 von oben gesehen. Ihre Basis steht mit dem Ringknorpel durch ein Gelenk in Verbindung, das ihnen gestattet, sich erstens vor- und rückwärts zu bewegen, also sich dem Schildknorpel zu nähern und von ihm zu entfernen, zweitens nach rechts oder links zu bewegen, also einander zu nähern oder voneinander zu entfernen.

Von der Basis jedes der Gießbeckenknorpel springt eine Ecke nach

1) *König* meint, daß die Schärfe des Klanges der Blechblasinstrumente auch daher rühre, daß die Obertöne, wie er bei seiner Pfeife gefunden hatte, § 166, nicht ganz rein seien. Die Ansicht ist nach den Bemerkungen des § 166 wohl nicht richtig.

2) *Johannes Müller*, Handb. d. Physiologie des Menschen 2. p. 179 ff.

vorn vor, der processus vocalis. Zwischen diesen beiden Ecken und der einspringenden Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zusammenstoßen, sind die Stimmbänder *l* (Fig. 312, 314, 315) ausgespannt. Dieselben sperren die Luftröhre bis auf eine schmale Ritze, die Stimmritze, welche in der Ansicht von oben (Fig. 314) dunkel gehalten ist, ab. Nur noch eine kleine Öffnung befindet sich als Verlängerung der Stimmritze zwischen den Rändern der Gießbeckenknorpel, die sogenannte Atemritze. Für gewöhnlich sind wahrscheinlich die Stimmbänder ganz zusammengelegt und die Stimmritze geschlossen, so daß der Luftweg nur durch die Atemritze geöffnet ist.

Fig. 312.

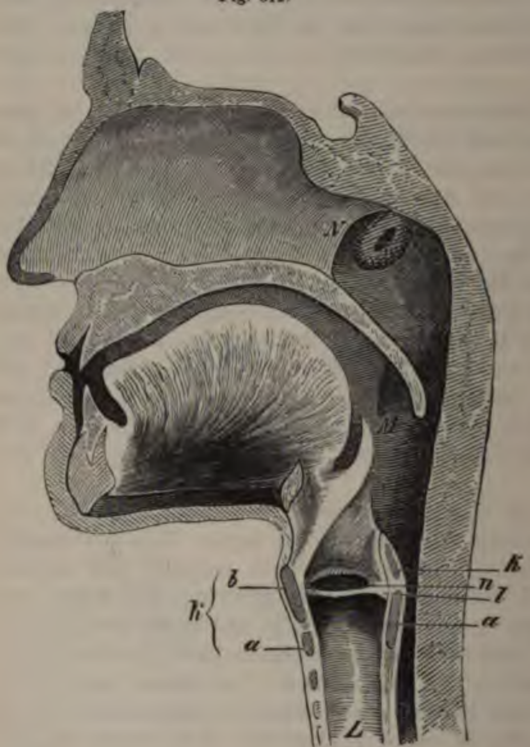


Fig. 313.

Die Stimmbänder sind die Zungen des mit der Zungenpfeife zu vergleichenden Stimmapparates, über ihnen befindet sich als Ansatzröhre die Fortsetzung des Luftweges. Zunächst über den Stimmbändern befindet sich eine nach oben von zwei parallel mit den Stimmbändern verlaufenden Schleimhautfalten, den falschen Stimmbändern *m* (Fig. 315), verschlossene Höhlung, der ventriculus Morgagni *n* (Fig. 312 und Fig. 315). Die falschen Stimmbänder verbinden die Gießbeckenknorpel mit dem Kehldeckel, der epiglottis; und über ihnen endet sich der Luftweg in den Schlund, der in der Mundhöhle und Nasenhöhle ausläuft.

Das Stimmorgan vervollständigen die Muskeln, welche durch Bewegung des Schildknorpels und der Gießbeckenknorpel die Stimmbänder schließen

oder öffnen, spannen oder erschlaffen. Die Stimmbänder werden gespannt durch den Musculus cricothyreoideus *f* (Fig. 313), welcher den Schildknorpel nach vorn, und den cricoarytaenoideus posterior *g* (Fig. 313 und Fig. 314), der den Gießbeckenknorpel nach hinten herunter zieht. Die Stimmbänder werden erschlafft durch den musculus thyreoarytaenoideus *i* (Fig. 314), welcher den Schildknorpel und Gießbeckenknorpel gegen einander und den musculus cricoarytaenoideus anterior *h* (Fig. 314), welcher den Gießbeckenknorpel nach vorn zieht.

Die Stimmritze wird geschlossen durch die musculi arytaenoidei *k* (Fig. 314), welche an beiden Gießbeckenknorpeln inserieren und dieselben gegeneinander ziehen, sie wird geöffnet durch die beiden musculi cricoarytaenoidei *g* und *h* (Fig. 314), welche, indem sie zusammenwirken, die Gießbeckenknorpel seitwärts herabziehen.

Durch Versuche an aufgeschnittenen Kehlköpfen sowohl, als an lebenden Menschen, welche eine Luftröhrenfistel besaßen und durch Beobachtungen mit dem Kehlkopfspiegel ist es erwiesen, daß zur Tonbildung die Atem-

Fig. 314.

Fig. 315.

ritze vollständig geschlossen und ebenso die Ränder der Stimmbänder fast vollständig aneinander gelegt werden. Zugleich müssen die Stimmbänder durch die betreffenden Muskeln in einem gewissen Grade gespannt sein.

Der aus den Lungen dringende kräftige Luftstrom öffnet die Stimmritze, deren Bänder dann gerade so wie die Zunge der Zungenpfeife in Schwingungen geraten. Diese Schwingungen sieht Johannes Müller als das Tongebende an, nicht die durch das abwechselnde Schließen oder mehr oder weniger Öffnen derselben entstehenden Luftstöße. Die Gründe, welche ihn bestimmen, von der Weberschen Ansicht der Tonbildung bei den Zungenpfeifen abzugehen[1], sind indes nach Seebecks Kritik derselben[2] nicht beweisend.

Was indes als das eigentlich Tonbildende anzusehen sei, ist im Effekt ziemlich einerlei, da so wie so die Tonhöhe nach beiden Ansichten von der Schwingungszahl der Bänder abhängt, indem jeder ganzen Schwingung derselben auch ein Stoß der austretenden Luft entspricht.

Bei der menschlichen Stimme haben wir einen doppelten Apparat zu

1 *J. Müller*, a. a. O. p. 175.
2 *A. Seebeck*, in Doves Repertorium 6. 1842.

unterscheiden, den tongebenden, der die Höhe der Töne bestimmt, und den Sprechapparat, der sie zu artikulierten Lauten macht.

Die höheren Teile der Luftwege, der ventriculus Morgagni und der Schlund dienen in bezug auf die Töne der menschlichen Stimme nur wie ein Schallbecher bei der Zungenpfeife, sie dienen, indem die in ihnen enthaltene Luftsäule und die umgebenden Weichteile mitschwingen, nur zur Verstärkung des Tones. Müller zeigte das an ausgeschnittenen Kehlköpfen. Beim Anblasen von unten gaben die unteren Stimmbänder bei enger Stimmritze einen vollen und reinen Ton, der den Tönen der menschlichen Stimme nahe kam, und die sich von den Tönen, welche man bei Anwesenheit des ventriculus Morgagni, der oberen Stimmbänder und der Epiglottis erhielt, nur durch geringere Stärke unterscheiden.

Die Tonhöhe hängt nur von der Spannung der Stimmbänder ab und von ihrer Länge, nicht aber davon, ob die Stimmritze etwas mehr oder weniger geöffnet ist, jedoch spricht der Ton leichter an bei enger Stimmritze.

Die menschliche Stimme hat überhaupt einen Umfang von nicht ganz vier Oktaven, die sich aber niemals in einem Individuum vereinigt finden, sie reicht vom sogenannten großen E, also dem Tone e_{-1} bis zum dreigestrichenen C. Man unterscheidet Männer- und Frauenstimmen, und bei erstern Baß und Tenor, bei letztern Alt und Sopran.

Der Umfang der Stimmen ist in der Regel

Baß	e_{-1}	— f_1	
Tenor	c	— h_1	oder c_2
Alt	f	— f_2	
Sopran . . .	c_1	— c_3.	

Die Stimmapparate unterscheiden sich bei diesen Stimmen durch die Länge der Stimmbänder. Bei den Männern springt die Kante des Schildknorpels viel weiter vor als bei den Frauen, und von den Männern besitzen die Bassisten die größten Kehlköpfe. Einige wenige Messungen von Johannes Müller haben als mittlere Länge der männlichen Stimmbänder 18 und der weiblichen Stimmbänder etwas über 12^{mm}, also ein Verhältnis von $3:2$ ergeben.

An einem und demselben Individuum werden die verschiedenen Töne durch verschiedene Spannung der Stimmbänder hervorgebracht. An ausgeschnittenen Kehlköpfen hat Müller durch Steigerung der Spannung von etwa 8^g bis zu 560^g den Ton um mehr als zwei Oktaven erhöht, nämlich bei einem männlichen Kehlkopf von *ais* bis dis_3. Die verstärkte Spannung, die wir bei den hohen Tönen durch die rasche Ermüdung der Stimme fühlen, ist indes nicht das Einzige, welches die Höhe des Tones bestimmt. Versuche von Müller und die bekannte Erfahrung, daß wir die höchsten Töne nur im Forte, die tiefsten nur im Piano singen können, beweisen, daß die Tonhöhe auch durch die Stärke des Luftstromes verändert wird.

Beobachtungen von Garcia mit dem Kehlkopfspiegel haben ferner gezeigt, daß bei verschieden hohen Tönen auch die Länge der schwingenden Teile sich ändert. Bei einem Tenoristen fand er, daß bei d, e, f die Band- und Knorpelränder der Glottis ihrer ganzen Länge nach schwingen, bei c_1, d_1 beginnen die hintern Enden der processus vocales sich aneinander

zu legen und bei f_1 und g_1 haben sich die processus vocales ihrer ganzen Länge nach aneinander gelegt, es schwingen nur noch die Bänder allein.[1])

Man sieht, alle diese Erfahrungssätze über die verschiedene Tonhöhe stimmen mit den Schwingungsgesetzen elastischer Streifen überein, verstärkte Spannung und Verkürzung der schwingenden Teile vergrößern ihre Schwingungszahl und somit die Tonhöhe, die Tonbildung des menschlichen Stimmorgans stimmt demnach mit derjenigen der Zungenpfeifen überein.

Wegen der weiteren Erfahrungen über die menschliche Stimme, besonders über die verschiedenen Register, die Brust- und Fistelstimme müssen wir auf die Lehrbücher der Physiologie verweisen, da sie in physikalisch-akustischer Beziehung nichts Neues darbieten.

§ 172.

Die menschliche Sprache. Wenn die Endigungen des Luftweges, der Schlund und die Mundhöhle, auf die Tonhöhe keinen Einfluß haben, so sind sie das allein Bedingende bei der Artikulation, bei der Modifikation der Töne zu Lauten; es ist die Aufgabe der Physik, das Wesen der Laute akustisch zu definieren, und die der Physiologie, zu zeigen, wie durch geänderte Stellung der Sprachwerkzeuge diese Klangverschiedenheiten zustande kommen.

Daß die verschiedenen Vokaltöne nichts sind als Klangverschiedenheiten, und daß sie somit den verschiedenen den Grundton begleitenden Obertönen zuzuschreiben sind, hat zuerst Wheatstone[2]) behauptet, der volle Nachweis ist indes erst Helmholtz[3]) gelungen, indem er einmal mit Hilfe der Resonatoren die die verschiedenen Vokalklänge zusammensetzenden Partialtöne bestimmte, und ganz besonders, indem es ihm gelungen ist, mit Hilfe einfacher Töne die Vokalklänge zusammenzusetzen.

Das Mittel, um die einfachen Töne zu erzeugen, lieferten ihm Stimmgabeln, welche in der Weise wie Fig. 316 es zeigt, vor Resonanzröhren aufgestellt waren. Die Stimmgabel *a* (Fig. 316) ist mit ihrem Stiel in das Fußbrett *dd* eingeschraubt, welches auf untergeklebten Stücken von Gummischläuchen ruht, damit die Schwingungen der Gabel nicht direkt auf den Tisch übertragen werden. Die oberen Enden der Stimmgabelzinken befinden sich zwischen den Schenkeln des Elektromagnetes *bb*, gerade den Polflächen desselben gegenüber gestellt. Die Schwingungen der Gabel werden durch intermittierende elektrische Ströme erregt, welche den Elektromagnet während jeder Schwingung der Gabel, und zwar in dem Momente, in welchem die Zinken der Gabel sich voneinander zu entfernen beginnen, magnetisch machen. Um den elektrischen Strom genau in dieser Weise zu unterbrechen, wandte Helmholtz als Stromunterbrecher ebenfalls

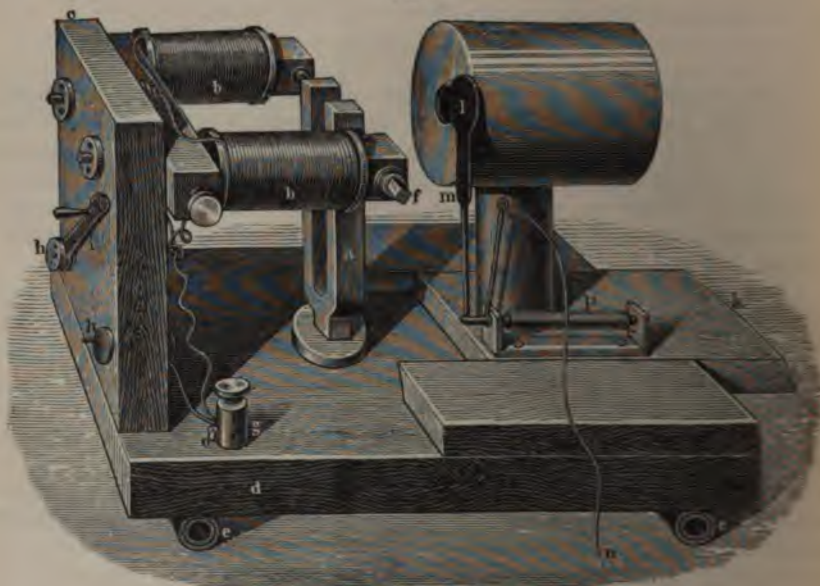
1 *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie des Menschen **1** p. 572. In Müllers Handbuch sind dessen sämtliche Versuche und ältere Erfahrungen, in Ludwigs Lehrbuch auch die neuern über die menschliche Stimme zusammengestellt.

2 *Wheatstone* in seiner Kritik über Versuche von Willis, der zuerst mit Zungenpfeifen die Vokale künstlich zu bilden versuchte Poggend. Ann. **24** 1832, London und Westminster Review 1837 Oktober.

3 *Helmholtz*, Tonempfindungen p. 163 ff. und p. 184 ff.

eine Stimmgabel an, in der Weise wie Fig. 317 angeordnet. Der von der galvanischen Batterie gelieferte Strom tritt in die Messingsäule *i*, welche oben ein zur Hälfte mit Quecksilber, zur Hälfte mit Alkohol gefülltes Näpfchen *d* trägt. In das Quecksilber dieses Näpfchens taucht ein Platindraht *c*, der an der obern Zinke der Stimmgabel befestigt ist, so eben hinein, so daß der Strom aus dem Quecksilber in die Stimmgabel tritt und durch diese bis zur Klemme *e* geleitet wird. Von der Klemme *e* tritt der Strom dann in die den Elektromagnet umgebenden Drähte und von diesen aus weiter in die Drahtleitung, welche die Elektromagnete der tönenden Stimmgabel enthält. Dadurch, daß der Strom den Draht des Elektromag-

Fig. 316.



nets *bb* (Fig. 317) durchläuft, wird der Magnet erregt, und mit ihm alle Magnete der tönenden Stimmgabeln. Der Magnet *bb* zieht dann die Zinken der Stimmgabeln an, damit den Draht *c* aus dem Quecksilber empor und unterbricht an dieser Stelle den Stromkreis und damit den Strom. Sofort aber verlieren auch die Magnete ihren Magnetismus, und die Zinken der Gabeln schwingen mit der durch ihre Dimensionen bedingten Geschwindigkeit gegen ihre Gleichgewichtslage hin und darüber hinaus. Der Draht *c* taucht infolgedessen wieder in das Quecksilber, der Strom wird neuerdings geschlossen und das Spiel wiederholt sich in der angegebenen Weise.

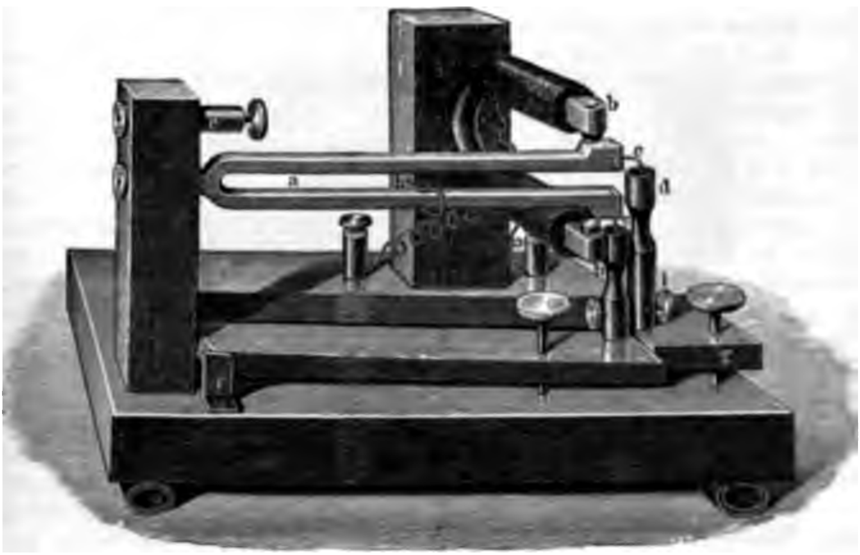
Ist die Unterbrechungsgabel mit der Gabel (Fig. 316) genau isochron, so wird die Gabel *a* jedesmal, wenn die Zinken durch die Gleichgewichtslage nach außen sich bewegen, eine kurze Zeit vom Magnete angezogen, sie erhält also bei jeder Schwingung einen neuen Antrieb, und ihre Bewegung dauert ungeschwächt fort, so lange der Unterbrechungsapparat in Tätigkeit bleibt. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn die Gabel *a*

(Fig. 316) genau 2, 3, n mal öfter schwingt als die Unterbrechungsgabel, nur daß diese Gabeln dann erst nach je 2, 3 ⋯ n Schwingungen einen neuen Anstoß erhalten.

Um diesen genauen Isochronismus der Gabeln herzustellen, ist auf der Gabel *a* (Fig. 317) ein kleiner Schieber *h* angebracht, durch dessen Stellung man die Schwingungsdauer der Gabel etwas verändern kann; wird der Schieber dem Ende der Gabel näher gebracht, so wird dadurch das Trägheitsmoment der schwingenden Masse etwas vergrößert, und die Schwingungen werden langsamer.

Die auf diese Weise erregten Schwingungen der Gabel *a* (Fig. 316) geben keinen hörbaren Ton, wie ja überhaupt eine in freier Luft schwingende

Fig. 317.



Gabel nur gehört werden kann, wenn man sie unmittelbar vor das Ohr hält. Um den Ton hörbar zu machen, ist vor der Gabel eine Resonanzröhre angebracht, eine gedeckte Pfeife, welche in der Mitte des der Gabel zugewandten Bodens eine kreisförmige in der Höhe der Zinkenenden befindliche, mit dem Deckel *l* verschließbare Öffnung hat. Befindet sich die Röhre mit geöffnetem Deckel nahe vor der Gabel, so wird sie, wenn ihr Grundton mit dem der Gabel übereinstimmt, wie eine Pfeife zum Tönen gebracht und der Ton der Gabel tritt ohne Oberton deutlich hervor. Um die Röhre passend zu stimmen, sind die Dimensionen derselben und der Öffnung nach den Sätzen des § 166 passend zu wählen. Um den Ton der Gabel stärker und schwächer machen zu können, ist die Röhre auf einem Schlitten *k* befestigt, so daß man die Röhre der Gabel näher oder entfernter stellen kann. Andererseits kann man den Ton auch dadurch schwächen, daß man durch teilweise Bedeckung der Öffnung die Röhre etwas verstimmt, wodurch der Ton der Röhre beträchtlich geschwächt wird.

Zu seinen ersten Versuchen wandte Helmholtz acht Gabeln der be-

schriebenen Art an, die tiefste gab den Ton b_{-1}, die übrigen gaben die sieben ersten Obertöne, b, f_1, b_1, d_2, f_2, as_2 und b_2, später ließ er zu diesen noch d_3, f_3, as_3 und b_4 hinzutreten und benutzte dann als Grundton den der zweiten Gabel, b.

Ist der Apparat in Gang gebracht mit geschlossenen Resonanzröhren, so hört man zunächst nur ein leises Summen. Öffnet man dann die Röhre mit dem Ton b_{-1}, so hört man ein dumpfes U, viel dumpfer als das U der menschlichen Sprache. Der Klang wird dem gesungenen U ähnlicher, wenn man schwach den zweiten und dritten Ton b und f_1 mittönen läßt.

Der Vokal O entstand, wenn bei etwas gedämpftem b_{-1} der erste Oberton b sehr stark und schwächer b_1, f_1 und d_2 c angegeben wurden.

Ein nach O gezogenes A, das schwedische $\mathring{A}$ entstand, als die Töne d_2, f_2, as_2 und b_2, also die Töne 5—8 möglichst stark genommen wurden, die tieferen dagegen geschwächt waren.

A, $Ä$ und E gelang es Helmholtz mit den zwölf Gabeln vom b an herzustellen. Dann gibt b allein U, dasselbe stark von b_1, schwächer von f_2 begleitet O. A erhält man, wenn man zu b zunächst b_1 und f_2 mäßig stark, dagegen b_2 und d_3 als charakteristische Töne kräftig tönen läßt. Um A in $Ä$ überzuführen, muß man b_1 und f_2, die Nachbarn des tiefern charakteristischen Tones d_2 etwas verstärken, b_2 dämpfen, dagegen d_3 und f_3 möglichst stark hervortreten lassen. Für E muß man die beiden tiefsten Töne der Reihe b und b_1 mäßig stark halten als Nachbarn des tiefern Verstärkungstones f_1, und die höchsten f_3, as_3, b_3 möglichst heraustreten lassen.

I und U herzustellen, gelang nicht, da die diese Vokale charakterisierenden sehr hohen Obertöne sich nicht mit Gabeln herstellen ließen.

Daß die zur künstlichen Darstellung benutzten Bestandteile der Vokale mit Hilfe der Resonatoren in den gesungenen und gesprochenen Vokalen beobachtet wurden, ja daß man gerade durch derartige Beobachtungen die Bestandteile kennen lernte, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden. Es mag nur in bezug auf die Analyse der Vokale bemerkt werden, daß die in § 164 beschriebenen Flammenapparate von König für dieselbe vorzugsweise geeignet sind. Eine interessante Anwendung hat König von dem Fig. 296 angegebenen Apparate gemacht. Da die verschiedenen Vokale durch Kombination der verschiedenen Partialtöne charakterisiert sind, so liefert natürlich jeder Vokal ein eigentümliches Flammenbild, welches bei der geringsten Änderung des Vokalklanges sich ebenfalls ändert. König hat nun durch solche Flammenbilder nicht nur die einzelnen Vokale, sondern auch die verschiedenen Nüancen derselben gezeichnet, wenn man die Vokale in verschiedener Tonlage singt, so daß man mit Hilfe der Bilder genauer als auf irgend einem andern Wege jede Vokalnüance bezeichnen kann.[1]) Fig. 318 und Fig. 319 zeigen die Bilder für

1) *König*, Poggend. Ann **146**. 1871. Tafel III des Bandes gibt die Flammenbilder der 5 Vokale U, O, A, E, I, für jeden Ton der beiden, der Baßstimme entsprechenden Oktaven c_{-1} bis c_1. Für E und I sind die Bilder, wie das König auch hervorhebt, wenig charakteristisch. Die Bilder sind indes nur individuelle, bei einer andern Stimme fallen sie anders aus, da nicht bei allen Individuen die verschiedenen Obertöne in derselben Weise verstärkt werden (*Helmholtz*, Tonempfindungen. III. Ausgabe. p. 163). So entsprechen die nebenstehend gezeichneten Bilder wenig der Königschen Zeichnung.

die Vokale *U* und *O*, wie ich sie erhielt, jeden auf *c* gesungen und mit möglichster Sorgfalt im reinen Vokalklang gehalten; besonders bei *O* gibt die geringste Nuancierung ein anderes Bild.

Ehe wir zur Besprechung der Bildung der Vokale in der menschlichen Sprache übergehen, wird es gut sein, darauf hinzuweisen, daß gerade mit Hilfe dieses Stimmgabelapparates von Helmholtz der bereits § 164 erwähnte Nachweis geliefert wurde, daß die Phase der komponierenden Teiltöne auf den Klang ohne Einfluß ist. Wir erwähnten soeben, daß man die Schwächung eines Stimmgabeltones durch weitere Entfernung der Resonanzröhre oder durch teilweises Schließen des Deckels erhalten kann; letzteres Mittel bewirkt eine kleine Verstimmung des Tones und bewirkt dadurch, daß die Schwingungen etwas rascher oder langsamer werden, somit daß die Stöße einer verstimmten Gabel mit den andern nach und nach in immer

Fig. 518.

Fig. 519.

anderer Periode zusammentreffen. Wurde nun ein Vokalklang deutlich erhalten, dadurch daß der Ton einer Gabel durch Verschiebung der Resonanzröhre geschwächt wurde, so erhielt man genau denselben Klang, wenn der Ton durch Schließung des Deckels geschwächt wurde; da aber im letzten Falle die Phase der komponierenden Töne eine relativ immer andere wurde, so folgt aus diesem Versuche, daß die Phase auf die Klangfarbe von keinem Einflusse ist.

Die Möglichkeit einer so reichhaltigen Klangbildung durch die menschliche Stimme ist durch die Form unseres Sprachorganes gegeben. Wir haben vorhin unser Sprachorgan als eine Zungenpfeife mit weichen Zungen bezeichnet. Von den gewöhnlichen Zungenpfeifen dieser Art unterscheidet es sich aber wesentlich dadurch, daß die Pfeife, das Schallrohr nicht eine unveränderliche Gestalt hat, sondern durch unsern Willen willkurlich geändert werden kann. Das Schallrohr der menschlichen Stimme sind die höheren Teile der Luftwege über dem Kehlkopf und ganz besonders die Rachenhöhle und Mundhöhle. Durch die Beweglichkeit der weichen Teile

in den Umgebungen dieser Höhlen, den weichen Gaumen, die Zunge und die Lippen können wir diesen Höhlen die verschiedensten Gestalten geben, und es ist nach den Bemerkungen über die Tonbildung bei den weichen Zungen klar, daß es wesentlich von der Form der Rachen- und Mundhöhle abhängig ist, welche von den harmonischen Obertönen eines von der Stimme gebildeten Grundtones verstärkt werden, welche nicht. Denn wie wir am Schluß des § 170 erwähnten, sind in jedem durch Zungen gebildeten Klange die Obertöne in großer Zahl vorhanden, alle, die deshalb bei einer bestimmten Stellung der Mundhöhle infolge der Resonanz verstärkt werden, finden sich in dem Klange, welcher dieser Stellung der Mundhöhle entspricht. Es sind das vorzugsweise die Töne, welche die Mundhöhle in der bestimmten Form als einfache Pfeife angeblasen geben würde. Welche Töne das sind, bestimmte Helmholtz[1]) im allgemeinen dadurch, daß er vor die Mundöffnung Stimmgabeln hielt und den Ton aufsuchte, der bei einer bestimmten Vokalstellung des Mundes die stärkste Resonanz gab.

Daß in der Tat die der Mundhöhle gegebene Form für die Bildung der Vokale von wesentlichem Einfluß ist, hat man schon früher erkannt[2]), indem schon der ältere Du Bois Reymond die Vokale in drei Reihen ordnete, je nach der Stellung des Mundes. Die drei Reihen sind

	e	*i*
a	*ö*	*ü*
	o	*u*

Der Vokal *A* ist der gemeinsame Ausgangspunkt für alle drei Reihen. Bei seiner Bildung nimmt die Mundhöhle eine ziemlich gleichförmig trichterartig erweiterte Stellung an. Bei *O* und *U* wird die Mundhöhle vorn mit den Lippen verengert, so daß sie bei *U* am engsten ist, während sie in der Mitte durch Herabziehen der Zunge erweitert wird. Sie nimmt also die Gestalt einer Flasche ohne Hals an, deren Öffnung vorn der Mund ist. Der Ton einer solchen Flasche ist um so tiefer, je enger die Öffnung ist, und dem entsprechend fand Helmholtz, daß bei der *U*-Stellung des Mundes der Eigenton der Mundhöhle f ist[3]), und zwar ziemlich gleichmäßig bei männlichen und weiblichen Mundhöhlen, bei welch letzteren das, was der Höhlung an Geräumigkeit abgeht, durch engern Verschluß ersetzt wird. Der Eigenton der Mundhöhle bei *O* ist b_1. Geht man vom *O* allmählich durch *Oa* und *Ao* zum *A*, so wird der Mund offener, und der Ton der Mundhöhle steigt um eine Oktave bis b_2.[4])

Beim Übergang vom *A* durch *Ä* in *E* und *I* wird die Gestalt der

1) *Helmholtz,* Tonempfindungen. p. 166 ff.

2) *Du Bois Reymond,* Norddeutsche Zeitschrift von De la Motte Fouqué 1817. *Helmholtz* a. a O. p. 167.

3) *Donders* gibt die höhere Oktave f_1, welche auch *Auerbach,* Wiedem. Ann. 3. 1878, durch Perkussion der Mundhöhle findet. Wie mir vor einigen Jahren Weinhold zeigte, kann man die Mundhöhle durch einen kräftigen Luftstrom, den man an dem in der *U*-Stellung befindlichen Munde wie am Mundloch einer Flöte vorüber führt, tönend anblasen, man erhält dann bei richtiger Stellung stets einen nahe dem f_1 liegenden Ton.

4) *Auerbach* a. a. O. gibt f_2.

ndhöhle eine ganz andere. Die Lippen werden dabei zurückgezogen und öffnet, die Zunge gehoben, so daß zwischen Zunge und hartem Gaumen ein enger Kanal bleibt, während der Raum unmittelbar über dem hlkopf durch Herabdrücken der Zungenwurzel erweitert wird. Die Mundhle bekommt also die Gestalt einer Flasche mit engem Halse, den Bauch Flasche bildet der Schlund, den Hals der enge Kanal zwischen Zunge l Gaumen, der Hals ist am engsten bei *I*, seine Länge von dem hintern nde der Flasche bis zum hintern Rande des Gaumens fand Helmholtz ich 6^{cm}.

Derartige Flaschen haben zwei Grundtöne, den des Bauches für sich l den des Halses, den man, besonders wenn er gegen den Bauch sehr ge ist, als eine beiderseits offene Röhre ansehen kann. Dem entsprechend die Mundhöhle bei *Ä*, *E* und *I* zwei Eigentöne, bei *Ä* die Töne d_2 l g_3 bis as_3, bei *E* die Töne f_1[1]) und b_3 und bei *I* als tiefsten Ton etwa wie bei *U* und als Ton des Halses d_4.

Die Vokale *Ö* und *Ü* unterscheiden sich von *E* und *I* dadurch, daß ihnen auch die Lippen röhrenähnlich geformt werden, so daß diese e Fortsetzung des engen Kanales bei *E* und *I* bilden. Für diese Vokale lert sich deshalb nur der Ton des Halses, er wird tiefer als bei *E* und er wird cis_3 und g_3 bis as_3 wie bei *Ä*. Die tiefern Eigentöne bleiben und f.[2]).

Wie eben erwähnt wurde, sind es nun gerade die Obertöne des Klanges, lche mit den Eigentönen des Mundes zusammenfallen oder doch ihnen ie genug sind, welche vorzugsweise verstärkt werden, während die andern lämpft werden, und eine Vergleichung der zuletzt gemachten Angaben t den bei der künstlichen Bildung der Vokale angegebenen charakterischen Tönen der einzelnen Vokale wird die Übereinstimmung beider und nit erkennen lassen, daß das Wesen der Vokalbildung in dem durch die rm der Mundhöhle bewirkten Auftreten der verschiedenen Obertöne begt ist. Es wird eben jedesmal, auf welchen Grundton wir einen Vokal h bilden, immer derjenige Oberton des Grundtones am meisten verstärkt, dem Eigentone der Mundhöhle am nächsten kommt. Die Vokalklänge terscheiden sich von den Klängen der übrigen musikalischen Instrumente ale dadurch, daß die Stärke ihrer Obertöne nicht von der Ordnungsl derselben, sondern von deren absoluter Tonhöhe abhängt. Wird z. B. Vokal *A*, dessen charakteristischer Ton b_2 ist, auf die Note es_{-1} gegen, so ist der verstärkte Ton der 12. Ton des Klanges, wird derselbe kal auf b_1 gesungen, so ist der verstärkte Ton der zweite des Klanges. her rührt es denn auch, daß der reine Vokalklang, besonders für die kale, deren charakteristischer Ton tiefer liegt, am besten bei gewissen nhöhen herauskommt, bei denen nämlich, bei welchen ein Oberton genau t dem charakteristischen Ton zusammenfällt.[3])

1) Nach *Auerbach* g_1 bis a_1.
2) Nach *Auerbach* a_1 und f_1.
3) Wie es möglich ist, daß die Eigentöne der Mundhöhle auch durch solche ne verstärkt werden können, zu deren harmonischer Reihe der Eigenton nicht ört, werden wir im § 178 zeigen, wodurch der hauptsächlichste Einwand von antens gegen die Helmholtzsche Vokaltheorie Poggend. Ann. 154. 1875 lerlegt wird. Genaueres über die Zusammensetzung der Vokale, die Intenitätsverhältnisse der Partialtöne und die Abhängigkeit derselben von der Ton-

Eine etwas andere Theorie der Zusammensetzung der Vokale hat Grassmann[1]) bereits 1854 gegeben und 1877 erneuert mitgeteilt. Grassmann glaubt, daß die zu dem Grundtone, auf welchen ein Vokal angegeben ist, mitklingenden Töne stets nur Obertöne des Grundtones sind, und daß der Vokalcharakter durch die Höhe und die Anzahl der Obertöne, welche mitklingen, bedingt sei. Daß die Mundhöhle nicht bei einem bestimmten Vokal einen bestimmten Eigenton habe, schließt Grassmann zunächst daraus, daß man eine ganze Reihe von Pfeiftönen, ja innerhalb einer gewissen Grenze jeden beliebigen Pfeifton hervorbringen kann. Hält man nun die zu einem bestimmten Pfeiftone erforderliche Mund- und Lippenstellung fest und bringt eine Stimmgabel von der Höhe des Pfeiftones vor die Mundhöhle, so erhält man die Verstärkung des Tones der Stimmgabel, wie wenn man die Gabel über einen Resonator hält. Bei den Vokalen *u* — *ü* — *i* entspricht die Mundstellung stets einem gewissen Pfeiftone, und es wird derjenige Oberton verstärkt, welcher der Form des Mundes entspricht. Gibt man den Vokal *u* auf klein *c* an und gibt dem Munde die Pfeifstellung für c_1, so hört man deutlich c_1, gibt man aber dem Munde die Stellung, als wenn man g_1 pfeifen wollte, so hört man g_1 mit: alle übrigen Obertöne werden so gut wie vollständig ausgelöscht. Der Vokal *u* wäre darnach durch das Mitklingen eines seiner Obertöne charakterisiert, der aber nicht höher als c_3 sein kann. Gibt man dem Mund eine Stellung, die einen höhern Pfeifton gibt als c_3, so kann man kein *u* mehr angeben, es erklingt der Vokal *ü*. Gibt man den Vokal *ü* an, so erklingt ein höher als c_3 liegender Oberton, der nach Grassmann zwischen c_3 und c_4 liegt. Der Vokal *ü* wäre also auch durch nur einen Oberton charakterisiert, der aber erheblich höher liegt als der für *u* charakteristische Oberton. Gleiches gilt nach Grassmann für *i*, dessen charakteristischer Oberton noch höher liegt als für *ü*.

Es würde demnach eine ganze Reihe von Mundstellungen geben, die dem *u* oder *ü* und *i* entsprächen; es würde *u* aber nur in einer solchen Mundstellung hervorgebracht werden können, welche einen tiefer als c_3 liegenden Ton als stärksten den Grundton begleitenden harmonischen Oberton zum mitklingen bringt. Ebenso bei *ü* und *i*. Bei *a* nimmt, wie schon erwähnt, der Mund die Trichterform an; es werden deshalb alle den Grundton begleitenden in den Stimmbändern erzeugten Obertöne bis zum achten oder selbst zehnten gleichmäßig entwickelt und begleiten den Grundton mit erheblicher Stärke.

Die Vokale *o* — *ä* — *e* sieht Grassmann als Zwischenvokale, *o* zwischen *a* und *u*, *ä* zwischen *a* und *ü*, *e* zwischen *a* und *i* an. So sagt er, es sei *O* gleich $U + A$, das heißt die Obertöne des *O* liegen von dem charakteristischen Obertone des *U* halb so weit entfernt als die Obertöne von *A*. Gibt man *O* auf *c* an, so würde für *U* der charakteristische Ton c_1, für *A* würden die Obertöne von c_1 bis c_3 mittönen, für *O* sind es c_1, g_1, c_2. Die höhern Obertöne des *A* fallen fort.

höhe, auf welcher die Vokale angegeben werden, sehe man in der interessanten Abhandlung von *F. Auerbach*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VIII. 1878 und Wiedem. Ann. 3. 4. 1878.

1) *Grassmann*, Programm des Stettiner Gymnasiums für 1854; Wiedem. Ann. 1. p. 606. 1877.

Mit der Frage, ob die Vokale nach der Helmholtzschen oder nach Grassmannschen Theorie aufzufassen seien, hat sich besonders n Lahr[1]) beschäftigt. Lahr untersuchte zunächst die Resonanz der ndhöhle, und zwar vorzugsweise für den Vokal *u*, da für diesen nach lmholtz die Mundhöhle den Ton *f* (oder f_1) am stärksten mittönen l, während es nach Grassmann immer nur ein Oberton sein soll, der tönt, von Lahr fand das letztere bestätigt; gab er den Vokal *u* auf *b* und behielt die Mundstellung genau bei, so gab die auf b_1 gestimmte mmgabel vor der Mundöffnung einen ebenso starken Ton, als wenn man Mund in die *O*-Stellung bringt, für welche nach Helmholtz das b_1 stärkste Ton sein soll. Wurde der Vokal *u* auf b_1 angegeben, so gab höhere Oktave b_2 ebenfalls eine ebenso starke Resonanz als in der *O*-llung. Dabei bemerkt von Lahr, daß der Klang der Mundhöhlen-onanz je nach der Vokalstellung für eine und dieselbe Stimmgabel sehr schieden sei, so zwar, daß der Charakter des Vokals, für welchen der nd gestellt war, deutlich wahrnehmbar wurde.

Auch durch die Zusammensetzung der Vokale aus Stimmgabeltönen ubt von Lahr eine Bestätigung der Grassmannschen Theorie zu erten; er meint, daß man den nur von einem Oberton, der nicht zu hoch begleiteten Grundton als *u*, den von einem der höhern Obertöne beiteten Grundton als *ü* und von noch höhern als *i* wahrnehme. Dem n ich nach meinen Erfahrungen nicht beistimmen; wie schon Helmltz hervorhebt, macht der einfache Ton entschieden den Eindruck des *u*, n er nicht zu hoch ist; läßt man ihn kräftig von seiner Oktave beiten, so geht er zum *O* hinüber, ebenso auch mit dem zweiten Obertone, jedesmal deutlich wird, wenn man den Oberton zum Schweigen bringt enso macht der einfache Ton in hohen Lagen etwa schon bei c_3 den druck des *ü* und noch höhern, etwa beim c_4, entschieden den Eindruck *i*. Streicht man einen Stahlstab von 1^m Länge, den man in der Mitte t, so bekommt man etwa c_4, der Longitudinalton klingt entschieden als *i*.

Dagegen spricht die Untersuchung der Vokalklänge mit dem Phonophen, auf welche wir § 178 zurückkommen werden, entschieden für die assmannsche Theorie. Wir werden sehen, wie man mit Hilfe derselben Intensität der Obertöne bestimmen kann, und bemerken hier nur, daß n Lahr für *u* auf f_1 gesungen (etwa 350 Schwingungen) nur den ersten erton, für *ü* nur den zweiten c_3 oder fünften c_4 stark fand, daß dagegen *a* die ersten acht Obertöne sehr stark waren.

Ich möchte aus alledem schließen, daß der Vokalcharakter nicht ein enge begrenzter ist, als man wohl eine Zeit lang anzunehmen geneigt r, daß jeder Vokalklang auf mehrfache Weise zustande kommen kann, e daß unser Ohr sofort eine verschiedene Nüance erkennt, wie ja auch on von Helmholtz hervorhob, daß bei verschiedenen Individuen die ertöne für denselben Vokal verschieden stark sind, was ja auch durch Verschiedenheit der Flammenbilder eines und desselben Vokals für verschiedene Individuen bewiesen wird.

Zur Bildung der menschlichen Sprache gehört außer jener der Vokale h die der Konsonanten, diese sind keine Selbstlauter, es sind nur Ton-

1) *von Lahr*, Wiedem Ann. 27. p. 94. 1886

hemmungen oder Verzögerungen, welche durch das Anfangen oder Abschließen eines Vokallautes oder höchstens als Geräusche wahrnehmbar sind.

Nach Brücke[1]) teilt man die Konsonanten je nach dem Orte des Verschlusses im Munde in drei Gruppen, an deren Spitze die drei Mutae *p*, *t*, *k* stehen.

Die erste Gruppe bilden *p*, *b*, *f*, *v*, *w*, *m*; den Verschluß bilden entweder die beiden Lippen oder eine der Zahnreihen mit den Lippen. *P* entsteht durch ein plötzliches Öffnen der vorher fest verschlossenen Lippen, während ein Luftstrom aus dem Kehlkopf gegen die Mundöffnung dringt, *b* entsteht gerade so, nur sind die Lippen etwas weniger gespannt und das Öffnen geschieht etwas weniger energisch. *F* wird gebildet, indem wir die untere Lippe an die oberen Schneidezähne legen und einen Luftstrom hindurchsenden, desgleichen *v*, ein mildes *f*, und *w*, bei dem zugleich eine Hemmung des Luftstroms, ein dichterer Verschluß stattfindet, welcher das *w* dem *b* nähert.

Das *m* entsteht schließlich, indem man die Lippen wie zu *b* stellt und die Luft mit tönender Stimme zur Nase hinausströmen läßt.

Die zweite Gruppe umfaßt *t*, *d*, die verschiedenen *s*, *l*, und *n*. Für diese bildet die Zunge den Verschluß, indem sie sich entweder an die obern Schneidezähne oder an den vordern Teil des harten Gaumens anlegt. *T* wird gebildet durch Anstemmen der Zunge an die Schneidezähne und plötzliche Fortnahme derselben, *d* verhält sich zum *t*, wie *b* zum *p*.

Das harte *s*, *sz*, *ss* bildet sich, wenn bei der dem *t* zugehörigen Zungenstellung eine kleine Spalte geöffnet und durch diese Luft ausgestoßen wird, durch schwächeres Anstemmen entsteht das weiche *s*. Das *l* entsteht, wenn man den Verschluß der Zunge vorn wie bei *d* läßt, dagegen hinten neben den Backzähnen beiderseitig eine kleine Öffnung läßt, durch welche die Luft hindurchstreicht. Wird ferner die Zunge wie bei *t* gestellt und läßt man die Luft durch die Nase entweichen, so entsteht *n*.

In die dritte Gruppe gehören die Gaumenlaute *k*, *g*, *ch*, *j* und das Gaumen-*n* (vor *g* in *ng*). *K* entsteht wie *t* und *p*, nur daß der Verschluß hier von dem hintern Teile der Zunge und dem Gaumen gebildet wird. *G* entsteht aus *k* wie *b* und *d* aus *p* und *t*, *ch* wie *s* und *f*, nur daß auch hier zwischen dem tiefern Teile der Zunge und dem Gaumen die enge Öffnung bleibt, zwischen der der Luftstrom hindurchgeht.

J bildet sich, indem die Zunge mehr nach der Mitte hin sanft gegen den Gaumen angelegt und Luft durchgehaucht wird, und schließlich das Gaumen-*n*, indem die Zunge wie beim *ch* nur fester gegen den Gaumen gelegt wird und die Luft bei tönender Stimmritze durch die Nase entweicht.

Der noch übrig bleibende Konsonant *r* kann labial, lingual und guttural sein; er entsteht, indem wir einen der leichtschwingenden Mundteile mittels des Luftstromes in schwingende Bewegung versetzen, deren einzelne Stöße so langsam aufeinander folgen, daß wir die einzelnen Stöße gesondert wahrnehmen; diese Schwingungen können die Lippen, die Zungenspitze, wenn sie wie zum *t* gestellt ist, und das Zäpfchen vollführen.

1) *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie. p. 589. Man sehe auch *Grassmann*, Wiedem. Ann. 1. p. 619 ff. 1877.

Zweites Kapitel.

Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§ 173.

Ausbreitung des Schalles in der Luft. Wir sahen in § 156, daß es zur Wahrnehmung des Schalles erforderlich sei, daß die Schwingungen des festen Körpers oder die andern tonerzeugenden Schwingungen auf ein elastisches Medium übertragen und zu unserem Ohre fortgepflanzt werden. Da in einem jeden solchen Mittel die Schallschwingungen longitudinale werden, wie alle unsere Entwicklungen über den Schall zeigen, oder da es die longitudinalen Schwingungen der elastischen Medien sind, welche wir durch die gegen unser Gehörorgan ausgeübten Stöße als Schall wahrnehmen, so müssen die Gesetze der Ausbreitung des Schalles mit den Gesetzen der Verbreitung longitudinaler Wellen übereinstimmen, welche wir im vorigen Abschnitte entwickelt haben.

Zunächst folgt aus dem Frühern, daß der Schall sich von einem erregenden Mittelpunkte aus in kugelförmigen Wellen nach allen Richtungen ausbreiten muß.

Mit dem Abstande von der Quelle des Schalles muß dann die Intensität desselben abnehmen; und zwar nach einem bestimmten Gesetze. Die schwingende Bewegung, welche von einem Mittelpunkte ausgeht, teilt sich immer größern und größern Kugelwellen mit, und nach der Zeit t sind alle Luftteilchen auf einer Kugelschale in Bewegung, deren Radius r gleich ct ist. Das Maximum der Geschwindigkeit, welches diese Teilchen beim Verlassen ihrer Gleichgewichtslage besitzen, sei gleich v. Die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist proportional der Größe der Fläche, auf der alle Teilchen zugleich bewegt werden oder proportional der Oberfläche der Kugel $4\pi r^2$.

Nach der Zeit t' werden ebenso alle Teilchen auf einer Kugelfläche vom Radius $r' = ct'$ eine Geschwindigkeit v' erhalten und die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist $4\pi r'^2$.

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie muß, wenn, was bei einfacher Verbreitung des Schalles in der Luft der Fall ist, keine Arbeit nach außen abgegeben wird, die kinetische Energie der gleichzeitig bewegten Luftteilchen konstant bleiben. Da für die kinetische Energie der schwingenden Bewegung die Geschwindigkeit, mit welcher das schwingende die Gleichgewichtslage passiert, das Maß ist, so muß die Gleichung bestehen

$$4\pi r^2 v^2 = 4\pi r'^2 v'^2$$

oder

$$r^2 v^2 = r'^2 v'^2$$

$$v : v' = r' : r.$$

Die Geschwindigkeit, welche den einzelnen schwingenden Teilchen in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Schwingung erteilt wird, ist dem Abstande der Teilchen vom Mittelpunkte der Schwingung umgekehrt

proportional. Nennen wir demnach die Geschwindigkeit im Abstande 1, v, so ist sie im Abstande r vom Mittelpunkte $\frac{v}{r}$.

Wir haben bereits bemerkt, daß wir die Intensität des Schalles der Stärke des Stoßes gleichsetzen, welchen unser Gehörorgan von den schwingenden Luftteilchen erhält. Die Stärke des Stoßes ist aber der lebendigen Kraft der stoßenden Teile proportional, da dieselbe durch die Größe des Weges gemessen wird, durch welchen der widerstehende Körper wirken muß, um die Geschwindigkeit des stoßenden zu vernichten. Da nun die Geschwindigkeit der schwingenden Teile abnimmt in demselben Verhältnis, wie sie weiter vom erregenden Mittelpunkte entfernt sind, und da wir den Schall bei der konstanten Größe unseres Gehörorgans immer durch den Stoß einer gleichen Menge Luftteilchen vernehmen, so folgt, daß die Intensität des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung von der Quelle des Schalles wachsen.

Daß der Schall schwächer wird, wenn wir uns von der Quelle desselben entfernen, ist eine bekannte Tatsache, auch daß er rascher schwächer wird, als die Entfernungen wachsen, ist bekannt.

Genaue Messungen über die Abnahme der Schallstärke mit der Entfernung, wie überhaupt über die Stärke des Schalles gibt es nicht, da es für den Schall keinen exakten Messapparat gibt und die vorhandenen Sonometer nur dazu dienen können, ein Mehr oder Minder der Schallstärke zu zeigen, nicht aber genaue Messungen anzustellen. Es liegt das im Wesen des Schalles, der eigentlich nur in einer Empfindung besteht, da er nur eine besondere Wahrnehmung einer bestimmten Bewegungsart ist, und nur insofern Schall ist, als wir diese Bewegungsart mit unserem Ohre wahrnehmen; wir können denselben daher nur nach seinem Eindrucke auf das Ohr beurteilen. Auch beim Licht ist das zwar der Fall, daß wir es nur durch die Eindrücke auf das Auge beurteilen können, dort können wir aber mehrere Lichtwirkungen gleichzeitig beurteilen, wir können sie kompensieren, indem wir Flächen zugleich von entgegengesetzten Seiten beleuchten und auf manche andere Weise vergleichen. Schalle gleicher Qualität können wir aber nur, wenn sie nacheinander wirken, miteinander vergleichen, und dadurch ist jede Messung ausgeschlossen. Wir kommen bei Besprechung des Ohres auf diese Frage zurück.

Da der Schall eine Wellenbewegung ist, so muß die Geschwindigkeit seiner Verbreitung mit derjenigen der Wellenbewegung übereinkommen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist in einem und demselben Mittel konstant, sie hängt nur ab von der Dichtigkeit und Elastizität des Mittels nach der Gleichung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}},$$

also nicht von der Oszillationsdauer der schwingenden Bewegung oder ihrer Wellenlänge, bei transversalen Wellen vorausgesetzt, daß die Länge der Wellen gegen den Abstand der Moleküle sehr groß ist. Für die Töne der Musik, deren Wellenlänge kaum unter 4^{cm} herabgeht, wird man letzteres annehmen dürfen, alle Töne müssen sich daher in einem und demselben Mittel mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen. Es ist das auch eine

bekannte Erfahrung, auf der allein die Möglichkeit einer harmonischen Musik beruht. Selbst in der größten Entfernung wird die Harmonie derselben nicht gestört, ein Beweis, daß die höchsten wie die tiefsten Töne sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

Regnault glaubte indes aus seinen Versuchen schließen zu sollen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der tiefen und hohen Töne nicht ganz genau die gleiche sei. Bei den gleich näher zu besprechenden Versuchen über die Fortpflanzung des Schalles ließ Regnault an dem einen Ende des auf dem Boulevard St. Michel zu Paris befindlichen Wasserleitungsrohres, welches einen Durchmesser von $1^m{,}1$ und eine Länge von $1417^m{,}95$ hatte, eine Zungenpfeife tönen, deren Grundton c_2 war, und welche ein kegelförmiges Ansatzrohr besaß. In dem andern Ende des Rohres waren acht Helmholtzsche Resonatoren, die c_2 und seinen harmonischen Obertönen entsprachen, angebracht, welche durch Kautschukröhren mit einem größern Kasten von Holz verbunden waren, an dessen Öffnung man das Ohr anlegen konnte. Die den Resonatoren entsprechenden Töne wurden deutlich und klar gehört. Man hörte bei diesen Versuchen konstant zuerst den Grundton c_2, auf diesen folgte erst die Oktave, die Quint derselben und dann erst die höhern Partialtöne, so daß stets die tiefern vor den höhern Tönen gehört wurden. Die tiefern Töne hätten demnach eine etwas größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die höhern, und ein Klang veränderte deshalb in großer Entfernung einigermaßen seine Farbe. Der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit war indes so klein, daß er sich nicht weiter messen ließ.

Dem entgegen kamen Violle und Vautier[1] zu dem Resultate, bei ganz ähnlich durchgeführten Versuchen, daß ein solcher Unterschied sich nicht erkennen lasse.

In engern Röhren ist, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ein solcher Unterschied vorhanden.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in der Luft wurde unser Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}} = \sqrt{\frac{gH\sigma}{s}\,k\,(1+\alpha t)}$$

somit, wenn wir g und H in Metern angeben,

$$c = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}59}{0{,}001\,293} \cdot 1{,}405\,(1+\alpha t)} = 331^m{,}8\sqrt{1+\alpha t}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft muß daher bei 0^0 gleich $331^m{,}8$ sein, oder allgemein, da α, wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, gleich $0{,}003\,67$ ist,

$$c = 331^m{,}8\sqrt{1+0{,}003\,67\,t}$$

Die Versuche, welche man angestellt hat, um die Geschwindigkeit des Schalles direkt zu messen, geben ein mit der Theorie vollkommen übereinstimmendes Resultat. Die ersten genauern Versuche waren die berühmten Versuche der Mitglieder der Pariser Akademie Cassini, Maraldi und

1) *Violle* und *Vautier*, Comptes Rendus 110. p. 236 1890.

La Caille im Jahre 1738.[1]) Als Stationen waren das Observatorium zu Paris, der Montmartre, Fontenay-aux-Roses und Monthlery gewählt. Die Beobachtungen wurden des Nachts angestellt und begannen auf ein vom Observatorium gegebenes Signal.

Man löste von 10 zu 10 Minuten auf einer der Stationen eine Kanone und beobachtete auf allen anderen die Zeit, welche verfloß zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes beim Abfeuern der Kanone und der Ankunft des Schalles. Da der Abstand der einzelnen Stationen vorher genau gemessen war, so erhielt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch Division des Abstandes durch die beobachtete Zeit.

Diese Beobachtungen wurden längere Zeit unter sehr verschiedenen atmosphärischen Verhältnissen fortgesetzt, und man fand der Theorie gemäß:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist unabhängig von dem Drucke der Luft.

2. Sie wächst mit der Temperatur der Luft.

3. Sie ist dieselbe in jeder Entfernung von der Schallquelle, das heißt. der Schall pflanzt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.

4. Mit dem Winde pflanzt sich der Schall rascher fort als gegen den Wind, und zwar ist sie im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Geschwindigkeiten des Schalles und des Windes.

5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist in ruhiger trockner Luft bei 0^0 1038 pariser Fuß oder 337^m, oder nach der Berechnung dieser Versuche von Le Roux[2]) gleich 332^m.

Da durch den Einfluß des Windes die Geschwindigkeit des Schalles geändert wird, so ist zur Erzielung genauerer Resultate erforderlich, daß man an beiden Enden einer Standlinie den Schall errege und beobachte; in der einen Richtung wird dann der Schall so viel beschleunigt, als er in der andern verzögert wird, und das Mittel aus beiden Resultaten ergibt die vom Einfluß des Windes befreite Zahl für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ruhiger Luft.

Mit dieser Vorsicht wurde im Jahre 1822 bei Paris zwischen Monthlery und Villejuif die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles aufs neue bestimmt.[3]) Es wurden an beiden Orten von 10 zu 10 Minuten Kanonen gelöst, die so gestellt waren, daß von jedem Orte die Explosion der andern Kanone gesehen wurde. Man war übereingekommen, daß die Kanonenschüsse zu Monthlery 5 Minuten früher anfangen sollten, als zu Villejuif. Die Beobachter waren zu Monthlery Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard, zu Villejuif Arago, Mathieu und Prony. Die Kanonenschüsse von Monthlery wurden zu Villejuif alle gut gehört, zu Monthlery wurden von den 12, die gelöst wurden, nur 7 wahrgenommen. Dieser unaufgeklärte Umstand gestattete die Korrektur wegen Bewegung der Luft nicht so vollständig, als man wünschte; indes ergaben die beiderseitigen Beobachtungen nahezu übereinstimmende Resultate. Die Beobachtungen zu Villejuif nahmen im Mittel 54,84 Sekunden nach dem Lichtblitze den Schall

---

1) Mémoires de l'Acad. de Paris 1738 und 1739.

2) *Le Roux,* Ann. de chim. et de phys. **12**. (4.) 1867.

3) Ann. de chim. et de phys. **20**. p. 210. 1822. Poggend. Ann. **5**. p. 4.. 1825.

wahr, diejenigen zu Monthlery nach 54,43 Sekunden. Das Mittel aus beiden Zahlen ist 54,63.

Die Distanz beider Stationen bestimmte Arago zu 18622,27^m, die Geschwindigkeit des Schalles ist darnach

$$c = \frac{18622,27}{54,63} = 340,8^m.$$

Die Temperatur der Luft bei diesen Beobachtungen war 16° C., die Geschwindigkeit bei 0° wird daher

$$c_0 = \frac{340,8}{\sqrt{1 + 0,003\,67 \cdot 16}} = 331,2.$$

Kurz nachher wurde mit noch größerer Vorsicht von den holländischen Physikern Moll, van Beek und Kuytenbrouwer[1]) die Geschwindigkeit des Schalles bei Amsterdam nochmals bestimmt und diese erhielten als Resultat für die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger und trockner Luft bei 0° C.

$$c_0 = 332,26^m$$

oder nach einer neuen Berechnung von Schröder van der Kolk[2])

$$c_0 = 332,77.$$

Nach der Theorie muß die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, da sie nur von dem Quotienten der einander proportionalen Größe $\frac{H}{\mu}$ abhängt, unabhängig sein von der Dichtigkeit der Luft, also dieselbe sein, wenn sich der Schall aufwärts in dünnere Luft oder abwärts in dichtere Luft fortpflanzt. Dies ist durch die Versuche von Bravais und Martins bei einem bedeutenden Höhenunterschiede am Faulhorn bestätigt worden[3]). Die eine Station war am Faulhorn, die andere am Brienzer See, ihre schiefe Entfernung betrug 9560^m, der Höhenunterschied 2079^m, so daß die Neigung der vom Schall durchlaufenen Linie 12° 26′ betrug. Es wurde mit Anwendung wechselseitiger Schüsse auf dem Berge von A. Bravais und Martins, am See von C. Bravais beobachtet, die beiden erstern hörten 18, der letztere 14 Schüsse im ganzen an drei Tagen. Die direkt beobachtete Geschwindigkeit des Schalles war aufwärts 337^m,92, und abwärts 338^m,10, also im Mittel 338^m,01. Auf 0° und trockne Luft reduziert, wird daraus

$$c_0 = 332,37,$$

eine Zahl, die fast vollkommen mit der von Moll und van Beek erhaltenen übereinstimmt.

Über die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Temperatur hat vor kurzem Greely[4]) bei sehr niedrigen Temperaturen, — 10,9 bis — 45,6° C. eine größere Anzahl Messungen gemacht, in-

1) Poggend. Ann. 5. p. 351. 469. 1825. In einem Anhange zu dieser Abhandlung sind auch die sonstigen auf größere Genauigkeit Anspruch machenden Versuche zusammengestellt.

2) *Schröder van der Kolk*, Poggend. Ann. 124. 1865.

3) *Bravais* und *Martins*, Ann. de chim. et de phys. 13. (3). 1845. Poggend. Ann. 66. p. 351. 1845.

4) *Greely*, Beiblätter zu den Annalen d. Physik 14. p. 957. 1888.

dem er bei einer Standlinie von $1279^m,2$ beobachtete. Da bei diesen niedrigen Temperaturen die Luft ganz trocken ist, so soll man für diese Temperaturen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles Werte finden nach der Gleichung

$$c = c_0\sqrt{1 - 0{,}00367\,t} = c_0\,(1 - 0{,}001\,835\,t).$$

Greely fand fast genau diese Abnahme, er gelangt zu dem Resultate, daß für jeden Grad die Geschwindigkeit des Schalles um $0{,}603^m$ abnehme. Setzt man für c_0 den Wert 332,72, so ist nach der Gleichung $332{,}72 - 0{,}603\,t = 332{,}72\,(1 - 0{,}00183\,t)$

für	$-10^0{,}9$	$-25{,}7$	$-37{,}8$	$-45{,}6$
berechnet $c =$	326,15	317,22	309,22	305,23
beobachtet $c =$	326,1	317,1	309,7	305,6.

Gegen die mitgeteilte Beobachtungsmethode hat Regnault[1]) den Einwurf erhoben, daß dieselbe keine absolut genauen Resultate liefern könne, da es bei derselben dem Beobachter unmöglich sei, den Moment der Schallerzeugung und den der Wahrnehmung mit absoluter Genauigkeit zu bestimmen. Der Beobachter werde stets durch den aufflackernden Lichtblitz, wie durch den ankommenden Schlag überrascht, und ebenso sei es keineswegs sicher, daß bei dem Markieren des Sekundenzählers zwischen der Wahrnehmung und der dadurch hervorgebrachten Willensäußerung eine durchaus unmeßbare Zeit liege. Deshalb sei dieses Verfahren nur statthaft bei sehr großen Standlinien und deshalb sehr intensiven Schallen. Bei sehr intensiven Schallen sind aber, wie schon Schröder van der Kolk[1]) hervorgehoben hatte, die Voraussetzungen der Theorie, welche als Maß der Elastizität den augenblicklichen Luftdruck setzt, nicht mehr gestattet, da dann in den Verdichtungswellen eine merkliche Verdichtung stattfindet, bei welcher die Gase dem Mariotteschen Gesetze nicht mehr folgen. Bei großen Standlinien und im freien Raume ist allerdings nach den Bemerkungen von Schröder dieser Einfluß unmerkbar, indes bleibt immer die erste Unsicherheit bestehen. Die nahe Übereinstimmung der gefundenen Werte untereinander und mit der Theorie beweist deren Richtigkeit auch nicht, da der Wert von k sich nur schwierig direkt mit Sicherheit bestimmen läßt, wir haben oben für k den aus Versuchen von Masson, Hirn und Weißbach abgeleiteten mittlern Wert eingesetzt, welcher mit dem später von Röntgen gefundenen übereinstimmt.

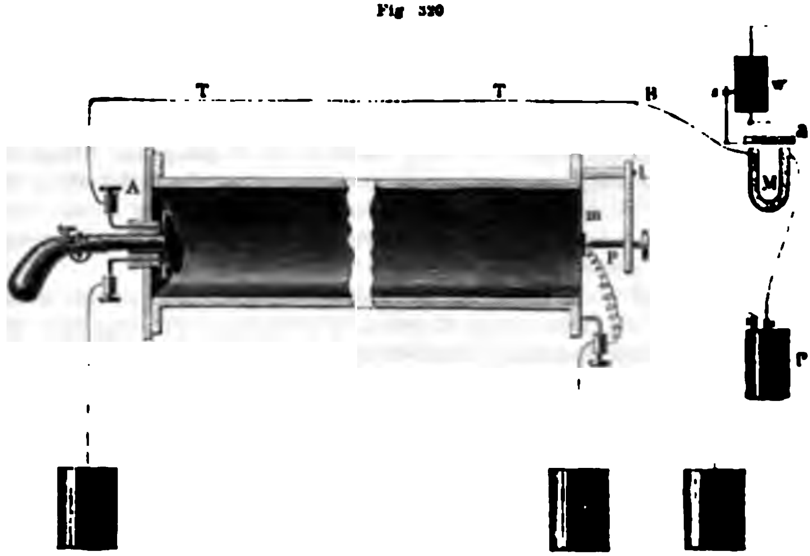
Regnault hat deshalb eine ausgedehnte Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles durchgeführt und dabei die Wasserleitungsröhren benutzt, welche in den Jahren 1862 und 1863 in Paris neu gelegt wurden: gleichzeitig suchte er auch die Fortpflanzung des Schalles in freier Luft durch Kanonenschüsse zu bestimmen.

Der wesentliche Unterschied der Regnaultschen Methode von den frühern ist der, daß er den Moment der Erzeugung des Schalles und den der Ankunft am Orte der Beobachtung nicht durch den Beobachter selbst bestimmen, sondern ihn an einem selbsttätigen Registrierapparat sich auf-

1) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. de France. **37**. 1868 u. 1870.
2) *Schröder van der Kolk*, Poggend. Ann. **124**. 1865.

zeichnen ließ. Er benutzte dazu die elektrische Telegraphie in einer Weise, wie sie das Schema Fig. 320 deutlich macht. Der Schall wurde erzeugt bei den Röhren durch den Schuß einer Pistole, in freier Luft durch den einer Kanone. Von dem Orte A, wo sich die Pistole befand (Fig. 320), war eine Telegraphenleitung zur Station B, wo beobachtet wurde, geführt. Von der Leitung ging bei B ein Draht zu dem Elektromagnet M und von diesem zu dem einen Pol der Batterie P. Der andere Pol der Batterie war durch die Platte E_1 mit der Erde in leitender Verbindung. Wurde noch ein anderer Punkt der Leitung mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wurde der Strom geschlossen, der Magnet magnetisch, und der Anker a angezogen; wurde die Leitung wieder unterbrochen, so wurde der Anker wieder von dem Magnete entfernt. War der

Fig. 320



Anker angezogen, so schrieb der Stift s auf einem geschwärzten Zylinder, der ebenso wie bei den Phonautographen mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht wurde.

Eine solche Verbindung der Leitung TT mit der Erde wurde bei dem Beginne der Versuche bei A hergestellt, indem in der Lücke ff der Leitung, die T mit E_3 verband, unmittelbar vor der Mündung der Feuerwaffe ein feiner Metalldraht ausgespannt wurde. Diese Verbindung wurde dann in dem Moment unterbrochen, in welchem das Geschütz abgefeuert wurde, indem ein fester auf die Ladung gesetzter Filzpfropf den Draht ff zerriß. Die Unterbrechung des Stromes entfernte den Stift s von der geschwärzten Walze, so daß das Aufhören des von s geschriebenen Striches den Moment der Schallerzeugung angab. In dem Augenblicke nun, in welchem der Schall in B ankam, wurde der Strom wieder geschlossen, so daß durch einen neuen von dem Stift s auf der Walze gezogenen Strich dieser Moment markiert wurde. Zu dem Ende war bei B in passender Weise eine sehr

feine Membran m ausgespannt, welche durch die ankommende Schallwelle in Schwingungen versetzt wurde. Die Membran trug in ihrer Mitte ein kleines Platinplättchen, welches durch einen feinen äußerst biegsamen Draht mit der in die Erde versenkten Platte E_2 in Verbindung stand. Unmittelbar vor der Platte befand sich ein Stift p, welcher mit der Leitung T durch plB in metallischer Verbindung war. Die bei m ankommende Welle gab der Membran einen Stoß und bewirkte dadurch, daß der Stift p mit dem Platinplättchen in Kontakt kam und damit, daß der Strom geschlossen und der Stift s wieder gegen die geschwärzte Walze gedrückt und ein Strich gezogen wurde. Der Abstand der beiden Striche gab dann die zwischen Abgabe und Ankunft des Schalles verstrichene Zeit, wenn man die Zeit bestimmte, welche die Walze zu der beobachteten Drehung gebraucht hatte. Zu dem Ende wurden auf der Walze durch ein schwingendes Pendel die einzelnen Sekunden markiert, und gleichzeitig von einer schwingenden Stimmgabel eine Wellenlinie gezogen. Diese drei Linien, die des Pendels, der Stimmgabel und die von dem Stifte s gezogenen, waren unmittelbar untereinander. Man hatte deshalb nur die Wellen vom ersten Aufhören des von s gezogenen Strichs bis zum ersten folgenden Sekundenzeichen, und von dem letzten Sekundenzeichen vor dem zweiten von s gezogenen Strich bis zu diesem Strich selbst zu zählen, um in selbst tausendstel Sekunden die Zeit zu erhalten, welche der Schall gebraucht, um von A bis B sich fortzupflanzen. Eine genaue Messung des Abstandes AB gab die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

In bezug auf die Einzelheiten der Ausführung und der Versuche selbst müssen wir auf die Abhandlung Regnaults verweisen, wir begnügen uns hier, die erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Zunächst schloß Regnault aus den Versuchen in den Wasserleitungsröhren, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Tat mit der Intensität des Schalles abnehme. Bei diesen Versuchen wurde die Pistole bei A in das eine Ende der Wasserleitungsröhre hineingesteckt, welches im übrigen ganz verschlossen war und das andere Ende bei B ebenfalls ganz geschlossen. Die Schallwelle kam dann zunächst direkt von A nach B, wurde bei B reflektiert und kehrte dann nach einer zweiten Reflexion bei A wieder nach B zurück, nachdem sie das Rohr dreimal durchlaufen hatte usf. Dabei zeigte sich, daß, trotzdem sich der Schall in zylindrischen Röhren ausbreitete, seine Intensität sehr rasch abnahm, und zwar um so rascher, je enger die Röhre war, in welcher der Schall sich ausbreitete. So wurde der von einer mit 1^g Pulver geladenen Pistole erzeugte Schall nicht mehr gehört, als er in einer Röhre vom

Durchmesser	$0^m,108$	durchlaufen	hatte	1150^m
„	$0^m,300$	„	„	3810^m
„	$1^m,100$	„	„	9540^m.

Durch die Bewegung der Membran m konnte man indes die Rückkehr der Welle viel länger beobachten, man erkannte sie in den drei eben genannten Röhren und unter den angegebenen Umständen noch, nachdem sie bezw. 4056^m, 11430^m und 19851^m durchlaufen hatte.

Entsprechend der Abnahme der Intensität zeigte sich auch eine Abnahme der Geschwindigkeit des Schalles, wie folgende Zahlen zeigen:

Röhre von $0^m,108$ Durchmesser durchlauf. Weg	Geschw.	Röhre von $0^m,300$ Durchmesser durchlauf. Weg	Geschw.
$566^m,74$	330,99	$3810^m,3$	332,18
$1700^m,22$	328,21	$7620^m,6$	330,43
$2833^m,70$	327,52	$11430^m,0$	329,64
$4055^m,90$	326,66	$15240^m,9$	328,96

Röhre von $1^m,10$ Durchmesser durchlauf. Weg	Geschw.
$749^m,1$	334,16
$1417^m,9$	332,50
$5671^m,8$	331,24
$11343^m,6$	330,68
$19851^m,3$	330,52.

Die Zahlen zeigen somit eine beträchtliche Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit der Intensität, gleichzeitig ergeben sie aber auch, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedener Weite eine sehr verschiedene ist. Sehr deutlich tritt dieser Unterschied bei der Vergleichung der drei in jeder Reihe letzten Werte hervor, welche die mittlere Geschwindigkeit des Schalles geben von dem Momente seiner Erzeugung bis zum Momente, in welchem der Schall nicht mehr wahrnehmbar ist.

Aus diesen Erfahrungen ergibt sich, daß die Wände der Röhren, in welchen die den Schall fortpflanzende Luft eingeschlossen ist, auf die Elastizität der Luft vermindernd einwirken müssen, ohne die Dichtigkeit zu vermindern, oder daß die Dichtigkeit vermehrt wird, ohne daß gleichzeitig die Elastizität vergrößert wird. Wir werden die Frage im nächsten Paragraphen genauer behandeln. Daß zwischen der schwingenden Luft und den Wänden eine Wechselwirkung besteht, das ergibt sich schon aus der raschen Abnahme der Schallintensität beim Fortpflanzen des Schalles durch die Röhren. Denn da hier die fortschreitende Welle immer wieder dieselbe Luftmasse in Bewegung versetzt, so kann die Abnahme der Schallstärke nur von einer Abgabe der Bewegung an die Röhrenwände herrühren, eine Abgabe, die auch dadurch konstatiert wurde, daß man neben der Röhre auf ihrer ganzen Länge den Schall zu hören imstande war.

Um den Einfluß der Röhrenwände ganz zu eliminieren, müßte man Röhren von unendlich großem Durchmesser anwenden. Regnault glaubt indessen, daß bei der Röhre, deren Durchmesser gleich $1^m,1$ ist, der Einfluß der Wände schon ganz unmerklich gewesen sei, daß man deshalb die aus der letzten Versuchsreihe sich ergebende Zahl $330^m,6$ als die mittlere Geschwindigkeit des durch einen Pistolenschuß erzeugten Schalles von dem Entstehungsmomente bis zu dem, in welchem er verschwindet, ansehen könne.

Die unserer Gleichung entsprechende Geschwindigkeit würde das noch nicht genau sein, da unsere Gleichung voraussetzt, daß die Dichtigkeitsänderung der Luft unendlich klein ist, somit strenge genommen für den Schall eine unendlich kleine Intensität voraussetzt. Man erhält dieselbe bei diesen Versuchen aus den Zwischenräumen, welche bei den letzten unmittelbar vor dem Verschwinden des Schalles gemachten Beobachtungen zwischen einer und der folgenden Rückkehr des Schalles verstreichen. Regnault erhält hierfür die nur wenig kleinere Zahl

$$c_0 = 330,30$$

In freier Luft erhielt Regnault für die Geschwindigkeit eines durch Kanonenschüsse erzeugten Schalles in der Tat fast genau die in der weitesten Röhre gefundene Zahl, nämlich als mittlere Geschwindigkeit

$$c_0 = 330^{\mathrm{m}},70,$$

eine Zahl, welche nur um 0,4 von der in der Röhre gefundenen sich unterscheidet.

Gegen die Deutung, welche Regnault seinen Versuchen in bezug auf die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Schalles gegeben, hat später Rink[1]) sehr berechtigte Einwände erhoben, und gezeigt, daß Regnaults Versuche eine solche Abhängigkeit keineswegs erkennen lassen, wenn man aus den Berechnungen der Versuche das erste und zweite Durchlaufen der Röhren ausschließe. Für diese und besonders für das erste kann man die Gesetze der Schallausbreitung gar nicht anwenden. Durch den Pistolenschuß wird nämlich die Luft selbst in der Achse der Röhren mit großer Geschwindigkeit fortgeschleudert, so daß also zunächst sich nicht nur die Schwingungen in der Röhre fortpflanzen, sondern auch der Träger derselben, die Luft. Die Beobachtung des ersten Durchlaufens der Röhre muß also gerade so eine zu große Geschwindigkeit des Schalles geben, wie Versuche in freier Luft, bei welchen man die Fortpflanzung des Schalles mit der Richtung des Windes beobachtet. Möglich ist es, daß auch bei der ersten Rückkehr des Schalles die Luft noch eine von der schwingenden Bewegung unabhängige fortschreitende Bewegung hat, und deshalb schloß Rink aus seiner Berechnung der Regnaultschen Versuche auch diese Beobachtung aus.

Ein weiterer Beweis gegen die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Intensität desselben ergibt sich daraus, daß bei stärkeren Pulverladungen der Pistole die Geschwindigkeiten sich keineswegs größer ergeben, während doch die mit stärkeren Pulverladungen abgegebenen Schüsse einen Schall von erheblich größerer Intensität geben.

In folgender Tabelle sind zum Beweise der Richtigkeit der Einwürfe von Rink die berechneten Werte der Geschwindigkeit für einige Beobachtungsreihen zusammengestellt, die in dem $1^{\mathrm{m}},10$ weiten Rohre erhalten sind. Die erste Spalte enthält die Nummer der Versuchsreihe, wie Regnault sie bezeichnet hat, die zweite die Pulverladung in Grammen, die folgenden die Schallgeschwindigkeiten, wenn der Schall die Röhre die über jeder Spalte gegebene Anzahl mal durchlaufen hatte, berechnet aus den beobachteten Zeiten mit Ausnahme des ersten Hin- und Herganges des Schalles: die Spalte 3 L gibt also die Geschwindigkeit berechnet aus dem dritten, 4 L aus dem dritten und vierten Durchlaufen der Röhre usw.

Nr.	Ladung	3 L	4 L	5 L	6 L	7 L	8 L
1	0,5	330,02	330,29	330,15	330,21	330,11	330,13
2	1	330,36	330,59	330,57	330,61	330,44	330,42
3	1,5	330,29	330,57	330,54	330,60	330,47	330,53
4	2	330,60	330,51	330,84	330,39	330,44	330,30
5	1	330,04	330,26	330,26	330,28	330,16	330,22
6	1	330,36	330,37	330,50	330,67	330,55	330,50

1) *Rink,* Poggend. Ann. **149**. 1873.

Wie man sieht sprechen diese Zahlen auf das evidenteste gegen die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Intensität, so daß also selbst für diese, jedenfalls anfangs noch sehr kräftigen Schalle, die Bemerkung Schröder van der Kolks noch keine Gültigkeit hätte.

Als Mittel der Geschwindigkeit des Schalles in der $1^m,1$ weiten Röhre berechnet Rink in dieser Weise

$$c = 330,5,$$

welche der von Regnault in freier Luft erhaltenen bis auf 0,2 gleich ist.

Auch Violle und Vautier[1]) kommen zu demselben Resultat, daß nur an der Erzeugungsstelle sehr starker Schalle eine Unregelmäßigkeit in der Fortpflanzung stattfände, die eine größere Geschwindigkeit zur Folge habe, daß sich aber bei der Fortpflanzung bald die normalen Verhältnisse herstellten, bei denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Intensität abhängig sei. Sie finden weiter, daß auch in einer Röhre von 1^m die Schallgeschwindigkeit für den Knall einer Pistole noch um $0,46^m$ verändert wäre, und finden so für die Schallgeschwindigkeit im freien Raume den Wert 331,1, den sie auf $0,1^m$ genau halten.

Im Jahre 1895 nahmen die genannten Gelehrten ihre Messungen nochmals auf, und zwar in Argenteuil in einer Röhrenleitung von 3^{km} Länge und 3^m Durchmesser.[2]) Auf der Länge wurden drei Stationen errichtet, deren Abstand mit großer Genauigkeit gemessen wurden. Der Durchgang der Schallwelle an einer Station wurde nach ganz verschiedenen Methoden bestimmt, wodurch natürlich die Größe der Fehler der Methoden erkannt wurden. Es wurden direkte Messungen mit dem Ohre gemacht. Ferner wurden die Bewegungen einer resonierenden Membran photographiert. Auch mechanisch wurden die Wellen und deren Verlauf mit einer Hebelübertragung aufgezeichnet, und endlich die Änderung des Brechungsindex der Luft, die bei der Verdichtung der Welle eintritt, mittels einer optischen Interferenzmethode registriert. Als Mittelwert aus allen Bestimmungen wurde für die normale Schallgeschwindigkeit in der Röhre $331,15^m$ pro Sekunde gefunden. Als Genauigkeit wird angegeben $2-3^{cm}$. Berücksichtigt man nun noch die in § 174 besprochene Korrektur wegen des Einflusses der Röhrenwandung, so würde als Mittel in freier Luft sich ergeben $331,36^m$.

Später hat noch Frot[3]) Messungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft unter Anwendung von Kanonenschüssen ausgeführt. Er gelangte aus 15 Beobachtungen zu dem Werte 330,7 bei 0° C.

Bei den Versuchen benutzten Violle und Vautier auch unter anderm musikalische Töne und machten dabei die sonderbare Beobachtung, daß zuerst der Grundton, dann der Reihe nach der 6., 5., 4., 3. Oberton ganz getrennt zurückkommen, nachdem der Schall die Röhre einmal hin und her

1) *Violle* und *Vautier*, Comptes Rendus **110** p. 236. 1890.

2) *Violle* und *Vautier*, Journ. d. phys. **5**. 3. p. 22. 1896. Eine zusammenfassende Darstellung der genannten Messungen und auch der früheren Beobachtungen anderer Physiker befindet sich in den Rapports du Congres international de physique. **1**. p. 228. 1900.

3) *Frot*, Comptes Rendus **127**. p. 607. 1898.

durchlaufen hat. Brillouin[1]) gibt als Grund dafür die wiederholte Reflexion an den Wänden an. Wenn der Ton nicht ganz gleichmäßig zentral erregt durch die Röhre geht, so kann er als mehrfacher Ton zurückkehren.

Einen ähnlichen Wert wie Violle und Vautier fand Le Roux[2]) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer 7^{cm} weiten Röhre nach einer der Regnaultschen ähnlichen Methode, nämlich $330{,}66^{m}$.

Regnault hat gleichzeitig bei seinen Versuchen die Frage einer erneuten Prüfung unterzogen, ob denn in der Tat die Schallgeschwindigkeit bei allen Drucken dieselbe sei, ein Satz, der strenge nur so weit gültig sein kann, als die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen. Es gelang ihm nicht, einen meßbaren Unterschied in der Schallgeschwindigkeit zu erhalten, trotzdem er den Druck der in einer Röhre eingeschlossenen Luft von 247^{mm} bis 1267^{mm}, also bis zum Fünffachen des Anfangsdruckes steigerte.[3])

Schließlich hat Regnault auch in den Röhren die Geschwindigkeit des Schalles in einigen andern Gasen als in der Luft gemessen, nämlich in Wasserstoff, Kohlensäure, Stickoxydul und Ammoniak. Nach der Theorie ist die Geschwindigkeit des Schalles

$$c = \sqrt{\frac{gH\sigma}{s} k(1 + \alpha t)},$$

in welcher Gleichung s die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur 0° bedeutet. Für das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Gasen ergibt sich daraus

$$c : c_1 = \sqrt{\frac{k}{s}} : \sqrt{\frac{k_1}{s_1}},$$

oder, wenn wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft $c_1 = 1$ und die Dichte der Luft $s_1 = 1$ setzen

$$c = \sqrt{\frac{k}{sk_1}}.$$

Der Wert von c hängt also nur ab von dem Verhältnis der Werte k des Gases und der Luft, sowie von der Dichte des betreffenden Gases. Die von Regnault erhaltenen Werte von c für $c_1 = 1$ und die daraus mit der bekannten Dichte der Gase für die einzelnen Gase nach der Gleichung

$$k = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \left(\frac{s}{s_1}\right) k_1$$

sich ergebenden Werte von k sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	$\frac{c}{c_1}$	$\sqrt{\frac{1}{s}}$	k
Luft	1	1	1,395
Wasserstoff	3,801	3,799	1,396
Kohlensäure	0,8009	0,8087	1,368
Stickoxydul	0,8007	0,8100	1,361
Ammoniak	1,2279	1,3025	1,239.

1) *M. Brillouin*, Rapports du Congrès international de phys. 1. p. 246. 1900.
2) *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. 12. (4.) 1867.
3) Zu andern Resultaten glaubte *Krajewitsch* zu gelangen, auf dessen Versuche wir im nächsten Paragraphen zurückkommen werden.

Die für diese Gase gefundenen Werte der Schallgeschwindigkeit und damit die Werte von k können nur angenäherte sein, da es sehr schwierig ist, so ausgedehnte Röhrenleitungen mit vollständig reinen Gasen zu füllen. Wir werden im nächsten Paragraphen genauere Werte mit Hilfe der indirekten Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit erhalten.

Aus den Regnaultschen Messungen ergibt sich somit die Schallgeschwindigkeit nicht unerheblich kleiner als aus den früheren Versuchen, nämlich zu 330,7 anstatt zu 332,7 nach den Messungen der holländischen Physiker oder 332,4 nach denen von Bravais und Martin, während sie der von den französischen Akademikern gefundenen Zahl 331,2 näher kommt. Nehmen wir die von diesen Beobachtern gefundenen Werte sämtlich als gleich wahrscheinlich an, wozu wir berechtigt sind, da man dem von Regnault hervorgehobenen psychologischen Momente bei der Beobachtung der zwischen Wahrnehmung des Lichtes und des Schalles verfließenden Zeit wohl nicht den Einfluß zuschreiben kann, daß diese Zeit immer zu klein genommen wird, so ergibt sich als Mittel aus diesen vier jedenfalls besten direkten Messungen der Schallgeschwindigkeit in der Luft der Wert

$$c = 331{,}76.$$

Betreffs der Ausbreitung des Schalles müssen wir noch auf eine Anomalie hinweisen, die sich bei der Ausbreitung des Schalles von Detonationen schwerer Geschütze bei scharfen Schüssen zeigt, wenn das Geschoß eine Anfangsgeschwindigkeit hat, welche größer ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles. In der Nähe der Flugbahn des Geschosses scheint die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles gleich der Geschwindigkeit des Geschosses zu sein, und von der Stelle an, wo die Geschwindigkeit des Geschosses kleiner wird als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, scheint der Schall dem Geschosse vorzueilen.

Journée[1]) hat, um diese Erscheinung zu erklären, die Hypothese aufgestellt, daß ein Geschoß in jedem Momente durch seinen Stoß gegen die ruhende Luft ein Zentrum des Schalles ist. In Verfolgung dieser Hypothese hat De Labouret[2]) genauer die Orte zu bestimmen gesucht, wo man beim scharfen Schießen den Schall zuerst hörte und die Zeit berechnet, welche für einen gegebenen Ort zwischen der Detonation beim Abfeuern des Geschosses und der Wahrnehmung verstreicht.

Nach einem Berichte Seberts[3]) über länger auf dem Schießplatze zu Chalons von Journée durchgeführte Beobachtungsreihen ergab sich, daß die Erscheinungen mit den Auffassungen von Journée und De Labouret in Übereinstimmung sind. Man kann daher nicht mehr, wie früher wohl geschah, annehmen, daß sehr intensive Schalle sich erheblich rascher, als der normalen Geschwindigkeit entspricht, fortpflanzen, sondern die scheinbar größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist einer sekundären Ursache zuzuschreiben.

1) *Journée*, Comptes Rendus **106**. p. 244. 1887.
2) *De Labouret*, Comptes Rendus. **106**. p. 934. 1893; **107**. p. 85. 1893.
3) *Sebert*, Beiblätter zu den Annalen d. Physik. **12**. p. 209. 1888.

§ 174.

Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit. Wir haben im vorigen Kapitel nachgewiesen, daß jede Säule irgend eines Körpers, wenn sie in longitudinale Schwingungen versetzt wird, eine Reihe von Tönen gibt. Für Luftsäulen in Pfeifen eingeschlossen erhielten wir als Ausdruck für die Schwingungszahl dieser Töne

$$N = \frac{(2n-1)c}{4(l+x)}$$

für gedeckte Pfeifen, und

$$N = \frac{nc}{2(l+x+y)}$$

für offene Pfeifen; worin l die Länge der Pfeifen, x die Korrektion wegen der Mundöffnung und y die Korrektion bei den offenen Pfeifen wegen des Hervorragens der schwingenden Luftsäule aus der obern Öffnung der Pfeife bedeutet.

Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnittes ist die Größe c in diesem Ausdruck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung oder des Schalles in dieser Luftsäule, indem N der reziproke Wert der Schwingungsdauer der stehenden Welle von der Länge $2(l+x)$, bezw. $(l+x+y)$ ist. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhielten wir aber früher den Quotienten aus der doppelten Länge der stehenden Welle und der Schwingungsdauer der Bewegung, oder

$$c = \frac{2L}{T} = 2LN.$$

Die Schwingungszahlen von Tönen können wir mittels des Monochordes oder der Sirene auf das genaueste erhalten. Da wir nun die Länge l der Röhre direkt messen und die Größen x und y entweder nach der Dulongschen Methode beobachten oder nach der Wertheimschen berechnen können, so können wir aus den beobachteten Tönen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles sofort erhalten. Bei Anwendung gedeckter Pfeifen erhalten wir, wenn N_1 die entweder direkt erhaltene oder aus einem der harmonischen Töne bestimmte Schwingungszahl des Grundtones ist, für welchen $n = 1$,

$$c = 4(l+x)N_1$$

und für offene Pfeifen

$$c = 2(l+x+y)N_1.$$

Dulongs Versuche[1]) führten für Luft auf die Zahl 333^m für 0^0 als Mittel aus einer sehr großen Zahl von Versuchen; indes glaubte Dulong doch, daß sich die absolute Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft durch die Töne der Pfeifen nicht mit Sicherheit bestimmen lasse, und die Zahlen, welche er mitteilt, zeigen auch besonders mit dem richtigen Werte von α in der Korrektion für die Temperatur berechnet Abweichungen bis zum Werte von 10^m.

---

1) *Dulong*, Untersuchungen über die spezifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. Ann. de chim. et de phys. **41**. 1829. Poggend. Ann. **16**. 1829

Wertheim[1]) indes hat die Geschwindigkeit des Schalles in Luft mittels der Pfeifentöne fast genau mit der Theorie in Übereinstimmung gefunden. Seine Versuche sind bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt, die verschiedenen von ihm erhaltenen Werte sind die folgenden:

Temperatur t	Geschwindigkeit des Schalles bei der Temperatur t c_t	Geschwindigkeit bei 0° $c_0 = \dfrac{c_t}{\sqrt{1 + 0{,}003\,67\,t}}$
	I. Reihe	
0°,5 C.	331,98	331,70
2,0	332,74	331,53
4,5	332,75	330,04
8,0	335,43	330,62
8,5	338,05	332,91
9,0	338,01	332,54
12,0	339,46	332,23
12,3	343,01	335,53
16,0	338,68	329,17
26,6	347,82	332,01
	II. Reihe.	
9,9	338,85	332,87
16,0	337,20	327,35
	III. Reihe.	
21,0	341,15	329,12
	IV. Reihe.	
9,3	334,65	329,09
11,5	336,50	329,61
17,0	342,3	332,11
	Mittel aller Versuche	331,33.

Die von Wertheim erhaltene Zahl ist somit um $0^m,7$ oder 0,002 des von Regnault gefundenen Wertes größer als der letztere, trotzdem die von Wertheim angewandten Pfeifen im Maximum einen Durchmesser von 40^{mm} hatten, also nur etwa 0,33 der von Regnault benutzten engsten Röhre. Es ist indes auch bei Wertheim der Einfluß der Pfeifenweite unverkennbar. Die Versuche sind mit vier verschiedenen Pfeifen angestellt, deren Durchmesser waren 10, 20, 20, 40^{mm}, drei waren von Messing, die vierte, deren Durchmesser 20^{mm} betrug, von Glas. Nimmt man anstatt aus allen Versuchen nur aus den zu jeder Pfeife gehörigen Zahlen das Mittel, so erhält man

Messingpfeife	von	40^{mm}	Durchmesser . . .	332,10	aus Reihe	I
„	„	20^{mm}	„ . . .	330,11	„ „	II
Glaspfeife	„	20^{mm}	„ . . .	330,23	„ „	IV
Messingpfeife	„	10^{mm}	„ . . .	329,12	„ „	III.

Wie man sieht, nimmt die aus der Schwingungszahl und den Pfeifenlängen berechnete Geschwindigkeit erheblich ab mit dem Durchmesser der

1) *Wertheim*, Über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. Ann. de chim. et de phys. 23. (3) 1848. Poggend. Ann. 77. 1849.

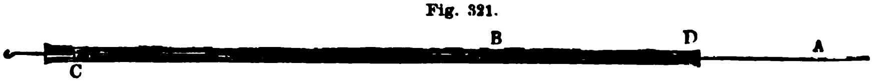
Pfeifen, während die beiden Pfeifen gleichen Durchmessers auch dieselbe Zahl ergeben.

Die Methode der Geschwindigkeitsmessung durch Pfeifentöne beruht eigentlich auf Messung der Wellenlängen, welche, wie wir schon mehrfach hervorhoben, keineswegs vollkommen sicher ist; eine Beobachtung hat Kundt[1]) in den Stand gesetzt, die Länge der Wellen in den Gasen direkt zu messen und so eine sehr bequeme Methode zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeiten zu geben.

Wenn man eine an beiden Seiten offene Röhre in longitudinale Schwingungen versetzt, so gerät die in der Röhre vorhandene Luft nicht mit in Schwingungen; bringt man deshalb in eine solche Röhre Lycopodium oder Kieselsäure, so bewegt sich dies zu den in den Röhrenwänden sich bildenden Savartschen Knotenlinien (§ 147). Anders dagegen, wenn man die Röhren an den Enden verschließt, sei es, daß man sie zustöpselt oder zuschmilzt. Da die freien Enden eines den tiefsten Longitudinalton gebenden Rohres stets ein Schwingungsmaximum haben, so stoßen die Endflächen des Rohres ganz periodisch auf die eingeschlossene Luft, und versetzen dieselbe in Schwingungen, welche mit denen der Röhre isochron sind. Da nun diese Schwingungen von beiden Enden der Röhre gegeneinander sich fortpflanzen, so müssen sich stehende Wellen bilden, an deren Knotenpunkten das Lycopodium oder die Kieselsäure sich ansammelt. Die Länge dieser stehenden Wellen hängt lediglich von der Höhe des erzeugenden Tones und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in dem die Röhre erfüllenden Gase ab, oder wenn wir nach und nach dieselbe Röhre mit verschiedenen Gasen füllen, so ist die Länge der Wellen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen direkt proportional.

Eine ganz eben solche Bildung von stehenden Wellen in der in einer Röhre eingeschlossenen Luftsäule tritt ein, wenn man die Röhre an einem

Fig. 321.



Ende schließt und durch das andere offene Ende, wie Fig. 321 zeigt, in dieselbe den tönenden Stab einführt. Klemmt man die Röhre bei D ein und bringt den Stab, der bis zu seiner Mitte in die Röhre eingeführt ist, durch Streichen in der Richtung von D nach A zum Schwingen, so sind es die Stöße des freien Endes B gegen die eingeschlossene Luft, welche die Luft in Schwingung versetzen; die Schwingungen werden bei C reflektiert, so daß auch hier stehende Wellen sich ausbilden, in deren Knoten der Staub sich ansammelt. Bei dieser Art der Erzeugung der Luftschwingungen werden die Knotenlinien durch nichts alteriert, was bei der ersten Art der Erregung, bei der die Röhre selbst schwingt, immerhin durch die Savartschen Linien noch möglich ist. Man kann deshalb bei dieser Art der Erregung die Länge der stehenden Wellen leicht messen und so die Geschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedenen Durchmessers und bei verschiedenen Gasen miteinander vergleichen, oder auch, wenn man die

1) *Kundt,* Poggend. Ann. **127**. 1866 und **135**. 1868.

Schwingungszahl des Stabtones bestimmt, ihrem absoluten Werte nach erhalten.

Auf die Einzelnheiten des Verfahrens einzugehen, würde uns hier zu weit führen, wir verweisen deswegen auf die Arbeiten von Kundt.[1])

Kundts Versuche bestätigen nun zunächst das vorhin aus denen von Wertheim gezogene Resultat, daß die Geschwindigkeit auch hoher Töne von dem Durchmesser der Röhre abhängig ist, und liefern gleichzeitig die Erklärung, weshalb Regnault in Röhren von 10,8^{cm} Durchmesser noch eine so bedeutende Verzögerung des Schalles fand, während wir aus den Zahlen Wertheims schon für Pfeifen von 4^{cm} Durchmesser die volle Geschwindigkeit erhielten. Kundt fand nämlich, wie folgende kleine Tabelle zeigt, daß die Verzögerung der Geschwindigkeit mit der Wellenlänge des Tones zunimmt; die Geschwindigkeit in einer Röhre von 13^{mm} Durchmesser ist stets gleich 1 gesetzt.

Durchmesser der Röhren	Geschwindigkeit des Schalles für Töne mit Wellenlängen von		
	180 mm	90 mm	60 mm
mm			
55,0	1,01010	1,00885	1,00584
26,0	1,00908	1,00842	1,00781
13,0	1,00000	1,00000	1,00000
6,5	0,98031	0,99170	0,99176
3,5	0,92628	0,96666	

Für den tiefsten Ton, der nahezu dem ais_3 entspricht, nimmt also die Geschwindigkeit des Schalles bis zu dem Rohrdurchmesser 0,055 so merklich zu, daß die Grenze der Zunahme wohl noch nicht erreicht ist, während für den eine Oktave höhern Ton die Grenze der Röhrenweite, bis zu welcher die Geschwindigkeit wächst, schon bei 26^{mm} liegt. Der Pistolenschuß Regnaults gab nach Versuchen von König einen Ton, dessen Wellenlänge etwa 3,6^{m}[2]), dessen Höhe somit fast g_{-1} war; da somit die Länge der Welle 20mal größer ist, kann es nicht auffallend erscheinen, daß der Einfluß der Röhrenwände erst bei so viel größerem Durchmesser unmerkbar wurde.

Gleichzeitig fand Kundt, daß die Beschaffenheit der innern Röhrenwand auf die Geschwindigkeit des Schalles von Einfluß war, bei rauhen Wänden ist die Geschwindigkeit kleiner; einen Einfluß der Intensität vermochte Kundt dagegen nicht zu erkennen.

Daß die Geschwindigkeit des Schalles in engen Röhren sich beträchtlich vermindert, liegt einmal an der Reibung der schwingenden, in der Röhre eingeschlossenen Gasteile, durch welche die Beweglichkeit der schwingenden Teile vermindert wird, dann aber wesentlich in der Verminderung des Koeffizienten k, der, wie erwähnt wurde, in die Gleichung für die Fortpflanzung von Wellen in Gasen eingeht, weil an den verdichteten Stellen eine Erwärmung, an den Stellen der Verdünnung eine Abkühlung eintritt.

1) Ausführlich sind dieselben dargelegt in Poggend. Ann. 135. 1868.
2) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. 37. p. 437. 1868 u. 1870.

Diese Erwärmung und Abkühlung wird in Röhren kleiner, weil an den verdichteten Stellen Wärme an die Röhrenwand abgegeben, an den verdünnten Wärme von der Röhrenwand aufgenommen wird. Man erkennt deshalb leicht, daß die Abnahme der Geschwindigkeit in engern Röhren und für Töne größerer Schwingungsdauer die größere sein muß. Denn je enger die Röhre ist, um so größer ist im Verhältnis zur schwingenden Luftsäule die Wandfläche, welche ihren Einfluß ausübt, da die Menge der schwingenden Luft mit dem Quadrate des Röhrendurchmessers, die berührende Wandfläche dagegen mit der ersten Potenz desselben abnimmt. Je langsamer ferner die Schwingungen sind, um so größer ist der Wärmeaustausch mit den Röhrenwänden, da die Verdichtungen und Verdünnungen dann um so länger dauern.

Helmholtz[1]) und Kirchhoff[2]) haben diese Frage einer genauern theoretischen Behandlung unterzogen, ersterer unter Berücksichtigung der Reibung allein, letzterer unter Mitberücksichtigung des Wärmeaustausches: beide gelangen zu Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren, welche sich nur durch die Bedeutung einer in der Gleichung auftretenden Konstanten unterscheiden. Ist C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im freien Raum, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in einer Röhre vom Radius r für einen Ton, dessen Schwingungszahl n ist,

$$c = \frac{C}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}} = C\left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}\right),$$

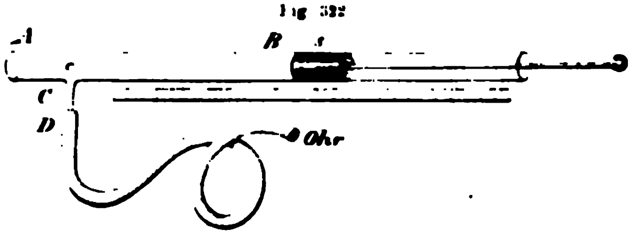
worin die Konstante γ bei Helmholtz die Reibungskonstante der Luft ist, während sie nach Kirchhoff von der Reibung und dem Wärmeaustausch der Luft und der Röhrenwand abhängt. Es soll also nach dieser Gleichung die Abnahme der Geschwindigkeit in Röhren, die Differenz $C - c$ dem Durchmesser der Röhre und der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umgekehrt proportional sein.

Da weder die Versuche von Regnault noch von Kundt ausreichend waren, um die theoretische Beziehung experimentell zu prüfen, haben Schneebeli[3]) und Adolph Seebeck[4]) neue Versuche über diese Frage angestellt, indem sie, wie Kundt, aber nach einer andern Methode, die Wellenlänge von Tönen verschiedener Höhen in Röhren von verschiedenem Durchmesser maßen. Beide Experimentatoren versetzten in einem einerseits geschlossenen Rohre die Luft durch hineingesandte Töne in stehende Schwingungen und bestimmten direkt mit dem Ohre den Abstand der Schwingungsmaxima von dem geschlossenen Ende des Rohres. Die von Seebeck gewählte Anordnung zeigt Fig. 322. In dem Rohre AB, an welchem bei C ein kleines Rohr senkrecht zur Längsachse von AB angeschmolzen ist, kann ein dicht schließender Stempel hin und her bewegt werden. An dem Rohr ist eine Skala angebracht, deren Nullpunkt bei C

1) *Helmholtz,* Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. 3. p. 16.
2) *Kirchhoff,* Poggend. Ann. **134**. 1868.
3) *Schneebeli,* Poggend. Ann. **136**. 1869.
4) *Ad. Seebeck,* Poggend. Ann. **139**. 1870.

liegt. Von dem kleinen Rohr CD geht ein Kautschukschlauch aus, dessen Ende in das eine Ohr gesteckt wird, während das andere Ohr durch einen Siegellackpfropfen geschlossen wird. Erzeugt man nun in dem Rohre stehende Wellen, so nimmt das Ohr kaum einen Ton wahr, wenn bei c ein Schwingungsmaximum ist, da dann die Luft dort nur eine hin- und hergehende Bewegung besitzt, ohne daß Verdichtungen und Verdünnungen eintreten. Es können deshalb in dem abgezweigten Rohre keine longitudinalen Schwingungen entstehen und zum Ohr fortgepflanzt werden. Sendet man deshalb durch eine tönende Stimmgabel, welche sich unmittelbar vor

Fig. 332.



dem Ende A befindet, Schwingungen in das Rohr AB und verschiebt den Stempel s so lange, bis das Ohr, in welchem das Kautschukrohr mündet, keinen Ton mehr wahrnimmt, so befindet sich bei c ein Schwingungsmaximum, und da an dem Stempel s sich immer ein Schwingungsknoten befindet, so ist der Abstand der Stempelfläche von c eine viertel Wellenlänge des Tones im Innern des Rohres. Das Vierfache des Abstandes multipliziert mit der Schwingungszahl des Tones gibt somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Rohre.

Wie Seebeck anführt, ist die auf diese Weise zu erreichende Genauigkeit sehr beträchtlich, bei Wellenlängen von 200^{mm} bis 300^{mm} weichen die einzelnen Messungen nur um $1-3^{mm}$ voneinander ab, die Abweichungen vom Mittel erreichten im allgemeinen kaum 1^{mm}.

Aus den Versuchen von Seebeck sowohl wie von Schneebeli ergibt sich, daß in der Tat bei engen Röhren die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit, solange die Röhren hinreichend enge sind, so daß man die ganze Luftsäule als gleichförmig schwingend annehmen darf, dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional ist. So erhielt z. B. Seebeck unter Annahme der Geschwindigkeit des Schalles im freien Raum $C = 332,77$ folgende Werte der Verzögerung $C - c$:

Durchmesser der Röhre	Ton c_2: $n = 512$ $C - c$		Ton g: $n = 384$ $C - c$		Ton e_1: $n = 320$ $C - c$	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
mm	m	m	m	m	m	m
3,4	9,79	9,79	13,91	13,91	15,51	15,51
9,0	4,33	3,70	5,09	5,25	4,75	5,06
17,5	1,85	1,90	2,91	2,70	3,53	3,01

Die als berechnet angegebenen Werte sind jedesmal aus dem für die engste Röhre gefundenen für die weitern Röhren unter Voraussetzung der Richtigkeit des Gesetzes abgeleitet, und man sieht, wie Beobachtung und Rechnung auch genügend übereinstimmen.

Kombiniert man die an verschiedenen Röhren unter Anwendung desselben Tones gemachten Beobachtungen, so läßt sich aus denselben die Geschwindigkeit des Schalles im freien Raume ableiten, nach der Gleichung

$$C = \frac{c_1 r_1 - c_2 r_2}{r_1 - r_2},$$

wenn c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in der Röhre vom Radius r_1 und c_2 jene in der Röhre vom Radius r_2 bedeutet. Indem Schneebeli alle seine Versuche zu je zwei in der Art kombinierte, welche in verschiedenen Röhren, deren Durchmesser zwischen 14^{mm} und 90^{mm} waren, ausgeführt waren, fand er im Mittel

$$C = 332{,}06^{m},$$

ein Wert, der nur um $0{,}3^{m}$ von dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Mittel abweicht; die extremsten Abweichungen von diesem Mittel waren 2^{m}, also nur 0,66 Prozent des berechneten Wertes.

Während so die Versuche übereinstimmend die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von dem Durchmesser der Röhren der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie gemäß finden, kommen beide Experimentatoren in bezug auf die Abhängigkeit von der Schwingungszahl zu andern Resultaten. Nach der Theorie soll die Verzögerung in Röhren gleichen Durchmessers der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umgekehrt proportional sein, nach den Versuchen nimmt aber die Verzögerung rascher ab, wie die Quadratwurzel aus der Schwingungszahl wächst, und Seebeck schließt aus seinen Versuchen, daß die Abnahme der Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Schwingungszahl proportional ist. In der Tat multipliziert man die in obiger Tabelle mitgeteilten Werte mit $n^{\frac{3}{2}}$, so findet man die in jeder Horizontalreihe sich ergebenden Produkte annähernd konstant; indes scheint, wenn man sich an die direkten Beobachtungen hält, die Verzögerung ebenso gut den Schwingungszahlen selbst umgekehrt proportional gesetzt werden zu können, so daß sich aus den Versuchen Seebecks kein bestimmtes Gesetz über die Abhängigkeit der Verzögerung von der Schwingungszahl ableiten läßt.

Später hat Kayser[1]) die Methode der Staubfiguren zu einer erneuten Prüfung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie benutzt; er wandte drei Töne an, deren Schwingungszahlen 2357 — 3895 — 5232 Schwingungen waren, und brachte die Staubfiguren in fünf Röhren, deren Durchmesser

$$25{,}8^{mm} \qquad 33{,}3^{mm} \qquad 44^{mm} \qquad 51{,}7^{mm} \qquad 82^{mm}$$

betrugen, hervor. Er schloß aus seinen Versuchen, daß sowohl die Abhängigkeit der Verzögerung von dem Durchmesser der Röhre, als von der Schwingungszahl der Theorie entsprechen, daß man indes für die Konstante γ der theoretischen Gleichung nicht den aus der Theorie sich ergebenden Wert 0,005 88, sondern einen etwa viermal größern Wert 0,0235 einsetzen müsse. In der Tat geben die auf diese Weise aus den Beobachtungen berechneten Werte für die Schallgeschwindigkeiten eine recht gute Übereinstimmung, indes tritt eine deutliche Abnahme der Werte mit der Röhrenweite ein. Die Werte werden nämlich für die Röhren

1) *Kayser,* Wiedem. Ann. 2. 1877.

I	II	III	IV	V
332,67	332,86	332,34	332,16	332,5
332,87	332,82	332,80	332,80	
332,69				
332,74	332,84	332,57	332,48	

Außerdem ergibt sich aus diesen Versuchen für die weiteste Röhre in dieser Weise berechnet eine auffallend große Korrektion, nämlich noch fast ein Meter, während die Versuche Kundts für eine erheblich größere Wellenlänge schon bei 26^{mm} Durchmesser der Röhre die volle Schallgeschwindigkeit ergaben. Berechnet man in der oben angegebenen Weise mit Elimination des Korrektionsgliedes die Geschwindigkeit aus den Versuchen mit gleichen Tönen in den verschiedenen Röhren, so erhält man erheblich verschiedene Werte, je nachdem man den tiefsten der drei Töne oder den mittlern anwendet. Für den tiefsten Ton liegen die Werte zwischen 333,4 und 330,91, das Mittel wird 331,76, für den mittlern Ton liegen die Werte zwischen 332,75 und 334,17, das Mittel ist 332,33; gerade die Rechnungen, in denen die weiteste Röhre eingeht, liefern bei der letztern Berechnung die kleinsten Werte. Trotz der Sorgfalt, mit welcher Kayser seine Versuche anstellte, scheinen dieselben deshalb doch nicht geeignet, die Frage abzuschließen, und ebenso wenig wird man den von Kayser aus seinen Versuchen abgeleiteten Wert der Schallgeschwindigkeit 332,5, dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Mittelwert vorziehen.

Die Frage nach der Gültigkeit der schon zitierten Formel

$$c = C\left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{n\pi}}\right)$$

griff Jos. Müller[1]) nochmals auf und stellte eine Untersuchung in Kundtschen Röhren an, deren Durchmesser zwischen 15,5 bis 3,7^{mm} lagen. Die Schwingungszahlen der benutzten Töne wurden von 900 bis 11500 variiert. Die für γ berechneten Werte schwankten zwischen 0,00314 und 0,01663, wodurch die Ungültigkeit der Kirchhoffschen Formel gezeigt ist. Die Schallgeschwindigkeit in den Röhren erwies sich als abhängig vom Material: je rauher die Wand und je größer die Wärmeleitung, um so größer wird die Verzögerung.

Zu diesem Resultat gelangte Müller dadurch, daß er die innere Röhrenwand mit einem Überzug von Lykopodium rauh machte, oder in das Innere der Röhre eine Messingstange oder einen Glasstab einführte.

Auch Schulze[2]) fand für tiefe Töne die γ-Werte vom Röhrenmaterial abhängig.

J. Webster Low[3]) hat die Wellenlängen verschiedener Töne in drei Röhren gemessen, er findet abweichend von den frühern Beobachtern die Helmholtz-Kirchhoffsche Theorie bestätigt und auch für die Konstante γ einen Wert, wie er sich aus der Reibung und Wärmeleitung der Luft ergibt.

Krajewitsch hat die Fortpflanzung des Schalles in Röhren benutzt,

1) *Josef Müller*, Diss. Bonn und Ann. d. Phys. **11**. 4. p. 331. 1903.
2) *F. A. Schulze*, Marburger Ber. **59**. 1903.
3) *J. Webster Low*, Wiedem. Ann. **52**. p. 641. 1894.

um die Geschwindigkeit der Schallausbreitung bei sehr geringer Dichtigkeit der Luft zu messen;[1]) er gelangte zu dem Resultate, daß bis zu einem Drucke von etwa 280^{mm} die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in hinreichend weiten Röhren konstant sei, daß aber bei weiterer Abnahme des Druckes die Schallgeschwindigkeit ganz erheblich abnehme. Er schloß daraus, daß bei geringen Drucken das Boyle-Mariottesche Gesetz nicht mehr gültig sei, daß der Druck des Gases, wie es Mendelejew angegeben, mit abnehmender Dichtigkeit erheblich schneller abnehme als die Dichtigkeit.

Stoletow[2]) hat dem gegenüber indes gezeigt, daß die Abnahme der Geschwindigkeit, die auch Krajewitsch in engen Röhren erheblich stärker fand als in weiten, ihren Grund darin hat, daß der Einfluß der Korrektion von Helmholtz-Kirchhoff nicht nur mit Verlangsamung der Schwingungen, sondern auch mit Verdünnung der Luft immer erheblicher werde. Nach Anbringung der Korrektion findet Stoletow bei Berechnung der Geschwindigkeiten bis zu Drucken von $70-88^{mm}$ Werte, welche nahe mit den von Krajewitsch gefundenen übereinstimmen.

Auch bei großen Drucken bis zu 120 Atmosphären sind von Witkowski[3]) nach der Methode der Kundtschen Staubfiguren in Luft Messungen über Schallgeschwindigkeit gemacht worden, und zwar sowohl bei Temperaturen von 0^0 wie auch bei $-78^0,5$ C. (Temperatur der festen Kohlensäure). Es stellte sich bei den Versuchen bei 0^0 eine Zunahme der Schallgeschwindigkeit von etwa 7 Prozent mit zunehmendem Drucke von 0 auf 100 Atm. heraus. Bei $-78^0,5$ nimmt die Geschwindigkeit ab bis etwa 40 Atm. und dann zu. Die Kirchhoffsche Formel genügt auch hier nicht, um die Resultate der verschiedenen Röhren und für verschiedene Tonhöhen in Übereinstimmung zu bringen.

Wenn nach alledem die indirekte Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit für Luft noch keine zuverlässigern Werte ergeben hat, als die direkte, so ist die Methode doch vorzüglich geeignet, die Geschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen und in verschiedenen Temperaturen zu vergleichen.

Dulong[4]) benutzte zu dem Zwecke die Töne von Orgelpfeifen: er legte die Pfeifen horizontal in einen großen, von innen und außen mit Blei beschlagenen Holzkasten, der ganz vollständig mit dem wohl ausgetrockneten zu untersuchenden Gase gefüllt war. Ein Gasometer, mit demselben Gase angefüllt, stand mit dem Fuße der Pfeife in Verbindung, und trieb das Gas unter konstantem Drucke in die Pfeife hinein. Sobald der Strom anfing, wurde in einer Wand des Kastens ein Loch geöffnet, um das eindringende Gas wieder abströmen zu lassen.

War nun bei einer und derselben Pfeife N die Schwingungszahl des Tones in einem Gase, N' diejenige in einem andern Gase, so ist bei Anwendung einer gedeckten Pfeife

$$c = 4(l + x)N$$
$$c' = 4(l + x)N',$$

1) *Krajewitsch,* Beiblätter. **11**. p. 15. 1886.
2) *Stoletow,* Beiblätter. **11**. p. 18. 1886.
3) *A. W. Witkowski,* Bull. de l'Ac. de Crac. **188**. 1899.
4) *Dulong,* Ann. de chim. et de phys. **10**. p. 41. 1819. Poggend. Ann. **16**. 1829.

also

$$\frac{c}{c'} = \frac{N}{N'}.$$

Das Verhältnis der beiden Schallgeschwindigkeiten erhalten wir also selbst ohne Kenntnis der anzubringenden Korrektion x, und somit, wenn wir die Geschwindigkeit c' in der Luft als anderweitig bestimmt annehmen, auch die Geschwindigkeit c des Schalles in den andern Gasen.

Ich habe zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen und bei verschiedenen Temperaturen die Methode der Staubfiguren angewandt.[1] Das benutzte Rohr hatte einen Durchmesser von nicht ganz 30^mm, der Ton, es war der Longitudinalton einer Glasröhre von 1^m Länge, hatte 2539 Schwingungen. Der tönende Stab trug auf seiner Mitte einen Kautschukstopfen, mit dem er luftdicht in das eine Ende des Wellenrohres eingesetzt wurde. An dem Ende des tönenden Stabes war eine leichte Platte von Ebonit aufgesetzt, deren Durchmesser sehr nahe dem des Wellenrohres gleich war, und welche die Schwingungen an das im Wellenrohr eingeschlossene Gas übertrug. Das andere Ende des Wellenrohres war ebenfalls luftdicht geschlossen, in einer Stopfbüchse ließ sich indes ein Stab verschieben, der im Innern des Wellenrohres ebenfalls eine Ebonitscheibe trug, deren Durchmesser dem des Wellenrohres gleich war, um so zu bewirken, daß sich zwischen dem Ende des tönenden Stabes und dieser Scheibe immer eine ganze Zahl stehender Wellen befanden. An den beiden Enden des Wellenrohres waren mit Glashähnen verschließbare Röhren angesetzt, durch welche man das Rohr, nachdem es mit der Quecksilberpumpe luftleer gepumpt war, mit beliebigen ganz trocknen Gasen füllen konnte.

Bei den Versuchen wurde der mittlere Teil des Wellenrohres auf eine Strecke von 1,1^m in schmelzendes Eis oder in die Dämpfe des siedenden Wassers gelegt.

Das Korrektionsglied zur Reduktion der in den Röhren beobachteten Schallgeschwindigkeit auf den freien Raum ist zwar nach der Theorie von Helmholtz und Kirchhoff nicht unabhängig von der Natur des Gases. Indes bei den von mir gewählten Dimensionen der Röhre und der Schwingungszahl des Tones ist die Korrektion nur so unbedeutend, daß sie überhaupt vernachlässigt werden kann. Es ergab sich das aus der Messung der Schallgeschwindigkeit in der Luft bei der Temperatur 0°, für welche ich im Mittel aus 6 Versuchsreihen erhielt

$$c_0 = 331{,}898.$$

Der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit bei irgend einer Temperatur t ist

$$c = \sqrt{\frac{gH\sigma}{s_0}k(1+\alpha t)}.$$

Ist k ebenfalls von der Temperatur abhängig, so daß wir es

$$k = k_0(1+\beta t)$$

1 *Wüllner*, Über die Abhängigkeit der spezifischen Wärme der Gase usw. Wiedem. Ann. 4. 1878. Die Werte von γ in der folgenden Tabelle sind gegen die Originalabhandlung etwas korrigiert; der Grund der Korrektion wird in der Wärmelehre angegeben werden.

setzen können, so können wir schreiben

$$c = c_0 \sqrt{(1 + \beta t)(1 + \alpha t)}$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$c = c_0 \sqrt{1 + \gamma t},$$

worin $\gamma = \alpha + \beta$ gesetzt ist.

Name der Gase	Dichtigkeit	Geschwindigkeit des Schalles nach Dulong	Regnault	Wüllner	c_0 Wüllner	γ
Luft	1	1	1	1	331,898	0,003 668
Sauerstoff . . .	1,1056	0,9524	—	—	—	—
Wasserstoff . .	0,06926	3,8123	3,801	—	—	—
Kohlenoxyd . .	0,9678	1,0132	—	1,0158	337,129	0,003 609
Kohlensäure. .	1,5290	0,7856	0,8009	0,7812	259,383	0,003 421
Stickoxydul . .	1,527	0,7865	0,8007	0,7823	259,636	0,003 326
Ammoniak . .	0,5967	—	1,2279	1,2534	415,990	0,003 456
Äthylen	0,9784	—	—	0,9518	315,90	0,003 078

Vorstehende Tabelle enthält in Spalte I die Namen der Gase, in II die Dichtigkeit derselben, in III, IV, V die Geschwindigkeit des Schalles bei 0° nach Dulong, Regnault und meinen Beobachtungen, bezogen auf Luft gleich 1, in VI die von mir bestimmten Werte der Geschwindigkeiten in Meter bei 0°, in VII die von mir bestimmten Werte von γ.

Die Werte von γ sind kleiner als die Werte α, welche die Abnahme der Dichtigkeiten darstellen, es folgt somit, daß β einen negativen Wert hat, oder daß die Werte des Koeffizienten k mit steigender Temperatur kleiner werden. Die sich hiernach ergebenden Werte von k, und die Bedeutung deren Veränderlichkeit werden wir bei Gelegenheit der Behandlung der spezifischen Wärme der Gase besprechen.

Nur sei hier noch erwähnt, daß Stevens[1]) und Kalähne[2]) ebenfalls durch Messung der Wellenlängen nach von Quincke[3]) angegebenen Methoden die Schallgeschwindigkeit gemessen haben, Stevens für eine Anzahl von Dämpfen und für Luft, für letztere bis gegen 1000° C., Kalähne für Luft bis etwa 900° C. Für Luft kam Stevens zu dem Resultate, daß γ kleiner als α sei, so daß k mit steigender Temperatur merklich kleiner würde. Er erhielt für k bei 0° den Wert 1,4006, bei 950° C. 1,34. Nach den Versuchen von Kalähne beruht dieses Resultat Stevens auf irrtümlicher Temperaturbestimmung, er findet daß für Luft die Abnahme von k nicht merklich, oder wenn sie überhaupt vorhanden ist, nur sehr klein sei.

1) *Stevens,* Ann. d. Physik. 7. p. 285. 1902.
2) *Kalähne,* Ann. d. Physik. 11. p. 225. 1903.
3) *Quincke,* Wiedem. Ann. 63. p. 66. 1898. *Kalähne* wandte eine der Fig 322 wesentlich gleiche Anordnung an.

§ 175.

Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern muß nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen übereinstimmen. Für Stäbe erhielten wir dieselbe im vorigen Kapitel durch die Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin E den Elastizitätskoeffizienten und s das spezifische Gewicht des Stabes bedeutet.

Direkte Messungen dieser Geschwindigkeit sind nur für Gußeisen von Biot[1] vorhanden, welcher sie an einer Verbindung von 376 Röhren, die zusammen eine Länge von $951{,}25^m$ hatten, ausführte. In eine der Mündungen dieses Röhrenkanals ward ein Eisenring, der mit derselben gleichen Durchmesser hatte, angefügt und in seiner Mitte durch Stäbe von Eisen eine Glocke und ein von einer Stahlfeder gehaltener Hammer befestigt, vermöge deren man den letztern nach Belieben an die Glocke anschlagen lassen konnte. Dann pflanzte sich der Schall der Glocke zur Röhre durch die Stäbe und Ringe von Eisen fort, und stellte man sich an das andere Ende der Röhrenleitung, so mußte man einen doppelten Schall hören, einen, der durch das Metall der Röhre in der Zeit x hindurchgegangen war, den andern, der durch die Luft hindurch sich fortgepflanzt hatte. Man nahm in der Tat sehr deutlich zwei bestimmte Schläge wahr, zwischen denen eine Zeit von 2,5 Sekunden lag. Hieraus berechnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c' des Schalles im Eisen aus derjenigen in der Luft wie folgt. Die Zeit, welche der Schall brauchte, um in der Luft sich fortzupflanzen, war $\frac{951{,}25}{c}$, die Zeit x, die er im Eisen brauchte, $\frac{921{,}25}{c'}$, die Differenz beider

$$\frac{951{,}25}{c} - \frac{951{,}25}{c'} = 2{,}5,$$

und daraus

$$c' = \frac{951{,}25 \cdot c}{951{,}25 - 2{,}5\, c} = 10{,}5\, c = 3475{,}5^m,$$

so daß also der Schall im Eisen in einer Sekunde nahe an 3500^m zurücklegt, wenn wir die Geschwindigkeit in der Luft in runder Zahl gleich 331^m setzen.

Man kann übrigens die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern sehr leicht durch indirekte Beobachtungen gerade so erhalten, wie bei der Luft und den Gasen durch Beobachtung der Longitudinaltöne eines Stabes. Wenn man einen an beiden Enden freien Stab in longitudinale Schwingungen versetzt, so ist die Schwingungszahl des entstehenden Grundtones:

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{s}} = \frac{c}{2l},$$

und daraus

$$c = 2lN,$$

worin l die Länge des Stabes bedeutet.

1) *Biot*, Experimentalphysik, übers. von Fechner. Leipzig 1823. 2. p. 15.

Mit Hilfe dieser Methode ist von Wertheim[1]) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles für eine große Reihe von Metallen bestimmt worden. Ein Vergleich der experimentell erhaltenen Werte mit den theoretisch berechneten bestätigt die Richtigkeit der Theorie auf das vollständigste. In der letzten Spalte sind die Quotienten aus der theoretischen Schallgeschwindigkeit und derjenigen in Luft angegeben.

Name des Metalles	Geschwindigkeit in Luft = 1	$E = s\frac{G}{CS^2}$	s	$\sqrt{\frac{E}{s}}$
Blei ausgezogen......	4,257	1769.10[8]	11,16	3,787
Zinn „	7,480	—	—	—
Gold „	6,424	7977.10[8]	18,51	6,247
Silber „	8,057	7218.10[8]	10,36	7,940
Zink destilliert. gegossen	9,683	—	—	—
„ gewöhnl. ausgez...	11,007	8568.10[8]	7,008	10,524
Kupfer ausgezogen....	11,167	12213.10[8]	8,93	11,128
Platindraht mittl. Dicke	8,467	16720.10[8]	21,27	8,437
Eisen (Berry) ausgez...	15,108	20470.10[8]	7,74	15,472
Gußstahl ausgezogen...	15,108	19180.10[8]	7,71	15,003
Stahldraht engl. ausgez.	14,961	18450.10[8]	7,71	14,716

Sehr bequem zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern mit derjenigen in der Luft ist die Methode von Kundt, die wir im vorigen Paragraphen besprachen.[2]) Wendet man in der Fig. 321 gegebenen Anordnung irgend einen tönenden Stab an, so entspricht die Länge des Stabes der Länge einer stehenden Welle, während uns die Länge der in dem mit Staub versehenen Rohr vorhandenen Welle die Länge der stehenden Welle von genau derselben Schwingungsdauer in der Luft gibt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Schalles im Stabe, l die Länge des Stabes, N seine Schwingungszahl, so ist

$$c = 2lN.$$

Ist c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, l_1 die Länge der in dem Glasrohr gemessenen Wellen, so ist

$$c_1 = 2l_1N,$$

somit

$$\frac{c}{c_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten ist gleich dem der Stablänge und der in dem Glasrohre gemessenen Wellen.

Drei Versuche, bei denen ein Messingstab von 941^{mm},5 Länge angewendet wurde, gaben für die Länge der Wellen in dem Rohre l_1 = 43,30; 43,29; 43,35. Daraus folgt c = 10,87; 10,87; 10,86.

Für drei Stahlstäbe aus demselben Stahl erhielt Kundt

$$c = 15{,}345;\ 15{,}334;\ 15{,}343.$$

1) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. **12**. (3.) 1844. Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.
2) *Kundt*, Poggend. Ann. **127**. 1866.

Für einen Glasstab erhielt Kundt $c = 15{,}24$, und für einen Kupferdraht $c = 11{,}960$, ich erhielt für Glas $c = 15{,}29$.

Die Zahlen stimmen mit denen von Wertheim und den für dieselben Substanzen theoretisch berechneten so vortrefflich, daß die Genauigkeit der Methode dadurch unzweifelhaft bewiesen wird.

In etwas anderer Weise haben Stefan[1]) und Warburg[2]) die Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern untersucht, auf welche sie auch imstande waren die Geschwindigkeit in solchen Körpern zu bestimmen, welche nicht durch Anstreichen zum Tönen gebracht werden können wie Kautschuk, Wachs und dergleichen.

Das Prinzip der Methode von Stefan ist folgendes. Man formt den Körper, der selbst nicht zum Tönen gebracht werden kann, wie Wachs, in Form eines kurzen Stabes und verbindet ihn fest mit einem Stabe von Glas oder Holz, welcher durch Reiben in tönende Schwingungen versetzt werden kann, so daß der Wachsstab eine Verlängerung des Holzstabes bildet. Das System dieser beiden so verbundenen Stäbe liefert, wenn man den Glasstab reibt, einen gut charakterisierten Longitudinalton, dessen Tonhöhe sich bestimmen läßt. Aus der Tonhöhe des isoliert schwingenden Glasstabes und der Änderung der Tonhöhe, wenn an den Glasstab der Wachsstab angesetzt ist, sowie aus der bekannten Länge und dem Gewichte des Wachsstabes läßt sich dann die Geschwindigkeit des Schalles in dem Wachsstabe berechnen. Die Berechnung dieser Versuche ist zu kompliziert, als daß wir hier darauf eingehen könnten.

So erhielt Stefan bei Wachs für die Temperatur 17° die Geschwindigkeit gleich 880^{m} und fand, daß mit steigender Temperatur für jeden Grad die Geschwindigkeit um 40^{m} abnahm.

Die Methode von Warburg beruht darauf, daß man einen Stab des zu untersuchenden Materials durch einen andern, für welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bekannt ist, in isochrone transversale Schwingungen versetzt, daß man auf beiden Stäben dann die Knotenpunkte aufsucht und die Länge der schwingenden Abteilungen beider Stäbe vergleicht. Man legt zu dem Ende einen Stab, etwa einen Spiegelglasstreifen, auf, so daß er in zwei Knotenlinien unterstützt ist. In einem Schwingungsmaximum, etwa dem mittelsten, klebt man mit Siegellack einen leichten hölzernen Steg, und klebt mit etwas Klebwachs auf diesen den zu untersuchenden Stab, so daß derselbe dem Spiegelglasstreifen parallel ist. Versetzt man den Spiegelglasstreifen in transversale Schwingungen, so teilen sich diese dem zu untersuchenden Stabe mit, und man kann auf beiden Stäben durch aufgestreuten Sand die Knotenlinien sichtbar machen. Mißt man auf beiden Stäben die Länge der ersten, zweiten, $n$ten schwingenden Abteilungen, dieselben von den freien Enden aus gerechnet, so gibt die Theorie für das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in beiden Stäben

$$\frac{c}{c'} = \frac{l_n^2}{l'^2_n} \cdot \frac{h}{h'},$$

worin c die Schallgeschwindigkeit in dem zu untersuchenden Körper, l_n die

1) *Stefan*, Wiener Berichte. 57. p. 697. 1868.
2) *Warburg*, Poggend. Ann. 136. 1869.

Länge der, vom freien Ende ab, *n*ten schwingenden Abteilung auf demselben und h die Dicke des Stabes bedeutet, während c', l'_n, h' dieselbe Bedeutung für den schwingenden Glasstreifen haben. Um die Methode zu prüfen, verglich Warburg zunächst die Geschwindigkeit des Schalles in Messing und Glas. Er erhielt in zwei Versuchen

$$\frac{c}{c'} = 0{,}676 \text{ und } 0{,}645,$$

im Mittel also 0,660, während er nach der Methode von Kundt den Wert 0,668 für dasselbe Verhältnis fand, zwei Werte, die nur um etwas mehr als 1 % voneinander abweichen. Für die Schallgeschwindigkeit im Glase lieferte ihm die Kundtsche Methode den Wert 15,65, für jene im Messing 10,46, die Geschwindigkeit in Luft gleich 1 gesetzt.

Die von Warburg nach dieser Methode erhaltenen Resultate zeigt folgende Tabelle.

Material	c jene im Glase gleich 1	Spez. Gewicht	Elastizitätskoeffizient bez. auf Glas gleich 1
Glas	1	2,390	1
Stearin	0,265	0,974	$\frac{1}{35}$
Paraffin	0,251	0,908	$\frac{1}{42}$
Wachs	0,166	0,971	$\frac{1}{89}$
Talg	0,075	0,917	$\frac{1}{463}$

Die Zahlen gelten für 15°—17° C.

Setzt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft von 16° C. gleich 340^m, in Glas bezogen auf Luft gleich eins gleich 15,65, so ergibt sich für Wachs 883^m, eine Zahl, welche mit der Stefanschen gut übereinstimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wie wir sie soeben bestimmten, gilt, wie zuerst Wertheim[1]) hervorgehoben hat, nur für stabförmige Körper; für nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnte muß sie größer sein, wie man durch folgende Überlegung erkennt.

Als Maß der Elastizität, das heißt als Maß der Kraft, mit welcher sich die einander genäherten Schichten abstoßen, haben wir den Elastizitätskoeffizienten gesetzt, wie er sich aus der Beobachtung der Verlängerung eines Stabes ergibt. Hierbei tritt bei der Verkürzung eine Querdilatation, bei der Verlängerung eine Kontraktion ein.

Nehmen wir jetzt einen Stab, auf dessen Oberfläche nach allen Seiten hin Kräfte wirken, welche eine Änderung der Querdimension hindern, so ist die zur gleichen Verlängerung, also auch zur Verschiebung der Schichten um die Einheit erforderliche Kraft eine größere. Pflanzt sich die schwingende Bewegung in einer ausgedehnten Masse fort, so ist ein jeder Wellenstrahl einem solchen Stabe zu vergleichen. In der Richtung jedes Radius einer um die Quelle des Schalles gelegten Kugel pflanzen sich longitudinale Wellen fort, in jedem Radius treten also hier Verdichtungen und Verdünnungen ein. Da aber hier jeder dieser Radien von der gleichen Masse

1) *Wertheim*, Ann. de chim. et de phys. 23. (3.) 1848.

in dem gleichen Verdichtungszustande umgeben ist, können bei diesen Ausdehnungen und Zusammendrückungen keine seitlichen Verschiebungen eintreten. Das Maß der Elastizität ist demnach die Kraft, welche zur Einheit der Verschiebung erforderlich ist, wenn jede Änderung in der Quere ausgeschlossen ist.

Um das Verhältnis der beiden Elastizitätskoeffizienten zu erhalten, gehen wir von den allgemeinen Gleichungen des § 50 für die elastischen Spannungen aus. Ist p der Zug in der Richtung, nach welcher die Verlängerung δ pro Längeneinheit etwa eines Parallelepipedes stattgefunden hat, und v die durch die elastischen Änderungen eingetretene Änderung des Volumens pro Volumeinheit, so fanden wir ganz allgemein

$$p = \frac{E}{1+\mu}\delta + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}v,$$

wenn E der Elastizitätskoeffizient, μ der Koeffizient der Querkontraktion ist. Ist das Parallelepiped auf den Seiten frei, so ist, wie wir früher sahen,

$$v = \delta(1-2\mu)$$

somit

$$p = E\delta \qquad \frac{p}{\delta} = E.$$

Wird die Querkontraktion verhindert, so ist $v = \delta$, da dann die Verlängerung mal Querschnittseinheit die Änderung des Volumens gibt, es ist demnach

$$p = \frac{E}{1+\mu}\delta + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot\delta$$

$$\frac{p}{\delta} = E\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Im Falle keine Änderung nach der Quere stattfindet, tritt demnach dieser letztere Ausdruck an die Stelle des Elastizitätskoeffizienten E in den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Nennen wir c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stabe, c_1 in einer rings ausgedehnten Masse, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{s}\,\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = c\sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}.$$

Ist μ von 0 verschieden, so ist $c_1 > c$; da μ zwischen 0,25 und 0,5 liegt, so liegt $\frac{c_1}{c}$ zwischen $\sqrt{\frac{E}{s}}$ und unendlich. In einer rings ausgedehnten Kautschukmasse würde demnach die Schallgeschwindigkeit eine äußerst große sein.

Einer experimentellen Prüfung ist diese Folgerung aus den Elastizitätsgesetzen kaum fähig.

§ 176.

Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten muß nach dem Frühern mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in

den Flüssigkeiten übereinstimmen. Bedeutet H den Druck der Atmosphäre in Zentimeter Quecksilberdruck, σ das spezifische Gewicht des Quecksilbers, s die Dichtigkeit und μ die Kompressibilität der betreffenden Flüssigkeit für eine Atmosphäre, so erhielten wir für c in § 149

$$c = \sqrt{\frac{g H \sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser, für welches $\mu = 0{,}000\,0499$, $s = 1$ bei 4^0 C. ist, wird dieser Ausdruck

$$c = 1418^{\mathrm{m}}.$$

Dieses Resultat ist durch direkte Versuche von Colladon und Sturm im Jahre 1827 auf dem Genfersee bestätigt worden.[1] Zwei Schiffe wurden in einer bestimmten gemessenen Entfernung festgelegt. Das erstere trug eine in das Wasser getauchte Glocke, welche mittels eines an einem Hebel befestigten Hammers angeschlagen werden konnte. An dem andern Ende des Hebels befand sich eine brennende Lunte, welche in demselben Augenblicke, in welchem der Hammer die Glocke schlug, eine Quantität Pulver entzündete. Von dem andern Schiffe reichte ein Hörrohr in das Wasser, an dessen aus dem Wasser hervorragenden Ende der Beobachter sein Ohr anlegte, um den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrzunehmen. Aus der gemessenen Distanz der Schiffe und der beobachteten Zeit, welche zwischen der Wahrnehmung der Flamme und des Schalles verflossen war, ergab sich bei einer Temperatur von $8^0{,}1$ C.

$$c = 1435^{\mathrm{m}}.$$

Setzen wir bei 8^0 C. nach den Beobachtungen von Grassi $\mu = 0{,}000049$ und nach Kopp $s = 0{,}999\,775$, so wird

$$c = 1437^{\mathrm{m}},$$

so daß das experimentelle Resultat mit dem theoretischen fast identisch ist.

Andere direkte Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten sind nicht vorhanden. Dagegen hat Wertheim[2] auch hier die Töne der offenen Pfeifen benutzt, um die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten zu bestimmen. Das Verfahren, welches er anwandte, um die Töne hervorzubringen, sowie die notwendigen Berichtigungen zu erhalten, haben wir an den betreffenden Stellen beschrieben. Berechnete Wertheim indes aus seinen Versuchen nach der für offene Pfeifen gültigen Gleichung aus den beobachteten Schwingungszahlen N die Schallgeschwindigkeit c

$$c = 2lN,$$

so ergab sich eine weit kleinere Geschwindigkeit, als die Versuche von Colladon und Sturm und die Theorie ergeben, nämlich bei 15^0 C. als Mittel aus sehr vielen Versuchen

$$c = 1173{,}4^{\mathrm{m}}.$$

---

1) *Colladon* und *Sturm*, Poggend. Ann. **12**. 1828.

2) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. **23**. (3.) 1848. Poggend. Ann. 77. 1849.

Um dieses Resultat mit der Theorie in Einklang zu bringen, nimmt Wertheim an, daß sich in Flüssigkeiten nicht, wie man gewöhnlich annimmt, der Druck momentan nach allen Richtungen gleichmäßig überträgt, daß also nicht für einen momentanen Druck auf die eine Endfläche eines in einer vollkommen ausdehnsamen Wand eingeschlossenen Flüssigkeitszylinders die Querdilatation gleich sei der durch den Druck hervorgebrachten Verkürzung, das heißt, daß das Volum ungeändert dasselbe sei, sondern daß auch dort eine Volumänderung eintrete und zwar gerade so, wie bei den festen Körpern. Ist diese Annahme gestattet, so muß die Verbreitung des Schalles in einer Flüssigkeitssäule sich zu derjenigen in einer unbegrenzten Flüssigkeit verhalten wie diejenige in einem Stabe zu der Geschwindigkeit in einer unbegrenzten Masse. Wertheim beobachtete nun die Geschwindigkeit des Schalles in einer Flüssigkeitssäule. Die Versuche von Colladon und Sturm sowie die Theorie gaben die Geschwindigkeit in einer unbegrenzten Flüssigkeit. Die Wertheimsche Zahl, wenn $\mu = \frac{1}{4}$ gesetzt wird, mit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ multipliziert, muß dann mit den früheren Zahlen übereinstimmen.

In der Tat ist

$$1173{,}4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1437{,}1^{\mathrm{m}},$$

so daß die Koinzidenz der auf diese Weise von Wertheim berechneten Zahl dafür spräche, daß das von ihm für feste Körper theoretisch abgeleitete Gesetz auch für Flüssigkeiten gültig ist, daß demnach die Gleichheit des Druckes in allen Richtungen nicht bei den Schallschwingungen stattfindet, vielmehr eine flüssige Säule, welche longitudinal vibriert, denselben Ton gibt wie ein starrer Körper, dessen Materie dieselbe kubische Kompressibilität besitzt wie die Flüssigkeit.

Daraus würde folgen, daß die Gesetze des Gleichgewichts starrer Körper auch für Flüssigkeiten gelten, während eines sehr kurzen Zeitabschnittes nach Anlegung äußerer Kräfte.

Ist dieses Verhältnis zwischen den beiden Geschwindigkeiten einmal festgestellt, so können wir für alle übrigen Flüssigkeiten aus der Schallgeschwindigkeit in einer Säule die Geschwindigkeiten in einer unbegrenzten Masse und die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnen. Diese letztere ist für eine große Menge von Flüssigkeiten bereits direkt bestimmt; der Vergleich der nach beiden Methoden erhaltenen Werte der Kompressibilität würde also ein neues Mittel sein, die Wertheimschen Voraussetzungen und die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit zu bestätigen.

Wertheim hat für eine Reihe von Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeiten bestimmt und daraus die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnet.

Trotz der sich hiernach ergebenden sehr guten Übereinstimmung zwischen den von Wertheim und Grassi gegebenen Kompressionskoeffizienten hat schon Helmholtz[1]) darauf hingewiesen, daß die von Wertheim gegebene Deutung seiner Versuche nicht richtig sein kann. Der

1) *Helmholtz*, Fortschritte der Physik im Jahre 1848. Herausgegeben von der Berliner physikalischen Gesellschaft. p. 114.

Unterschied der Schallgeschwindigkeit in einem Stabe und einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers rührt daher, daß der Stab sich in seinen Querdimensionen frei ändern kann, in der ausgedehnten Masse dagegen nicht. Eine solche freie Änderung der Querdimension findet in einer Flüssigkeitspfeife nicht statt. Allerdings ist gegen die Schwingungen der Flüssigkeit eine Pfeifenwand von Messing nicht absolut fest, es muß deshalb eine Verlangsamung der Schwingungen in ähnlicher Weise eintreten, wie bei einer Orgelpfeife mit weichen Wänden. Die Verlangsamung muß deshalb von dem Durchmesser der Röhre, der Dicke ihrer Wandung und dem Elastizitätskoeffizienten des Materials der Wandung abhängen; je größer die beiden letztern sind, um so geringer muß die Verzögerung sein.

In der Tat haben Kundt und Lehmann[1]) sowie Dvořák[2]) gezeigt, daß die Einwürfe von Helmholtz richtig sind. Kundt gelang es nämlich, in Flüssigkeiten ganz eben solche und nach derselben Methode Staubfiguren hervorzurufen wie in Gasen, wenn er dafür sorgte, daß die Flüssigkeiten absolut luftfrei waren. Als Pulver benutzte er sehr fein gepulvertes Eisen, das sogenannte ferrum limatum. Die Messung der Länge der Wellen ergab dann die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser gerade wie in Luft. Die Resultate, die Kundt und Lehmann erhielten, entsprachen ganz den Bemerkungen von Helmholtz, die Geschwindigkeit des Schalles nahm zu, wenn der Durchmesser der Flüssigkeitssäule abnahm und die Wandstärke der bei den Versuchen benutzten Glasröhren zunahm, wie folgende kleine Tabelle zeigt, die unter δ die Wandstärke, unter D den lichten Durchmesser der Röhre, unter V die aus den gemessenen Wellenlängen sich ergebende Geschwindigkeit des Schalles und unter t die Temperatur enthält, für welche der beobachtete Wert der Geschwindigkeit gilt:

δ	D	V	t
$2{,}2^{mm}$	$28{,}7^{mm}$	$1040{,}4^{m}$	$18^0{,}4$
3,0	34,0	1227,7	17,0
3,0	23,5	1262,2	18,0
3,5	21,0	1357,6	18,5
5,0	16,5	1360,2	18,5
5,0	14,0	1383,2	22,2.

Es nähert sich somit die Geschwindigkeit erheblich der theoretischen.

Ähnliche Resultate erhielt Dvořák ebenfalls durch Beobachtung von Staubfiguren, die er indes in anderer Weise erzeugte wie Kundt. Eine horizontale, etwa 2^m lange Röhre, die an ihrem einen Ende geschlossen war, wurde an beiden Enden vertikal umgebogen, das offene Ende etwa 1^{dcm}, das geschlossene Ende nur kurz. Die Röhre wurde dann mit Wasser gefüllt und an das geschlossene Ende eine große Luftblase gebracht, so daß die Wassersäule dort durch Luft begrenzt war. Das aufsteigende offene Ende enthielt nur wenig Wasser. Dieses Ende wurde dann als Orgelpfeife angeblasen, indem man kräftig über die Röhre wegblies. Die Schwingungen dieser Luftsäule teilten sich dem Wasser mit, und in demselben ließen sich die Knotenlinien, hergestellt durch von Salpeter befreites Schießpulver, sehr

1) *Kundt* und *Lehmann*, Poggend. Ann. **153**. 1874.
2) *Dvořák*, Poggend. Ann. **94**. 1875.

gut messen. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem **Kundtschen** ist der, daß das Wasser nicht luftfrei zu sein braucht. Folgende Tabelle enthält einige Beobachtungen.

δ	D	V
0,82^{mm}	17,9^{mm}	998^{m}
0,63	11,7	1046
0,52	8,46	1164
2	15	1213
2	11	1281

Wie man sieht, stimmen diese Zahlen sehr gut mit denen von **Kundt** und **Lehmann** überein.[1])

§ 177.

Reflexion des Schalles. Wenn eine schwingende Bewegung sich in einer unbegrenzten Punktreihe oder einem Punktsystem fortpflanzt, so kehrt sie nicht zurück, indem jeder Punkt an den folgenden seine ganze Bewegung überträgt; wenn aber die Bewegung an einer Grenze ankommt, wo die Elastizität oder die Dichtigkeit des Punktsystems sich ändert, so tritt an dieser Stelle eine Teilung der Bewegung ein, ein Teil geht in das zweite Mittel über, ein Teil kehrt als reflektierte Bewegung in dem ersten Mittel zurück. Die Gesetze dieser Reflexion haben wir § 136 kennen gelernt und gesehen, daß eine kugelförmige Welle von einer ebenen Grenzfläche so zurückgeworfen wird, als käme sie von einem Punkte, der ebensoweit hinter der Fläche liegt, als der Mittelpunkt der Bewegung vor der Fläche liegt. Jeder Radius der zurückgeworfenen Kugel bildet daher mit der Grenzfläche denselben Winkel als der die Fläche an derselben Stelle treffende Radius der einfallenden Kugel, oder der Winkel, welchen der einfallende Wellenstrahl mit der Normale der reflektierenden Fläche, mit dem Einfallslote bildet, ist gleich dem Winkel, welchen der reflektierte Wellenstrahl mit derselben Richtung bildet.

Da der Schall eine Wellenbewegung eines elastischen Mittels ist, so muß das Reflexionsgesetz des Schalles ganz mit dem der Wellen identisch sein. Ein an einer festen Wand in der Luft ankommender Schall wird so zurückgeworfen, daß der zurückgeworfene Schallstrahl mit dem Einfallslote denselben Winkel bildet als der ankommende Schallstrahl.

Trifft demnach ein Schallstrahl senkrecht gegen eine feste Wand, so wird er genau in derselben Richtung zurückgeworfen. Es ist bekannt, daß man im Echo den zurückgeworfenen Schall wahrnehmen kann. Steht man in einiger Entfernung vor einer festen Wand und ruft man gegen dieselbe, so hört man nach einiger Zeit denselben Ton von der Wand zurückkehren. Damit man aber den zurückgeworfenen Ton unterschieden von dem direkten Tone wahrnimmt, ist eine gewisse Zeit notwendig. Die Erfahrung zeigt, daß man in einer Sekunde 10 Töne nacheinander wahrnehmen kann, oder

1) Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten sehe man auch *Martini*, Atti di Reale Ist. Ven. series V. vol. VIII. p. 1. VI vol II. p. 1. VI. vol VI. Beiblätter. 7. p. 17. 1882; 8. p. 798. 1883; 12. p. 566. 1887.

vielmehr deutlich unterscheiden kann, daß aber, wenn mehr Töne unser Ohr treffen, der Eindruck ein verworrener wird.

Es muß daher zwischen dem direkten und reflektierten Schalle 0,1 Sekunde liegen, wenn wir das Echo deutlich von dem primär erzeugten Tone unterscheiden sollen. Der Schall durchläuft in 1 Sekunde 331^m in der Luft, in 0,1 Sekunde also $33,1^m$; befinden wir uns also 17^m von einer festen Wand, so wird der Ton, um zur Wand und wieder zu uns zurück zu gelangen, 0,1 Sekunde brauchen, wir hören also das Echo; rücken wir näher, so fällt es zum Teil mit dem direkten Tone zusammen, wir hören daher nur ein Verhallen des direkten Tones, entfernen wir uns von der Wand, so verfließt eine größere Zeit, in einer Entfernung von 34^m 0,2 Sekunden und so fort. In der Entfernung von 34^m können wir daher auf den ersten Ton noch einen zweiten folgen lassen, der 0,1 Sekunde dauert und erst 0,1 Sekunde später wird der erste zurückgeworfene Ton, also noch deutlich unterscheidbar, zu uns gelangen. In der Entfernung von 34^m von der festen Wand wird also das Echo ein sogenanntes zweisilbiges, in noch größerer Entfernung ein drei- und mehrsilbiges.

Ein mehrfaches Echo, das heißt die mehrmalige Wiederkehr desselben Tones tritt auf, wenn eine Anzahl reflektierender Flächen vorhanden ist, welche alle von den in einem bestimmten Punkte erzeugten Schallwellen senkrecht getroffen werden. Wie die Flächen dazu gegeneinander stehen müssen, und daß im allgemeinen nur ein bestimmter Ort das mehrmalige Echo hört, ist ohne weiteres klar.

Was früher von der Reflexion der Wellen an krummen Flächen gesagt wurde, gilt auch von der des Schalles, das Reflexionsgesetz bleibt dasselbe. Daraus erklärt sich die bekannte Erscheinung, daß in einem elliptischen Gewölbe der an einem Brennpunkte erregte Schall in dem andern Brennpunkte mit fast ungeänderter Stärke vernommen wird.

Eine Folge der Reflexion des Schalles ist das Verhalten der Töne in einem rings begrenzten großen Raume und die daraus hervorgehende Undeutlichkeit einer geordneten Reihe von Tönen, z. B. einer Rede. Das gesprochene Wort wird von den entfernten Wänden so zurückgeworfen, daß der reflektierte Schall zum Teil noch mit dem direkten, zum Teil, wenn nicht sehr langsam gesprochen wird, mit dem des folgenden Wortes zusammenfällt, und besonders das letztere undeutlich macht. Alles, was den reflektierten Schall stört, wird daher die Deutlichkeit des Hörens in solchen Räumen vermehren. Ist der Raum mit Menschen gefüllt, so hört man deutlicher, da dann die reflektierten Wellen selbst wieder vielfach reflektiert werden, und so ihre Regelmäßigkeit gestört wird. Je kleiner ferner der Dichtigkeitsunterschied zwischen der Luft und den Wänden des Raumes ist, um so schwächer sind die reflektierten Wellen. Eine Bekleidung der Wände mit weichen, wenig dichten Stoffen schwächt daher die reflektierten Wellen und vermehrt die Deutlichkeit des Hörens. Indes wird dadurch auch die Stärke des Schalles durch den Mangel der sofort zu betrachtenden Resonanz geschwächt, deshalb ist das Mittel in Räumen, in welchen der Schall zugleich kräftig und deutlich sein soll, wie in Konzertsälen, Theatern, nicht anzuwenden.

Verhindert man, daß die von den verschiedenen Wänden reflektierten Schallwellen nach der gleichen Richtung zurückgeworfen werden, so können

sich dieselben nicht verstärken, sie werden daher in dem Falle möglichst wenig stören. Das erreicht man, indem man dem Raume einen rechteckigen Grundriß erteilt und nur gerade Wände gibt. Von geraden Wänden werden die von einem Punkte ausgehenden Schallwellen als divergierend zurückgeworfen. Es ist indes ein noch ungelöstes Problem, welches die Form eines Raumes ist, in welchem eine Reihe erregter Töne am besten und deutlichsten klingt.

Eine vielfach gebrauchte Anwendung der Reflexionsgesetze ist das Sprachrohr. Dasselbe hat den Zweck, Rufe in Enfernungen noch deutlich hörbar zu machen, in denen sie bei ungehinderter Verbreitung des Schalles zu schwach werden. Die einfachste Form eines solchen Apparates ist ein konisches Rohr von Pappe oder Metall, die Materie ist ohne Einfluß. Man legt die Lippen in ein Mundstück (Fig 323), welches sich an der Spitze des Kegels befindet, und man spricht in das Rohr hinein, indem man es nach der Seite hin richtet, nach welcher hin man den Schall werfen will. Sei z. B. der Ton in dem Mittelpunkte C des Mundstückes erzeugt, so wird sich der Teil CAB der Schallwelle, welcher durch den Kegel begrenzt ist, dessen Mittelpunkt C und dessen Basis der Umfang AB des konischen Rohres ist, ungehindert ausbreiten. Derjenige Teil der Welle aber, welcher in dem Winkel DCA liegt, wird an den verschiedenen Punkten der Wand MA reflektiert und pflanzt sich fort, als käme er von dem Punkte C' als Strahlenkegel $C'AB$. Auch diese Schallstrahlen werden somit innerhalb des Kegels CAB sich fortpflanzen und den Schall nach der Richtung der Achse des Rohres verstärken. Gleiches gilt von dem Strahlenkegel $BC'D'$, und man sieht, daß schließlich der ganze zwischen DCD' liegende Teil der Welle in einem kleinen Kegel konzentriert ist, daß dieser Teil der Schallwelle, anstatt sich im Raum DCD' auszubreiten, den Schall in der Achse des Kegels verstärken wird. Diejenigen Schallstrahlen, welche die Wand noch näher bei M treffen als der Strahl CD, können durch mehrmalige Reflexion zunächst an der Wand MA, dann an der Wand MB und wieder an der Wand MA nach derselben Richtung geworfen werden, und so ebenfalls zur Verstärkung des Schalles beitragen.

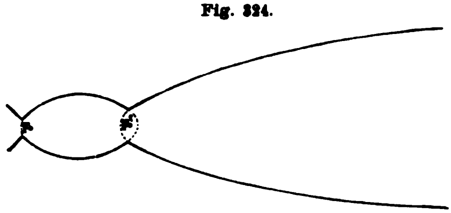
Fig. 323.

Lambert[1]) hat den Vorschlag gemacht, das konische Sprachrohr durch ein anderes zu ersetzen, das aus zwei krummen Flächen, einem Ellipsoid und einem Paraboloid zusammengesetzt ist. Das Mundstück ist so eingerichtet (Fig. 324), daß der Mund des Rufenden sich in dem einen Brennpunkte F des Ellipsoides befindet, die sämtlichen Schallstrahlen werden in dem andern Brennpunkte F' des Ellipsoides vereinigt und schreiten von

1) *Lambert*, Memoiren der Berliner Akademie 1763.

diesem fort auf die Wand des parabolischen Teiles des Sprachrohrs. Der Brennpunkt F' ist zugleich der Brennpunkt der Parabel und da die sämtlichen Leitstrahlen, welche man von F' an die verschiedenen Punkte des Paraboloids zieht, mit den an eben diesen Punkten gezogenen Normalen der Fläche dieselben Winkel bilden, welche durch diese Punkte parallel mit der Achse gezogene Linien mit der Normale einschließen, so werden alle von F' ausgehenden, das Paraboloid treffenden Schallstrahlen parallel der Achse reflektiert. Der Schall wird also ohne große Schwächung nach der Richtung der Achse des Paraboloids sich fortpflanzen.

Fig. 324.



Wir haben bisher nur die Zurückwerfung des Schalles von einer festen Wand, den gewöhnlich vorkommenden Fall betrachtet; mit Hilfe der empfindlichen Flammen kann man auch durch einen hübschen Versuch zeigen, daß ebenso eine Reflexion des Schalles an der Grenze eines dichtern gegen ein dünneres Mittel stattfindet. Man stellt sich eine empfindliche Flamme her, welche auf den Ton der Glocke eines Schlagwerkes reagiert, reguliert die Empfindlichkeit aber so, daß die Flamme nicht merklich mehr reagiert, wenn die empfindliche Flamme und das Schlagwerk durch eine geschlossene Türe voneinander getrennt sind. Durchbohrt man die Türe und steckt in die Durchbohrung einen Zylinder von Pappe, so reagiert auch dann die empfindliche Flamme nicht merklich, wenn das Schlagwerk an dem einen Ende des Zylinders sich befindet, die Flamme aber hinreichend weit seitlich verschoben ist. Stellt man dann eine Flamme eines Fischschwanzbrenners so auf, daß etwa die Mitte der ruhig brennenden Flamme von der Achse des Zylinders, parallel welcher der Schall des Schlagwerkes durch den Zylinder tritt, getroffen wird, so hat man die Flamme nur dem Reflexionsgesetz entsprechend so zu stellen, daß der reflektierte Strahl die empfindliche Flamme trifft, und man sieht bei jedem Schlage des Schlagwerkes die empfindliche Flamme zusammenzucken. Dreht man die Fischschwanzflamme, so daß die zu ihrer Ebene normale Richtung nicht mehr den Winkel halbiert, den die Achse des Zylinders und die von der Mitte der flachen Flamme zu der empfindlichen Flamme gezogene Richtung miteinander bilden, so zuckt die Flamme nicht mehr.

Die vielfachen Reflexionen an den abwechselnd dichtern und dünnern Luftschichten sind der Grund, daß in unruhiger Luft der Schall nicht so weit dringt als in ganz ruhiger Luft. Jede Reflexion hält bezw. wirft einen Teil des Schalles zurück, der sich nicht in der Richtung des sich fortpflanzenden Schalles verbreitet.

§ 178.

Übergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz; Phonograph. Wenn eine schwingende Bewegung an der Grenze zweier Mittel ankommt, so geht, wie wir früher sahen, die schwingende Bewegung nicht nur in

ersten Mittel als reflektiert zurück, sondern sie geht auch in das zweite Mittel hinüber und pflanzt sich dort mit der diesem Mittel entsprechenden Geschwindigkeit weiter fort. Kommt die Welle, welche wir als eben voraussetzen wollen, in einer gegen die Grenzfläche geneigten Stellung an, so ist die Wellenebene im zweiten Mittel nicht derjenigen im ersten Mittel parallel, sondern dagegen geneigt. Der Wellenstrahl, die zur Wellenebene normale Fortpflanzungsrichtung, wird also gebrochen; das Gesetz, nach welchem das geschieht, ist nach § 137 folgendes:

1. Der gebrochene Wellenstrahl liegt mit dem einfallenden und dem Einfallslot in derselben Ebene.

2. Der Sinus des Winkels i, den der eintretende Wellenstrahl mit dem Einfallslote bildet, verhält sich zum Sinus des Brechungswinkels i_1 wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Bewegung im ersten Mittel zu jener c_1 im zweiten Mittel, oder es ist

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Daß der Schall nach diesem Gesetze gebrochen wird, hat durch ausgedehnte Versuchsreihen Hajech[1]) nachgewiesen. Hajech führte eine Röhre von 77^{mm} Weite und veränderlicher Länge durch die Scheidewand zweier benachbarter Säle. Die beiden Enden dieser Röhren wurden durch Membranen geschlossen. Eine zweite Röhre, deren Achse in der Verlängerung der ersten lag, auf welche sie eingestellt war, endigte in einer Büchse, in welcher das tönende Instrument, Glocken verschiedener Größe, eingeschlossen wurde. Der Beobachter hielt sich im zweiten Sale auf, auf dessen Parketboden ein Kreisbogen gezogen und graduiert war, dessen Mittelpunkt sich vertikal unter dem Ende der Röhre befand. Bei einer ersten Reihe von Versuchen wurden die Membranen senkrecht zur Achse der Röhre gestellt, welche sie verschlossen, und die Röhre mit Luft oder andern Gasen gefüllt. Der Schall wurde nicht abgelenkt, sondern am stärksten in der Verlängerung der Röhrenachse wahrgenommen. Da der Schall in der Achse der Röhre sich bewegte, so traf er senkrecht auf beide Grenzflächen der Röhre; nach dem Brechungsgesetz darf keine Ablenkung eintreten.

Darauf wurde die Membran an dem dem Beobachter zugewandten Ende der Röhre gegen die Achse geneigt, an der andern Seite blieb sie senkrecht. Dort traf also der in der Achse ankommende Schallstrahl wieder senkrecht auf die Grenzfläche, der Einfallswinkel war Null, also auch der Brechungswinkel; der Schall bewegte sich einfach in der Achse der Röhre weiter, mit welcher Substanz dieselbe auch gefüllt war. Der Strahl traf dann die zweite Fläche unter demselben Winkel, den die Membran mit der Achse bildete; der Einfallswinkel war also der Winkel, der diesen zu 90° ergänzte, er wurde einfach durch eine Messung des ersten Winkels erhalten.

Wurde die Röhre mit Luft gefüllt, so trat auch dann keine Ablenkung ein, da innerhalb und außerhalb der Röhre dasselbe Mittel war, der Schall sich also mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegte. Wurde aber das Rohr mit einem andern Gase oder einer Flüssigkeit gefüllt, so trat eine Ablenkung ein. Dieselbe wurde beobachtet dadurch, daß der Beobachter

1) *Hajech*, Nuovo Cimento **8** 1857. Poggend. Ann. **103** 1858.

sein Ohr in gleicher Höhe mit dem Ende der Röhre hielt und auf dem Kreisbogen so lange seine Stelle veränderte, bis er den Schall am stärksten wahrnahm, dann von seinem Ohre ein Lot auf den Kreisbogen herabließ und den Winkel bestimmte, den der zu dem getroffenen Punkte gehörige Radius des Kreises mit dem Einfallslote bildete. Da dieser Radius die Richtung des austretenden Schalles angab, so bestimmte dieser Winkel den Brechungswinkel.

Hajech erhielt auf diese Weise folgende zugehörige Einfalls- und Brechungswinkel; die letzte Spalte, welche die nach der Formel

$$\sin i_1 = \frac{c_1}{c} \cdot \sin i$$

aus den gegebenen Winkeln i berechneten i_1 enthält, zeigt die Übereinstimmung der Resultate mit dem Brechungsgesetz:

Substanzen in der Röhre	Einfallswinkel	Brechungswinkel beobachtet	Brechungswinkel berechnet
Wasserstoff	35° 50′	8°	8° 50′
„	25°	7°	6° 22′
Ammoniakgas	41°	29° 20′	30° 22′
„	35° 50′	25°	26° 50′
Leuchtgas	35° 50′	25° 40′	—
Kohlensäure	35° 50′	49° 50′	48° 19′
„	25°	33° 20′	32° 33′
Brunnenwasser	35° 50′	7° 40′	7° 58′
„	25°	5° 40′	5° 37′
Gesätt. Kochsalzlösung .	35° 50′	6° 15′	
„ .	25°	5° 10′	

Man sieht, wie die Beobachtung das Gesetz bestätigt, welches sich aus der Theorie der Wellenbewegung ergeben hat.[1])

Wenn eine schwingende Bewegung in eine dünne Schicht eines zweiten Mittels übergeht und sich in derselben bis an die Grenze fortgepflanzt hat, so tritt beim Austritt in das erste Mittel aus der zweiten Grenze eine teilweise Reflexion der Bewegung ein und die reflektierte Welle kehrt in der Schicht zur ersten Grenze wieder zurück; wenn nun durch die erste Grenze immer neue und neue Bewegungen in das zweite Mittel übergehen, so können sich diese mit den in dem Mittel reflektierten zusammensetzen und stehende Wellen derselben Periode als die ankommende Welle erzeugen, gerade so wie in einem longitudinal schwingenden Stabe solche stehende Wellen durch Interferenz der direkt erregten Wellen und der an der einen Grenze reflektierten entstehen.

Man kann sich davon durch eine ganze Reihe von Versuchen überzeugen. Spannt man auf einem Monochord zwei Saiten vollständig im Einklang auf, setzt unter die eine einen Steg, so daß man $\frac{1}{4}$ der Saite ab-

1) Betreffs der Brechung des Schalles sehe man indes *Mach* und *Fischer*. Poggend. Ann. **149**. 1873, welche zeigen, daß man nur unter besondern Umständen eine Brechung des Schalles mit Sicherheit nachweisen kann, da im allgemeinen die Wellenlängen gegen die brechenden Flächen zu groß sind, um ohne weiteres die Huyghenssche Konstruktion anwenden zu können.

sondert und streicht dann dieses $\frac{1}{4}$ mit dem Bogen an, so erhalten wir die zweite Oktave des Tones der ganzen Saite, indem dadurch sich die ganze Saite in vier gleiche schwingende Teile zerlegt. Sofort zeigt sich, daß auch die zweite nicht abgeteilte Saite mit der ersten isochron schwingt, denn hält man die erste rasch fest, so hört man noch eine Zeitlang genau denselben Ton auf der zweiten Saite, und bringt man auf die zweite Saite kleine Papier-Reiterchen, so werden dieselben abgeworfen, außer an den Stellen der Schwingungsknoten.

Wenn man in einem Raume ein Klavier oder eine Violine oder irgend ein Saiteninstrument aufstellt und bringt nun in deren Nähe einen Ton hervor, der ein harmonischer Ton einer der Saiten dieser Instrumente ist, so hört man sie auf das deutlichste mitklingen. Bei Anwendung eines Klaviers bekommt man bei gehobenem Dämpfer auf jeden hineingesungenen Ton einen Nachhall, der nicht nur diesen Ton, sondern auch die harmonischen Obertöne deutlich enthält.

Ebenso geben Pfeifen und Gläser, überhaupt eingeschlossene Luftsäulen, Töne an, wenn man einen ihrer harmonischen Töne in der Nähe erzeugt.

Wenn sich auf diese Weise durch den Einfluß einer schwingenden Bewegung in benachbarten Körpern stehende Schwingungen erzeugen, so ist unmittelbar ersichtlich, daß an jeder Grenzstelle die Erscheinungen sehr kompliziert werden, und daß sich deshalb nicht leicht eine Theorie geben läßt über die Form der Schwingungen in den mitschwingenden Körpern. Das aber läßt sich leicht erkennen, daß kräftiges Mitschwingen eines Körpers nur dann eintreten kann, wenn die in dem mitschwingenden Körper eintretenden Schwingungen dort stehende Wellen geben können, wenn also der ankommende Ton den mitschwingenden Körper zum Mittönen bringen kann. In der Beziehung besteht ein großer Unterschied in der Stärke des Mittönens, je nachdem der mitschwingende Körper die durch einen einmaligen Anstoß erteilten Schwingungen lange beibehält oder schnell wieder verliert. Ein schwingender Körper, der seine Bewegung lange beibehält, wie eine Stimmgabel, oder alle starren elastischen Körper, wird nur merklich mittönen, wenn der ankommende Ton ein Eigenton des schwingenden Körpers ist, denn bei einer sehr kleinen Verstimmung des ankommenden Tones müssen sich die Eigenschwingungen des Körpers und die ankommenden Schwingungen stören, da sie verschiedener Phase werden. Wenn dagegen die Schwingungen des mitschwingenden Körpers, wie etwa bei wenig gespannten, sehr feinen Membranen, sehr rasch an Intensität abnehmen, so kann ein solcher Körper auch in merkliche Schwingungen versetzt werden, wenn der ankommende Ton auch von dem Eigenton desselben verschieden ist. Denn wenn ein Körper die infolge eines ersten Anstoßes entstehende Bewegung schon nach wenigen Schwingungen verliert, so wird jeder neue Anstoß ihm Bewegung erteilen, wenn auch die ankommende Bewegung in etwas anderer Phase ist als jene infolge des vorhergehenden Anstoßes, somit als der geringe Rest der noch in dem Körper vorhandenen schwingenden Bewegung.

Man kann diese Schlüsse leicht experimentell bestätigen; das Extrem nach der einen Richtung bildet etwa eine Stimmgabel, welche durch den Ton einer andern Stimmgabel kaum mehr zum Tönen gebracht wird, wenn

derselbe nur um ein oder zwei Schwingungen anders ist. Man nehme zwei Stimmgabeln, die den Ton c_2, also 512 Schwingungen in der Sekunde geben, beide auf Resonanzkasten stehend, so wird, wenn die Stimmung beider genau die gleiche ist, die andere kräftig mittönen, wenn man die eine anstreicht. Dann verstimme man die eine durch Aufkleben von Wachs, so daß sie nur ein oder zwei Schwingungen weniger macht, was man an den in einem der nächsten Paragraphen zu besprechenden Stößen leicht erkennen kann, man wird dann kaum noch ein Mittönen erhalten. Das Extrem nach der andern Seite bilden die Membranen in den Königschen Flammenkapseln, bei denen kaum Eigenschwingungen vorkommen, bei denen jeder Anstoß nur eine Schwingung bewirkt, eine solche Membran nimmt daher jede Schwingung auf, welche sie trifft.

Helmholtz[1]) hat die Beziehung zwischen der Dauer des Nachklingens eines einmal in Schwingung versetzten Körpers und der Intensität des Mittönens genauer untersucht. Er gelangt dabei zu folgenden Resultaten.

Wenn wir die Intensität des Tones, der in einem mitschwingenden Körper durch genauen Einklang erzeugt wird, als Einheit setzen, so wird durch einen Ton, der um $\frac{1}{8}$ tiefer oder höher ist, die Tonstärke des mittönenden Körpers gleich 0,1, wenn der mittönende Körper nach 38 Schwingungen nur mehr 0,1 der Tonstärke besitzt, die ihm durch einen einmaligen Anstoß gegeben ist. Nimmt die Intensität der Eigenschwingungen so rasch ab, daß die Stärke des Tones, wenn der mittönende Körper für sich erregt wird, schon nach 19 Schwingungen auf 0,1 herabsinkt, so bewirkt ein Ton, der $\frac{1}{4}$ Ton höher oder tiefer ist, in dem mittönenden Körper einen Ton, der 0,1 der Stärke des durch genauen Gleichklang erzeugten Tones besitzt. Die gleiche Tonstärke des Mitschwingens tritt ein durch Töne, welche verschieden sind um

$\frac{1}{2}$ Ton,	wenn die Intensität des Eigentones nach	9,5	Schwingungen
$\frac{3}{4}$ "	" " " " " "	6,33	"
1 "	" " " " " "	4,75	"
$\frac{5}{4}$ "	" " " " " "	3,80	"
kleine Terz,	" " " " " "	3,17	"
$\frac{7}{4}$ Ton,	" " " " " "	2,71	"
große Terz,	" " " " " "	2,37	"

auf 0,1 der durch einen Anstoß erregten ursprünglichen Tonstärke herabgesunken ist. Man sieht also, daß nur solche Körper, in denen die einmal erregten Schwingungen sehr rasch an Stärke abnehmen durch Töne, welche von ihren Eigentönen verschieden sind, in merkliche Mitschwingungen versetzt werden. Da starr elastische Körper nur dann merklich mittönen, wenn einer ihrer Eigentöne erklingt, ist in solchen mitschwingenden Körpern die Tonhöhe stets gleich derjenigen des erregenden Tones.

Ferner ergibt sich aus den Versuchen von Savart[2]) der wie es scheint allgemeine Satz, daß die mitgeteilten Schwingungen stets parallel sind der

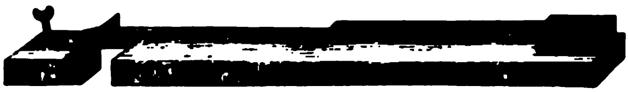
---

1) *Helmholtz,* Tonempfindungen 3. Ausgabe. p. 220 u. Beilage X. Diese Sätze über Resonanz lassen gleichzeitig erkennen, weshalb in der Mundhöhle die Eigentöne mitklingen können, selbst wenn sie nicht gerade Obertöne des gesungenen oder gesprochenen Klanges sind.

2) *Savart,* Annales de chim. et de phys. 19. 1821.

ankommenden. Von den vielen Versuchen Savarts führen wir nur folgenden an. Ein feiner Streifen von Holz wird an seinem einen Ende an einem auf einem Boden aufgesetzten Holzstück befestigt (Fig. 325), an seinem andern Ende ist eine gespannte Saite befestigt. Wenn man der gespannten Saite mittels eines Violinbogens eine schwingende Bewegung erteilt, senkrecht zur Ebene des Streifens, so gerät der Streifen in transversale Schwingungen, wie man aus der hüpfenden Bewegung des Sandes auf dem Streifen ersieht. Wenn man aber die Saite in einer mit der Ebene des Streifens parallelen Richtung in Schwingung versetzt, so schwingen die

Fig 325



Teile des Streifens in der Ebene desselben hin und her. Sand auf den Streifen gestreut, erhält keine hüpfende, sondern nur eine gleitende Bewegung.

Da die Tonhöhe durch die an starr elastische Körper übertragenen Mitschwingungen, wie wir eben ableiteten, nicht geändert wird, so benutzt man in der Musik diese Erscheinung, um schwachen Klängen durch Resonanz eine bedeutende Stärke zu verleihen. Eine Saite einfach in Schraubstöcke von Blei eingespannt, gibt nur einen schwachen, kaum hörbaren Ton. Wenn man sie dagegen auf einer Platte elastischen Holzes aufspannt, mittels elastischer Halter daran befestigt und mittels Stegen von elastischem Holze damit in Verbindung setzt, so wird durch die Resonanz der Platte der Ton sehr bedeutend verstärkt.

Der Klang einer Geige verdankt seine Kraft nur der Resonanz des Bodens, auf welchem die Saiten aufgespannt sind; ebenso ist beim Klavier die Stärke des Tones wesentlich abhängig von der Güte des mitschwingenden Resonanzbodens, mit welchem die Saiten durch den Steg, durch welchen sie gezogen sind, in Verbindung stehen. Ebenso gibt eine Stimmgabel einfach in der Luft gehalten einen äußerst schwachen kaum hörbaren Ton, derselbe wird aber sehr kräftig, wenn man die Gabel wie in Fig. 290 auf einen Resonanzkasten stellt, einen Kasten von elastischem Holze, dessen Luftsäule den Ton der Gabel gibt, oder wenn man sie auf den Resonanzkasten einer Geige oder überhaupt auf eine elastische Platte stellt.

Diese tonverstärkende Wirkung der mitschwingenden Platte erklärt sich unmittelbar aus den Gesetzen der Mechanik. So lange Saiten oder transversal schwingende Stäbe von kleiner Ausdehnung allein in der Luft schwingen, setzen sie nur kleine Luftmengen in Bewegung, wenn sie aber mit ausgedehnten elastischen Flächen in Verbindung, diese in isochrone Mitschwingungen versetzen, wird durch diese Schwingungen eine viel größere Luftmenge in Bewegung versetzt, und mit der Masse der schwingenden Teilchen wächst die Intensität des Tones

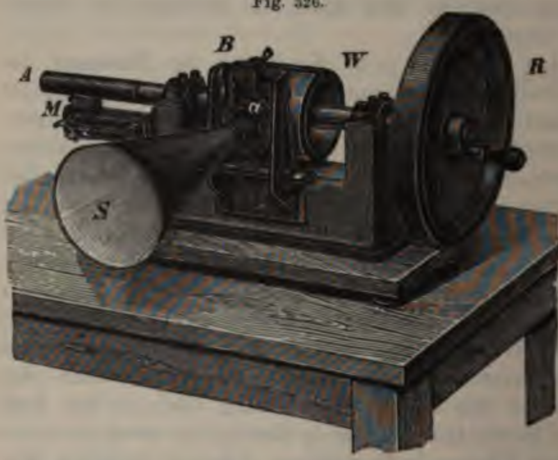
Was aber an Intensität des Tones gewonnen wird, das geht an Dauer verloren; eine Stimmgabel oder eine gespannte Saite behalten, wenn sie für sich schwingen, ihre Bewegung lange bei, mit einem Resonanzboden verbunden, verlieren sie ihren Ton sehr rasch.

Nach dem Vorigen sieht man nun auch, welche Instrumente, um klingend zu werden, mit einem Resonanzboden verbunden werden müssen, welche nicht; alle diejenigen, welche den Ton durch Schwingungen von elastischen Streifen oder gespannten Saiten hervorbringen, brauchen einen Resonanzkasten oder Resonanzboden, diejenigen aber, bei denen die Luft direkt in Bewegung gesetzt wird, wie bei den Blasinstrumenten, bedürfen eines tonverstärkenden Mittels nicht.

Die Resonanz verändert die Höhe eines erregten Tones nicht, wohl aber hat sie wesentlichen Einfluß auf den Klang, da die in einem Klange vorhandenen Partialtöne durch Resonanz nicht in demselben Verhältnis verstärkt werden. Der Klang einer Geige ist deshalb ein ganz anderer als der einer freien mit dem Bogen gestrichenen Saite. Ja der Klang der Geige wird ganz wesentlich von der Güte des Resonanzkastens bedingt, indem nur ein sehr elastischer gut gearbeiteter Kasten die höheren Partialtöne ebenso verstärkt als die tiefern.

Eine äußerst interessante Anwendung der Resonanz, welche zugleich zeigt, wie vollständig und genau die mitschwingenden Körper die Schwingungen reproduzieren, ist in dem von Bell konstruierten Telephon und dem von Edison konstruierten Phonographen gemacht worden. Das Telephon werden wir im dritten Bande besprechen. Beide Apparate zeigen, daß nicht nur feine Gummimembranen, sondern auch starre Platten alle an sie ankommenden Schwingungen aufnehmen, sie verwenden die Schwingungen der Platten nur in etwas verschiedener Weise, um gegen die Platte gesandte Töne oder Klänge oder auch die menschliche Sprache, das Telephon an einem entfernten Ort, der Phonograph am Orte der Erzeugung des Klanges zu reproduzieren.

Fig. 326.



Der wesentliche Teil des Phonographen, von dem Fig. 326 eine Abbildung zeigt in der Form, welche ihm von der Maschinenfabrik Osenbrück & Co. zu Hemelingen bei Bremen gegeben ist, ist die etwa 0,25^{mm} dicke Glimmerplatte, welche mit ihrem Rande in der kreisförmigen Fassung *a* befestigt ist und den Boden des Schallbechers *S* bildet. Eine an der Fassung *a* der Platte befestigte Stahlfeder, welche bis genau unter die Mitte der Platte reicht, drückt auf der vom Sprachrohr abgewandten Seite ein kurzes Stück dicken Kautschukrohres gegen die Mitte der Platte. Diese Stahlfeder trägt an ihrem Ende einen feinen vorn nicht zu spitzen, vielmehr etwas abgerundeten Stift senkrecht zur Ebene der Platte. Sendet man einen Klang in das Sprachrohr, so nimmt die Platte alle hingesandten Schwingungen auf und überträgt

sie durch das Kautschukrohr auf den Stift, welcher gerade so in Bewegung gerät, wie die Flammen der Königschen Flammenapparate Fig. 218, welche, wie wir sahen, jeden Partialton des in den Schalltrichter gesandten Klanges wiedergeben. Die Platte mit dem Schalltrichter wird von einem festen Rahmen getragen, der mit der unter *B* sichtbaren Schraube der Walze *W* etwas näher gebracht oder von ihr entfernt werden kann.

Die Spitze schreibt ihre Bewegung auf die Walze *W*, welche, wie die Figur zeigt, auf der Achse *A* aufgesetzt ist, die durch die Kurbel des Schwungrades *R* in Drehung versetzt werden kann und bei der Drehung durch die in der Mutter *M* eingreifende Schraube, welche in das Ende der Achse bei *A* eingeschnitten ist, vorwärts bewegt wird. In die Walze *W* ist der Schraube bei *A* entsprechend eine Spiralfurche eingeschnitten. Die Walze *W* wird mit einem Blatte dünner Zinnfolie, etwa 1^{qdcm} 1^{g} wiegend, überzogen. Der die Platte mit der Spitze tragende Rahmen wird dann so gestellt, daß die Spitze mit sanftem Drucke auf der Zinnfolie über der Vertiefung der Spiralfurche aufsteht.[1]

Sendet man in den Schalltrichter bezw. in das bei dem Hineinsenden des Tones ihn ersetzende kleinere Mundstück, einen Klang gegen die Platte oder spricht man mit kräftiger Stimme dagegen, während gleichzeitig die Walze in Rotation versetzt wird, so prägt der Stift, indem die Furche unter ihm weiter gleitet, seine Schwingungen in die Metallfolie ein. Die Eindrücke erscheinen dem freien Auge wie kleine eingedrückte Punkte, mit dem Mikroskope betrachtet erkennt man in ihnen indes mehr oder weniger starke Vertiefungen je nach der Art des Klanges, den sie darstellen. Ein Durchschnitt durch die Eindrücke längs der Furche gibt eine Kurve, nur nicht mit so starken Erhöhungen und Vertiefungen, wie sie die Enden der Flammen der Königschen Flammenbilder zeigen.

Man bringt dann, wenn die in den Phonographen zu sendenden Klänge oder die Rede beendet ist, die Walze wieder in die Anfangslage zurück, während man den Rahmen mit der Spitze etwas zurückgezogen hat. Ist die Walze wieder in der Anfangslage angekommen, so bringt man die Spitze wieder in die Lage, daß sie an dem Stanniol anliegt, wie sie es bei dem Niederschreiben der Schwingungen tat. Man ersetzt dann das Mundstück durch den Schalltrichter *S* und dreht die Walze mit derselben Geschwindigkeit wieder vorwärts, wie vorher bei dem Schreiben. Da die gegen die Zinnfolie drückende Spitze genau dieselben Schwingungen, bei ihrer Bewegung über die Vertiefungen fort, wieder annimmt und der Platte mitteilt, welche sie bei dem Hineinsenden des Klanges oder der Rede angenommen hatte, so kommen jetzt derselbe Klang oder dieselbe Rede wieder aus dem Schalltrichter hervor, welche man vorher hineingesandt hat. Der zurückkehrende Klang ist nur erheblich schwächer, und der Klang der zurück

1) Die neuere Form von Edisons Phonograph, von der eine Zeitlang ein großes Wesen gemacht wurde, unterscheidet sich von der oben beschriebenen nur dadurch, daß anstatt des Stanniols eine besonders präparierte Wachsschicht auf den Zylinder gebracht wird und daß die Walze durch eine kleine elektrische Maschine gedreht wird.

In neuerer Zeit sind zahllose verschiedene Konstruktionen der Phonographen ausgeführt worden, doch ist prinzipiell nichts dabei geändert worden. Praktische Anwendung hat der Phonograph kaum gefunden.

kehrenden Rede ist im allgemeinen etwas näselnd, wie Auerbach in den Beiblättern zu Poggendorffs Annalen Bd. II ganz richtig bemerkt.

Ist die Geschwindigkeit, mit der man bei der Reproduktion des Klanges die Walze dreht, eine andere als beim Hineinsenden desselben, so wird die Tonhöhe des reproduzierten Klanges eine andere, ist die Geschwindigkeit ungleichmäßig, so werden hineingesungene Klänge unrein, die hineingesprochene Rede bei der Reproduktion undeutlich. Um die bei der Bewegung mit freier Hand schwierig zu erhaltende Gleichmäßigkeit der Bewegung zu erzeugen, dient eben das schwere Schwungrad *R*. Eine noch größere Regelmäßigkeit ist dadurch zu erreichen, daß man die Achse durch ein Uhrwerk von konstanter Geschwindigkeit dreht.

Die Reproduktion der Klänge und der menschlichen Rede durch den Phonographen ist ein vollgültiger und äußerst interessanter Beweis für die Richtigkeit der Helmholtzschen Theorie des Klanges überhaupt und der Vokalklänge der menschlichen Stimme insbesondere. Hier erhält eben die schwingende Platte bei der Reproduktion des Klanges die Schwingungen in der Zusammengesetztheit zurück, wie sie durch die einzelnen Partialtöne des hineingesandten Klanges bedingt ist, und nichts anderes. Daß die Schwingungen der Platte dann wesentlich denselben Klang reproduzieren, beweist eben, daß in dieser Zusammengesetztheit der Schwingungen die Wesenheit des Klanges begründet ist und in nichts anderm.

Die Wiedergabe des Schalles im Phonograph ist von Fleming Jenkin und J. A. Ewing[1]) und besonders von v. Lahr[2]) benutzt worden. um zu prüfen, ob die Auffassung der Vokale nach von Helmholtz oder nach Grassmann die richtigere sei. Nach von Helmholtz sind es mehr oder weniger feste Töne, die durch die Form der Mundhöhle bedingten, welche den gesprochenen oder gesungenen Grundton begleitend den Vokalcharakter bestimmen. Nach Grassmann ist der Charakter des *u* bestimmt durch einen harmonischen Oberton, der tiefer als c_3 sein muß, ein den Grundton begleitender Oberton zwischen e_3 und c_4 gibt *ü* und ein noch höherer Oberton gibt *i*.

Es müßte deshalb nach der Helmholtzschen Auffassung jede Änderung der Drehungsgeschwindigkeit der Walze bei Reproduktion eines Vokales gegenüber der Drehungsgeschwindigkeit bei dem Hineinsprechen des Vokales eine Änderung des Vokalcharakters zur Folge haben; nach Grassmann dagegen müßte *u* seinen Charakter behalten bei verminderter Drehgeschwindigkeit und bei vergrößerter Drehgeschwindigkeit, so lange der Oberton nicht über c_3 steigt, dann müßte *u* in *ü* übergehen, und bei noch weiter gesteigerter Geschwindigkeit müßte es *i* werden. Die Versuche bestätigten die Folgerung.

Wird *ü* in den Apparat gerufen, so kehrt es als *ü* bei gleicher Drehgeschwindigkeit zurück, als *u* bei geminderter, als *i* bei gesteigerter Drehgeschwindigkeit.

Der Vokal *o* kehrt bei gleicher und verminderter Drehgeschwindigkeit als *o* zurück, wie von Lahr besonders gegenüber frühern Versuchen von

1) *Fleming Jenkin* umd *Ewing,* Nature. 18. p. 340; 394; 454. 1878. Transact. of the Royal Soc. of Edinburg. 28. p. 1. 1879.

2) *von Lahr,* Wiedem. Ann. 27. p. 94. 1886.

Cross hervorhebt, bei gesteigerter Geschwindigkeit geht es in *ö* und später in *e* über.

Der Vokal *a* sollte nach Grassmann bei verminderter oder gesteigerter Geschwindigkeit als *a* zurückkehren; bei gesteigerter Geschwindigkeit ist das der Fall, bei verminderter kehrt er aber als *å* zurück; v. Lahr glaubt, daß das deshalb der Fall sei, weil bei langsamerer Drehung die hohen Obertöne nicht so kräftig reproduziert würden.

Die andere zuerst von Jenkin und Ewing, dann auch von v. Lahr angewandte Methode ist die Untersuchung der Eindrücke, welche der Stift des Phonographen in dem Stanniol gemacht hat. Ein durch die Vertiefungen geführter Längsschnitt muß eine Kurve geben, welche zu dem Grundtone die ganze Reihe der mit ihm erklingenden Obertöne nach dem Verhältnisse ihrer Stärke enthält. Jenkin und Ewing sowie v. Lahr haben durch eine passende, derjenigen von Raps zur Darstellung der Schwingungen der Orgelpfeifen benutzten, ähnliche Vorrichtung die Kurven in vergrößertem Maßstabe aufgezeichnet und die so aufgezeichneten im einzelnen ausgemessen, um die Intensität der einzelnen den Klang zusammensetzenden Partialtöne zu erhalten.

Die Resultate der Messungen bestätigen zunächst die schon bei Besprechung der Vokalbildung gemachte Bemerkung, daß ein und derselbe Vokal keineswegs, auch auf dieselbe Tonhöhe gesungen, immer dieselbe Zusammensetzung hat, selbst dann nicht, wenn ein und dieselbe Person den Vokal singt. Mit Änderung der Tonhöhe kann die Zusammensetzung der Vokalklänge sich ganz erheblich ändern. Setzen wir die Intensität der Töne der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung proportional, so erhielten z. B. Jenkin und Ewing als Intensität der ersten sechs Partialtöne, als der Vokal *o* auf *e* (161 Schwingungen) gesungen wurde, die Intensität des Grundtones als 1 gesetzt

1 — 112,0 — 102,6 — 53,76 — 0,00 — 0,00

auf e_1

1 — 8,44 — 0,18 — 0,13 — 0,20 — 0,00

auf f_1

1 — 1,20 — 0,00 — — — 0,04 — 0,03

von Lahr erhielt für *o* auf f_1 gesungen

1 — 24,416 — 1,404 — 22,848 — 1,000 — 1,260.

Im allgemeinen bestätigen aber diese Messungen die Theorie von Grassmann. *u*, *ü*, *i* zeigen im allgemeinen nur einen kräftigen Oberton, und zwar ist es meist der erste, nur bei ganz tiefer Stimmlage treten bei *u* mehrere Obertöne hervor; bei *a* sind alle Obertöne stark, bei *o* nur die tiefern, während bei *ö*, *ä*, *e* wieder die hohen Töne stark hervortreten.

Eichhorn[1]) hat auf Grund der Angaben von v. Lahr über die Intensität der Partialtöne der Vokale Wellensirenen konstruiert, welche unter Voraussetzung der strengen Richtigkeit dieser Angaben die Vokale beim Anblasen hätten geben müssen. In der Tat ergaben die für den Vokal *a* konstruierten Sirenen ein deutliches *a*, ebenso entstand *ä*, weniger deutlich

1) *Eichhorn*, Wiedem. Ann. **39**. p 148. 1891.

u und *o*, die für *ü* konstruierte Sirene gab *u* und die für *i* konstruierten ließen das *i* gar nicht erkennen. Eichhorn glaubt indes, daß die der Grassmannschen Theorie weniger günstigen Resultate zum Teil der noch geringen Vollkommenheit seiner Apparate zuzuschreiben seien.

Mit einem Phonographen hat neuerdings L. Bevier[1]) die englischen Vokale untersucht. Die Bewegungen des Stiftes des Phonographen wurden übertragen auf einen längern Hebelarm, der am Ende einen Spiegel trug. Ein Lichtstrahl von demselben reflektiert wurde auf photographisches Papier geworfen, wodurch die Schwingungen beliebig vergrößert fixiert werden konnten. Auch E. W. Scripture[2]) untersuchte mit einem Grammophon eine Reihe von Vokalen und Diphtongen.

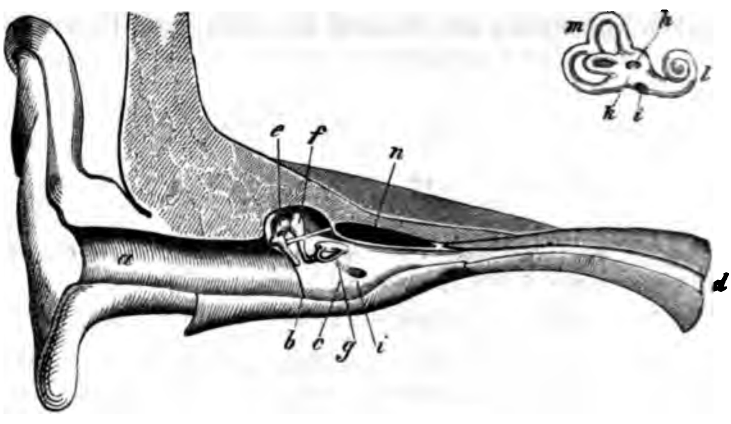
§ 179.

Das menschliche Ohr. Durch die Mitteilung der schwingenden Bewegung an die die Gehörnerven umgebenden elastischen Medien und dadurch an den Gehörnerven selbst nehmen wir den Schall wahr.

Das Gehörorgan des Menschen umfaßt drei Abteilungen von Hohlräumen, welche zum größten Teil in dem festen Knochen des Schläfenbeines eingeschlossen sind, das äußere, mittlere und innere Ohr; die beiden erstern sind mit Luft, das innere Ohr ist mit Wasser angefüllt.

Zum äußern Ohr gehört die Ohrmuschel und der äußere Gehörgang, zum mittlern Ohr die Paukenhöhle und die Ohrtrompete, die tuba Eustachii.

Fig. 327. Fig. 328.



Der äußere Gehörgang *a* (Fig. 327) ist durch das Trommelfell *b*, welches in seinem ganzen Umfange an Knochen angeheftet ist, von der Paukenhöhle *c* getrennt, diese verengert sich weiterhin zur Ohrtrompete *d*, welche in der Nasenhöhle mündet. Die Höhle des innern Ohres, von der Fig. 328 einen Abguß in natürlicher Größe darstellt, liegt in dem Knochen

---

1) *L. Bevier,* Phys. Rev. 10. p. 193. 1900. Physik. Ztschr. 1. p. 525. 1900. Phys. Rev. 14. p. 171 u. 214. 1902; 15. p. 44. 1902.

2) *E. W. Scripture,* Stud Yale Psychi Lab. 7. p. 1. 1899 und Still Journ 11. (4.) p. 302. 1901.

welcher die hintere Wand der Paukenhöhle bildet. Zwischen ihr und dem Trommelfell liegt in der Paukenhöhle die Reihe der Gehörknöchelchen.

Der Hammer (malleus) *e* ist mit seinem langen Fortsatz oder Stiel im Zentrum des Trommelfells, ferner in einer Linie von da zum obern Ansatzrande hinauf und nahe dem letztern noch einmal mit seinem kurzen Fortsatze am Trommelfell angeheftet. Außerdem ist er noch durch einen kurzen Fortsatz, der gerade nach vorn über dem Rande des Trommelfells hin liegt (und deshalb in der Figur abgeschnitten ist), an der Knochenwand der Paukenhöhle angeheftet.

Sein Kopf, der den obern Rand des Paukenfelles überragt, steht durch ein Gelenk mit dem zweiten Knochen, dem Ambos (incus) *f* (Fig. 327) in Verbindung. Der Ambos ist außerdem mit einem kurzen (in der Figur hinter dem Hammer liegenden) Fortsatz an der hintern Wand der Paukenhöhle angestützt.

Vom Ambos geht ein langer Fortsatz parallel dem Stiele des Hammers nach unten; an seinem Ende ist der dritte Knochen, der Steigbügel *g* (Fig. 327) befestigt, der horizontal nach hinten liegt. Die Platte, in der seine beiden Leisten zusammenstoßen, der Fußtritt, ist an ihrem Rande herum häutig mit dem Rande des ovalen Fensters *h* (Fig. 328) verbunden, welches in der Mitte des hintern Teiles der Paukenhöhle in die Höhle des innern Ohres führt.

Das innere Ohr steht durch zwei Öffnungen mit der Paukenhöhle in Verbindung, durch das ovale Fenster *h*, welches von der Platte des Steigbügels bedeckt ist, und das unterhalb demselben liegende runde Fenster *i*, welches durch eine einfache feine Membran geschlossen ist. Das ovale Fenster führt zum mittlern Teile des innern Ohres, zum Vorhof (vestibulum) *k* (Fig. 328), in welchem dem Fenster und somit der Platte des Steigbügels gerade gegenüber ein Zweig des Gehörnerven einmündet. Vom Vorhof geht nach der einen Seite der spiralig gewundene Gang der Schnecke (cochlea) *l* (Fig. 328) aus, in welchem sich ein besonderer Ast der Nerven von der Achse aus verteilt. Zur Schnecke führt außerdem direkt von der Paukenhöhle aus das runde Fenster *i*.

Nach der andern Seite gehen vom Vorhofe die drei halbzirkelförmigen Kanäle *m*, in drei zueinander senkrechten Ebenen gebogen, in je zwei Mündungen aus. Auch diese erhalten durch die eine etwas erweiterte Mündung Äste des Gehörnerven.

Das Trommelfell ist mit seinem Zentrum ein wenig trichterförmig in die Paukenhöhle hinein vertieft und dadurch gespannt. Diese Spannung kann durch eine Drehung des Hammers um die den obern Rand des Trommelfelles tangierende (zur Ebene der Figur senkrechte) Achse des Fortsatzes, mit dem er an die Wand der Paukenhöhle befestigt ist, etwas vermehrt werden. Dadurch rückt das untere Ende seines Stieles dem ovalen Fenster näher, und da die andern Gehörknöchelchen seiner Bewegung einigermaßen folgen, so wird dadurch der Fußtritt des Steigbügels etwas in das ovale Fenster hineingetrieben.

Das Wasser des Labyrinthes kann diesem Drucke nur dadurch ausweichen, daß es die das runde Fenster verschließende Membran gegen die Paukenhöhle hinausdrängt, so daß mit der stärkern Spannung des Trommelfells auch diejenige dieser Membran wächst.

Im großen und ganzen geht aus der anatomischen Beschreibung des Gehörorgans die Art der Schallwahrnehmung hinlänglich deutlich hervor. Die Schwingungen der Luft teilen sich zunächst dem Trommelfelle mit, das dadurch entweder in longitudinale Schwingungen, wie Johannes Müller annimmt, oder in transversale Schwingungen, bei denen die Membran als solche schwingt, wie andere wollen, versetzt wird. Die Schwingungen des Trommelfells pflanzen sich dann durch die Reihe der Gehörknöchelchen zum ovalen Fenster und so in die Flüssigkeit des Vorhofes, und durch die Luft der Paukenhöhle zum runden Fenster und in die Flüssigkeit der Schnecke fort. In beiden Flüssigkeiten, der des Vorhofes sowohl, dem ovalen Fenster gerade gegenüber, als auch jener der Schnecke endigen Teile der Gehörnerven.

Aber auch in den halbzirkelförmigen Kanälen endigen Zweige des Gehörnerves, auch diese müssen daher zum Hören beitragen. Es ist eine wahrscheinliche Hypothese, daß die durch den Ton erregten Schwingungen der Kopfknochen sich der Flüssigkeit in den halbzirkelförmigen Kanälen mitteilen, und daß diese dann durch die in denselben mündenden Nervenendigungen perzipiert werden.

Die neuern anatomischen Entdeckungen über den Bau des innern Ohres, besonders die Art, wie die Nerven dort endigen, von Max Schultze und dem Marchese Corti haben Helmholtz[1]) in den Stand gesetzt, die Perzeption des Schalles genauer zu erkennen. Es würde die uns in diesem Buche gesteckten Grenzen weit überschreiten, wollten wir diese Fragen hier ausführlich besprechen; nur einen Punkt müssen wir etwas genauer hervorheben, nämlich wodurch nach der Hypothese von Helmholtz das menschliche Ohr in den Stand gesetzt wird, jeden Klang in seine einzelnen Partialtöne zu zerlegen. Diese Zerlegung findet wahrscheinlich in der Schnecke statt und wird ermöglicht durch die eigentümlichen Gebilde, mit welchen dort die Nervenendigungen in Verbindung stehen. Die Schnecke ist nämlich ihrer ganzen Länge nach durch eine teils knöcherne, teils membranöse Scheidewand in zwei Hälften geteilt, eine obere und eine untere, die eine mündet im Vorhof, die andere läuft gegen die Paukenhöhle aus und ist durch die Membran des runden Fensters geschlossen. Der knöcherne Teil der Scheidewand befindet sich an der innern Seite der Windungen und durch diesen Teil derselben treten die Nervenfasern in die häutige Membran über; dort endigen sie an den Cortischen Fasern, membranösen Streifen, welche an jener häutigen Membran, der Membrana basilaris angewachsen, zwischen derselben und einer an der Schneckenwand befindlichen Membran, der Cortischen Membran ausgespannt sind. Die Breite der membrana basilaris ist in ihrem Beginn eine geringe, sie wächst, je mehr sie sich der Kuppel der Schnecke nähert, bis mehr als zum Zwölffachen. Die Membran selbst besteht aus radialen, sie der Breite nach durchsetzenden ziemlich festen Fasern, welche parallel, in der angegebenen Weise an Länge wachsend nebeneinander gelagert sind, und welche in der Längsrichtung der Membran viel weniger fest miteinander verbunden sind. Durch diese eigentümliche Struktur, infolge deren die Membran in der Richtung ihrer Breite sehr viel stärker gespannt ist als in der Richtung der Länge,

1) *Helmholtz,* Tonempfindungen. 3. Ausgabe. p. 198—232.

verhält sich die membrana basilaris annähernd so, als wären ihre Radialfasern ein System von gespannten Saiten, deren membranöse Verbindung nur dazu dient die schwingende Flüssigkeit der Schnecke an dem freien Durchtritt zwischen den Saiten zu hindern, und so zu bewirken, daß die Schwingungen der Flüssigkeit sich auf die Membran übertragen. Es werden deshalb die Bewegungen der einzelnen Fasern der Membran dieselben sein, als wäre jede einzelne unabhängig von den andern und folgte jede für sich den Schwingungen des Wassers in der Schnecke. Für diese radialen Fasern der membrana basilaris mit ihren Anhängen, den Cortischen Fasern nimmt nun Helmholtz an, daß jede für eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt ist. Danach wird ein in das Ohr eindringender Ton namentlich diejenige Stelle der Membran in Mitschwingungen versetzen, an denen der Eigenton der gespannten und mit den verschiedenen Anhangsgebilden belasteten Radialfasern der Membran dem erregenden Ton am besten entspricht, von da werden sich die Schwingungen in schnell abnehmender Stärke auf die benachbarten Teile ausbreiten. Daß die Fasern, trotz ihrer geringen Länge auf die tieferen Töne der Tonskala abgestimmt sein können, das liegt nach der Annahme von Helmholtz eben in den Anhangsgebilden, welche die Fasern belasten.

Durch die Schwingungen der Radialfasern der Membran werden also direkt die mit denselben verbundenen Cortischen Fasern in dieselben Schwingungen versetzt, und damit die in diesen Fasern befindlichen Nerventeile, welche die Empfindung des Tones vermitteln. Es würde demnach für jeden Ton eine bestimmte oder doch eine beschränkte Zahl von Nervenfasern erregt, so daß die verschiedenen Töne von ganz verschiedenen Fasern empfunden werden.

Aus dieser Theorie des Hörens, welche dasselbe als einen speziellen Fall des Mittönens auffaßt, erklärt sich zunächst die große Empfindlichkeit, welche ein geübtes Ohr für geringe Unterschiede in der Tonhöhe hat, welche nach Angabe von E. H. Weber soweit geht, daß das Ohr Töne als verschieden erkennt, deren Schwingungsverhältnis 1000 : 1001 ist, eine Angabe, welche Cornu und Mercadier[1]) bestätigen. Dieselben geben an, daß ein geübtes Ohr bei der tönenden Saite eines Monochordes, welche die Länge von einem Meter hat, deutlich die Verschiebung des Steges um 1^{mm} wahrnehme.

Nach Kölliker enthält nämlich das Ohr etwa 3000 Cortische Fasern. Rechnet man nun etwa 200 auf die Töne, welche außerhalb der in der Musik gebrauchten Grenzen liegen, so würden für die 7 Oktaven, deren Töne in der Musik benutzt werden, 2800 Fasern übrig bleiben, also etwa 400 für jede Oktave; nach der Angabe von E. H. Weber würde ein geübtes Ohr etwa 700 Tonstufen innerhalb der Oktave zu unterscheiden imstande sein, also eine noch größere Zahl, als der für jede Oktave vorhandenen Anzahl von Cortischen Fasern entspricht. Das liegt nach Helmholtz daran, daß, wenn ein Ton angegeben wird, dessen Höhe zwischen dem zweier benachbarter Cortischer Fasern liegt, beide in Schwingungen versetzt werden, diejenige aber stärker, deren Eigenton dem angegebenen näher liegt. Die Empfindlichkeit des Ohres für verschiedene Tonhöhen

1) *Cornu und Mercadier*, Comptes rendus. 68. p. 301. 1869.

Pfeife in dieser Stärke eine Sekunde lang tönen zu lassen, mußten 196^{ccm} Luft mit dem Drucke $9,5^{cm}$ Wasser durch die Pfeife geblasen werden. Die hierbei geleistete Arbeit ist somit die Zurückschiebung des Druckes von $9,5^{g}$ auf die Höhe von 196^{cm} in der Sekunde, denn wir können uns denken, wir hätten die Luft zum Anblasen der Pfeife einer Röhre von $1\ cm^2$ Querschnitt entnommen und man erkennt, daß man in dem Falle die unten absperrende Wasserfläche um 196^{cm} hätte heben müssen, um in der Sekunde die angegebene Menge Luft durch die Pfeife zu treiben. Die geleistete Arbeit L ist somit

$$L = 981 \cdot 9,5 \cdot 196 = 1826620 \frac{\mathrm{gr.\,cm}^2}{\mathrm{sec}^2}.$$

Nehmen wir an, daß die gesamte Arbeit ohne irgend welchen Verlust in lebendige Kraft der sich ausbreitenden schwingenden Bewegung verwandelt, und daß die Ausbreitung nur in der Luft stattgefunden hätte, so daß nichts in die Erde übergegangen ist, so hat sich die schwingende Bewegung bis zu der Stelle, wo der Schall wahrnehmbar ist, über eine Halbkugel vom Radius 82000^{cm} ausgebreitet, und während einer Sekunde wandert die der vorhin bestimmten Arbeit entsprechende lebendige Kraft durch die Fläche dieser Halbkugel hindurch. Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, ϱ die Dichtigkeit der Luft, so können wir zur Berechnung der Geschwindigkeit der schwingenden Luftteilchen annehmen, die gesamte Bewegung sei durch eine Fläche von der Basis $2\pi(82000)^2$ in einen Zylinder von der Länge c übergegangen, in welchem überall die Dichte ϱ ist und wo überall die schwingenden Teilchen die Gleichgewichtslage mit derselben Geschwindigkeit v passieren, welche sie in der Fläche der Halbkugel haben. Denn bei dieser Vorstellungsweise breitet sich die Bewegung nach dem Durchtritt durch die Halbkugel nicht mehr aus, jede folgende Schicht erhält somit die Geschwindigkeit der vorhergehenden. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles setzt Lord Rayleigh 34100^{cm} und für die Dichtigkeit der Luft 0,0013. Die in der Sekunde die Grenzfläche durchdringende lebendige Kraft ist demnach

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2\pi(82000)^2 \cdot 34100 \cdot 0,0013 \cdot v^2 = 1826620$$

und daraus

$$v^2 = \frac{1826620}{\pi (82000)^2 \cdot 34100 \cdot 0,0013}$$

$$v = 0,0014^{cm}.$$

Die Luftteilchen passieren also an der Grenze der Wahrnehmbarkeit des Tones die Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit von 14 zehntausendstel eines Zentimeters.

Um die Größe der Amplitude zu erhalten, gehen wir aus von der Schwingungsgleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}; \qquad v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Da v die Geschwindigkeit für $t = 0$ ist, so ist

$$v = \frac{2\pi}{T} a; \qquad a = \frac{T}{2\pi} v = \frac{v}{2730 \cdot 2\pi}$$

$$a = 8,14 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm},$$

die Amplitude beträgt also nicht ganz ein zehnmillionstel eines Zentimeters.

Durch das Quadratzentimeter der Grenzfläche wandert in der Sekunde, da die Fläche der Halbkugel $2\pi(82\,000)^2$ Quadratzentimeter enthält

$$\frac{1\,826\,620}{2\pi(82\,000)^2} = 4{,}32 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{gr\ cm}^2}{\mathrm{sec}^2}$$

Arbeitseinheiten. Da der Gehörgang etwa $\frac{1}{2}\mathrm{cm}^2$ Querschnitt hat, wurde also hier der Ton noch wahrnehmbar, als am Trommelfell $1{,}11 \cdot 10^{-5}$ Arbeit pro Sekunde geleistet wurde, eine Arbeit, welche etwa der Hebung des hundertmillionstel Teiles eines Gramm auf die Höhe von 1^{cm} entspräche.

Töpler und Boltzmann stellten ihre Versuche mit einer gedeckten Pfeife an, welche 181 Schwingungen in der Sekunde, also einen Ton gab, der fast 4 Oktaven tiefer ist als derjenige Rayleighs, sie konnten denselben noch in einer Entfernung von $11\,500^{\mathrm{cm}}$ wahrnehmen. Sie hatten in der Mundöffnung eine Amplitude von $0{,}248^{\mathrm{cm}}$ gefunden und berechneten daraus nach einer Gleichung von v. Helmholtz als Amplitude an der Grenze

$$\alpha = 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm}$$

also entsprechend der Erfahrung, daß tiefere Töne früher unhörbar werden als höhere, einen etwa 50fachen Wert als Rayleigh; für die Geschwindigkeit v ergibt sich hieraus

$$v = 0{,}004\,55,$$

also fast genau die dreifache und das dem Ohre zugeführte Arbeitsquantum, welches dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, da die Luftmenge des Ohres die gleiche ist, etwa die neunfache wie bei Rayleigh. Es sind das Zahlen gleicher Ordnung, welche zeigen, wie äußerst schwache Eindrücke unser Ohr wahrnehmen kann.

§ 180.

Einfluß der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones; Dopplersches Prinzip. Wenn wir den durch eine schwingende Bewegung der Luft bestehenden Schall durch die den Nerven mitgeteilten Schwingungen empfinden, und die Anzahl der in der Zeiteinheit in das Ohr eindringenden Schwingungen maßgebend ist für die Höhe des empfundenen Tones, so muß es auf die letztere von Einfluß sein, ob der Beobachter und das tönende Instrument sich voneinander in einer konstanten Entfernung befinden, oder ob die beiden sich einander nähern oder voneinander entfernen.

Doppler[1]) hat diesen Satz näher verfolgt und kommt zu dem Schlusse, daß, wenn der Beobachter und das tönende Instrument sich nähern, der wahrgenommene Ton höher werden muß, da dann die Eindrücke auf das Ohr sich rascher folgen als im Zustande der Ruhe. Ebenso muß der Ton tiefer werden, wenn der Beobachter und die Tonquellen sich voneinander entfernen, da dann die Zahl der in das Ohr eindringenden Wellen eine kleinere wird.

1) *Doppler,* Über farbiges Licht der Doppelsterne. Prag 1842.

Bezeichnen wir die Länge der Wellen mit l, die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft mit c, diejenige, mit welcher der schwingende Körper nach einer Richtung hin bewegt wird, mit b, so wird nach dieser Richtung hin die Länge der Wellen um $\frac{b}{c} l$ verkürzt, nach der entgegengesetzten Seite hin aber um ebensoviel verlängert. Denn hat z. B. der von dem tönenden Körper ausgehende Wellenberg um die Länge einer Welle sich fortgepflanzt, so würde bei ruhendem Instrumente der folgende Wellenberg das Instrument verlassen, und da er von derselben Stelle ausgeht, gerade um die Länge einer Welle von dem ersten entfernt sein. Hat sich aber das Instrument während dieser Zeit in der Richtung der vorschreitenden Welle bewegt, so geht der zweite Wellenberg nach derselben Zeit wie vorhin von einem dem ersten Wellenberge nähern Orte aus, er ist also von dem ersten um weniger als die Länge der Welle bei der Ruhe entfernt, oder die Welle wird kürzer. Nach der andern Seite wird sie aber um ebensoviel länger.

Ist die Länge der Welle l, so ist die Zeit, während welcher der erste Wellenberg um l sich fortpflanzt, gleich der Schwingungsdauer T, also, da $l = cT$,

$$T = \frac{l}{c},$$

und da wir die Geschwindigkeit des tönenden Körpers mit b bezeichneten, so hat sich derselbe in der Zeit T um die Strecke

$$bT = \frac{b}{c} l$$

in der Richtung der Welle fortbewegt, die Länge der Welle wird also dadurch

$$l\left(1 \mp \frac{b}{c}\right) = \frac{c}{n}\left(1 \mp \frac{b}{c}\right),$$

wenn wir mit n die Schwingungszahl oder was dasselbe ist, die Anzahl der auf die Strecke c kommenden Wellen bezeichnen, wenn das Instrument ruht.

Die an einem ruhenden Ort ankommende Schwingungszahl ist nun gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge, also hier gleich

$$\frac{c}{\frac{c}{n}\left(1 \mp \frac{b}{c}\right)} = n \frac{c}{c \mp b},$$

wo das negative Vorzeichen für die Orte gilt, denen sich das Instrument nähert, und das positive für die, von denen es sich entfernt.

Wenn andererseits der Beobachter sich gegen das ruhende Instrument bewegt mit einer Geschwindigkeit a, so werden in der Zeiteinheit nicht nur die Schwingungen in das Ohr kommen, welche den ruhenden Beobachter treffen, sondern auch diejenigen, welche auf der Strecke a liegen, so daß die Zahl der wahrgenommenen Schwingungen wird

$$n' = n + \frac{a}{l},$$

und entfernt sich der Beobachter

$$n' = n - \frac{a}{l},$$

oder da $l = \frac{c}{n}$,

$$n' = n \pm \frac{a}{l} = n \frac{c \pm a}{c}.$$

In jedem Falle wird also die Schwingungsmenge, die das Ohr erhält, beim Annähern von Beobachter und Tonquelle größer, beim Entfernen kleiner; findet das erste statt, muß der Ton höher, das zweite, tiefer werden.

Diese Folgerung ist durch die Erfahrung bestätigt.

A. Seebeck[1]) gibt an, daß er in den Papieren seines Vaters eine dahin gehörige Angabe gefunden habe. Ein Schlitten, wie man sie im Gebirge zum jähen Herabrutschen an Bergabhängen gebraucht, gab dem Beobachter Gelegenheit zu bemerken, daß der Ton einer Pfeife, die auf dem Schlitten geblasen wurde, beim Vorüberfahren plötzlich tiefer wurde.

Buys Ballot[2]) hat eine ausgedehnte Beobachtungsreihe über diesen Punkt angestellt. Auf der Eisenbahn zwischen Utrecht und Maarsen waren möglichst nahe der Bahn mehrere Musiker aufgestellt, welche die Tonhöhe eines auf einem mit der Lokomotive vorüberfahrenden Signalhorne gegebenen Tones schätzten; ein anderer auf der Lokomotive fahrender Beobachter verglich den Ton der auf den Stationen geblasenen Hörner bei Annäherung und Entfernung der Lokomotive mit dem des mitfahrenden Hornes. Die Geschwindigkeit des Wagens wurde bestimmt, indem nach zwei Chronometern die Zeit aufgeschrieben wurde, welche zum Durchlaufen von 100^{m} gebraucht war.

Die Beobachtungen bestätigen im allgemeinen die Theorie, indem fast immer Veränderungen der Tonhöhe in dem von der Theorie geforderten Sinne eintraten; eine genaue Übereinstimmung der berechneten Tonänderungen mit den beobachteten kann bei solchen Versuchen nicht erwartet werden, wo nur eine Schätzung des Beobachters die Änderung der Tonhöhe bestimmt.

Dagegen ist es Vogel[3]) gelungen, eine volle Bestätigung der Theorie zu erhalten, indem er den Ton der Dampfpfeife einer Lokomotive benutzte und mit Hilfe eines Musikers genau die Tonhöhe bestimmte, wenn die Lokomotive mit konstanter Geschwindigkeit sich ihm näherte und dann nach dem Vorüberfahren sich entfernte. Die Änderung der Tonhöhe entsprach mit einer merkwürdigen Genauigkeit der Dopplerschen Theorie.

Man kann die Erscheinung des Mittönens benutzen, wie zuerst A. Mayer[4]) gezeigt hat, um zu beweisen, daß in der Tat die Änderung der Tonhöhe gerade die von der Theorie verlangte ist. Man nimmt zwei genau gleiche Stimmgabeln etwa c_2, 512 Schwingungen gebend; streicht man die eine an, so tönt die andere kräftig mit. Verstimmt man die eine, etwa durch Überziehen eines leichten straffen Kautschukringes, so daß sie in der Sekunde zwei Schwingungen weniger macht, so tönt die andere Gabel nicht

1) *Seebeck*, in Doves Repertorium. 8. p. 87. 1849.
2) *Buys Ballot*, Poggend. Ann. **66**. 1845.
3) *H. C. Vogel*, Poggend. Ann. **158**. 1876.
4) *A. M. Mayer*, Pogend. Ann. **146**. 1872.

mehr mit, wenn man die verstimmte anstreicht. Stellt man sich dann aber mit der verstimmten Gabel in einiger Entfernung von der nicht verstimmten auf, bringt erstere zum Tönen, und bewegt sich dann mit der verstimmten tönenden Gabel mit der konstanten Geschwindigkeit von etwa $1{,}2^{\mathrm{m}}$ gegen die andere hin, so kommt dieselbe wieder zum Tönen. Stellt man die verstimmte Gabel auf, so muß man, um dieselbe zum Mittönen zu bringen, die nicht verstimmte mit derselben Geschwindigkeit entfernen. Wenn man dagegen die zweite Gabel nicht verstimmt, so tönt die erste nicht, wenn man mit der tönenden Gabel sich mit der gleichen Geschwindigkeit nähert oder entfernt. Daß diese Bewegungsgeschwindigkeit der Dopplerschen Theorie entspricht, ergibt sich leicht. Es müssen von der verstimmten Gabel her in der Sekunde 512 Schwingungen zur nicht verstimmten Gabel gelangen, während sie selbst in der Sekunde 510 Schwingungen macht. Die Geschwindigkeit b, mit der sie der nicht verstimmten Gabel genähert werden muß, ergibt sich somit aus

$$512 = 510 \cdot \frac{c}{c - b}.$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft bei gewöhnlicher Temperatur rund $c = 340^{\mathrm{m}}$, so wird

$$b = 1{,}21^{\mathrm{m}},$$

wie es vorhin angegeben wurde. Man kann so die Richtigkeit des Dopplerschen Satzes sogar objektiv sichtbar machen, wenn man die Schwingungen der Gabel auf die eine oder andere Weise sichtbar macht.

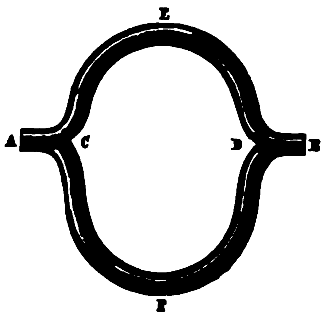
§ 181.

Interferenz des Schalles. Wenn sich nach einer und derselben Richtung zwei Schallwellen gleicher Länge fortpflanzen, so muß nach der Natur der Wellenbewegung die Resultierende aus den beiden Schallwellen abhängen von der Phasendifferenz, mit welcher die beiden Wellen zusammentreffen.

Treffen zwei Schallwellen ohne Phasendifferenz zusammen, so müssen sie sich verstärken, treffen sie dagegen mit einer Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge zusammen, so müssen sie sich aufheben. Daß letzteres in der Tat der Fall ist, davon kann man sich durch einen einfachen Versuch überzeugen. Bringt man eine Klangscheibe zum Tönen, so daß das diagonale Kreuz entsteht, so schwingen die nebeneinander liegenden Quadranten gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen, indem, wie wir sahen, die Knotenlinien zwei in entgegengesetzter Phase befindliche Teile der Scheibe trennen. Führt man nun eine solche tönende Scheibe am Ohre vorüber, so verschwindet der Ton jedesmal, wenn das Ohr sich vor einer Knotenlinie befindet. Von dem einen Quadranten wird dann ein Wellenberg ins Ohr gesandt und zugleich von dem andern ein Wellental, die Bewegung des Trommelfelles ist daher infolge der einen Welle die entgegengesetzte derjenigen der andern Welle, die Bewegung und somit der Schall hört auf.

Diesen Fall der Interferenz von Schallwellen hat Hopkins[1]) auf sehr einfache Weise sichtbar gemacht. Er stellte eine Röhre von Pappe oder Holz her, welche unten gabelförmig in zwei Röhren endigte, und deren oberes Ende mit einer feinen Membran überspannt war. Bestreut man die Membran mit etwas trocknem Sand und hält die Röhre so über eine tönende Klangscheibe, daß die beiden offenen Enden der Gabel sich über zwei nebeneinander liegenden Quadranten der Scheibe befinden, so gerät die oben über die Röhre gespannte Membran nicht in schwingende Bewegung, der Sand bleibt ruhig; hält man aber die offenen Enden der Gabel über gegenüberliegende Quadranten, so gerät der Sand in hüpfende Bewegung. Im ersten Falle gehen von den beiden Quadranten zugleich entgegengesetzte Bewegungen in die Röhre, dieselben heben sich auf, im letzten Falle aber gleichgerichtete, sie verstärken sich.

Fig. 329.



In anderer Weise hat Nörremberg[2]) die Interferenz der Schallwellen gezeigt. Ein verzweigtes Rohr von der Form Fig. 329 wurde in eine Wand eingemauert, und auf der einen Seite der Wand ein Ton erzeugt, der nur durch die Luft des Rohres in den durch die Wand abgetrennten Raum eindringen konnte. Wurde eine der beiden Röhren verstopft, so drangen alle Töne durch das Rohr hindurch, wurden aber beide geöffnet, so blieben alle Töne aus, für welche die Differenz der Röhrenlängen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge war.

Eine sehr bequeme Form, welche zu einer Reihe verschiedener Versuche brauchbar ist, hat Quincke[3]) dem eben besprochenen Interferenzapparat gegeben. Fig. 330 gibt eine dieser Formen, Fig. 331 eine andere.

Fig. 330.

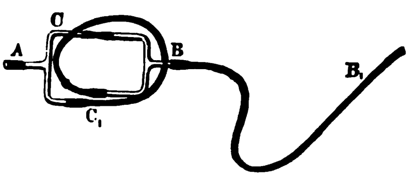
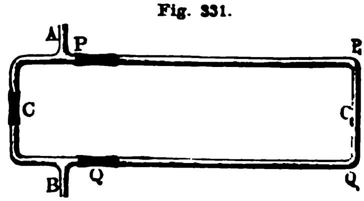


Fig. 331.



Die erste in den gleich anzugebenden Dimensionen löscht den Ton a_1 (440 Schwingungen) und alle seine ungeraden Vielfachen aus. Zwei T-förmige Glasröhren CAC_1 und CBC_1 sind an den Enden rechtwinklig umgebogen und bei C durch einen kurzen, bei C_1 durch einen langen Kautschukschlauch verbunden. Gibt man dem letztern eine Länge von

1) *Hopkins,* Poggend. Ann. 44. 1838.

2) *Müller-Pouillet,* Lehrbuch der Physik. Braunschweig 1856. p. 382. Diese Methode ist vorgeschlagen von *J. G. W. Herschel,* Philosophical Magazine 3. 3. 1833. Poggend. Ann. 31. 1834.

3) *Quincke,* Poggend. Ann. 128. 1866.

etwa 390^{mm}, so entspricht er einer halben Wellenlänge des Tones a_1 in Luft. Das mit einem kurzen Kautschukschlauch versehene Ende A des Apparates setzt man in den äußern Gehörgang des einen Ohres, verstopft das andere mit einem Siegellackpfropf und läßt den Klang der Stimmgabel durch den langen Kautschukschlauch BB_1 und die verzweigte Röhrenleitung ins Ohr gelangen, indem man die Zinken der angeschlagenen Gabel vor das offene Ende B_1 des Schlauches hält, oder auch den Stiel der Gabel in den Schlauch steckt und die Gabel anschlägt. Die dem Grundton der Gabel entsprechenden Wellen löschen sich dann bei B aus, und man nimmt ihn nicht wahr. Drückt man aber bei C oder C_1 den Kautschukschlauch zu, so daß die Welle nur durch ein Rohr dringen kann, so tritt der Ton kräftig in das Ohr hinein.

Der Apparat Fig. 331 unterscheidet sich von dem eben besprochenen dadurch, daß der lange Kautschukschlauch durch das Glasrohr PP_1Q_1Q ersetzt ist; indem man eine Reihe solcher Röhren herstellt, die an Stelle dieses mit dem Stücke BCA verbunden werden, kann man die Interferenzröhre für eine ganze Anzahl von Tönen stimmen.

Von den mannigfachen Versuchen, zu welchen diese Röhren dienen können, erwähnen wir hier nur die Beobachtung der Klangfarbe. Eine solche Röhre löscht nicht nur einen bestimmten Ton aus, sondern auch alle seine ungeradzahligen Obertöne; deshalb löscht eine solche Röhre den Klang einer gedeckten Orgelpfeife ganz aus, es bleibt nur das Blasegeräusch zurück, bei einer offenen Orgelpfeife dagegen ändert sie nur den Klang, da die geraden Partialtöne des Klanges nicht ausgelöscht werden. Man kann deshalb durch eine solche Röhre sofort erkennen, ob in einem Klange nur ungerade, oder auch gerade Partialtöne enthalten sind.

Eine sehr instruktive Einrichtung hat König diesen Interferenzröhren gegeben, indem er sie mit seinen manometrischen Flammen in Verbindung setzte. An die Stelle des Ohres bei der Quinckeschen Einrichtung treten die § 164 (Fig. 296) erwähnten kleinen Kapseln mit den Flammen. Königs Interferenzröhre ist posaunenartig eingerichtet. Ist die Röhre ganz zusammengeschoben, so sind beide dem eindringenden Tone offene Wege ganz gleich, er dringt in die Kapsel ein und setzt die Flamme in Vibration; zieht man nun die eine Hälfte aus, so wird der eine Weg des Tones länger, und ist er gleich $\frac{1}{2}$ Wellenlänge, so heben sich die Schwingungen in der Kapsel auf, und die Flamme brennt ruhig. Indem man auf diese Weise die Länge der Welle eines Tones von bekannter Schwingungszahl messen kann, liefert der Apparat sogar ein sehr bequemes Mittel, die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

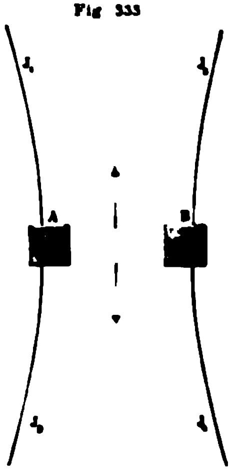
Interferenz des Schalles durch gleichzeitiges Aussenden entgegengesetzt gerichteter Impulse von zwei naheliegenden Orten hat Seebeck[1]) mittels der Sirene sehr deutlich nachgewiesen. Richtet man gegen eine Löcherreihe einer Sirene von den beiden entgegengesetzten Seiten her senkrecht gegen die Scheibe zwei Röhren und zwar so, daß, wenn die eine sich vor einem Loche befindet, die andere sich dem nächsten gegenüber befindet, so erhält man bei gleichzeitigem Anblasen keinen Ton, sondern hört nur das Geräusch der durchströmenden Luft, indem sich die beiden Stöße der Luft

1) *A. Seebeck*, Doves Repertorium. 6 1842.

errichteten Linie liegen. Die in der Nähe dieser Linie liegenden Luftteilchen werden dann gleichzeitig immer von einem von A ausgehenden Wellenberge und von B ausgehenden Wellentale getroffen, sie werden daher immer in Ruhe sein, auf der ganzen Linie CD muß der Schall verschwinden.

Wie Kiessling durch genaue Messungen konstatiert hat, findet eine solche Interferenz bei jedem parallelepipedischen in transversale Schwingungen versetzten Stabe statt; es tritt dort die Interferenz in einer durch die Achse des Stabes gelegten nahezu zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene auf. Um sie zu beobachten, nimmt man am besten einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten ziemlich voneinander verschieden sind, damit der Stab parallel der einen Seite schwingend einen wesentlich andern Ton gibt als parallel der andern Seite schwingend. Ein solcher Stab ist einem nahezu quadratischen vorzuziehen, weil, wenn man den Stab parallel einer Seite in Schwingungen versetzt, auch immer Schwingungen parallel der andern Seite auftreten. Ist die Dicke des Stabes nach beiden Richtungen nahe dieselbe, so ist der Ton für beide Schwingungsrichtungen auch nahe gleich, und die Beobachtung wird dann durch die im nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöße gestört und unsicher. Man hängt den Stab in zwei Knoten auf und bringt ihn durch Streichen mit dem Bogen parallel einer Seite zum Schwingen. Man führt dann in das eine Ohr, während das andere fest verschlossen ist, einen Kautschukschlauch, dessen anderes Ende gerade, das heißt senkrecht zur Schlauchachse abgeschnitten ist. Führt man dieses Ende des Schlauches in einiger Entfernung vom Stabe in einer der Schwingungsrichtung parallelen Richtung an dem Stabe vorüber, so verschwindet der Ton vollständig, sobald die Mitte der untern Schlauchöffnung sich gerade in der durch CD (Fig. 332) und die Stabachse gelegten Ebene befindet. Wie Kiessling angibt, läßt sich die Lage der Interferenzebene auf diese Weise sehr genau feststellen, da schon eine Verschiebung des Schlauchendes um 0,1^{mm} genügt, um den Ton wieder hörbar zu machen.

Fig. 333.



Am leichtesten lassen sich diese Interferenzen an einer Stimmgabel beobachten. Dreht man eine solche sehr rasch vor dem Ohre um den Stiel derselben als vertikale Achse herum, so hört man den Ton entsprechend den vier Interferenzflächen $J_1 J_2 J_3 J_4$ (Fig. 333), viermal verschwinden. Eine genauere Untersuchung der Interferenzflächen in diesem Falle hat Kiessling ergeben, daß sie hyperbolisch gekrümmt sind, infolge der Reflexionen, welche die von den innern Seiten der Zinken ausgehenden Schwingungen an der andern Zinke erfahren, und weil die Bewegung der Luft an der einen Zinke auch durch jene von der andern Zinke erregten beeinflußt wird. Umgibt man die eine Zinke mit einer möglichst engen Glasröhre, so daß die Bewegung dieser Zinke sich der umgebenden Luft nicht mitteilt, und wegen der starken Krümmung der Glasröhre keine merkliche Reflexion der Wellen zu den von der andern Zinke erregten Schwingungen eintritt, so finden die Interferenzen wieder in einer Ebene statt. Bringt man dann

aber zwischen den beiden Zinken eine ebene Glasplatte an, so daß eine Reflexion der von der einen Zinke erregten Welle an derselben stattfindet, so tritt die Krümmung wieder hervor, ein Beweis, daß die Krümmung der Interferenzfläche eine Folge der Durchkreuzung teils der reflektierten mit den direkt erregten, teils der von der andern Zinke herrührenden mit den von der einen Zinke erregten Schwingungen ist.

§ 182.

Interferenz von Wellen ungleicher Länge. Stöße. In dem vorigen Paragraphen haben wir das Zusammentreffen zweier Wellenzüge gleicher Periode betrachtet und haben gesehen, wie dadurch die den einzelnen Wellenzügen entsprechenden Töne verstärkt oder geschwächt, oder selbst unterdrückt werden, je nach der Phasendifferenz, mit welcher die Wellenzüge gleichzeitig in unserem Ohre ankommen. Die Resultierende dieser Interferenzen war aber eine stetig sich gleich bleibende, die Verstärkung oder Schwächung des Tones dauerte in ganz gleicher Weise fort, so lange die einzelnen Töne fortdauerten, da die Wellen von gleicher Geschwindigkeit und Länge mit konstanter Phasendifferenz immer an einem und demselben Orte ankommen.

Wie zwei Wellenzüge gleicher Länge, so können auch zwei Wellenzüge verschiedener Länge miteinander interferieren, jedoch ist das Resultat der Interferenz ein wesentlich anderes, viel komplizierteres als in dem vorigen Falle.

Werden nämlich an einem und demselben Orte zwei Töne mit verschiedener Schwingungszahl erregt, so tritt in diesen nicht immer zugleich Wellenberg oder Wellental auf, sondern in beiden Tönen zu verschiedenen Zeiten, da sie in dem einen Ton rascher aufeinander folgen als in dem andern. Gibt der höhere Ton in der Sekunde z. B. eine Schwingung mehr, und nehmen wir an, daß beim Beginne die Schwingungen beider genau gleichzeitig waren, so werden allmählich die Schwingungen des tiefern Tones gegen diejenigen des höhern zurückbleiben; nach einer halben Sekunde wird der tiefere Ton gerade ein Tal aussenden, wenn der höhere einen Wellenberg aussendet. Nach einer weitern halben Sekunde wird der tiefere Ton um noch eine halbe Schwingung zurückbleiben, so daß am Ende der ersten Sekunde wieder Wellenberg und Wellenberg zusammentreffen.

Zwei derartige Wellen können sich daher nicht dauernd schwächen oder dauernd stärken, da die Schwingungen nicht gleichzeitig gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, sondern bald gleichgerichtet, bald entgegengesetzt gerichtet sind. Das Ohr eines Beobachters wird daher abwechselnd, wenn zugleich die Wellenberge oder die Wellentäler das Ohr treffen, die Summe der Impulse der einzelnen Wellen erhalten, oder wenn ein Wellenberg und ein Wellental zusammentreffen, die Differenz der Impulse. Während demnach das Ohr beide Töne wahrnimmt, wird es zugleich von Zeit zu Zeit Verstärkungen und Schwächungen des Tones wahrnehmen müssen.

Die Erfahrung bestätigt diese Schlüsse vollkommen, denn läßt man zugleich zwei Töne, die nahezu gleich gestimmt sind, ansprechen, so hört man während des Tönens von Zeit zu Zeit deutliche Schläge, indem die Intensität des Tones abwechselnd gestärkt und geschwächt wird.

Diese Schläge nennt man Stöße oder Schwebungen. Beträgt der Unterschied der Schwingungszahlen in der Sekunde eins, so fällt am Anfange jeder Sekunde Wellenberg und Wellenberg zusammen, wir werden daher in jeder Sekunde eine Verstärkung des Tones, einen Stoß wahrnehmen. Ist der Unterschied der Schwingungszahlen gleich zwei, so wird bei gleichzeitigem Anfang beider Töne nach der ersten Viertelsekunde der höhere Ton dem tiefern um $\frac{1}{2}$, nach einer halben Sekunde um eine ganze Oszillation vorgeeilt sein. Schon nach einer halben Sekunde werden also dann wieder zwei Wellenberge zusammentreffen, wir werden in der Sekunde zwei Stöße wahrnehmen.

Daß die Zahl der Stöße überhaupt gleich der Differenz der Schwingungen derjenigen Töne sein muß, aus denen sie entstehen, entwickelt Hällström[1]) in folgender Weise. Seien r und s die Schwingungen der angestimmten Töne in der Sekunde, und x die Anzahl der Stöße. In der Zeit $\frac{1}{x}$ entsteht dann ein Stoß, und in dieser Zeit macht der Ton mit der der Schwingungszahl r, $\frac{r}{x}$, der andere Ton $\frac{s}{x}$ Schwingungen, da r und s die Schwingungszahl in der Zeit 1 ist.

In derselben Zeit aber, in welcher durch das Zusammenwirken der Schwingungen ein Stoß entsteht, muß, wie wir vorhin erwähnten, der höhere Ton eine Schwingung mehr vollführen, oder es muß

$$\frac{s}{x} - \frac{r}{x} = 1,$$

$$s - r = x$$

oder allgemein die Anzahl der Stöße in einer Sekunde muß gleich der Differenz der Schwingungszahlen beider Töne sein.

Man hat vielfach darüber gestritten, ob die Stöße nur subjektiver Natur seien, das heißt, ob sie nur im Ohre durch Zusammentreffen der einzelnen Impulse entständen, oder ob sie objektiver Natur seien, das heißt, ob wirklich an den Interferenzstellen eine stärkere Bewegung der Luftteilchen vorhanden sei. Ein einfacher vom Orgelbauer F. Lange[2]) in Berlin konstruierter Apparat beweist jedoch die objektive Natur der Stöße auf das entschiedenste. Lange brachte in den Fuß einer Zungenpfeife mit gläserner Wand zwei Rohrwerke und setzte auf jedes eine Pfeife, so daß er zwei Zungenpfeifen erhielt, die durch denselben Luftstrom angeblasen wurden. Die Pfeifen werden nahe gleich gestimmt, so daß die Stöße sich sehr langsam folgen. Bei Betrachtung der Zungen sieht man dann, wie die Exkursion derselben bei jedem Stoße um vieles bedeutender ist als sonst; ein direkter Beweis, daß die den Stoß erzeugenden Impulse in der Tat sich zu größern Schwingungen summieren, daß die Stöße nicht subjektiver, sondern objektiver Natur sind.

König[3]), der in einer ausgedehnten Untersuchung, bei welcher er zur Tonerzeugung, um einfache Töne zu erhalten, nur Stimmgabeln benutzte,

1) *Hällström*, Poggend. Ann. 24. 1832.
2) Der Apparat wurde mir von Herrn *Lange* im Jahre 1857 zu Berlin gezeigt; er ist in manche Kabinette übergegangen.
3) *König*, Poggend. Ann. 157. 1876.

die Zahl der von zwei Tönen gegebenen Stöße innerhalb der ganzen Skala der Tonleiter bestimmte, gelangt in bezug auf die Stöße zu einem etwas andern Resultat, er glaubt, daß nicht nur Stöße entstehen, welche gleich der Differenz der Schwingungszahl der Töne sind, sondern daß, wenn man sich einem harmonischen Intervall nähert, auch Stöße auftreten, gerade als wenn der Grundton von dem betreffenden Obertone begleitet wäre. Gehen wir also von einem Tone aus, der etwa 64 Schwingungen macht, $C = c_{-1}$, und nehmen wir eine zweite Gabel, deren Töne wir durch Laufgewichte, die an den Zinken verschiebbar sind, allmählich bis zur doppelten Schwingungszahl erhöhen können, so hört man zunächst die Stöße gleich der Differenz der Schwingungszahl, die bis zu 10, entsprechend 74 Schwingungen der zweiten Gabel, einzeln hörbar sind. Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe der zweiten Gabel hört man die Stöße als Rollen. Nähert sich die zweite Gabel der Quint, so geht nach Königs Bezeichnung das Rollen in ein verworrenes Rasseln über, wie wenn zu den bisher gehörten Stößen auch solche mit der Oktave des Grundtones hinzukämen. Geht man über die Quint hinaus, so dauert dieses Rasseln zunächst fort, zwischen der Sext und Septime geht dasselbe wieder in Rollen über, und bei der Septime, die 120 Schwingungen entspricht, hört man wieder einzeln 8 Stöße, also die Zahl der Stöße, welche der Differenz der Schwingungen mit der Oktave des andern Stimmgabeltones entsprechen. Nähert sich der Ton der Oktave, so nimmt dem entsprechend die Zahl der Stöße ab, bis sie bei der Oktave verschwinden. König nimmt somit an, daß nicht nur zwei dem Einklange nahe Töne Stöße geben, die der Differenz ihrer Schwingungen entsprechen, sondern auch Töne, die nahe im Verhältnisse 1 : 2, ebenso auch 1 : 3, 1 : 4 usw. stehen, gerade so, wie wenn der tiefere Ton von den betreffenden Obertönen begleitet wäre.

König ist der Ansicht, und zu demselben Resultate gelangt Voigt[1], daß sich diese Stöße aus der Zusammensetzung der Schwingungen der beiden Töne ableiten lassen. Auf die Untersuchung von Voigt kommen wir im nächsten Paragraphen noch zurück.

Helmholtz[2]) sieht diese von König als obere bezeichneten Stöße als solche an, die in der Tat mit den betreffenden Obertönen des Grundtones gebildet werden, indem er darauf hinweist, daß bei den kräftigen von König angewandten Schwingungen der Gabeln die Obertöne auftreten müssen. Bei einer Gabel, die 64 Schwingungen in der Sekunde machte, konnte er mit geeigneten Resonatoren die Obertöne bis zum fünften hören, wenn die Gabel stark angeschlagen war; die Zinken machten dann Schwingungen, deren Amplitude 1^{cm} betrug. Bei so großer Breite der Schwingungen eines scharfkantigen Körpers, wie es die Gabelzinken sind, müssen in der umgebenden Luft Wirbelbewegungen entstehen, die erheblich von dem Gesetze der einfachen Schwingungen abweichen, und deshalb in ähnlicher Weise die Obertöne hervorrufen, wie es die schwingenden Zungen tun. Daß das Auftreten der Obertöne durch derartige Störungen der einfachen Bewegungen infolge der großen Amplituden bedingt ist, ergibt sich auch

1) *Voigt,* Wiedem. Ann. **40**. p. 652. 1889.

2) *Helmholtz,* Tonempfindungen. 4. Ausgabe. p. 263. Man sehe dazu *König.* Wiedem. Ann. **12**. p. 335. 1881.

daraus, daß sie bei dem Austönen der Gabel viel früher als der doch auch nur sehr schwach hörbare Grundton der Gabel verschwinden, da bei dem Austönen der Gabel die Schwingungen kleiner und kleiner werden und dann die Luft nur mehr nach ihrer eigenen Periode in Bewegung versetzen.

Auch C. Stumpf[1]) untersucht die Teiltöne von Klängen und findet, daß ein Klang eine Resonanzgabel von multipler Schwingungszahl nur dann zum resonieren bringen kann, wenn er einen Oberton von der Schwingungsdauer des Gabeltones enthält. Ferner kommen zwischen einem Klang und einer Gabel, die ein um wenige Schwingungen verschiedenes Multiplum seiner Schwingungszahl besitzt, Schwebungen nur mit dem in dem Klang enthaltenen Oberton, nicht aber mit dem Grundton zu Stande. Mit Anwendung dieser Sätze kann er bei den meisten Gabeln Obertöne nachweisen. Eine Königsche Gabel (zirka 64 Schwingungen) enthielt alle Teiltöne bis zum zwölften.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stöße rührt von Scheibler[2]) her, nämlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Bestimmung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr praktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stöße sich um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je geringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer liegender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau bestimmte Zahl z. B. vier Stöße gibt. Dies benutzte Scheibler folgendermaßen. Eine Stimmgabel gibt z. B. a_1 an; er stellt dann eine Stimmgabel her, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der a_1 Gabel genau vier Stöße in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf a_1 zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt, daß sie mit derselben vier Stöße gibt. Der Ton der Saite ist dann genau das eingestrichene a_1.

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte Scheibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den Ton einer a_1 Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Teile geteilt. Der eine Steg der Saite war verschiebbar, so daß die Saite verlängert oder verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit dem der Gabel Stöße. Scheibler bestimmte nun mit größter Genauigkeit, um wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden mußte, damit sie mit der Gabel genau vier Stöße in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der Steg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

Da die Anzahl der Stöße gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der a_1 Saite mit x bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite $x - 4$, der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten $x + 4$. Ist die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um a länger, bis zur hohern um b kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

und

1) C. *Stumpf*, Wiedem. Ann. 57 p. 660. 1896.
2) *Röber* in Doves Repertorium. 3. Poggend. Ann. 32. 1834.

die Zahl der von zwei Tönen gegebenen Stöße innerhalb der ganzen Skala der Tonleiter bestimmte, gelangt in bezug auf die Stöße zu einem etwas andern Resultat, er glaubt, daß nicht nur Stöße entstehen, welche gleich der Differenz der Schwingungszahl der Töne sind, sondern daß, wenn man sich einem harmonischen Intervall nähert, auch Stöße auftreten, gerade als wenn der Grundton von dem betreffenden Obertone begleitet wäre. Gehen wir also von einem Tone aus, der etwa 64 Schwingungen macht, $C = c_{-1}$, und nehmen wir eine zweite Gabel, deren Töne wir durch Laufgewichte, die an den Zinken verschiebbar sind, allmählich bis zur doppelten Schwingungszahl erhöhen können, so hört man zunächst die Stöße gleich der Differenz der Schwingungszahl, die bis zu 10, entsprechend 74 Schwingungen der zweiten Gabel, einzeln hörbar sind. Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe der zweiten Gabel hört man die Stöße als Rollen. Nähert sich die zweite Gabel der Quint, so geht nach Königs Bezeichnung das Rollen in ein verworrenes Rasseln über, wie wenn zu den bisher gehörten Stößen auch solche mit der Oktave des Grundtones hinzukämen. Geht man über die Quint hinaus, so dauert dieses Rasseln zunächst fort, zwischen der Sext und Septime geht dasselbe wieder in Rollen über, und bei der Septime, die 120 Schwingungen entspricht, hört man wieder einzeln 8 Stöße, also die Zahl der Stöße, welche der Differenz der Schwingungen mit der Oktave des andern Stimmgabeltones entsprechen. Nähert sich der Ton der Oktave, so nimmt dem entsprechend die Zahl der Stöße ab, bis sie bei der Oktave verschwinden. König nimmt somit an, daß nicht nur zwei dem Einklange nahe Töne Stöße geben, die der Differenz ihrer Schwingungen entsprechen, sondern auch Töne, die nahe im Verhältnisse 1 : 2, ebenso auch 1 : 3, 1 : 4 usw. stehen, gerade so, wie wenn der tiefere Ton von den betreffenden Obertönen begleitet wäre.

König ist der Ansicht, und zu demselben Resultate gelangt Voigt[1]), daß sich diese Stöße aus der Zusammensetzung der Schwingungen der beiden Töne ableiten lassen. Auf die Untersuchung von Voigt kommen wir im nächsten Paragraphen noch zurück.

Helmholtz[2]) sieht diese von König als obere bezeichneten Stöße als solche an, die in der Tat mit den betreffenden Obertönen des Grundtones gebildet werden, indem er darauf hinweist, daß bei den kräftigen von König angewandten Schwingungen der Gabeln die Obertöne auftreten müssen. Bei einer Gabel, die 64 Schwingungen in der Sekunde machte, konnte er mit geeigneten Resonatoren die Obertöne bis zum fünften hören, wenn die Gabel stark angeschlagen war; die Zinken machten dann Schwingungen, deren Amplitude 1^{cm} betrug. Bei so großer Breite der Schwingungen eines scharfkantigen Körpers, wie es die Gabelzinken sind, müssen in der umgebenden Luft Wirbelbewegungen entstehen, die erheblich von dem Gesetze der einfachen Schwingungen abweichen, und deshalb in ähnlicher Weise die Obertöne hervorrufen, wie es die schwingenden Zungen tun. Daß das Auftreten der Obertöne durch derartige Störungen der einfachen Bewegungen infolge der großen Amplituden bedingt ist, ergibt sich auch

1) *Voigt*, Wiedem. Ann. **40**. p. 652. 1889.

2) *Helmholtz*, Tonempfindungen. 4. Ausgabe. p. 263. Man sehe dazu *König*. Wiedem. Ann. **12**. p. 335. 1881.

daraus, daß sie bei dem Austönen der Gabel viel früher als der doch auch nur sehr schwach hörbare Grundton der Gabel verschwinden, da bei dem Austönen der Gabel die Schwingungen kleiner und kleiner werden und dann die Luft nur mehr nach ihrer eigenen Periode in Bewegung versetzen.

Auch C. Stumpf[1]) untersucht die Teiltöne von Klängen und findet, daß ein Klang eine Resonanzgabel von multipler Schwingungszahl nur dann zum resonieren bringen kann, wenn er einen Oberton von der Schwingungsdauer des Gabeltones enthält. Ferner kommen zwischen einem Klang und einer Gabel, die ein um wenige Schwingungen verschiedenes Multiplum seiner Schwingungszahl besitzt, Schwebungen nur mit dem in dem Klang enthaltenen Oberton, nicht aber mit dem Grundton zu Stande. Mit Anwendung dieser Sätze kann er bei den meisten Gabeln Obertöne nachweisen. Eine Königsche Gabel (zirka 64 Schwingungen) enthielt alle Teiltöne bis zum zwölften.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stöße rührt von Scheibler[2]) her, nämlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Bestimmung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr praktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stöße sich um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je geringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer liegender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau bestimmte Zahl z. B. vier Stöße gibt. Dies benutzte Scheibler folgendermaßen. Eine Stimmgabel gibt z. B. a_1 an; er stellt dann eine Stimmgabel her, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der a_1 Gabel genau vier Stöße in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf a_1 zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt, daß sie mit derselben vier Stöße gibt. Der Ton der Saite ist dann genau das eingestrichene a_1.

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte Scheibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den Ton einer a_1 Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Teile geteilt. Der eine Steg der Saite war verschiebbar, so daß die Saite verlängert oder verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit dem der Gabel Stöße. Scheibler bestimmte nun mit größter Genauigkeit, um wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden mußte, damit sie mit der Gabel genau vier Stöße in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der Steg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

Da die Anzahl der Stöße gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der a_1 Saite mit x bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite $x - 4$, der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten $x - 4$. Ist die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um a länger, bis zur höhern um b kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

und

1) C. Stumpf, Wiedem. Ann. 57 p. 660. 1896.

2) Röber in Doves Repertorium. 3. Poggend. Ann. 32. 1834.

$$x : x + 4 = 2000 - b : 2000,$$

oder

$$x : 4 = 2000 + a : a$$

und

$$x : 4 = 2000 - b : b.$$

Jede der beiden Gleichungen gibt uns x, so daß wir durch zwei solche Versuche eine Kontrole des aus einem gefundenen Wertes haben.

Bei den Versuchen mit seiner Stimmgabel fand Scheibler $a = 18{,}2$, und daraus

$$x = 443{,}56$$

als Schwingungszahl seiner a_1 Stimmgabel.

Die andere Zählung der absoluten Schwingungszahl geschieht nur durch Beobachtung der Stöße. Ihr Prinzip ist folgendes. Die Anzahl der Stöße gibt uns den Unterschied der Schwingungszahl beider Töne. Kennen wir das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen, so können wir aus beiden, dem Verhältnis und der Differenz der Schwingungszahlen beide berechnen.

Nun geben zwei meßbar verschiedene Töne jedoch keine Stöße, sondern Kombinationstöne. Um daher den Schwingungsunterschied zweier Töne zu erhalten, wandte Scheibler Zwischentöne an. Er stellte eine Reihe von Stimmgabeln her, deren Töne möglichst genau nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt, die chromatische Tonleiter von a gaben. Dann verfertigte er eine Anzahl sogenannter Zwischengabeln, deren Töne zwischen je zweien der chromatischen Tonleiter lagen, deren jede mit der nächst tiefern und der nächst höhern eine meßbare Anzahl von Stößen gab. So z. B. verfertigte er zwei Gabeln, deren erste einen Ton gab etwas höher als a, deren zweite einen Ton gab etwas tiefer als *ais*. Die erste gab mit a in der Minute 272,4 Stöße, die zweite mit der ersten in der Minute 270,8 Stöße und mit der *ais* Gabel 240 Stöße.

Ist demnach die Schwingungszahl von $a = x$, so ist die Schwingungszahl der ersten Zwischengabel $x + 4{,}54$, die der zweiten, welche mit der ersten in der Minute 270,8, in der Sekunde daher 4,52 Stöße gab, gleich $x + 4{,}54 + 4{,}52$ und die der *ais* Gabel $x + 13{,}06$.

In der temperierten Skala ist die Schwingungszahl von *ais*

$$x' = x \cdot \sqrt[12]{2} = x \cdot 1{,}059\,46.$$

Zur Berechnung von x und x' haben wir daher

$$\frac{x'}{x} = 1{,}059\,46,$$

$$x' - x = 13{,}06,$$

$$13{,}06 + x = 1{,}059\,46\,x,$$

$$x = \frac{13{,}06}{0{,}059\,46} = 219{,}6\,.$$

Um aber noch genauere Resultate zu erhalten, schritt Scheibler in dieser Weise durch die ganze Tonleiter fort und bestimmte den Schwingungs-

unterschied zwischen a und a_1. Er fand, wenn wir die Schwingungszahl des Tones a_1 mit x_1 bezeichnen,

$$x_1 - x = 219,6667.$$

Nun ist aber zugleich

$$x_1 = 2x$$

und demnach

$$x = 219,666,$$

$$x_1 = 439,333.$$

Diese Methode, die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, ist zwar etwas mühsam, aber in den Händen eines geschickten Experimentators äußerst genau, da man hier keinerlei störenden Einfluß zu befürchten hat.

Die Beobachtung der Stöße in Verbindung mit derjenigen der Lissajousschen Figuren ist das sicherste Mittel, um die Schwingungszahl einer Stimmgabel, etwa einer Normalstimmgabel, zu bestimmen. Besonders von R. König ist zu diesem Zwecke eine Methode ausgebildet worden.[1]) Eine Stimmgabel von 64 Schwingungen ist mit einer Uhr verbunden, so daß sie mittels des Echappements den Gang derselben reguliert, zugleich aber auch durch dasselbe bei jeder Vibration einen kleinen Anstoß erhält, so daß ihre Schwingungsbewegung dauernd unterhalten wird. Die Schwingungen der Gabel können etwas durch verschiebbare Gewichte reguliert werden. Ist die Zahl 64 genau erreicht, so muß die Uhr genau gehen, was mit einem Chronometer reguliert wird. Die Stimmgabel ist gleichzeitig als Vibrationsmikroskop eingerichtet.

Man stellt nun eine Gabel von 256 Schwingungen dadurch her, daß man mit der ersten als Vibrationsmikroskop und der zweiten die Schwingungsfigur beobachtet und die Schwingungen derselben so reguliert, daß die Schwingungsfigur 1 : 4 vollkommen fest erscheint. Ist das erreicht, und war die erste genau reguliert, so hat die zweite genau 256 Schwingungen.

Man stellt eine dritte Gabel her, welche mit der zweiten in der Sekunde fünf Stöße gibt, die somit 261 Schwingungen in der Sekunde macht, die ebenfalls als Vibrationsmikroskop eingerichtet ist. Beobachtet man nun mit dieser und der Normalgabel die Lissajoussche Figur, so muß die Figur 3 : 5 ganz fest stehen, da $435 = \frac{5}{3} \cdot 261$ ist.

Da man den Gang der Stimmgabeluhr durch lange fortgesetzte Beobachtungen genau kontrolieren kann, da ferner die Beobachtung der Lissajousschen Figuren die Schwingungszahlen mit der größten Genauigkeit vergleicht und da die Zahl der Stöße sich mit großer Sicherheit bestimmen läßt, ist die Methode einer äußerst großen Genauigkeit fähig.[2])

1) *R. König*, Wiedem. Ann. **9**. p. 394. 1880.
2) Man sehe u. a. *Wild*, Bulletin de l'Acad de St. Petersbourg **30** p. 132. 1886.

§ 183.

Kombinationstöne. Wenn man zwei musikalische Töne verschiedener Höhe gleichzeitig und kräftig tönen läßt, so nimmt man, wenn das Intervall derselben nicht zu klein ist, im allgemeinen keine Schwebungen wahr, es tritt dann aber eine andere Einwirkung des gleichzeitigen Tönens, ein neuer Ton, der sogenannte Kombinationston hervor, Töne, welche zuerst von Sorge[1]) beobachtet und später von Tartini allgemeiner bekannt gemacht sind, nach welchem sie auch wohl den Namen Tartinischer Töne führen.

Wie die Zahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahl der sie bildenden Töne ist, so ist auch die Schwingungszahl dieser Kombinationstöne gleich der Differenz in der Schwingungszahl der Töne, aus denen sie hervorgehen. So entsteht z. B. aus Grundton und Quinte als Kombinationston die tiefere Oktave des Grundtones; da die beiden Töne die Schwingungszahlen 2 und 3 haben, so ist ihre Differenz gleich 1, also gleich der halben Schwingungszahl des Grundtones oder die Schwingungszahl der tiefern Oktave. Aus Grundton und Terz, welchen die Schwingungszahlen 4 und 5 entsprechen, bildet sich der Kombinationston 1, also die zweittiefere Oktave des Grundtones, aus Grundton und Quarte, welche dem Verhältnis 3 und 4 entsprechen, die Unterquint der tiefern Oktave, oder die zweittiefere Oktave der Quarte.

Läßt man anstatt zweier einfacher Töne zwei zusammengesetzte Klänge gleichzeitig ertönen, so liefern nicht nur die Grundtöne, sondern auch die harmonischen Obertöne miteinander und mit den Grundtönen Kombinationstöne nach demselben Gesetze. Sind die Schwingungszahlen der Grundtöne r und s, so sind die harmonischen Obertöne $2r$, $3r \ldots 2s$, $3s \ldots$ und das Schema der sich bildenden Kombinationstöne ist folgendes:

$$\begin{array}{rcccl} r & \text{und} & s & \text{geben} & s - r \\ 2r & „ & s & „ & 2r - s \\ 2s & „ & r & „ & 2s - r \\ 2s & „ & 2r & „ & 2s - 2r. \end{array}$$

So geben Grundton und Terz, 4 und 5, mit ihren Obertönen die Kombinationstöne 1, 3, 6, 2 usw., von denen der Ton 3 oft sehr deutlich zu hören ist.

Aber auch bei einfachen Tönen können solche mehrfache Kombinationstöne auftreten, gerade als wenn die entstehenden Kombinationstöne miteinander und den primären Tönen wieder Kombinationstöne lieferten. Folgendes Schema stellt die so merklichen Töne dar.

Ursprüngliche Töne	Kombinationstöne
r, s	$s - r$ erster
$s - r, r$	$2r - s$ zweiter
$2r - s, s$	$2s - 2r$ dritter
$2r - s, s - r$	$3r - 2s$ vierter usf.

1) *Sorge.* Man sehe *Helmholtz,* Tonempfindungen. p. 228.

$s - r$ und s sowie $2r - s$ und r geben keine neuen Töne, sondern die schon vorhandenen r und $s - r$.

Die Kombinationstöne lassen sich am besten beobachten, wenn die komponierenden Töne ein und dieselbe Luftmasse in heftige Erschütterung versetzen, deshalb ganz besonders, wenn man eine mit mehreren Löcherreihen versehene Sirene auf einen Windkasten setzt und gleichzeitig zwei Löcherreihen anbläst.

Man hört nur einen Ton, wenn man eine Löcherreihe anbläst; sobald man die zweite, wie das bei der mit einem Durakkord versehenen Doveschen Sirene sehr leicht geht, öffnet, hört man außer dem zweiten Tone noch eine Reihe von Kombinationstönen.

Ebenso erhält man die Kombinationstöne mit der Physharmonika oder zwei auf derselben Windlade stehenden Zungenpfeifen sehr deutlich; auch mit der Geige sind sie sehr gut zu erhalten.

Außer den bisher besprochenen hat Helmholtz[1]) noch eine zweite Klasse von Kombinationstönen entdeckt, welche er Summationstöne nennt, und deren Tonhöhe dadurch gegeben ist, daß die Schwingungszahl stets gleich ist der Summe der Schwingungen der sie bildenden Töne. Grundton und Quint liefern so die Terz der folgenden Oktave $2 + 3 = 5$, Grundton und große Terz $4 + 5 = 9$ die Sekunde der höhern Oktave, Grundton und Sexte die Quarte der höhern Oktave. Die Bedingung, daß man die Summationstöne kräftig hört, ist dieselbe, welche die erste Art, die Helmholtz Differenztöne nennt, kräftig hören läßt, beide Töne müssen dieselbe Luftmasse in Bewegung setzen; man hört sie deshalb mit der mehrstimmigen Sirene oder mit Orgelpfeifen am besten, immer aber sind die Summationstöne schwächer als die Differenztöne. Ihre Wahrnehmung ist deshalb immer eine schwierige, trotzdem sie zu den sie bildenden Tönen und Differenztönen in einem unharmonischen Verhältnisse stehen[2])

Die Kombinationstöne sah man früher als rein subjektive Töne an, welche aus den Schwebungen, wenn sie hinreichende Schnelligkeit haben, im Ohre sich bilden, man glaubte, wenn die Stöße mit hinreichender Schnelligkeit erfolgen, daß sie dann im Ohre als Ton empfunden werden. Helmholtz hat jedoch darauf aufmerksam gemacht, daß diese Theorie unrichtig sei. Zunächst widerspricht dieser Auffassung die feststehende Erfahrung, daß das Ohr jedes Tongemisch in seine einfachen Schwingungen zerlegt; wenn deshalb außerhalb des Ohres die Schwingungen nur nach der Periode der komponierenden Töne erfolgen, so nimmt das Ohr nur diese Schwingungen, nur diese Töne wahr, und das Ohr kann trotz Maximis und Minimis aus diesen Schwingungen keinen neuen Ton bilden.

Weiter kann man die objektive Existenz der Kombinationstöne außerhalb des Ohres zum Teil direkt nachweisen, denn man kann dieselben bei der Sirene oder den Orgelpfeifen durch für sie abgestimmte Resonatoren verstärken. Wie wir aber früher hervorgehoben haben, wird die Luft eines Resonators nur in Schwingungen versetzt, wenn dem Eigenton des Resonators entsprechende einfache Schwingungen in denselben eindringen. Ebenso kann man mit einer Quinckeschen Interferenzröhre den Nachweis liefern,

---

1) *Helmholtz*, Poggend. Ann. **99**. 1856

2) Man sehe *Preyer*, Wiedem. Ann. **38**. p. 131. 1888.

daß die Kombinationstöne von Orgelpfeifen oder einer Physharmonika objektive Existenz haben.[1]) Stimmt man eine solche Röhre auf einen der beiden Töne ab, so tritt der Kombinationston auch dann deutlich auf, obwohl der eine der beiden Töne gar nicht zum Ohre dringen kann.

In andern Fällen, und besonders wenn man Stimmgabeln benutzt, kann man die objektive Existenz nicht so unmittelbar erkennen, und für diese ist König[2]) der Ansicht, daß sie aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Stößen entstehen; er nennt sie deshalb Stoßtöne, untere Stoßtöne, welche der Differenz $n-m$, und obere Stoßtöne, welche der Differenz $2m-n$ entsprechen usf. König glaubt, daß unser Ohr die Fähigkeit besitze regelmäßig wiederkehrende Impulse, deren Intensität periodisch wechselt, als Ton zu empfinden, dessen Höhe derjenigen des einfachen Tones gleicher Periode entspricht.

Voigt schließt sich dieser Ansicht von König an[3]) und gelangt bei der Untersuchung der Zusammensetzung einfacher Schwingungen zu dem Resultate, daß in der Tat unter den Umständen, unter denen König experimentierte, sich Maxima und Minima ergeben, welche den Königschen Stoßtönen, sowohl den untern als den obern, entsprechen. Die Bedingung ist die, daß die lebendige Kraft der schwingenden Bewegung des obern Tones nicht groß ist im Vergleich zur lebendigen Kraft der Bewegung des tiefern Tones.

Daß die Auffassung, in dem Falle bilden sich die Töne aus den Stößen, unrichtig ist, geht ohne Zweifel aus den neuern Beobachtungen von Preyer[4]) hervor. Schon Helmholtz hatte darauf hingewiesen, daß, wenn man bei zwei Stimmgabeltönen Kombinationstöne erhalte, diese sich am Trommelfelle bilden müßten, welches der Periode der Kombinationstöne entsprechende Schwingungen vollführe. Das ergibt sich in der Tat aus den Beobachtungen Preyers mit aller Sicherheit. Preyer fand zunächst, daß ein junger Mann, der an beiden Ohren kein Trommelfell hatte, der aber sämtliche Töne von c_{-1} bis a_8 sicher erkannte, keine Kombinationstöne hörte. Schwebungen konnte er wahrnehmen, so lange sie nicht zu zahlreich waren, so lange also wohl die sie erzeugenden Töne nicht zu weit auseinander lagen. Weitere Beobachtungen machte Preyer an solchen, welche größere oder kleinere Defekte an dem Trommelfell des einen Ohres hatten, während das andere Ohr gesund war. Es ergab sich für alle Defekte, bei denen die Luft von der Mundhöhle aus durch das Ohr hindurchströmen konnte, daß bei Verschluß des gesunden Ohres keine Kombinationstöne gehört wurden, das gesunde Ohr nahm jedesmal den ersten Differenzton wahr. Dabei handelt es sich, wie Preyer ausdrücklich hervorhebt, um ganz reine Fälle, wobei die beiden primären Töne auch durch das Ohr mit defektem Trommelfell deutlich gehört wurden.

Als in die Ohren derjenigen, welche mit perforiertem Trommelfell den Differenzton nicht hören konnten, einige Tropfen Wasser geträufelt wurden,

1) *Quincke,* Poggend. Ann. **128**. p. 186. 1866.
2) *König,* Poggend. Ann. **157**. p. 177. 1876; Wiedem. Ann. **39**. p. 395. 1889.
3) *Voigt,* Wiedem. Ann. **40**. p. 652. 1889.
4) *Preyer,* Wiedem. Ann. **38**. p. 131. 1888.

konnten die betreffenden den Kombinationston hören. Es genügte also der Ersatz des fehlenden Trommelfellstückes durch eine dünne Wasserscheibe, um das Zustandekommen des Differenztones zu ermöglichen.

Dadurch ist es also erwiesen, daß die Kombinationstöne nur wahrgenommen werden, wenn ihre Schwingungen außerhalb des Nervenapparates des Ohres existieren, daß das Ohr aus den Schwebungen der einzelnen Töne die Kombinationstöne nicht bildet.

Helmholtz[1]) hat deshalb eine neue Theorie der Kombinationstöne gegeben, indem er annimmt, daß bei dem Zusammenwirken der Schallwellen das einfache Interferenzgesetz keine Gültigkeit mehr hat. Das einfache Interferenzgesetz sprachen wir dahin aus (§ 130), daß bei dem Zusammentreffen mehrerer Schwingungen die resultierende Bewegung einfach gleich der Summe der Teilbewegungen sei. Diesem Gesetze liegt aber die Voraussetzung zu Grunde, daß auch für die resultierende Bewegung der Satz seine Gültigkeit bewahre, daß in jedem Momente die Kraft, mit welcher das schwingende Teilchen gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, dem Abstande des Teilchens von der Gleichgewichtslage proportional ist, daß also die Gleichung auch hier besteht

$$\varphi = -ky,$$

wenn y den Abstand des Teilchens von der Gleichgewichtslage bedeutet. Dieser Satz gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Werden die Amplituden der Schwingungen groß, so dürfen wir diese Voraussetzung nicht mehr machen, dann hängt der Wert von φ nicht nur von der ersten, sondern auch von höhern Potenzen von y ab. Helmholtz nimmt nun an, daß bei dem Zusammenwirken zweier Töne die Amplituden der Schwingungen, sei es der Luft, sei es nur des Trommelfells, eine solche Größe erhalten, daß auch die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluß auf die bewegenden Kräfte erhalten, und weist nach, daß dann neue Systeme einfacher Schwingungen entstehen müssen, deren Schwingungsdauer derjenigen der Kombinationstöne, und zwar sowohl der Differenztöne als der Summationstöne entspricht.

Bezeichnen wir die Masse eines beweglichen Punktes mit m, so wird die Kraft, wenn er sich im Abstande y von der Gleichgewichtslage befindet, die ihn gegen dieselbe zurückzieht, durch

$$-m\varphi = ay + by^2$$

dargestellt; wirken gleichzeitig zwei schwingende Bewegungen auf den Punkt ein, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} = \alpha \sin(pt)$$

$$y' = \beta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} + \tau\right) = \beta \sin(qt + c),$$

so sind die Kräfte, welche infolgedessen auf den betrachteten Punkt zur Zeit t wirken, nach § 128

1) *Helmholtz*, Poggend. Ann. 99. p. 532. 1856.

$$- m p^2 \alpha \sin(pt) - m q^2 \beta \sin(qt + c);$$

wir erhalten demnach für die den Punkt zur Zeit t gegen die Gleichgewichtslage treibende Kraft, wenn wir seinen Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit t mit y bezeichnen,

$$- m \frac{d^2 y}{dt^2} = ay + by^2 + f \sin(pt) + g \sin(qt + c),$$

wenn wir wie früher für $\varphi = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ einsetzen und die Koeffizienten der beiden letzten Glieder mit f und g bezeichnen.

Die Integralrechnung leitet hieraus folgende Beziehung zwischen y und t ab:

$$y = A \sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}} + h\right) + u \sin(pt) + v \sin(qt + c) + w \cos(2pt)$$
$$+ i \cos 2(qt + c) + k \cos[(p - q)t - c] + l \cos[(p + q)t + c] \ldots$$

und jedes dieser Glieder gibt für sich eine eigene schwingende Bewegung, deren Amplituden A, u, v, w, i, k, l in bestimmter Weise von den Größen a, b, f, g, p, q abhängig sind. Das erste Glied gibt diejenige Bewegung, welche der Punkt annimmt, wenn er einmal aus der Gleichgewichtslage gebracht sich selbst überlassen wird; seine Schwingungsdauer ist gegeben (§ 126) durch

$$\sqrt{\frac{a}{m}} = \frac{2\pi}{T}; \qquad \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}}.$$

das zweite und dritte Glied die ursprüngliche Bewegung, das vierte und fünfte Bewegungen von doppelter Schnelligkeit, also die Oktaven der ursprünglichen Töne, das sechste den Differenzton und das siebente den Summationston. Denn die Schwingungszahl des vorletzten Gliedes ist, da

$$p - q = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right) = 2\pi(N - N_1),$$

gleich der Differenz der Schwingungen der ursprünglichen Töne. Ebenso ist die Schwingungszahl des letzten Gliedes gleich $N + N_1$.

Außer den hingeschriebenen Gliedern liefert die ursprüngliche Gleichung noch weitere, deren Schwingungszahlen höheren harmonischen Tönen und dem zweiten, dritten usw. Kombinationstone entsprechen. Es genüge indes, soweit die Resultate des Helmholtzschen Rechnung angedeutet zu haben, deren Entwicklung die uns hier gestatteten mathematischen Hilfsmittel weit überschreiten würde.

Die Theorie von Helmholtz erklärt auch unmittelbar, weshalb die Kombinationstöne bei der Sirene so stark werden, da dort, wenn die Luft gleichzeitig durch zwei Löcherreihen entweicht, die Schwingungsamplitude wegen des Herausstürzens einer großen Luftmasse ins Freie eine sehr große werden muß. Werden die Töne anders, etwa durch Stimmgabeln erzeugt, so bilden sich diese Schwingungen erst am Trommelfell, in welchem sich dann Schwingungen finden, welche der Periode der Kombinationstöne entsprechen.

§ 184.

Ursachen der Konsonanz und Dissonanz. In § 159 haben wir das aus der Erfahrung abgeleitete Gesetz mitgeteilt, daß in der Musik die Intervalle, welche durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben sind, konsonierend seien, daß zwei von diesen Tönen gleichzeitig angegeben auf das Ohr einen wohltuenden Eindruck machen, während andere Töne, wie 8, 9 oder 15, 16 oder 1 und $\frac{15}{8}$ usf. zusammen angegeben dissonant sind. Über den Grund der Konsonanz gerade jener Intervalle und der Dissonanz der übrigen konnten wir damals keine andere Angabe machen. Erst die Theorie von Helmholtz über die musikalischen Klänge in Verbindung mit den in den beiden letzten Paragraphen gemachten Erfahrungen über die Schwebungen und Kombinationstöne macht es möglich zu erkennen, weshalb jene einfachen Intervalle Konsonanzen liefern, während die übrigen Intervalle dissonant sind.[1])

Die Grundlage der Helmholtzschen Theorie der Konsonanz und Dissonanz ist der Satz, daß eine Klangmasse nur dann auf unser Ohr einen angenehmen Eindruck machen kann, wenn sie gleichmäßig abfließt, wenn die Töne nebeneinander bestehen ohne sich zu stören; daß dagegen eine Klangmasse einen unangenehmen Eindruck auf das Ohr macht, daß sie dissonant ist, wenn dieselbe aus einzelnen Stößen besteht, wenn es ein durch Schwebungen intermittierender Klang ist. Die Schwebungen können dabei so rasch erfolgen, daß wir uns der einzelnen nicht deutlich bewußt werden, daß wir sie nicht zählen können. Helmholtz vergleicht, um diesen Satz zu begründen, sehr treffend die Tonempfindungen mit den Lichtempfindungen, die ganz ähnliches bieten. Keine Beleuchtung macht auf das Auge einen unangenehmern Eindruck als eine flackernde, bei welcher in rascher Folge der Lichtreiz stärker und schwächer wird. Ein knarrender, intermittierender Ton ist nun für die Gehörnerven ganz dasselbe, was ein flackerndes Licht für die Gesichtsnerven ist; es wird dadurch eine viel intensivere und unangenehmere Reizung des Organes bewirkt wie durch einen gleichmäßigen dauernden Ton.

Früher glaubte man, daß man die Schwebungen als solche nur vernehme, wenn sie langsam erfolgen, daß sie aber bei rascher Folge sich zu dem ersten Differenzton zusammensetzen; die Unrichtigkeit dieser Ansicht haben wir vorhin nachgewiesen; Helmholtz gibt aber außerdem eine Beobachtungsmethode an, durch die man sich überzeugen kann, daß man die Schwebungen noch deutlich wahrnimmt, wenn sie die Zahl 30 übersteigen. Man braucht nur mit zwei auf a_1 abgestimmten Gabeln oder gedeckten Orgelpfeifen durch Verstimmung der einen Schwebungen hervorzubringen, und die Verstimmung ganz allmählich zu verstärken. Anfänglich, wenn in der Sekunde nur 4 bis 6 Schwebungen entstehen, kann man sie einzeln auffassen und zählen; wird die Verstimmung größer und größer, etwa bis zu einem Halbton, wo die Zahl der Schwebungen etwa 30 beträgt, so gelingt das nicht mehr. Aber wenn man so eine allmähliche Steigerung der Zahl der Stöße hervorbringt, so erkennt man deutlich, daß der sinnliche Eindruck derjenige einzelner Stöße ist, und erkennt weiter auch, daß eben

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. 1. Ausgabe. p. 273 ff. 1863

dieser intermittierende Eindruck es ist, welcher das Unangenehme der Dissonanz bewirkt.

Wenn man die Zahl der Stöße durch Erweiterung des Intervalls vergrößert, durch Übergang zu einem ganzen Ton auf 60 oder zu einer kleinen Terz $a_1 c_2$ auf 88 bringt, so wird der Eindruck des intermittierenden Klanges immer schwächer, und bei der kleinen Terz ist kaum eine Spur desselben mehr wahrzunehmen, sie macht schon den Eindruck eines gleichmäßig abfließenden Tones. Man könnte deshalb glauben, daß wie bei dem Auge ein sich rasch wiederholendes Aufblitzen eines Lichtes den Eindruck kontinuierlicher Beleuchtung macht, so auch bei dem Ohre ein etwa 90mal in der Sekunde wiederkehrender Tonstoß den Eindruck eines kontinuierlichen Tones mache. Daß indes dem nicht so ist, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die Zahl der Stöße anstatt durch Erweiterung des Intervalls durch Verlegung des engern Intervalls in höhere Gegenden der Skala vergrößert. Der Halbton $h_1 c_2$ gibt 33 Schwebungen, die deutlich als intermittierende Stöße erkannt werden, gibt man unmittelbar nachher $h_2 c_3$ mit 66, $h_3 c_4$ mit 132 Stößen an, so erkennt man, daß der sinnliche Eindruck wesentlich derselbe ist. Die Wahrnehmbarkeit der Schwebungen hängt also nicht allein von ihrer Anzahl ab, sondern auch davon, daß die sie erzeugenden Intervalle hinreichend nahe liegen. Den Grund für den letztern Umstand sieht Helmholtz darin, daß Schwebungen im Ohre nur dann bestehen können, wenn die Töne der Skala nahe genug liegen, um dieselben Nervenanhängsel, dieselben Cortischen Fasern in Mitschwingungen zu versetzen. Wenn sich die beiden angegebenen Töne zu weit voneinander entfernen, werden die Schwingungen der von beiden gemeinsam erregten Fasern zu schwach, als daß man deren Schwebungen noch wahrnehmen könnte.

Die Wahrnehmbarkeit der Stöße hängt also von der Zahl derselben und der Weite des Intervalls ab; ist das Intervall enge, so nimmt man eine große Zahl wahr, ist es weiter, so kommt nur eine weit geringere Zahl zur Empfindung, und bei weiten Intervallen wie Quart oder Quint kommen sie gar nicht mehr zu Wahrnehmung.

Aus diesen Sätzen von Helmholtz ergibt sich zunächst, daß alle engen Intervalle, große und kleine Sekunden innerhalb des in der Musik gebrauchten Tonsystems dissonierend sein müssen, sie erklären, weshalb die Dissonanzen in den mittlern Tonlagen am schärfsten sind, und weshalb in den tiefern Tonlagen, in der großen und tiefern Hälfte der kleinen Oktave die kleinen Terzen schon merklich rauh klingen, da sie in diesen zwischen 15 und 30 Schwebungen geben.

Aus der Helmholtzschen Theorie des Klanges ergibt sich dann aber ebenso, weshalb die große und kleine Septime und die verstimmten konsonierenden Intervalle der musikalischen Klänge dissonant sind. Wie wir nämlich sahen, sind die Klänge nicht einfache Töne, sondern Akkorde, die aus dem Grundton und seinen harmonischen Obertönen aufgebaut sind. Gerade so nun wie die einfachen Töne Schwebungen hervorbringen, so tun es auch die Obertöne der Klänge miteinander und den Grundtönen und außerdem können auch die Kombinationstöne Schwebungen veranlassen. Wenn deshalb zwei Klänge, welche, wie fast alle in der Musik gebrauchten Klänge, deutliche Obertöne haben, unter diesen solche besitzen, welche hin-

reichend nahe zusammenliegen, so werden diese Schwebungen liefern und deshalb die beiden Klänge ein dissonantes Intervall bilden.

Man erkennt darnach sofort, daß die kleine oder große Septime eine Dissonanz sein muß, da der erste Oberton des Grundtones mit den Septimen das Intervall eines Halbtones oder eines ganzen Tones bildet. Die große Septime ist $1 : \frac{15}{8}$, der erste Oberton des Grundtones ist 2 oder $\frac{16}{8}$, man sieht, das Verhältnis dieses zur Septime ist $\frac{16}{15}$, ein Halbton. Dasselbe gilt auch für die große und kleine None.

Dem entgegen erkennt man sofort, daß die Oktave eine vollkommene Konsonanz sein muß, da die Obertöne der Oktave auch alle Obertöne des Grundtones sind, und deshalb keine andern Schwebungen auftreten können wie in dem Klange des Grundtones selbst, Schwebungen, die erst sehr hohen Obertönen entsprechen, welche deshalb so schwach sind, daß sie nicht mehr gehört werden.

Die auf die Oktave folgende ebenfalls noch als vollkommen zu bezeichnende Konsonanz ist die Quint, deren Schwingungsverhältnis 2 : 3 ist. Die in diesen beiden Klängen enthaltenen Obertöne sind

Grundton	2,	4,	6,	8,	10,	12
Quinte		3	6	9		12.

Man sieht, der erste Oberton der Quint fällt mit dem zweiten der Oktave zusammen und der dritte Oberton der Quint steht zu dem vierten und fünften Oberton der Oktave im Verhältnis eines ganzen Tones.

Eben weil es die tiefsten Obertöne sind, welche in diesen Intervallen zusammenfallen, in der Oktave der Grundton des zweiten Klanges mit dem ersten Oberton des ersten, in der Quint der erste Oberton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, in der Duodezime 1 : 3 der Grundton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, deshalb sind die Konsonanzen scharf als solche charakterisiert, denn die geringste Unreinheit des einen der Töne bringt sofort Schwebungen hervor, da gleichzeitig mit dem Grundtone die Obertöne verstimmt werden. Deshalb hört man die Unreinheit der Stimmung bei keinem andern Intervall so deutlich als bei der Oktave und bei den andern beiden ebengenannten Intervallen. Da man nun dies gleichzeitig als das Charakteristische der Konsonanzen ansehen kann, so kann man gleichzeitig ein Intervall als um so konsonanter bezeichnen, je näher die zusammenfallenden Obertöne bei dem Grundtone der Klänge liegen.

Nach diesem Merkmal ist die Reihe der Konsonanzen weiter, Quarte, deren dritter Oberton mit dem vierten des Grundtones, große Sext, deren dritter Oberton mit dem fünften des Grundtones zusammenfällt. Bei beiden Intervallen wird der zweite Oberton des zweiten Klanges von dem dritten des Grundtones gestört.

Die letzten in der Reihe der konsonanten Intervalle sind große und kleine Terz, bei denen der vierte des zweiten mit dem fünften Oberton zusammenfällt bezw. bei der kleinen Terz der sechste mit dem fünften. Bei der großen Terz steht dagegen der dritte mit dem vierten Oberton des Grundtones im Verhältnis $\frac{16}{15}$, also einer scharfen Dissonanz. Bei der kleinen Terz stören sich schon die Grundklänge, dann der dritte der Terz mit dem vierten des Grundtones, die im Verhältnis $\frac{10}{9}$ stehen und der vierte der Terz mit dem fünften des Grundtones, die im Verhältnis $\frac{25}{24}$ stehen.

Der Raum gestattet uns nicht, hier weiter auf die interessanten Ausführungen von Helmholtz einzugehen, welche die eben in kurzem Umrisse angedeutete Theorie auch auf die Klassifikation der Konsonanzen in den verschiedenen Klangfarben und die der Akkorde nach ihrem Wohlklange liefern. Nur sei schließlich die Bemerkung hinzugefügt, daß Helmholtz außer den Schwebungen der Obertöne auch jene der Kombinationstöne mit in Betracht zieht, welche bei einfachen Tönen das allein Bedingende der Dissonanz weiterer Intervalle bilden. Die Schwebungen der Kombinationstöne treten aber nie so stark hervor als jene der Obertöne, und deshalb sind die Intervalle einfacher Töne auch durchaus nicht so scharf charakterisiert als die zusammengesetzten Klänge.

Sachregister.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

A.

Absorptiometer 636.
Absorption von Gasen in festen Körpern 628.
von Gasen in Flüssigkeiten 634.
— von Gasgemischen 641.
Absorptionsgesetz, Henrysches 634.
Absorptionskoeffizient der Gase 635.
Achse, freie 160
Adhäsion fester Körper 309.
— scheinbare 310.
— flüssiger Körper an festen 376.
Adsorption der Gase 630.
Äquivalent, endosmotisches 480.
Aggregatzustände 213.
Akkorde, einfache 872, mehrfache 873, konsonierende, dissonierende 872.
Alkoholometer 374.
Allotropie 206.
Amplitude der Pendelbewegung 134. Korrektion wegen derselben 143.
— schwingender Bewegungen 716.
Aneroidbarometer 538.
Antrieb der Kraft 79.
Anziehung, allgemeine, Kepplers Gesetze 165.
allgemeine Identität der Schwere mit derselben 171
— der Masseneinheiten 193.
— einer Kugel auf äußere Massen 173.
Anziehungsgesetz, Entwicklung desselben 167.
— Fernewirkung 170.
Anziehungskonstante 193.
Aräometer, Nicholsonsches 366.
— nach Beaumé 375.
Arbeit der Kraft 81.
Prinzip der Erhaltung derselben 82.
Archimedisches Prinzip 360.
Atemritze 950.
Atmosphäre 524
· Zusammensetzung derselben 524.
— Archimedisches Prinzip in derselben 525.
Atmosphäre, Druck einer 542.
Atom, Definition 208.
Atomgewichte, Tabelle 212
Atomistische Theorie 203
Auflösung 466.
Auftrieb bei Flüssigkeiten 350
Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern und Flüssigkeiten 449
Ausfluß der Flüssigkeiten durch Öffnung in dünner Wand 489.
— durch kapillare Röhren 505.
der Gase 641.
— der Gase durch kapillare Röhren 655
Ausflußmenge der Flüssigkeiten 495.

B.

Barometer 528.
Schwankung desselben 539.
Bäuche an Wasserstrahlen 519
Beschleunigung 49
beim freien Fall 58 144 151 153.
Bewegung 47.
gleichförmige 47.
ungleichförmige 48
gleichmäßig beschleunigte 49 62. 63. 66
— durch konstante Kräfte 55
durch inkonstante Kräfte 82
— geworfener Körper 67
— eines Körpers, allgemeine Gleichungen 114, Gleichungen von Lagrange 116
drehende 84.
infolge von Kapillarwirkung 454
schwingende 715
Gesetze derselben 716.
— Einfluß derselben auf die Tonhöhe 1014.
Bewegungsgröße 79
Biegungselastizität 262
Biegungsfestigkeit 295.
Biegungspfeil 263.
— winkel 265.

Bifilare Aufhängung 659.
Blasinstrumente 946.
Blechblasinstrumente 948.
Bodendruck bei Flüssigkeiten 348.
Boyle-Mariottesches Gesetz 542.
— Abweichung der Gase von demselben bei sehr kleinem Druck 556, bei hohem Druck 563.
— Ableitung aus der kinetischen Gastheorie 581.
Brechung der Wellen 772.

C.

Chemie 1.
Chladnis Klangfiguren 805.
Contractio venae 496.

D.

Dekrement, logarithmisches 317. 721.
Dezimeter 11.
Dichtigkeit 132.
— der Erde 182. 186. 187. 188. 190.
— fester Körper 365.
— flüssiger Körper 368.
Differentiation 31, allgemeine Sätze 32.
— zusammengesetzter Funktionen 36.
— von Funktionen mit mehreren Veränderlichen 37.
Differentiale der wichtigsten Funktionen 33.
Differentialquotient, zweiter 39.
Differenztöne 1028.
Diffusion der Flüssigkeiten 466.
— der Gase 669.
— der Gase, Ableitung derselben aus der kinetischen Gastheorie 678.
— der Gase durch poröse Diaphragmen 694.
— der Flüssigkeiten, kinetische Theorie 708.
Diffusionsgeschwindigkeit 470.
Diffusionskoeffizient der Flüssigkeiten 471.
— der Gase 685.
Dimension der abgeleiteten Maße 76.
Dissonanz 872, Theorie derselben 1033.
Dopplersches Prinzip 1014.
Drehungen, Zusammensetzung verschieden gerichteter 90.
Drehungsmoment 85.
Dreiklang, Durdreiklang, Molldreiklang 874.
Druck, hydrostatischer 347.
— hydraulischer, ausströmender Flüssigkeiten 494.
— hydraulischer, ausströmender Gase 648.
— osmotischer 482.

E.

Ebbe 193.
Ebene, schiefe 63.
Echo 996, mehrfaches 996.
Einfallsebene 772.
Einfallslot 772.
Einfallswinkel 772.
Eisenvioline 911.
Elastizität fester Körper 215.
— durch Zug 218.
— durch Torsion 251.
— durch Biegung 262.
— der Flüssigkeiten 330.
Elastizitätsgrenze 289.
Elastizitätskoeffizient 221.
— Abhängigkeit von der Temperatur 271.
— seine Dimensionen 221.
— einige Zahlenangaben nach Wertheim 222.
Elastizitätsmodul 221.
Elastische Nachwirkung 277.
Endosmose 478.
Erde, Dichtigkeit derselben 182.
Erhaltung der Arbeit, Prinzip derselben 82.
— der Rotationsebene 159.
— der Pendelebene 162.

F.

Fall der Körper 58.
— im luftleeren Raum 614.
Fallmaschine Atwoods 52.
Fernewirkung 169.
Festigkeit 293, beim Zug 294, bei der Biegung 295, Torsion 296.
— rückwirkende 298.
Flächenmaße 11.
Flammen, empfindliche 944. 945.
Flammenkapseln, Königs 899.
Flüssigkeit 215.
Flüssigkeiten, Konstitution derselben 325.
— gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes 326.
— Kompressibilität 329.
Flüssigkeitswellen 845, Einfluß des Oberflächendruckes auf dieselben 854.
Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 963, in Röhren 968.
— des Schalles, indirekte Messung 976.
— — in festen Körpern 987.
— — in flüssigen Körpern 991.
Fußmaße 11.

G.

g-Werte von Arago und Gauß 58.
g, Bestimmung desselben 143, Methode von Borda 144, Methode von Arago und Biot 144.

g, Werte desselben nach Borda und Biot für Paris; nach Bessel für Königsberg 151.
— Bestimmung desselben mittels des Reversionspendels 152.
— Verschiedenheit in verschiedenen Breiten 180.
Gase, ihre allgemeine Beschaffenheit 522.
— mit den Flüssigkeiten gemeinsame Eigenschaften 523.
— Schwere derselben 524.
— Boyle-Mariottesches Gesetz 542.
— kinetische Theorie derselben 568.
— ihre Verflüssigung 628.
— Ausströmen derselben 641.
— Ausströmungsmenge 645.
— Reibungskoeffizient 654; Messung desselben mit Hilfe des Durchflusses durch kapillare Röhren 655.
— Reibungskoeffizient, seine Bestimmung nach der Methode von Coulomb und Maxwell 657.
— Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten vom Drucke 662.
— Reibungskoeffizienten, Abhängigkeit von der Temperatur 664, Korrektion von Sutherland 667.
Gasmoleküle, mittlere Wegelänge 570.
— ihre Wirkungssphäre 570.
— ihre Geschwindigkeit 588.
— absolute Werte der mittleren Wegelängen 689.
— Größe und Zahl derselben; nach van der Waals 691. 692.
— aus der Dichtigkeit von Kohlensäure 693
Gefäßbarometer 528.
— Korrektion wegen der Kapillarität 532
Geräusch 864.
Geschwindigkeit 47.
Geschwindigkeiten, Prinzip der virtuellen 89.
Gesetze, physikalische 5, Ableitung aus Messungen 9.
Gewicht 12
— spezifisches 132, fester Körper, Bestimmung desselben 364, flüssiger Körper, Bestimmung desselben 368, Berücksichtigung der verdrängten Luft 527.
Giesbeckenknorpel 949.
Gleichgewicht eines Punktes, auf den beliebige Kräfte wirken 64.
— eines Systems mit beliebig vielen Kräften 98.
— indifferentes, labiles, stabiles 103.
— von Flüssigkeiten 357.
— schwimmender Körper 363.
Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten 441.
Glocken 811.
Grad (Winkel) 13.
Gramm 12.

H.

Hahn, Babinetscher 609.
— Graßmannscher 611.
Harmonika, chemische 944.
Härte 201.
Hauchbilder 632.
Hebel 86.
Hebelarm 88.
Heberbarometer 533.
Höhenmessungen, barometrische 589.
Hohlmaße 11.
Hörbarkeit von Tönen, Grenze derselben 890. 891.
Holzblasinstrumente 946.
Huyghenssches Prinzip 761.
Hydraulische Presse 354.

I.

Integration 41.
Intensität der Partialtöne von Saiten 908
— des Schalles 866.
Interferenz 734.
— von Wellen, die sich nach entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; stehende Wellen 739
— verschieden gerichteter Schwingungen; elliptischer Schwingungen 742.
— longitudinaler und transversaler Schwingungen 749.
— von Schwingungen verschiedener Wellenlängen; gleichgerichteter Schwingungen 750, verschieden gerichteter 755.
— des Schalles 1017.
— von Wellen ungleicher Länge; Stöße 1022.
Intervalle, musikalische 871.
Isotrop 217.

K.

Kaleidophon 824.
Kapillarröhren; kapillare Oberflächen, Krümmung derselben 391.
Kapillaritätskonstanten, Methoden ihrer Bestimmung 414, dynamische 430. 520. 856.
— Zahlenwerte 431.
— Einfluß der Temperatur 431.
Kathetometer 24.
Kehlkopf 949.
Kehlkopfmuskeln 951
Kilogramm 12.
Kinetische Theorie der Gase 568, der Flüssigkeiten 702.
Klang 864
— Verschiedenheit, Theorie von Ohm 865. 894, von Helmholtz 865. 894, von Seebeck 865. 894.

Klang, Analyse desselben 893.
— Zusammensetzung desselben aus einfachen Tönen 902.
Klänge, longitudinal schwingender Stäbe 905.
— der Saiteninstrumente 908.
— geschlagener Saiten 908
— gestrichener Saiten; Geigenklänge 909.
— des Klaviers 909.
— transversal schwingender Stäbe 910.
— von Stimmgabeln 911.
— von Platten 912.
— gedeckter Pfeifen 914.
— offener Pfeifen 925.
— von Zungenpfeifen 934.
— Verschiedenheit derselben bei den Holzblas- und Blechblasinstrumenten 949.
Klangfiguren, Chladnische 809. 811.
Knoten in Wasserstrahlen 519.
Knotenlinien schwingender Platten 808.
Knotenpunkte in schwingenden Punktreihen 742.
— in schwingenden Stäben 782.
— in schwingenden Saiten 793.
Kohäsion 215, bei Flüssigkeiten 376.
— spezifische 435.
Körper, feste 215, flüssige 215, gasförmige 215.
— schwimmende 368.
Kombinationstöne 1028, objektive Existenz derselben 1030.
Kommunizierende Röhren 353.
Komparator 13.
Kompressibilität der Flüssigkeiten 329.
Kompressionskoeffizient, kubischer 241.
— bei Flüssigkeiten 330.
Kompressionspumpe 624.
Kondensation der Gase 627.
Konsonanten, Bildung derselben 961.
Konsonanz und Dissonanz, ihre Ursachen 1033.
Kontraktion von Flüssigkeitsgemischen 440,
Kraft 50, ihre Richtung 51, ihre Größe 51.
— ihr Maß 71.
— lebendige und Arbeit 80.
Kräftepaar 97.
Kräfteparallelogramm 61.
Kraftwirkung, Fundamentalgesetz 59.

L.

Labialpfeifen 913, gedeckte 914, offene 925.
Lamellen, flüssige 383.
Längsschwingungen, siehe longitudinale.
Libelle 23.
Liter 12.
Lot 12.
Lösung von festen Körpern in Flüssigkeiten 466.
Luftballon 527.
Luftblasen, unter horizontaler Ebene 408.
Luftdruck 524.
— Schwankung und Größe desselben 539.
— Abnahme mit der Höhe 589.
Luftpumpe 604, Hahnluftpumpe 605. 611. Ventilluftpumpe 606.
— Grad der Verdünnung 608.
— Babinets Hahn 609.
— Graßmannscher Hahn 611.
— von Deleuil 613.
— Geryk-Ölluftpumpe 613.
Luftwiderstand 700.

M.

Manometer 594, von Gally-Cazalat 355, von Regnault 597, von Mac Leod 620.
Mariottesches Gesetz 542.
Masse, ihr Maß 71.
Maße, die in der Physik gebräuchlichen 11.
— Dimensionen der abgeleiteten 76.
Maßsystem, absolutes 73.
Materie 1.
— ihre Beschaffenheit 199.
— ihre Teilbarkeit 199.
— Gesetze ihrer Zusammensetzung 200.
— Gesetze der chemischen Zersetzung 205.
— isomere Körper 205.
— allotrope Modifikation 206.
— Definition des Atoms 208.
Metazentrum 364.
Meter 11.
Mikrometerschraube 15.
Milligramm 12.
Millimeter 11.
Minute 13.
Mischung von Flüssigkeiten 466.
Mischungsgewichte 202.
Mittelpunkt paralleler Kräfte 94.
Molekül 203.
Molekularwirkungen in flüssigen und zwischen flüssigen und festen Körpern 376.
— zwischen festen und gasförmigen Körpern 628.
— zwischen flüssigen und gasförmigen Körpern 634.
Molldreiklang 874.
Momente, statische 85.
Monochord 870.
Mosersche Bilder 632.

N.

Nachwirkung, elastische 277.
Naturerscheinung 1.

Naturwissenschaft 1.
Neigebarometer Lord Rayleighs 561.
Niederschlagsmembranen 482.
Niveauänderungen in kapillaren Röhren 393.
Niveauflächen in Flüssigkeiten 347.
Nonius 21.
Normaldruck in der Oberfläche von Flüssigkeiten 377.
Normalstimmgabeln 889.

O.

Oberflächendruck 380.
Oberflächenspannung 379
— an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten 440.
Ohr 1008; äußerer Gehörgang 1008, Paukenhöhle 1008, Ohrtrompete 1008, Tuba eustachii 1008, Trommelfell 1008.
— inneres 1008, Gehörknöchelchen 1009, Hammer, Amboß, Steigbügel 1009, Labyrinth 1009, Mechanismus des Hörens 1010.
— Empfindlichkeit desselben gegen kleine Tonunterschiede 1011.
Oktave 872.
Orgelpfeifen 913, gedeckte 914, offene 925.
Oszillationen siehe Schwingungen

P.

Paradoxon, hydrostatisches von Pascal 348.
Parallelogramm der Kräfte 61.
— der Drehungen 90.
Pauke 912.
Pendel 133.
— Ableitung der Schwingungsdauer 135.
— mathematisches und physisches 139.
— Korrektion wegen d. Amplitude 143.
Pendelgesetze, experimentelle Prüfung 140.
— allgemeine Anwendung 156.
Pendeluhren 155.
Pendelversuch Foucaults 162.
Pfeifentöne 920, Abweichung von der Theorie 920.
— Einfluß der Rohrweite 920.
— mit weichen Wänden 930.
Pfund 12.
Phase der Schwingung 716.
Phonograph 1004.
Physik 1, ihre Aufgabe 2, ihre Methode 2.
Piezometer 331.
Plastizität und Dehnbarkeit fester Körper 291.
Porosität 200.
Presse, hydraulische von Brahma 354.
Prim 872.
Prinzip der Erhaltung der Arbeit 82.
Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion 81.
— der virtuellen Geschwindigkeiten 88.
— Archimedisches 360, bei Gasen 525.
— Huyghenssches der Fortpflanzung der Wellen 761.
Processus vocalis 950.
Punktsystem, homogenes 758, isotropes 759.
— Schwingung desselben 758.
Pyknometer 367.

Q.

Quart 872.
Quartsextakkord 874.
Quecksilberluftpumpe von Geißler 615, von Töpler 617, von Sprengel 620, von Kahlbaum 621, von Gaede 623.
— Grenzen der mit ihr erreichbaren Verdünnung 623
Querkontraktion 229. 232.
— Änderung mit der Temperatur 275.
Quint 872.

R.

Randwinkel 391.
Raum, schädlicher bei Luftpumpen 609.
Reaktionsrad 351.
Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum 526.
Reflexion der Wellen 766.
— des Schalles 995.
Refraktion siehe Brechung
Reibung fester Körper 311, gleitende 311, rollende 311.
— innere fester Körper 312.
— der Flüssigkeiten, äußere 499, innere 501.
— der Flüssigkeiten. Methode des Ausflusses durch kapillare Röhren 502. Methode von Coulomb 508.
— der Gase 649, Theorie derselben 650
Reibungskoeffizient der Flüssigkeiten 501, Abhängigkeit von der Temperatur 514, der Gase 654, seine Bestimmung 655.
Reibungskonstante 501
Resonanz 1001.
Resonatoren 895, mit Flammenkapseln 896.
Reversionspendel 152
Ringknorpel 949
Röhren, kommunizierende 353.
Rotationsapparat von Bohnenberger 160, von Fessel 161.
Rotationsebene, Erhaltung derselben 159.

S.

Sättigungskoeffizient 635.
Saitenschwingungen, transversale 786.

Schall, seine Entstehung durch Schwingungen 862, durch scheinbar kontinuierliche Bewegung 863.
— Qualität desselben 864, Geräusch 864.
— Ton oder Klang 864.
— Ausbreitung desselben in der Luft 963.
— Abnahme der Intensität mit der Entfernung der Schallquelle 963.
— Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben in der Luft 967.
— Reflexion 995.
— Brechung desselben 998.
— Interferenz 1017.
— Summationstöne 1029.
Schallgeschwindigkeit, indirekte Messung derselben 976, mit Orgelpfeifen 976, mit Kundtschen Staubfiguren 978.
— in festen Körpern 987.
— in räumlich ausgedehnten festen Körpern 990.
— in flüssigen Körpern 991.
Schildknorpel 949.
Schwere, Dasein und Richtung 52.
— Abnahme derselben mit der Höhe über dem Meeresniveau 176.
— über einer Hochebene 176.
Schwerpunkt 101.
Schwingende Bewegung eines Punktes 715.
Schwingungen, gedämpfte 720.
— von Punktreihen 722.
— eines räumlich ausgedehnten Systems von Punkten 758.
— fester Körper 776.
— von Stäben, longitudinale 778.
— Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben 778.
— longitudinale, begrenzter Stäbe, an beiden Enden freier 780, an beiden Enden fester 783, an einem Ende fester 785.
— transversale, der Saiten 786.
— gespannter Saiten 791.
— Einfluß der Steifigkeit 797.
— transversale, von Platten 805.
— drehende, von Stäben 814.
— zusammengesetzte 818.
— zusammengesetzte, gespannter Saiten 826. 906.
— Darstellung derselben 829.
— gestrichener Saiten 834.
— geschlagener Saiten 836.
— longitudinale in Flüssigkeiten; Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben 837. 840, in Gasen 841.
— drehende 912.
Schwingungsamplituden, Ableitung nach Fresnel 763.
Schwingungsknoten und Bäuche 518.
Schwingungszahlen longitudinal schwingender Stäbe 780. 906.
— transversal schwingender Stäbe 799.
— des Tones a_1 889.
Seitendruck bei Flüssigkeiten 350.
Sekunde 13.
— akustische 872.
Sekundenpendel 181.
Septime 872.
Sext 872.
Sextakkorde 874.
Sirene 866.
Sphärometer 22.
Sprache, die menschliche 953.
Sprachrohr 997.
Stabilität 104.
Staubfiguren, akustische 812.
Steifigkeit, Einfluß derselben bei Schwingungen von Saiten 797.
Steighöhen, kapillare, in verschiedenen Räumen 397.
— in Röhren 398.
— zwischen Platten 400. 401.
— an vertikalen Wänden 402.
Stereometer 599.
Stimme, die menschliche 949.
Stimmbänder 950, falsche 950.
Stimmgabel 888.
— Schwingungszahl derselben bei verschiedenen Orchestern 888. 889.
Stimmgabeln, Änderung der Schwingungszahl mit der Temperatur 889.
Stimmritze 950.
Stoß der Körper, gerader 303.
— unelastischer 304, elastischer 305, schiefer 307.
— von Zylindern 309.
— und Widerstand der Luft 700.
Stöße bei Tönen 1022.
Strahl, Konstitution des Ausfließenden 515.
Streichinstrumente 906.
Strohfidel 911.
Stunde 13.

T.

Teilbarkeit 199.
Teilmaschine 15.
Temperatur, musikalische 883.
— gleichschwebende 885.
— Kirnbergersche 885.
Terz 872.
Theodolith 29.
Ton 864.
— verschiedene Höhe desselben 864.
Tonbildung im Kehlkopf 951.
Töne, ihre absolute Schwingungszahl 887.
— gedeckter 914, offener Pfeifen 925.
— in teilweise gedeckten Pfeifen 927.
— in kubischen Pfeifen 928.
— durch Schwingungen von Flüssigkeitssäulen 931.

Töne der verschiedenen Stimmen 952.
Tonhöhe schwingender Saiten 907.
Änderung derselben durch relative Bewegung von Ohr und Tonquelle 1014.
Tonleiter 875, Entwicklung derselben 876 880.
Tonstärke 866.
Tonverhältnisse und Intervalle 871.
Toricellis Theorem 489.
Torsionselastizität 251.
Torsionswinkel 254.
Torsionsschwingungen 255.
Torsionskoeffizient, Beziehung zum Elastizitätskoeffizienten 259.
und Starrheit 260.
Torsionsfestigkeit 296.
Trägheit 51.
Trägheitsmomente 104.
eines Kreiszylinders 106.
einer Kugel 108.
allgemeiner Satz 109.
Tropfen auf horizontaler Ebene 405.

U.

Unze 12.

V.

Ventriculus morgagni 950.
Verdünnung durch die Luftpumpe 608.
Verzögerung 49.
Vibrationsmikroskop 832.
Vokale 953.
Volumenometer 599.
Volumeter 371.

W.

Wage 123, Theorie derselben 125.
Prüfung derselben 129.
von Mohr 370.
Wägungen, Methode derselben 129.
Reduktion derselben auf den luftleeren Raum 526.
Wagebarometer 538.
Wasserwellen, Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben 848.
— ihre Entstehung 851.
— Durchkreuzung und Reflexion derselben 858.
Wegelänge, mittlere der Gasmoleküle 570.
Wegelänge der Gasmoleküle, absolute Werte derselben 688.
Wellen, Entstehung derselben 722.
stehende 739.
— Fortpflanzung in nicht homogenen Punktsystemen; Reflexion derselben 766.
Reflexion an dünnern Medien 768, an dichtern Medien 769.
Reflexion, Mittelpunkt der reflektierten Welle 771.
Brechung derselben 772.
longitudinale, in Flüssigkeiten und in Gasen 837.
stehende, in Flüssigkeitszylindern 843.
transversale, in Flüssigkeiten 845.
— Durchkreuzung und Reflexion 858.
Wellenbewegung 715, mathematische Darstellung 726.
Fortpflanzungsgeschwindigkeit 734.
Zusammensetzung mehrerer; Interferenz 734.
Wellenrinne 846.
Wellensirene 904
Widerstand der Luft 700.
Widerstandsgesetz der Luft von Newton 701.
Winkelgeschwindigkeit 84.
Wirbelringe von Helmholtz 209.
Wirkungssphäre der Molekularkräfte 457.
— der Gasmoleküle 570.
Wurfbewegung 67.

Z.

Zentimeter 11.
Zentripetalkraft 110.
Zentrifugalkraft 112.
Zugelastizität 218.
Zugfestigkeit 294.
Zungen, harte 934, weiche 941
Zungenpfeifen 934, aufschlagende 934, durchschlagende 934.
Vergleich der Töne mit den Tönen der isoliert schwingenden Zunge 936.
— Änderung der Tonhöhe durch die Länge der Röhre 937.
— Töne durch Anblasen von außen 939.
Töne durch Anblasen von innen 939.

Namenregister.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

A.

Abegg, Diffusion 476.
Academia del cimento, Kompressibilität der Flüssigkeiten 330.
Adams siehe *Bashfort*.
Aimé, Kompressibilität der Flüssigkeiten 334.
Airy, Dichtigkeit der Erde 190. 198, elliptische Schwingungen 775.
d'Alembert, Definition der Kraft 197.
Amagat, Querkontraktion 239. 240, kubischer Kompressionskoeffizient 241. 249, Abhängigkeit der Elastizität des Glases von der Temperatur 273, Kompressibilität der Flüssigkeiten 336, des Wassers 339, Abhängigkeit der Kompressibilität der Flüssigkeiten von der Temperatur 341, Abhängigkeit vom Druck 342. 343, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 557, Abweichung der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei hohem Druck 566.
Amaury u. *Descamps*, Abhängigkeit der Kompressibilität der Flüssigkeiten vom Druck 342.
Andreeff, Verflüssigung der Gase 628.
Antolik, Methode zur Erregung der Stimmgabeltöne 912.
Appunn, Harmonium mit nahezu reinen Tönen 887, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 891, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.
Arago, Wert von g für Paris 58, Bestimmung von g 144.
— u. *Dulong*, Boyle-Mariottesches Gesetz 546.
— siehe *Humboldt*.
— siehe *Biot*.
Archimedes, Drehungsmomente 197, Hebelgesetz 197, Prinzip 360.
Arrhenius, Diffusion 476, innere Reibung der Flüssigkeiten 514, kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten 708.
Ashton siehe *Ramsay*.
Atwood, Fallmaschine 52.
d'Aubuisson, Ausströmungsmenge der Gase 645.
Auerbach, Härte 302, Zusammensetzung der Vokale 958.
Austin, elastische Nachwirkung 283.

B.

Babo siehe *Warburg*.
Bach, elastische Ausdehnung 227, Elastizitätsgrenze 290, Festigkeit 294. 300.
Baeyer, barometrische Höhenmessungen 594.
Baille siehe *Cornu*.
Baily, Dichtigkeit der Erde 185. 198.
Barret u. *Tyndall*, empfindliche Flammen 945.
Barus, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 666.
Bashforth u. *Adams*, Kapillarität 411.
Battelli, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinem Druck 560.
Bauernfeind, Korrektionen am Theodolith 80.
Baumeister, Torsionselastizität 258, Querkontraktion 262, Festigkeit 294.
Baumgarten, Biegung 267.
Baumhauer, von, Alkoholometrie 374, Volumenometer 601.
Bazin, Ausflußmenge 497.
Beaumé, Aräometer 375.
Bède, Messung von Steighöhen 400. 416.
Beer, Elastizität 218, Kapillarität 382, elliptische Schwingungen 776.
Beilstein, Diffusion von Lösungen 471.
Beek, van, siehe *Moll*.
Bell, Telephon 1004.
Benton, Querkontraktion 237, Abhängigkeit der Elastizität von der Tempera-

tur 277, Torsion und longitudinaler Zug 285
Bernoulli, kinetische Gastheorie 569.
Bessel, Bestimmung der Pendellänge 144. 148, Länge des einfachen Sekundenpendels 150. 151, Reversionspendel 154, Wert von *g* für Königsberg u. Berlin 151
Bessel-Hagen, Quecksilberluftpumpe 617, Grenze der Verdünnung 623
Bestelmeyer, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668.
Bevier, Untersuchung der englischen Vokale mit dem Phonographen 1008.
Bianchi, Teilmaschine 16.
Bidone, Konstitution des ausfließenden Strahles 515
Biot, Wert von *g* für Paris 151, Schallgeschwindigkeit in eisernen Röhren 987.
u. *Arago*, Wert von *g* für Paris 58, Bestimmung von *g* 144. 197.
Bock, Querkontraktion und Temperatur 276.
Bohnenberger, Rotationsapparat 160, Reversionspendel 197, Erhaltung der Rotationsebene 160 197.
Bohr, Abweichung des Sauerstoffs vom Boyle-Mariotteschem Gesetz bei sehr kleinem Druck 559.
u. *Bock*, Absorption von Wasserstoff und Sauerstoff 640.
Bois-Reymond, du P., Ausbreitung der Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 449. 453.
Bois-Reymond, du (der ältere), Bildung der Vokale 958.
Boltzmann, elastische Nachwirkung 280, Theorie derselben 287, Stoß von Zylindern 309, innere Reibung fester Körper 318, Geschwindigkeit der Gasmoleküle 589, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649
siehe *Töpler*.
Borda, Bestimmung von *g* 144, für Paris 151
Bourdon, Metallbarometer 538.
Bouty, empfindliche Flammen 946
Bouvard siehe *Humboldt*.
Boyle, Gasgesetz 542
Boys, Dichtigkeit der Erde 186
Brahma, hydraulische Presse 354
Brandt, Hörbarkeit der Partialtöne 901.
Braun, C., Dichtigkeit der Erde 186.
Braun, F., elastische Nachwirkung 285. 286, Einfluß der Steifigkeit auf die Schwingungen der Saiten 833
Bravais, A., *Bravais, C.* u. *Martin*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 967
Breitenbach, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668.
Breithaupt, Theodolith 29.
Brewster, obere Grenze der Hörbarkeit 892
Brillouin, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Obertöne 974.
Brix, Lehrbuch der Statik 196.
Broch, Lehrbuch der Mechanik 196.
Brockmann, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
Brodmann, Festigkeit 299, innere Reibung von Flüssigkeiten 512.
Brücke, Endosmose 480, Klassifikation der Konsonanten 962.
Brunner, Messung von Steighöhen 400, Kapillarkonstanten und Temperatur 432
Buff, Konstitution des ausfließenden Strahles 518.
Bunsen, Absorptionskoeffizient 635, Formeln für die Absorptionskoeffizienten der Gase in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur 637, Bestimmung der spezifischen Gewichte der Gase durch Messung ihrer Ausflußgeschwindigkeit 647, Summation der Drucke verschiedener Gase 669, Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände 695.
Bunten, Heberbarometer 536.
Burg, Kompendium der populären Mechanik 196
Buys-Ballot, Gasdiffusion und kinetische Gastheorie 678, Dopplersches Prinzip 1016

C.

Cagniard-Latour, Querkontraktion 230, Sirene 866, Töne in Flüssigkeitssäulen 931
Caille, La siehe *Cassini*.
Cailletet, Kompressibilität der Flüssigkeiten 339, ihre Abhängigkeit vom Druck 342, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei hohen Drucken 564 565
Campetti, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinem Druck 560
Canton, J., Kompressibilität der Flüssigkeiten 330
Cantone, Querkontraktion 239, kubische Kompression 249.
Cantor, Messung des Oberflächendruckes durch Tropfen 411, Maximaldruck in Tropfen 427, Kapillarität des Quecksilbers 429.
Cardani, Querkontraktion 231
Cartesius, Bewegungsgröße, Antrieb der Kraft, lebendige Kraft, Arbeit 196, Hebelgesetze 197

Cassini, Maraldi, La Caille, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 965. 966.
Cauchy, Elastizität 218, Querkontraktion 231, Transversalschwingungen von Stäben 801. 803.
Cavalier Colle, Korrektion der Töne in Orgelpfeifen 927.
Cavendish, Dichtigkeit der Erde 183. 198.
Chappuis, Adsorption der Gase an festen Körpern 630.
Chladni, Klangfiguren 806. 809, drehende Schwingungen 817, Tonleiter 876, Schwingungen v. Stäben 905, Schwingungen gespannter Saiten 907, Transversalschwingungen von Stäben 910, Klänge von Platten 912, chemische Harmonika 944.
Clairaut, Theorem über die Abplattung der Erde 182.
Clapeyron siehe *Lamé*.
Clausius, kinetische Gastheorie 569, mittlere Wegelänge der Gasmoleküle 570, Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes aus der kinetischen Gastheorie 582, Zustandsgleichung der Gase 584, Geschwindigkeit der Gasmoleküle 588, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Diffusion der Gase 678.
Clebsch, Elastizität 218, Volumelastizität und Starrheit 233, Verschiebungswinkel 234, Starrheitskoeffizient 235, Koeffizient der Volumelastizität 235, kubische Kompression 246, Biegung 266, Schwingungen kreisförmiger Platten 806.
Colladon u. *Sturm*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 333, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Wasser 840, Schallgeschwindigkeit im Genfer See 992.
Cornu, Querkontraktion 238, Biegung 270, Verschiedenheit der Tonleiter im melodischen und harmonischen Gang 883.
— u. *Baille,* Dichtigkeit der Erde 186. 198.
— u. *Mercadier,* Empfindlichkeit des Ohres 1011.
Corti, Cortische Membranen 1010.
Coulomb, Torsionselastizität 255, Festigkeit 294, Reibung 312, innere Reibung der Flüssigkeiten 508.

D.

Dalton, Absorption von Gasgemischen 641, Diffusion der Gase 670.
Delaunay, Cours de méchanique rationelle 196.
Delcros, Korrektion des Barometers wegen der Kapillarität 533.
Deleuil, Luftpumpe 613.
Desains, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, Messung von Steighöhen 400.
Descamp siehe *Amaury*.
Desprets, Boyle-Mariottesches Gesetz 546, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 890, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.
Ditmar u. *Roscoe,* Absorption von Chlorwasserstoffsäure 638.
Donders, Zusammensetzung der Vokale 958.
— u. *Hamburger,* Temperaturkoeffizient der Endosmose 489.
Doppler, Änderung der Tonhöhe bei relativer Bewegung des Ohres und der Schallquelle 1014.
Drecker, Kompressibilität von Mischungen 346.
Drude, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 458.
Duclaux, Kapillarität 382, Kapillarität von Mischungen 440.
Duhamel, Lehrbuch der Mechanik 196, Einfluß der Steifigkeit der Saiten auf die Schwingungszahl 798, graphische Zählungen der Schwingungen 829. 869.
Dulong siehe *Arago*.
— Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie 921, Messung der Schallgeschwindigkeit mit Orgelpfeifen 976, Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen 984.
— u. *Petit,* Kathetometer 25.
Dupré, Oberflächendruck 380, Oberflächenspannung in flüssigen Lamellen 383.
Dutrochet, Endosmose 479.
Dvořák, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeitszylindern 994.

E.

Eckhard, Endosmose 481.
Edelmann, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.
Edison, Phonograph 1004.
Eichhorn, Vokalsirene 1007.
Euler, Theorie der Wage 197, Satz über die Krümmungsradien 381, Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Saitenschwingungen 788; Schwingung von Stäben 801.
Ewing siehe *Fleming* u. *Jenkin*.
Exner, Franz, Diffusion der Gase durch Seifenmembranen 698.

F.

Faraday, Verflüssigung der Gase 628, Staubfiguren 812.
Fechner, Atomlehre 209.
Fessel, Rotationsapparat 161.
Feustel, Kapillaritätskonstanten, chemische Zusammensetzung 439.
Fick, Theorie der Diffusion 467.
Fischer, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 462.
— Schwingungszahl der Stimmgabeln verschiedener Orchester 888.
— siehe *Mach*.
Fleming, Jenkin u. *Ewing*, Untersuchung der Vokale mit dem Phonographen 1006.
Forch, Kapillarität von Lösungen 439
Fortin, Barometer 530.
Foucault, Pendelversuch 162 198, Erhaltung der Rotationsebene 198.
Frankenheim, Härte 301, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Kapillaritätskonstanten u. Temperatur 431.
Franz, Härte 301
Fresnel, Schwingungsgleichung; Interferenz der Wellen; stehende Wellen; elliptische Wellen 775, Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen 776.
Friedrich, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
Frot, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles 973.
Fuchs, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz 559.

G.

Garde, Rotationsquecksilberpumpe 622
Galilei, Fallgesetze 196, Pendelgesetze 197
Gally-Cazalat, Manometer 355.
Gartenmeister, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Gauſs, Wert von *g* für Göttingen 58, absolutes Maßsystem 73, Torsion von Seidenfäden 259, Kapillaritätstheorie 382, konstanter Randwinkel 393, bifilare Aufhängung 659.
Gay-Lussac, Kohäsion von Flüssigkeiten 377, Adhäsion von Quecksilber an Glas 377, Messung von Steighöhen 399, Heberbarometer 535.
— siehe *Humboldt*
Geiſsler, Quecksilberluftpumpe 615.
Gerstner, Biegungselastizität 263, Theorie der Wasserwellen 854.
Gilbault, Kompressibilität der Lösungen 344, molekulare Kompression 345
Gimingham, Sprengelsche Luftpumpe 621.
Girard, Ausströmen der Gase 646.
Gradenwitz, Messung von Kapillaritätskonstanten an erstarrten Tropfen 437
Graetz, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Graham, Diffusion von Lösungen 467, Reibung der Gase 649, Diffusion der Gase 670, Diffusion der Gase durch trockne, poröse Scheidewände 694, Diffusion der Gase durch Kolloide 696.
Grassi, Kompressibilität der Flüssigkeiten 336. 338
Graſsmann, Theorie der Vokale 960, Theorie der Konsonanten 962.
S'Gravesande, Zugelastizität 219.
Gray, Querkontraktion 237.
Greely, Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles bei sehr niedrigen Temperaturen 967.
Greiner, Heberbarometer 535.
Grotrian, innere Reibung der Flüssigkeiten 510 511 514
Grüneisen, Gültigkeitsgrenze des Poiseuilleschen Gesetzes 513.
— siehe *Kohlrausch*
Grunmach, Einfluß der Gasverdichtung auf die Kapillaritätskonstanten des Quecksilbers 431, Messung der Kapillaritätskonstanten des Quecksilbers durch kleine Flüssigkeitswellen 858.
Guericke, Otto von, Luftpumpe 605.
Guthrie, Einfluß der Substanz auf das Gewicht der abfallenden Tropfen 421
Gutkowski siehe *Mendelejeff*

H.

Hagen, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, Einfluß von Verunreinigungen auf die Steighöhen 425, Ausfluß durch kapillare Röhren 506
Hagenbach, A., Diffusion der Gase durch Gelatine 699
Hagenbach, Ed., Reibung der Flüssigkeiten 499, Ausfluß durch kapillare Röhren 503.
Hajech, Brechung des Schalles 999.
Hallström, Zahl der akustischen Stöße 1023.
Hamburger siehe *Donders*.
Handl u. *Pribram*, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Hann, barometrische Höhenmessungen 594
Hartmann, O., sprechende Bogenlampen 946
Hausmanninger, Stoß von Zylindern 309, Diffusion der Gase 675
Hauy, Bewegung infolge von Kapillarwirkung 456
Heen, de, Kapillarkonstanten und Temperatur 434, Einfluß der Temperatur auf den Diffusionskoeffizienten der Flüssigkeiten 477

Helmert, Verschiedenheit von *g* in verschiedenen Breiten 181. 198.
Helmholtz, von, Begriffsform der Naturauffassung 8, Wirbelringe 209. 211, Reibung der Flüssigkeiten 499, Ausfluß durch kapillare Röhren 503, Vibrationsmikroskop 832, Schwingung gestrichener Saiten 834, Berechnung der Tonleiter 883, Harmonium mit reinen Tönen 887, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 891, Theorie des Klanges 865. 894, Resonatoren 895, Hörbarkeit der Partialtöne 901, Zusammensetzung von Klängen aus einfachen Tönen 902, Einfluß der Phase auf den Klang 903, Partialtöne gespannter Saiten 907, Theorie der Luftschwingungen in Röhren 930, Einfluß der Pfeifenwände auf den Klang 930, Theorie der weichen Zungen 942, Klänge kegelförmiger Röhren 942, Theorie der Vokale 953, Töne der Mundhöhle 958, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Tonhöhe 980, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeitszylindern 993, Resonanz 1002, Mechanismus des Hörens 1010, Stöße 1024, Differenz- u. Summationstöne 1029, Theorie der Kombinationstöne 1031, Theorie der Konsonanz und Dissonanz 1033.
— u. *Piotrowski*, innere Reibung der Flüssigkeiten 511.
Hemilian siehe *Mendelejeff*.
Henry, Absorptionsgesetz der Gase 634.
Hensen, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
Hermann, Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.
Hertz, Härte 301.
Herwig, Dimensionen der abgeleiteten Maße 78.
Heydweiller, Messung von Kapillarkonstanten an erstarrten Tropfen 437, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Herzfeld, Messung der Kapillarkonstanten an erstarrten Tropfen 437.
Higgins, chemische Harmonika 944.
Hittorf, allotrope Modifikationen 207.
Hodgkinson, Elastizität 223.
Van 't Hoff, kinetische Theorie der Flüssigkeiten, Deutung des endosmotischen Druckes 705.
Holmann, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 667.
Homann, Alkoholometrie 375.
Hooke, Zugelastizität 219.
Hopkins, Einfluß des Mundstücks auf die Höhe der Pfeifentöne 921, Interferenz des Schalles 1018.
Houghton, Dichtigkeit der obern Erdrinde 192.
Hübener, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Hüfner, Prüfung der Exnerschen Regel für die Diffusion der Gase durch Flüssigkeitsschichten 699.
Humboldt, Gay-Lussac u. *Bouvard, Arago, Mathieu* u. *Prony*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 966.
Hutton siehe *Maskelyne*.
Huyghens, Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft 197, Pendelgesetze 197, Größe von *g* 197, Stoßgesetze 303, Huyghenssches Prinzip 761, Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen 776.

I.

Jacobi, C. G. J., Vorlesungen über Dynamik 196.
Jacobson, Ausfluß durch kapillare Röhren 503.
Jerichau, Endosmose 480.
Jochmann, Boyle-Mariottesches Gesetz 555.
Johannisjanz, Diffusion von Lösungen 473.
Jolly, Abnahme der Schwere über einer Hochebene 178, Dichtigkeit der Erde 186, Prinzipien der Mechanik 196, endosmotisches Äquivalent 480.
Joule, kinetische Gastheorie 569.
Joulin, Adsorption von Gasen an festen Körpern 630.
Journée, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei scharfen Schüssen 975.
Isenkrahe, Massenanziehung 170.
Jullien, Problemes de méchanique rationelle 196.

K.

Kahlbaum, Luftpumpe 622.
Kalähne, Einfluß der Gasverdichtung auf Kapillaritätskonstanten 431, Kapillaritätskonstanten des Wassers 436, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur 986.
Kater, Reversionspendel 144. 153. 155. 197.
Katzenelsohn, Abhängigkeit der Querkontraktion von der Temperatur 275.
Kaufmann, W., Rotationsquecksilberluftpumpe 622, Schwingungen geschlagener Saiten 836.
Kayser, Adsorption der Gase an festen Körpern 630, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite 982.

Kekulé, Lehrbuch der Chemie 212.
Kelvin, Lord (*W. Thomson*), Atom 209, Querkontraktion 231, Einfluß der Verdampfung auf die Oberflächenspannung 459, Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 854.
Keppler, Kepplersche Gesetze 165. 198.
Khanikoff u. *Longuinine*, Absorption von Kohlensäure 639.
Kiesling, Interferenz des Schalles 1020.
Kiewiet, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 273.
Kirchhoff, Elastizität 218, Querkontraktion 231. 239, Biegung 269, Schwingungen kreisförmiger Membranen und Platten 806, Chladnis Klangfiguren 808, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Tonhöhe 980.
Kirpitschoff siehe *Mendelejeff*.
Klinkert, Schwingungen von elektromagnetisch bewegten Saiten 836.
Koch, *A.*, innere Reibung fester Körper 318. 324.
Koch, *F. L.*, Ausströmen der Gase 646.
Koch, *K. R.*, Biegung 267.
König, *A.*, Messung des Oberflächendrucks durch Tropfen 409.
König, *R.*, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 893, Flammenkapseln 896. 899, Flammenbilder verschiedener Vokale 900, Einfluß der Phase auf den Klang 903, Wellensirene 904, Messung der Wellenlängen in langen Pfeifen 923, Korrektion der Töne in offenen Orgelpfeifen 926, Flammenbilder der Vokale 956, Interferenzröhren 1019, Stöße 1023. 1024, Verwendung der Stöße zur Bestimmung der Schwingungszahl 1027, Kombinationstöne 1030.
König, *W.*, innere Reibung fester Körper 324, innere Reibung der Flüssigkeiten 510. 511.
Kohlrausch, *F.*, elastische Nachwirkung 278. 280. 281. 282. 286, Theorie der elastischen Nachwirkung 287, Korrektion des Barometers wegen der Kapillarität 533.
u. *Grüneisen*, elastische Ausdehnung 228.
u. *Loomis*, Torsionselastizität 261, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 271.
Kolaček, Theorie der Flüssigkeitswellen 854, Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 855.
Kopp, Atomistik 206, Volumenometer 602.
Kowalki, Diffusion 476.
Kowalski, von, Querkontraktion 239, Abhängigkeit derselben von der Temperatur 275, Festigkeit 298.
Krajewitsch, Schallgeschwindigkeit in Röhren mit Luft von geringer Dichtigkeit 983.
Krigar Menzel siehe *Raps*.
siehe *Richarz*.
König, kinetische Gastheorie 569, Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes a. der kinetischen Gastheorie 582.
Kundt, Staubfiguren 813, zusammengesetzte Schwingungen 821, Schwingungen von Luftplatten 845, Schwingungsvorgang in gedeckten Pfeifen nach manometrischen Messungen 914, Messung der Schallgeschwindigkeit mit Kundtschen Staubfiguren 978, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite 979, Schallgeschwindigkeit in Stäben 988.
u. *Lehmann*, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeitszylindern 994.
u. *Warburg*, Reibungskoeffizienten der Gase 659.
Kupffer, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 271.
Kuytenbrouwer, siehe *Moll*.

L.

Laboulaye, *de*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei scharfen Schüssen 975.
Lagrange, allgemeine Gleichungen der Bewegung 116.
Lahr, *von*, Graßmanns Vokaltheorie 961, Untersuchung der Vokale mit dem Phonographen 1006. 1007.
Lambert, Sprachrohr 997.
Lamé, Elastizität 218, Querkontraktion 231, Gleichungen für die Kompression von Hohlkörpern 246.
u. *Clapeyron*, Querkontraktion 230.
Lang, *von*, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Ausströmungsgesetz der Gase durch kapillare Röhren 656.
La Place, Ebbe und Flut 196. 198, Kapillaritätstheorie 378. 382, konstanter Randwinkel 393, Bewegung infolge von Kapillarwirkung 455, barometrische Höhenmessung 593.
Lauenstein, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Leconte, empfindliche Flammen 945.
Lehmann, allotrope Modifikationen 207, Fließen fester Körper 291, Festigkeit 293, periodische Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 454.
siehe *Kundt*.

Leibnitz, lebendige Kraft 196.
Lenard, Oberflächenspannung bestimmt durch die Schwingungsdauer fallender Tropfen 520.
Leslie, Volumenometer 600.
Lewkojeff siehe *Tammann*.
Lippich, Kaleidophon 824.
Liscovius, Töne von Pfeifen mit weichen Wänden 930.
Lissajous, Schwingungsfiguren 776. 825, Knotenlinien auf schwingenden Stäben 804, Vibrationsmikroskop 832.
Lohnstein, Poissons Formel über Tropfenbildung 411, Einfluß der Tropfengröße 427, Berechnung der Kapillaritätskonstanten aus der Tropfengröße 429.
Long, Diffusionsgeschwindigkeit 474.
Longuinine siehe *Khanikoff*.
Loomis siehe *Kohlrausch*.
Loschmidt, Diffusion der Gase 670, Größe und Zahl der Gasmoleküle 692.
Lüdtge, Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 453.
Ludwig, Lehrbuch der Physiologie 953. 962.

M.

Mach u. *Fischer*, Brechung des Schalles 1000.
Mac Leod, Manometer 620.
Magie, Messung der Oberflächenkrümmung 425, Einfluß der Tropfengröße 426, Randwinkel 427.
Magnus, Erhaltung der Rotationsebene 198, Konstitution des ausfließenden Strahles 515. 519.
Maraldi siehe *Cassini*.
Marangoni, Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 453.
Mariotte, Stoßapparat 305, Gasgesetz 542.
Markowski, Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten der Gase von der Temperatur 668.
Martini, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten 995.
Martins siehe *Bravais*.
Maskelyne u. *Hutton*, Dichtigkeit der Erde 188. 198.
Masson, kubische Pfeifen 930.
Mathieu siehe *Humboldt*.
Matthiessen, L., Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 855, Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Flüssigkeitswellen 857.
Maxwell, Dimensionen der Maße im absoluten Maßsystem 78, kinetische Gastheorie 569, Geschwindigkeitsverteilung bei den Gasmolekülen 589, Ableitung der Reibung der Gase aus der kinetischen Gastheorie 649, Messung der Reibungskoeffizienten durch Schwingung 658, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 661, Ableitung der Diffusion der Gase aus der kinetischen Gastheorie 678, Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände 696.
Mayer, A. M., Dopplersches Prinzip 1016.
Meifsner, Aräometrie 376.
Melde, Transversalschwingungen gespannter Saiten 793, Kaleidophon 824, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 893, Platten von hohen Schwingungszahlen 912.
Mendelejeff, Alkoholometrie 375, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416.
— u. Frl. *Gutkowski*, Korrektion der Barometer wegen der Kapillarität 533.
— u. *Hemilian*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 556.
— u. *Kirpitschoff*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 556.
Mensbrugghe, van der, Oberflächenspannung flüssiger Lamellen 383.
Mercadier, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889, Töne von Stimmgabeln 911.
— siehe *Cornu*.
Metz, de, Kompressibilität der Flüssigkeiten 337.
Meyer, G., Messung der Kapillaritätskonstanten nach dem Verfahren von A. König 409, Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 429, Einfluß der Gasverdichtung auf die Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 429.
Meyer, G. S., elastische Ausdehnung 226.
Meyer, L., moderne Theorien der Chemie 212, Reibungskoeffizienten von Dämpfen 669.
Meyer, M., siehe *Stumpf*.
Meyer, O. E., elastische Nachwirkung 287, Reibung der Flüssigkeiten 499, Reibungskoeffizient 501, Messung der Reibung der Flüssigkeiten nach der Methode von Coulomb 508. 510. 511, Ableitung der Korrektion nach Sutherland 587, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Messung der Reibungskoeffizienten der Gase mittels des Durchflusses durch kapillare Röhren 655, Reibungskoeffizienten der Gase nach der Methode von Maxwell 657. 658, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665, Theorie der Gasdiffusion 678.
Meyer u. *Mützel*, innere Reibung der Flüssigkeiten 511.
— u. *Rosenkranz*, innere Reibung der Flüssigkeiten 514.

Meyer u. *Springmühl*, Poiseuillesches Gesetz bei Gasen 656.
Michaelis, elastische Nachwirkung 286.
Michell, Methode zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde 188.
Miller, elastische Ausdehnung 223, Änderung der Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur 272.
Möbius, Lehrbuch der Statik 196.
Mohr, Wage 370.
Mohs, Härteskala 301.
Moll, *van Beek* u. *Kuytenbrouwer*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 967.
Morin, elastische Ausdehnung 223, Reibung 312.
Morrow, Querkontraktion 237.
Moser, Hauchbilder 632.
Mousson, konstanter Randwinkel 393.
Moutier, konstanter Randwinkel 393
Müller, Joh., menschliche Stimme 949.
Müller, Jos., Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite 983.
Musschenbroek, Boyle-Mariottesches Gesetz 545.
Mützel siehe *Meyer, O. E.*

N.

Natterer, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei hohem Druck 568, Kompressionsapparat 625.
Naudet, Aneroidbarometer 539.
Navier, Querkontraktion 230.
Neesen, elastische Nachwirkung 287.
Nernst, kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten 709.
Neumann, F., Elastizität 218, Stoß von Zylindern 309, Gleichgewichtsbedingung an kapillaren Oberflächen 390, Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten 444, Ausfluß durch kapillare Röhren 503, elliptische Schwingungen 776.
Newton, Massenanziehung 166, Anziehungsgesetz 167, Philosophiae naturalis principia mathematica 196, Prinzip der Trägheit 196, Prinzip der Proportionalität der Bewegung und der wirkenden Kraft 196, Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung 81. 196, Hebelgesetze 197, allgemeine Anziehung 165. 198, Verschiedenheit von *g* unter verschiedenen Breiten 198, Ebbe und Flut 198.
Nicholson, Aräometer 366.
Noack, innere Reibung von Flüssigkeiten 514.
Nörremberg, Interferenz des Schalles 1018.

O.

Oberbeck, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 462.
Obermaier, von, Ausströmungsgesetz der Gase durch kapillare Röhren 656, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665, Diffusion der Gase 674.
Ochsé, Bestimmung von Kapillaritätskonstanten aus Flüssigkeitswellen 858.
Oersted, Kompressibilität der Flüssigkeiten 331.
u. *Schwendsen*, Boyle-Mariottesches Gesetz 545.
Ohm, Theorie des Klanges 865. 894.
Okatow, Querkontraktion 239.
Ostwald, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 485, innere Reibung der Flüssigkeiten 506. 51

P.

Paalzow, Volumenometer 601.
Pagliani u. *Palazzo*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 341. Abhängigkeit der Kompressibilität von der Temperatur 342, Kompressibilität von Mischungen 346.
u. *Vincentini*, Kompressibilität des Wassers 339.
Palazzo siehe *Pagliani*.
Pascal, hydrostatisches Paradoxon 348.
Perkins, Kompressibilität der Flüssigkeiten 330
Pernter, barometrische Höhenmessungen 594.
Person, Foucaultscher Pendelversuch 198.
Pfaff, Härte 301
Pfeffer, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 482.
Pierpaoli, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889.
Piotrowsky siehe *Helmholtz*
Pisati, elastische Ausdehnung 223, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 272
Place, La, siehe *La Place*
Plateau, flüssige Lamellen 383, Oberflächendruck in Seifenblasen 387, Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten 441, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 457.
Plücker, Erhaltung der Rotationsebene 198
Pockels, Fräulein, Einfluß der Gasverdichtung auf die Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 428.
Poggendorff, Fesselscher Apparat 161, Erhaltung der Rotationsebene 198
Poinsot, Kräftepaar 97, Elément de statique 196, Erhaltung der Rotationsebene 197.

Poiseuille, Ausfluß durch kapillare Röhren 506.
Poisson, Abnahme der Schwere über einer Hochebene 176, Traité de méchanique 196, Elastizität 218, Querkontraktion 230, Kapillaritätstheorie 382, Verdichtung der Flüssigkeiten an fester Wand 388, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, konstanter Randwinkel 393, Tropfenbildung 411, barometrische Höhenmessung 593, Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen in Stäben 779, Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler und longitudinaler Saitenschwingung 790, Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler u. longitudinaler Saitenschwingung 796, Schwingung von Stäben 801, Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler und longitudinaler Schwingungen in Stäben 804, Schwingungen kreisförmiger Membranen und Platten 806, drehende Schwingungen 817, Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in Flüssigkeiten und Gasen 841.
Pouillet, Boyle-Mariottesches Gesetz 548.
Poynting, Dichtigkeit der Erde 187.
Preyer, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 891, Kombinationstöne 1029, objektive Natur derselben 1030.
Pribram siehe *Handl*.
Prony siehe *Humboldt*.
Pulfrich, elastische Nachwirkung 283.
Puluj, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665.

Q.

Quanten, Einwürfe gegen die Helmholtzsche Vokaltheorie 959.
Quincke, Kapillarität 382, konstante Randwinkel 393, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Einfluß der Substanz des Festen auf die Tropfengröße 421, Randwinkel verschiedener benetzender Flüssigkeiten 422. 423, Einfluß von Verunreinigungen auf die Steighöhen 425, Einfluß der Tropfengröße auf die Werte der Kapillarkonstanten 426, Änderung der Luftblasen mit der Zeit 427, Veränderung der Quecksilbertropfen mit der Zeit 429, spezifische Kohäsion 435, Werte derselben 436, Kapillarität von Lösungen 439, Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten 447, Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 449. 451. 452. 453, periodische Ausbreitung von Flüssigkeiten 454, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 459, Messung der Schallgeschwindigkeit in Röhren 986, Interferenz des Schalles 1018.

R.

Ramsay u. *Ashton*, Kapillarkonstanten und chemische Zusammensetzung 439.
— u. *Schields*, Kapillaritätskonstanten organischer Verbindungen 439.
Raps, Schwingungsvorgang in gedeckten Pfeifen, beobachtet durch manometrische Messungen 914.
— u. *Krigar Menzel*, graphische Darstellung der Schwingungsfiguren 830, Schwingungen gestrichener Saiten 835.
Rayleigh, Lord, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 462. 465, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 561, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668, Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 855, Bestimmung von Kapillarkonstanten aus Flüssigkeitswellen 858, Empfindlichkeit des Ohres 1012.
Redtenbacher, Prinzipien der Mechanik 196.
Regnault, allotrope Modifikationen 207, kubische Kompression 245, Kompressibilität der Flüssigkeiten 335, Boyle-Mariottesches Gesetz 549, Interpolationsformeln für die Kompressibilität der Gase 555, Manometer 597, Volumenometer 600, Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Tonhöhe 965, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in weiten Röhren und in freier Luft 968, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen 974.
Reich, Dichtigkeit der Erde 185. 186. 198.
Reinold u. *Rücker*, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 458.
Rellstab, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Rennie, Reibung 312.
Reusch, Wirbelringe 210.
Reyher, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Rhumer, sprechende Bogenlampe 946.
Richards u. *Stull*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 343.
Richarz u. *Krigar Menzel*, Dichtigkeit der Erde 188.
Richer, Änderung von g mit der Breite 198.
Riecke, innere Reibung fester Körper 318, kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten 711.
Rieſs, Kapillarkonstanten und Temperatur 433, Theorie der Flüssigkeits-

wellen 854, Einfluß der Oberflächenspannung auf die Flüssigkeitswellen 855.
Rink, Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Schalles 972.
Ritter, Stoß von Zylindern 309, Ausfluß von Flüssigkeiten 498.
Ritz, Klänge der Streichinstrumente 909.
Röber, Töne von Stimmgabeln 911, Methoden von Scheibler zur Bestimmung von Schwingungszahlen durch Stöße 1025.
Robinson, Boyle-Mariottesches Gesetz 545
Rodenbeck, Kapillarkonstante und Temperatur 436, Kapillarität von Mischungen 440
Rodger siehe *Thorpe*.
Rogers, Wirbelringe 210
Röntgen, Querkontraktion 229. 236, Kompressibilität der Flüssigkeiten 341, Abhängigkeit der Kompressibilität von der Temperatur 342, Verdichtung von Flüssigkeiten an vertikalen Wänden 419, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 462, Abhängigkeit der innern Flüssigkeitsreibung vom Druck 664.
u. *Schneider*, Kompression von Flüssigkeiten 339, Kompression von Salzlösungen 344, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Kapillarität von Lösungen 439.
Roscoe siehe *Ditmar*.
Rosenkranz siehe *Meyer, O. E.*
Rother, Kapillarität von Lösungen 439.
Roux, le, Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles in der Luft 966. 974.
Rücker siehe *Reinold*
Ruhlmann, barometrische Höhenmessung 593.

S.

Sachs siehe *Warburg*
Saint Venant, de, Torsion von Prismen 261, Biegung 270, Stoß von Zylindern 309.
- u. *Wantzel*, Ausfluß der Gase 646
Salvioni, Glasfadenwage 200.
Saussure, von, Verdichtung von Gasen an festen Körpern 629.
Savart, F., Ausfluß aus kreisförmigen Öffnungen, Bäuche und Knoten 518, longitudinale Schwingungen von Stäben 778, Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler u. longitudinaler Schwingungen von Stäben 805, Klangfiguren 809, Staubfiguren 812, drehende Schwingungen 817, zusammengesetzte Schwingungen 818, Erzeugung von Klängen durch gezahnte Räder 868, untere Grenze der Hörbarkeit 890, obere Grenze der Hörbarkeit 892, Pfeifen mit weichen Wänden 930, Resonanz 1002.
Savart, N., Einfluß der Steifigkeit der Saiten auf die Schwingungszahl 797.
Say, Stereometer 599.
Schäfer, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 276.
Schaffgotsch, Graf, empfindliche Flammen 945.
Scheffer, Änderung der Diffusionsgeschwindigkeit mit der Konzentration 475
Schell, Theorie der Bewegung u. Kräfte 196.
Scheibler, Schwingungszahlen der Stimmgabeln verschiedener Orchester 889, Anwendung der Stöße zur Bestimmung der Schwingungszahl 1025.
Schiff, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Kapillaritätskonstante und Temperatur 434, Kapillaritätskonstanten des Äthylalkohols 436, Abhängigkeit der Kapillarkonstanten von der chemischen Zusammensetzung u. der Temperatur 437.
Schleiermacher, Verdichtung von Flüssigkeiten an vertikalen Wänden 419.
Schmidt, G. G., Ausströmen der Gase 646.
Schmidt, P. M., innere Reibung fester Körper 321.
Schmidt, R., Diffusion von Argon und Helium 677.
Schmidt, W., Endosmose 481. 482
Schneebeli, Querkontraktion 240, drehende Schwingungen 818, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Tonhöhe 980.
Schneider siehe *Röntgen*
Schönrock, Darstellung der Schwingungen gespannter Saiten 850
Schott siehe *Winkelmann*
Schreiber, Wagebarometer 538.
Schröder, elastische Nachwirkung 282.
Schröder van der Kolk, Boyle-Mariottesches Gesetz 555, Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft 967
Schubring, Berechnung der Tonleiter 883.
Schuhmeister, Diffusion von Lösungen 474.
Schultze, H., Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668
Schulze, F. A., obere Grenze der Hörbarkeit 892, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Beschaffenheit der Wände 983
Schultze, Max, Cortische Fasern 1010
Schumann, Kompressibilität von Lösungen 344, Ausfluß durch kapillare Röhren 657, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665

Schwendsen siehe *Oersted*.
Schwendt, obere Grenze der Hörbarkeit 892.
Scripture, Untersuchung der Vokale mit dem Phonographen 1008.
Sebert, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei scharfen Schüssen 975.
Seebeck, Ad., Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite und der Tonhöhe 980.
Seebeck, Aug., Einfluß der Steifigkeit der Saiten auf die Schwingungszahl 798, Schwingung von Stäben 801. 802, zusammengesetzte Schwingungen 820, Theorie des Klanges 865. 894, menschliche Stimme 951, Dopplersches Prinzip 1016, Interferenz des Schalles 1019.
Seebeck, Härte 301.
Seitz, Diffusion von Lösungen 474.
Sella siehe *Voigt*.
Shakespear, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 274.
Shields siehe *Ramsay*.
Siedentopf, Messung der Kapillaritätskonstanten nach dem Verfahren der Methode von A. König 409, Kapillaritätskonstanten 411, Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 429, spezifische Kohäsion von flüssigen Metallen 437.
Siljeström, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 556.
Simmler siehe *Wild*.
Simon, Messung von Steighöhen 400.
Simon, Th., sprechende Bogenlampe 946.
Sims, Absorption des Ammoniaks 639.
Slotte, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Sohnke, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 461.
Sondhaus, Oberflächenspannung in flüssigen Lamellen 385, Kapillarkonstante und Temperatur 431, kubische Pfeifen 930.
Sonreck, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
Sorge, Kombinationstöne 1028.
Sprengel, Quecksilberluftpumpe 620.
Spring, Fließen fester Körper 291.
Springmühl siehe *Meyer, O. E.*
Sprung, Reibung der Flüssigkeiten 514, Wagebarometer 538.
Stahl, J., Kapillarität 382.
Stark, J., periodische Ausbreitung von Flüssigkeiten 454.
Stefan, scheinbare Adhäsion 310, Diffusion von Lösungen 473. 474, Reibung der Flüssigkeiten 499, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 666, Diffusion der Gase 673, Verdampfungsgeschwindigkeit 676, Ableitung der Diffusion aus der kinetischen Gastheorie 678, Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände 696, durch Flüssigkeiten 697, Schallgeschwindigkeit in nichttönenden Stäben 989.
Stevens, Schallgeschwindigkeit in Gasen u. Dämpfen 986.
Stöckle, Messung der Kapillarkonstanten nach dem Verfahren von A. König 409, Kapillaritätskonstanten 411, Einfluß der Verdichtung der Gase auf die Kapillarkonstante des Quecksilbers 429.
Stokes, Querkontraktion 231, Reibung der Flüssigkeiten 499.
Stoletow, Schallgeschwindigkeit in Röhren mit dünner Luft 984.
Straubel, Querkontraktion 238.
Strehlke, Knotenlinien auf schwingenden Stäben 804, Chladnis Klangfiguren 806. 808. 811.
Streintz, H., innere Reibung fester Körper 321.
Stromeyer, Querkontraktion 237.
Strouhal, Töne durch scheinbare, kontinuierliche Bewegung 863, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
Stull siehe *Richards*.
Stumpf, Stöße 1025.
— u. *M. Meyer*, obere Grenze der Hörbarkeit 893.
Sturm siehe *Colladon*.
Sulzer, Boyle-Mariottesches Gesetz 545
Sutherland, Korrektion an der Zustandsgleichung der Gase 587, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 667, Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten der Gase von der Temperatur 687.

T.

Tait, Kompressibilität der Flüssigkeiten 337, des Wassers 339. 341, der Lösungen 344, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649.
Tammann, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 486.
— *Werigin* u. *Lewkojeff*, Fließen fester Körper 291.
Thalén, Elastizitätsgrenze 289.
Thiesen, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 560.
Thilorier, Verflüssigung der Kohlensäure 627.
Thompson, elastische Ausdehnung 221
Thomson, W., siehe Lord *Kelvin*.
Thorpe u. *Rodger*, Reibung der Flüssigkeiten 514.
Timberg, Ableitung der Kapillaritätskonstanten aus Beobachtungen an La-

mellen 427, Abhängigkeit der Kapillaritätskonstanten von der Temperatur 432.
Timofejew, Absorption des Wasserstoffs 640.
Tomlinson, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 272.
Töpler, Quecksilberluftpumpe 617.
— u. *Boltzmann*, Schwingungen in gedeckten Orgelpfeifen 914, Empfindlichkeit des Ohrs 1012.
Toricelli, Ausflußgesetz der Flüssigkeiten 489. 493, Barometer 529.
Tralles, Alkoholometrie 375.
Traube, Kapillarität von Lösungen 439, von Mischungen 440, Niederschlagsmembranen 482.
Tresca, Fließen fester Körper 291.
Tycho de Brahe, Kepplersche Gesetze 166.
Tyndall, empfindliche Flammen 944.

V.

Valson, Kapillarität von Lösungen 439.
Ven, van der, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 558.
Vidi, Aneroidbarometer 538.
Vierordt, Endosmose 480.
Vincentini siehe *Pagliani*.
Violle u. *Vautier*, Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Tonhöhe 965, von der Intensität des Schalles 973, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Obertöne 973.
Viviani, Barometer 528.
Vogel, H. C., Dopplersches Prinzip 1016.
Voigt, elementare Mechanik 196, Elastizität 218, Querkontraktion 238. 239, Biegung 267. 269, elastische Nachwirkung 287, Stoß von Zylindern 309, innere Reibung fester Körper 318. 321, Stöße 1024, Kombinationstöne 1030.
— u. *Drude*, Biegung 269.
— u. *Sella*, Festigkeit 300.
Voigtländer, Diffusion von Salzen in fester Gelatine 477.
Voit, Diffusionskoeffizient 473.
Volkmann, Korrektion an der Formel zur Berechnung von Kapillaritätskonstanten aus der Steighöhe 415, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Einfluß der Krümmung der Wände auf die Steighöhen 420, Randwinkel 424, Einfluß von Verunreinigungen auf Steighöhen 426, Änderung von Blasen mit der Zeit 428, Kapillaritätskonstanten und Temperatur 433. 434, Kapillarität von Lösungen 439.
Vries, de, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 486.

W.

Waals, van der, mittlere Wegelänge der Gasmoleküle 575, Zustandsgleichung der Gase 583, Größe und Zahl der Moleküle 691, kinetische Theorie der Flüssigkeiten 702, Normaldruck in Flüssigkeiten 704.
Wagner, innere Reibung der Flüssigkeiten 514.
Waidle, Mosersche Bilder 632.
Waitz, Diffusion der Gase 675.
Walden, Niederschlagsmembranen 486.
Wallis, Stoßgesetze 303.
Wantzel siehe *de Saint Venant*.
Warburg, Torsionselastizität 256, elastische Nachwirkung 286, permanente Torsion 291, Einfluß der Verdampfung auf die Molekularkräfte 459, innere Reibung des Quecksilbers 515, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in nichttönenden Stäben 990.
— u. *von Babo*, Reibung 312, innere Reibung fester Körper 321, Abhängigkeit der inneren Reibungskoeffizienten der Gase von ihrer Dichtigkeit 662.
— u. *Kundt* siehe *Kundt*.
— u. *Sachs*, Abhängigkeit der innern Gasreibung vom Drucke 664, Abhängigkeit der innern Gasreibung von der Temperatur 665.
Weber, F., Diffusion von Lösungen 474. 476.
Weber, G., Klänge gespannter Saiten 907.
Weber, W., elastische Nachwirkung 277. 286. 287, zusammengesetzte Schwingungen 821, Entstehung der Klänge in Zungenpfeifen 935, Theorie der Zungenpfeifen 938, Interferenz des Schalles 1020.
— u. *Weber, E. H.*, Fortpflanzung der Saitenschwingung 788, Schwingungsdauer gespannter Saiten 792, transversale Wellen in Flüssigkeiten 846, Fortpflanzungsgeschwindigkeit d. Wasserwellen 849, Entstehung d. Wasserwellen 853, Durchkreuzung und Reflexion der Wasserwellen 858.
Webster Low, J., Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Röhrenweite 983.
Weidmann, elastische Nachwirkung 281.
Weinberg, Kapillarkonstante und Temperatur 433, Kapillarkonstanten des Wassers 436.
Weisbach, Ausströmen der Gase 646.
Wernin siehe *Tammann*.
Wertheim, Zugelastizität 219, Werte einiger Elastizitätskoeffizienten 222,

Querkontraktion 229. 236, Torsionselastizität 252, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 271, Elastizitätsgrenze 290, Festigkeitsgrenze 294, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, drehende Schwingung 817, Einfluß des Mundstücks auf die Pfeifentöne 920, Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie 922, Berichtigung der Töne offener Orgelpfeifen 925. 927, Töne in Flüssigkeitssäulen 931, Messung der Schallgeschwindigkeit mit Orgelpfeifen 977, Schallgeschwindigkeit in Stäben 988, in räumlich ausgedehnten, festen Körpern 990, in Flüssigkeitszylindern 992.
Wheatstone, Kaleidophon 824, Theorie der Vokale 958.
Wiechert, elastische Nachwirkung 287.
Wiedeburg, Diffusion und Konzentration 475.
Wiedemann, E., Formeln für die Absorptionskoeffizienten 638, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665.
Wiedemann, G., Elastizitätsgrenze 291, innere Reibung der Flüssigkeiten 506.
Wien, M., Einwürfe gegen die Theorie des Hörens von Helmholtz 1012.
— siehe *Wüllner.*
Wild, Komparatoren 13.
— u. *Simmler,* Theorie der Diffusion von Lösungen 469.
Wilhelmy, Verdichtung von Flüssigkeiten an vertikalen Wänden 417, Randwinkel verschiedener benetzender Flüssigkeiten 421.
Willis, Bildung der Vokale 953.
Wilsing, Dichtigkeit der Erde 188.
Winkelmann, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 274, Diffusion von Dämpfen 676.
— u. *Schott,* Abhängigkeit der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur 274, Zug- und Druckfestigkeit von Gläsern 300.
Witkowski, Schallgeschwindigkeit in dichter Luft 984.
Wolf, Kapillaritätskonstanten und Temperatur 432.
Wolz, Teilmaschine 19.
Woodruff, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889.
Worthington, Einfluß der Tropfengröße 426.
Wren, Stoßgesetze 303.
Wroblewski, von, Diffusion von Lösungen 475, Sättigungskoeffizient 635, Absorption der Kohlensäure 639, Diffusion der Gase durch Kolloide 696.
Wüllner, Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen 985.
— u. *M. Wien,* Elastizitätskoeffizienten von Gläsern 274.

Y.

Young, Th., Zugelastizität 219, Kapillarität 382, Konstanz des Randwinkels 393, Reflexion der Wellen 776.

Z.

Zamminer, kubische Pfeifen 930, Töne der Röhren mit weichen Zungen 942, Länge des Hornes 948.
Zickgraf, obere Grenze der Hörbarkeit 893.

Berichtigungen

zum ersten Bande der Experimentalphysik.

Seite 19 Zeile 19 v. u. hinter „kurze" füge ein „den fünften von mittlerer Länge, wieder vier kurze".

„ 70 nach Zeile 11 v. u. ist einzuschalten „nach α aufzulösen. Wir erhalten dann".

„ 73 Zeile 5 v. o. lies eine anstatt einer.

„ 75 Anm. Zeile 4 v. u. lies mesures anstatt mesmes.

„ 92 Zeile 1 v. u. lies GF anstatt GE.

„ 99 „ 5 v. u. „ $Mc \cdot AB$ anstatt $Mb \cdot AB$

„ 99 „ 3 v. u. „ $Mb \cdot DC$ anstatt $Mc \cdot DC$

„ 108 „ 7 v. o. „ Kreis Q anstatt Kreis R.

„ 224 „ 27 v. o. nach „lastung" schalte ein: „war 0,192 kg. die erste Spalte gibt die dieser hinzugefügte Belastung"

„ 231 Anm. 4 Zeile 3 v. u. lies 65 anstatt 85.

„ 246 Zeile 13 v. o. lies $\frac{\Delta V}{V} = 3\varphi$, anstatt $\frac{\Delta V}{V} \cdot 3\varphi$,

„ 248 „ 10 v. u. „ Ist anstatt ist.

„ 268 „ 5 v. u. „ *to* anstatt *tO*

„ 269 „ 4 v. o. „ Φ anstatt Φ'.

„ 273 Anm. 1 lies 29 anstatt 39.

„ 273 Zeile 3 v. u. lies 0,00377 anstatt 0,00011.

„ 273 „ 19, 26, 43 v. o. lies Kiewiet anstatt Kiewit

„ 291 Anm. 1 Zeile 8 v. u. lies 106 anstatt 104.

„ 316 Zeile 16 v. o. lies $\varphi = e^{-at}$ anstatt $\varphi = e^{-a}$

„ 324 „ 16 v. o. „ $A \cdot 10^5 \cdot T^2$.

„ 337 „ 16 v. u. „ Werte anstatt Werke

„ 344 „ 12 v. u. „ so sind anstatt so ist.

„ 346 „ 10 v. o. und von Zeile 11 „Kohlenstoff mit" ist zu streichen.

„ 379 „ 5 v. u. lies $Q = z\{\mu\lambda r^{-2}\lambda^{-1}\}$

„ 416 „ 16 v. o. „ $\frac{H}{x}$ — anstatt $\frac{H}{r}$ —

„ 419 „ 6 nach der Tabelle lies 3600 anstatt 3900.

„ 451 „ 9 v. u. lies $\alpha'_{23} - \alpha'_{12} > \alpha'_{13}$ anstatt $\alpha'_{23} - \alpha'_{12} > \alpha'_{12}$.

„ 462 Anm. 1 lies **47.** anstatt 48.

„ 475 „ 3 „ **10.** p. 51. 1892 anstatt 10. p. 51. 1904

„ 486 „ 2 „ **2.** p. 45. 1888; **3** p. 103 1889.

„ 522 „ 1 „ **95.** p. 1. 1855. **106** p. 1. 1859

„ 526 Zeile 4 und 3 v. u. streiche: so wird.

„ 554 in der letzten Zeile der Tabelle lies 0,2801 anstatt 0,2802 und — 0,2867 anstatt — 0,2687.

„ 566 Anm. lies **19.** anstatt 29.

„ 589 „ Zeile 1 lies 19 anstatt 29.

„ 611 Zeile 9 v. o. ließ Hahnes statt Kanales.

„ 613 Anm. 1 lies 1865 anstatt 1890

„ 665 „ 6 lies **46.** (2.) p. 278. 1876.

Seite 667 Zeile 12 v. o. streiche $\frac{1}{\alpha} t = T$ und.
„ 754 „ 5 v. o. lies $-b$ anstatt $+b$.
„ 785 „ 2 v. o. „ bei a anstatt bei d.
„ 787 „ 6 v. u. „ $\sin \varepsilon \xi b = \frac{\varepsilon b}{\varepsilon \xi}$ anstatt $\frac{\varepsilon b}{s \xi}$.
„ 822 „ 18 v. o. nach Schwingungen schalte ein: **ausgeschlossen waren, so können nur die transversalen Schwingungen.**
„ 876 „ 12 v. o. lies $\frac{5}{4}$ anstatt $\frac{4}{5}$.
„ 877 Spalte Sexten lies $\frac{c_1}{e} \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$.
„ 881 Zeile 20 v. u. lies *des*$_1$ *es*$_1$ anstatt *des es*.
„ 919 „ 9 v. u. „ $7 \frac{c}{4}$ anstatt $7 \frac{e}{4}$
„ 994 Anm. 2 lies 154 anstatt 94.

LAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

ND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG
II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN	H. BURKHARDT IN ZÜRICH UND W. WIRTINGER IN WIEN
- III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG
- IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN
V: PHYSIK, IN 2 TEILEN .	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN
VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK	PH. FURTWÄNGLER IN AACHEN UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN
VI, 2: ASTRONOMIE	K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN
VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN

ufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, it möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften hrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch tige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden m Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich daher nicht auf die nnte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf nik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker darüber orienelche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, ker darüber, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In sieben Bänden twa 640 Druckseiten sollen die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich geordneter behandelt werden; der letzte Band soll ein ausführliches alphabetisches Register ent- Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sind so gehalten, daß das Werk auch agen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht.

Ausführlicher Prospekt umsonst und postfrei vom Verlag.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK U. PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG
UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

54. Band. gr. 8. 1907. Preis für den Band von 4 Heften *M.* 20.—

Durch die rasch zunehmende, auf eine Arbeitsteilung hindrängende Ausdehnung der mathemati[illegible] Wissenschaften hat die Schriftleitung sich genötigt gesehen, die Förderung der angewandten Mathe[illegible]matik als einzige Aufgabe zu betrachten. Mit dieser Einschränkung wird jedoch eine gr[illegible] wissenschaftliche Vertiefung angestrebt.

Die Grenzen sollen nicht allzu enge gezogen werden, so sollen Arbeiten gebracht werden [illegible] Gebiete der Mechanik, insbesondere der technischen Mechanik, der theoretischen Phy[illegible] einschließlich der mathematischen Chemie und Kristallographie, der Geophysik, Geod[illegible] Astronomie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Ausgleichungsrechnung [illegible] mathematischen Statik und Versicherungsmathematik; auch das numerische Rec[illegible] die Näherungsrechnung („Approximations-Mathematik"), die Lehre von den empiri[illegible] Formeln, die darstellende Geometrie samt Schattenkonstruktionen und Perspekti[illegible] graphische Rechnen sollen gepflegt werden, weil die in diesen Zweigen gelehrten Verfahren [illegible] den Stand setzen, irgend welche Anwendungen der Mathematik bis zu Ende durchzuführen. Den [illegible] gebrauchten Hilfsmitteln, den numerischen und graphischen Tafeln, den Rechenapparat[illegible] -maschinen, sowie den Zeichenwerkzeugen, wird die nötige Beachtung geschenkt.

Generalregister zu Band 1—50. Bearbeitet von Dr. E. Wölffing, Professor an der [illegible] Techn. Hochschule zu Stuttgart. [XII u. 308 S.] gr. 8. 1905. geh. *M.* 15.—, geb. *M.* 16.—

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

E. LAMPE IN BERLIN. **W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR. **E. JAHNKE** IN BERLIN.

12. Band. gr. 8. 1907—08. Preis für den Band von 4 Heften *M.* 16.—

Das Archiv berücksichtigt seit seiner Gründung besonders die Bedürfnisse der Lehrer höherer L[illegible] anstalten und ist das einzige Organ, das sich nicht nur die Erweiterung der mathematischen Erk[illegible] sondern auch die Verbreitung mathematischer Forschung als Ziel steckt. Zur Fesselung des L[illegible] sollen auch solche Aufsätze gebracht werden, die die Kenntnisnahme und das Verständnis [illegible] mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden Aufgaben zu stellen versucht, die dem [illegible] Hochschulunterrichts entnommen sind. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen werd[illegible] nächsten Heften veröffentlicht. Bearbeitungen, die sich durch Originalität und Eleganz der Dar[illegible] auszeichnen, werden, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Durch die Mannigfal[illegible] der Gaben soll vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerei aus dem Archiv verbann[illegible]

Generalregister zu Reihe II, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mi[illegible] einem Bildnis von R. Hoppe. [XXXI u. 114 S.] gr. 8. 1901. geh. *M.* 6.—
Register zu Reihe III, Band 1—10. [IV u. 32 S.] gr. 8. 1906. geh. *M.* —.80.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Abraham, Dr **M.,** Privatdozent an der Universität Göttingen. Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr M Abraham. Mit 11 Figuren im Text [XVIII u. 443 S.] gr 8 1904. In Leinw geb n. *M* 12.— II Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung Von Dr M Abraham [X u 404 S] gr. 8. 1905 In Leinwand geb. n. *M* 10 —

Bryan, G. H., Sc D., F R. S., Professor of Mathematics in the University College of North Wales Bangor. Thermodynamics An introductory treatise dealing mainly with first principles an their direct applications [XIV u 204 S] gr. 8. 1907 In Leinwand geb. n *M* 7

Felgentraeger, Dr **W.,** technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Eichungs-Kommission in Berlin, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 125 Figuren im Text [VI u. 310 S] gr 8 1907 In Leinw geb n *M* 8.—

Ferraris, Galileo, wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R Museo Industriale in Turin Deutsch herausgegeben von Dr Leo Finzi, Privatdozent an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen Mit 161 Figuren im Text [XII u. 358 S.] gr 8. 1901. In Leinwand geb n *M* 12 —

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London. elektrische Wellen-Telegraphie 4 Vorlesungen Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin Mit 53 Abbildungen [IV u 185 S] gr 8 1906 geh. n *M* 4.20, in Leinwand geb n *M* 5 —

Föppl, Dr **Aug.,** Professor an der Kongl. Technischen Hochschule zu München. Vorlesungen über technische Mechanik In 6 Banden. gr 8

- I Band. Einfuhrung in die Mechanik 3 Auflage Mit 103 Figuren im Text [XVI u 428 S] 1905 geb n *M* 10
- II " Graphische Statik 2 Auflage Mit [illegible] Figuren im Text [illegible] 1903 geb n *M* 10
- III " Festigkeitslehre 3 Auflage Mit [illegible] Figuren im Text [XVI [illegible]] 1905 geb n *M* 10
- IV " Dynamik 2 Auflage Mit [illegible] Figuren im Text [XV [illegible]] 1901 geb n *M* 12 —
- V " Die wichtigsten Lehren der [illegible] Mit [illegible] Figuren im Text [XII u [illegible]] 1907 geb n *M* 10
- VI. " Die wichtigsten Lehren der [illegible]

Fuhrmann, Dr **A.,** Professor an der kgl Technischen Hochschule zu Dresden. Aufgaben aus der analytischen Mechanik Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw in 2 Teilen gr 8

- I Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper Mit 34 in den Text gedruckten Figuren [illegible] verbesserte und vermehrte Auflage [XII u 206 S] 1904 In Leinwand geb n *M* [illegible]
- II " Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper 2, verbesserte und vermehrte Auflage [VI u 222 S] [illegible] In Leinwand geb n *M* 4 20

Kirchhoff, Dr **Gustav,** weiland Professor der Physik an der Universität Berlin Vorlesungen uber mathematische Physik 4 Bande Mit Figuren im Text gr. 8. geh n *M* [illegible] in Leinwand geb n *M* 47

Einzeln:

- I Band Mechanik 4 Auflage, von Dr W Wien, Professor an der Universität Würzburg [X u 464 S] 1897 geh n *M* [illegible] in Leinwand geb n *M* 15

Kohlrausch, Dr **Friedrich,** Lehrbuch der praktischen Physik [illegible] vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik Mit [illegible] Figuren im Text [XXVIII u 656 S] gr 8 1905 In Leinw geb n *M* 9

Kohlrausch, Dr. **Friedrich,** kleiner Leitfaden d
2., vermehrte Auflage. 6.—10. Tausend. Mit za
[XVIII u. 268 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb.

Lamb, H., Professor der Mathematik an der Viktoria-U
buch der Hydrodynamik. Deutsche autorisi
englischen Auflage) besorgt von Dr. Joh. Fried
79 Figuren im Text. [XIV u. 788 S.] gr. 8. 190

Lorentz, Dr. **H. A.,** Professor an der Universität Leid
theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band.
im Text. [298 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 10.–
[Die 2. (Schluß-) Lieferung des I. Bandes unter der

—— Versuch einer Theorie der elektrisc
scheinungen in bewegten Körpern. Unverän
J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u
Leinwand geb. n. *M.* 3.20.

Love, A. E. H., M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der U
der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe un
besorgt von Dr. A. Timpe, Assistent an der Techni
Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 19

Neumann, Dr. **Franz,** weiland Professor an der U
lesungen über mathematische Physik, gehal
berg. Herausgegeben von seinen Schülern in zv
I. Magnetismus. [VIII u. 116 S.] 1881. n. *M.* 3.60.
[X u. 291 S.] 1883. n. *M.* 8.— III. Elektrische
n. *M.* 9.60. IV. Optik. [VIII u. 310 S.] 1885. n
[XIII u. 374 S.] 1885. n. *M.* 11.60. VI. Poten
n. *M.* 12.— VII. Kapillarität. [X u. 284 S.] 18
Vorlesungen über die Wärme. [In Vorbereitung
Gesammelte Werke. Herausgegeben von
gr. 4. geh. II. Band. (Unter der Presse.)

Pockels, Dr. **F.,** Prof. an der Univers. Heidelberg, Lehrbu
168 Fig. im Text u. 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1

Rausenberger, Dr. **Otto,** Professor an der Musterschul
buch der analytischen Mechanik. Mit Fig
Ausgabe. 2 Bände in einem Bande. I. Band. M
Punkte. [VIII u. 318 S.] II. Band. Mechanik d
Körper. [VI u. 336 S.] gr. 8. 1893. geh. *M.* 8

Schuster, A., Ph. D. (Heidelberg) Sc. D. (Cantab.) F. R
der Universität Manchester, Einführung in die t
risierte deutsche Ausgabe übersetzt von Heinrich
Physik an der Universität Münster. Mit 2 Tafeln
[XIV u. 413 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. *M.* 12.— i

Starke, Dr. **Hermann,** Privatdozent an der Universität Be
trizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung d
Ergebnisse. Mit 275 Abb. im Text. [XIV u. 422 S.] gr. 8.

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., F
in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwir
ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an de
187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8.
Leinwand geb. n. *M.* 19.—

Volkmann, Dr. **P.,** Professor der theoretischen Physik
berg i. Pr., Einführung in das Studium de
insbesondere in das der analytischen Mechanik.
Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u.
n. *M.* 9.—, in Leinwand geb. n. *M.* 10.20.

Vorlesungen über die Theorie des Li
die elastische und die elektromagnetische Anschau
[XVI u. 432 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 11.20.

Wallentin, Dr. **J.,** Regierungsrat und Landesschulinspek
die theoretische Elektrizitätslehre. Mit
444 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 12.

ACME

3 2044 019 304 815

THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.

Harvard College Widener Library
Cambridge, MA 02138 (617) 495-2413

STALL-STUDY
CHARGE
CANCELLED